

# PRESSEK

#5

MATEMATIKA • FIZIKA • ASTRONOMIJA • RAČUNALNIŠTVO



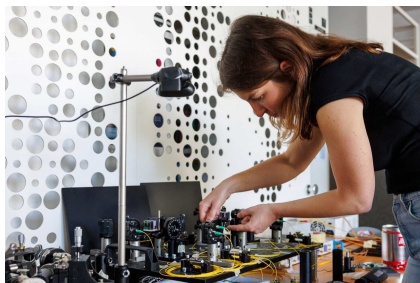
PRIBLIŽNO  
TRETJINJENJE  
KOTA

PILLAIJEVA  
DEKOMPOZICIJA

KOZMOLOŠKI  
UČINKI NA  
RAZDALJO

ATWOODOV  
STROJ Z  
NIHAJOČO  
UTEŽJO

# Svetovni kvantni dan 14. april



## SLIKA.

Dr. Lara Ulčakar med pripravo eksperimenta o kvantni prepletenosti (foto M. Verč, IJS)

V zadnjih letih smo se že povsem navadili praznovanja Mednarodnega dneva matematike 14. marca (3.14). Nekoliko manj pa je uveljavljen Svetovni kvantni dan 14. april (oziroma 4.14), ki ga je leta 2021 predlagala mednarodna skupina raziskovalcev. Datum 14. april je bil izbran, ker predstavlja zaokrožene prve tri številke Planckove konstante  $h = 4.135667 \cdot 10^{-15} \text{ eV/Hz}$ . Pobudi je sledila tudi generalna skupščina Združenih narodov, ki je leto 2025 razglasila za Mednarodno leto kvantne znanosti in tehnologije, saj letos poteka 100 let od ključnih odkritij za razvoj kvantne mehanike.

Svetovni kvantni dan so tako letos v Sloveniji obeležili tudi na Institutu Jožef Stefan in na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani, kjer so v okviru konzorcija SiQUID v Sloveniji prvič javno izvedli poskus, s katerim so demonstrirali kvantno prepletenost. Raziskovalka v Laboratoriju za kvantno optiko dr. Lara Ulčakar je prisotnim pojasnila, da so s poskusom ustvarili kvantno prepletena stanja iz fotonov in z eksperimentom pokazali, da kvantna mehanika velja tudi v primerih, kjer napovedi odstopajo od zakonitosti, ki jih poznamo iz klasične fizike. Prvi so tovrstne eksperimente v obdobju med leti 1972 in 1998 neodvisno izvedli in nadgradili Američan John F. Clauser, Francoz Alain Aspect in Avstrijec Anton Zeilinger, ki so leta 2022 skupaj prejeli Nobelovo nagrado za fiziko. V prihodnjih letih si znanost obeta številna odkritja predvsem v povezavi s kvantnimi računalniki in tehnologijami, katerih razvoj je v teku.

× × ×



## Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 52, šolsko leto 2024/2025, številka 5

**Uredniški odbor:** Vladimir Batagelj, Nino Bašič (računalništvo), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domajnko, Andrej Guštin (astronomija), Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Boštjan Kuzman (matematika), Peter Legiša, Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Marko Razpet, Grega Rihtar (jezikovni pregled), Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik.

**Dopisi in naročnine:** Fakulteta za matematiko in fiziko, Presek, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana, telefon (01) 4766 558.

**Internet:** [www.presek.si](http://www.presek.si)

**Elektronska pošta:** [zalozba@fmf.uni-lj.si](mailto:zalozba@fmf.uni-lj.si)

**Naročnina** za šolsko leto 2024/2025 je za posamezne naročnike 25,00 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 22,00 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 01100-6030708962.

**List sofinancira** Javna agencija za znanstvenoraziskovalno in inovacijsko dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

**Založila** Fakulteta za matematiko in fiziko

**Oblikovanje** Lucia Jamnik

**Tisk** Collegium Graphicum, Ljubljana

**Naklada** 900 izvodov

© 2025 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in Fakulteta za matematiko in fiziko

ISSN 2630-4317 (Online), ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

## NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Priказe novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt. Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **Fakulteta za matematiko in fiziko, Presek, Jadranska 19, 1000 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte [zalozba@fmf.uni-lj.si](mailto:zalozba@fmf.uni-lj.si).

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

# Kazalo

## MATEMATIČNI TRENUTEK

- 2 Svetovni kvantni dan 14. april

## UVODNIK

- 4-5 Kdo se boji umetne inteligence?  
(*Nino Bašič*)

## MATEMATIKA

- 6-7 Približno tretjinjenje kota  
(*Marko Razpet*)
- 8-11 Pillajeva dekompozicija  
(*Jurij Kovič in Aleksander Simonič*)

## TEKMOVANJA

- 12-15 Mednarodno matematično tekmovanje  
Náboj prvič v Sloveniji  
(*Karla Ferjančič*)

## FIZIKA

- 18-22 Atwoodov stroj z nihajočo utežjo  
(*Andrej Likar*)

## ASTRONOMIJA

- 23-27 Kozmološki učinki na razdaljo  
(*Vid Kavčič*)

## RAZVEDRILO

- 16-17 Nagradna križanka  
(*Marko Bokalič*)
- 7, 15 Križne vsote
- 11 Barvni sudoku
- 27-28 Raznoliki materiali iz vsakdanjega življenja v najbolj domiselnih matematičnih preobrazbah ob Matematičnem dnevu 2025  
(*Karla Ferjančič*)
- 30 Bilo je nekoč v reviji Presek –  
16. mednarodna fizikalna olimpiada,  
Portorož 1985

### SLIKA NA NASLOVNICI: Zlati most

Z dobrim objektivom so slike zvezd na fotografijah zelo majhne pike, ki se pri tiskanih reprodukcijah navadno komaj vidijo. Skoraj nobene razlike ni med različno svetlimi zvezdami in ozvezdja le s težavo razpoznamo. To težavo lahko odpravimo na staromodni način, ki ga je pred desetletji vpeljal žal že preminuli japonski amaterski astrofotograf Akira Fujii. Na objektiv privijemo difuzijski filter, ki razprši svetlobo zvezd sorazmerno z njihovim sijem. Svetlejša kot je zvezda, večji krogec na sliki ustvari. Tako je nastal tudi posnetek na naslovnici, na katerem sta izraziteje vidna asterizma Veliki in Mali voz. Severnice kljub oblakom ne bo težko najti in morda lahko opazite še odsev kakega satelita. Fotografija: Andrej Guštin

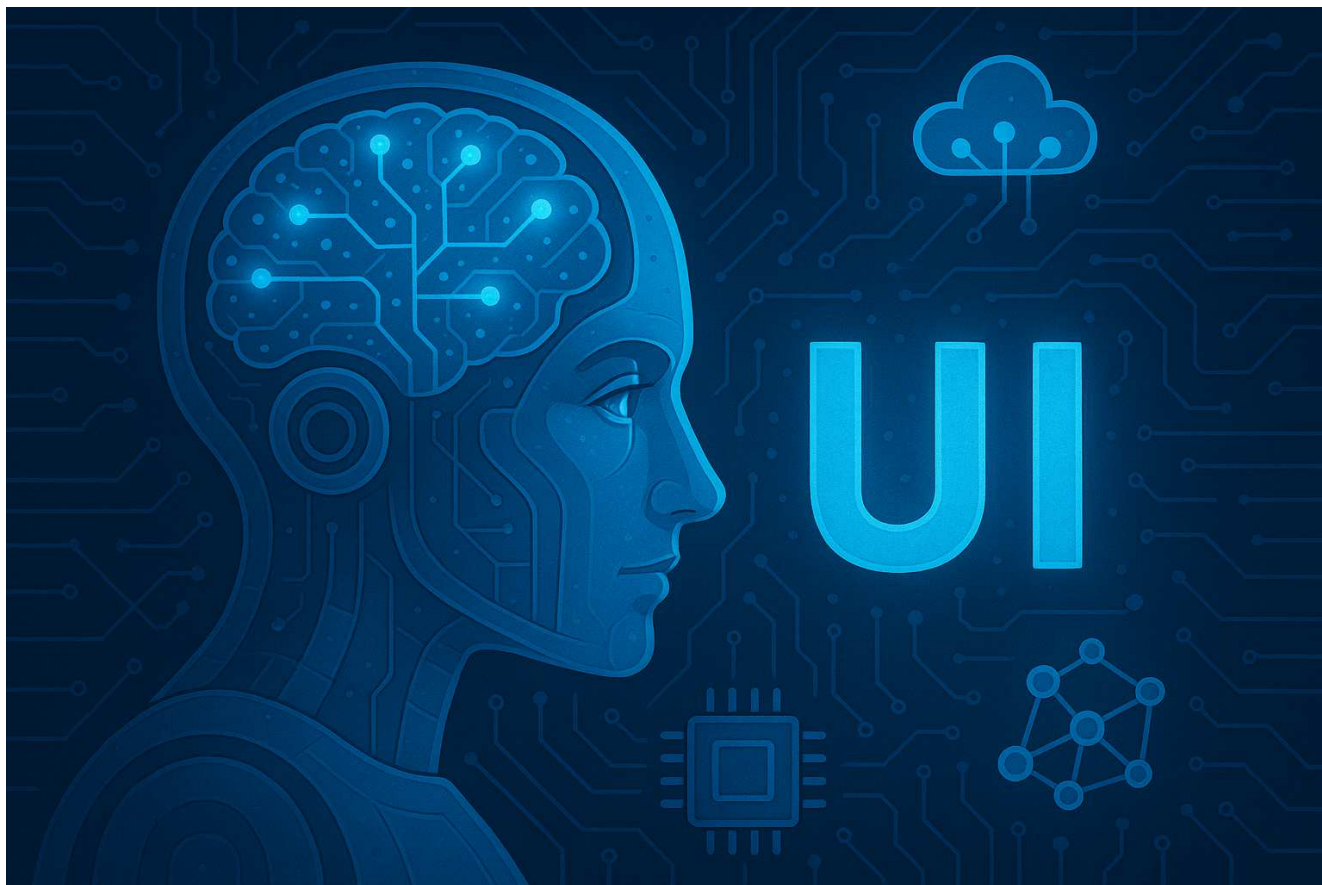
# Kdo se boji umetne inteligence?



NINO BAŠIĆ, UREDNIK ZA RAČUNALNIŠTVO

Ste gledali kultni film Terminator z Arnoldom Schwarzeneggerjem v glavni vlogi? V filmu je prikazana umetna inteligenca imenovana Skynet, ki je bila ustvarjena za vojaške namene. Ko je pridobila samozavedanje, je postala avtonomna. Ljudje so Skynet poskusili izklopiti, čemur je sledilo maščevanje v obliki jedrskega napada, ki je botrovalo koncu civi-

lizacije. Film prikazuje tako imenovano tehnološko singularnost, kjer umetna inteligenca preseže človeško. Tehnofobija (strah pred napredno tehnologijo) ni nič novega; že leta 1965 je I. J. Good »strašil« ljudi s tako imenovano superinteligenco in konceptom rekurzivnega samorazvoja. To pomeni, da bi sistem, ki je dovolj inteligenten, lahko znova in znova nadgra-



SLIKA 1.

jeval samega sebe, pri čemer bi prišlo do inteligenčne eksplozije. Od česa takšnega smo še zelo daleč.

Umetna inteligenca (UI) je impresivno uspešna, ko je ozko usmerjena in deluje v okolju, kjer so pravila in cilji jasno definirani, npr. igra partije šaha. UI izkorišča svojo računsko moč in predvidi potek igre 30 ali celo več potez vnaprej. Človek česa takega ni sposoben, še posebej ne v kratkem času. Izjemen uspeh pri igranju iger še zdaleč ni dovolj, da bi lahko govorili o splošni umetni inteligenci. Slednja naj bi reševala širok spekter nalog in bila sposobna abstraktnega razmišljanja. Če poklepetate z velikim jezikovnim modelom (LLM), se vam bo zdelo, da smiselno (inteligentno!) odgovarja na vprašanja. To je zato, ker statistično napoveduje naslednjo besedo v povedi glede na vse prejšnje, kar seveda počne na zelo napreden način. LLM svojo moč črpa iz dejstva, da je bil med učenjem izpostavljen OGROMNI količini podatkov, seveda pa mu manjka pravo razumevanje. Predstavljajte si, da »preberete« (ne da bi sploh razumeli, kaj »berete«) na milijone knjig v kitajščini in si zapomnete vse pismenke, ter tudi, kako pogosto se neko dano zaporedje pismenk pojavlja v besedilih. Če bi tako oboroženi začeli risati pismenke, bi gotovo od sebe dali kaj smiselnega. In to kljub temu, da v resnici ne razumete njihovega pomena.

Da je pot še dolga, kaže tudi ogromno znanih primerov, ko je umetna inteligenca »zatajila«. Microsoft je leta 2016 izdal klepetalnega robota po imenu Tay, ki so ga odstranili po samo 16 urah delovanja. Kaj se je zgodilo? Tay je bil zasnovan tako, da se je učil iz interakcije z uporabniki. Spletni troli so ga seveda obsuli z neprimernimi vsebinami, zato se je tudi Tay začel obnašati neprimerno. Znani so tudi primeri, ko so otroci preko Alexe (Amazonov pametni asistent, ki med drugim uporabnikom omogoča glasovno naročanje izdelkov) naročali velike količine sladkarij in igrač. Nihče UI ni razložil, da naročil ne sme jemati resno, če prihajajo s strani predšolskih otrok :). Kaj se lahko zgodi, če se UI uči iz pristranskih podatkov? Znan je fiasko, ko je tehnologija za razpoznavanje obrazov pri Google Foto temnopolte označevala kot gorile. Problem je bil v tem, da med učnimi podatki obrazi temnopoltih niso bili dovolj zastopani. Takšnih primerov lahko najdemo še in še. Da bi UI delovala dobro, potrebujemo veliko količino dobrih podatkov. Če želimo, da uspešno razpozna mačko na sliki, mora algoritem prebaviti 10.000 različnih

slik mačk. Po drugi strani, otroci prepoznajo mačko, takoj ko srečajo dve ali tri. V nedavnem članku je I. Shumailov pisal o tako imenovanem zlomu modela (model collapse). Ugotovil je, da so rezultati vsako iteracijo slabši, če se UI uči iz podatkov, ki jih je generirala sama. Dobre podatke torej lahko generirajo za zdaj samo ljudje.

UI je lahko srednješolcu v pomoč pri reševanju domače naloge. Če LLM prosimo, da reši kvadratno enačbo, bo gotovo našel prave rešitve. Toda reševanje kvadratne enačbe je dobro znan problem. Če pa se UI loti problemov, o katerih je znanega malo, bo "bosa". Najdite kakšen odprt matematični ali fizikalni problem in naročite ChatGPT-ju, naj ga reši :).

Nekateri futuristi (med njimi je, presenetljivo, tudi nekaj direktorjev tehnoloških podjetij) strašijo ljudi pred izgubo delovnega mesta. V medijih lahko najdemo članke z naslovi, kot je »UI bo prevzela vašo službo!«. Je strah upravičen? V svojih začetkih je NASA zaposlovala veliko »človeških računalnikov«, tj. ljudi, ki so izvajali ročne izračune za letalske in vesoljske projekte. Takšnih delovnih mest ni več, saj so te naloge prevzeli računalniki. Vendar NASA še dandanašnji zaposluje na tisoče inženirjev. Delovna mesta bodo vedno, vendar ne nujno enaka kot prej. UI nam lahko pomaga pri naših vsakodnevnih nalogah, tako doma kot v službi. Vendar je UI zgolj orodje v rokah človeka. Čeprav mogočno orodje, pa vendar samo orodje. In tako bo ostalo še dolgo časa.

× × ×

[www.presek.si](http://www.presek.si)

[www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/](http://www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/)

# Približno tretjinjenje kota



MARKO RAZPET

→ Problem tretjinjenja kota zahteva, da samo z neoznačenim ravnilom in šestilom dani kot (ali krožni lok) razdelimo na tri enake dele. Problem je samo s takim ravnilom in šestilom nerešljiv. Hitro namreč vidimo, da je enačba za kosinus tretjine danega kota  $\alpha$  kubična.

Po adicijskem izreku in enakosti  $\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$  velja za vsak kot  $\beta$ :

- $$\begin{aligned} \cos(3\beta) &= \cos(2\beta + \beta) \\ &= \cos(2\beta) \cos \beta - \sin(2\beta) \sin \beta \\ &= (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \cos \beta - 2 \sin^2 \beta \cos \beta \\ &= (2 \cos^2 \beta - 1) \cos \beta - \\ &\quad - 2(1 - \cos^2 \beta) \cos \beta. \end{aligned}$$

S preureditvijo imamo:

- $$\cos(3\beta) = 4 \cos^3 \beta - 3 \cos \beta.$$

Vstavimo v dobljeno enakost  $\beta = \alpha/3$ , pa dobimo za  $x = \cos(\alpha/3)$  kubično enačbo

- $$4x^3 - 3x = \cos \alpha. \tag{1}$$

Rešitve splošne kubične enačbe pa se izražajo s kvadratnimi in kubičnimi koreni. Če bi bila enačba (1) za poljuben kot  $\alpha$  rešljiva s kvadratnimi koreni, ne pa tudi s kubičnimi, bi lahko  $x$  in s tem kot  $\alpha/3$  konstruirali samo z neoznačenim ravnilom in šestilom. Kvadratni koren danega pozitivnega števila pri znani enoti 1 s takim geometrijskim orodjem lahko brez težav konstruiramo na podlagi višinskega izreka za pravokotni trikotnik.

Pripomnimo še, da kote  $\alpha = 45^\circ, \alpha = 135^\circ$  in  $\alpha = 90^\circ$  zlahka tretjinjimo z geometrijskim orodjem, prav tako pa tudi rešimo enačbo (1). V rešitvah ni kubičnih korenov.

Problem tretjinjenja kota je znan že iz antičnih časov. Z njim se je na primer ukvarjal Arhimed (287–212 pr. n. št.) in ga rešil, toda z označenim ravnilom in šestilom. Šele dobrih 2000 let kasneje, leta 1837, je Pierre Laurent Wantzel (1814–1848) dokazal, da je problem tretjinjenja kota nerešljiv samo z neoznačenim ravnilom in šestilom.

Če je neko realno število izrazljivo z osnovnimi štirimi računskimi operacijami in kvadratnimi koreni v končno mnogo korakov, potem je tako število ničla nekega polinoma s celimi koeficienti, pri čemer ima polinom stopnjo  $2^n$  za neko naravno število  $n$ . Tako število se da konstruirati z neoznačenim ravnilom in šestilom v končno mnogo korakov. Več o tem lahko preberemo v [1].

Pač pa lahko z dovolj dolgim zaporedjem deljenj kotov na dva enaka dela, kar je zelo enostavno narediti z ravnilom in šestilom, dani kot razdelimo na tri enake dele, ne čisto, toda poljubno natančno. Kako to naredimo?

Vzemimo kot  $\alpha$  z vrhom  $V$  in krakoma, na katerih izberemo točki  $A_0$  in  $A_1$ , enako oddaljeni od  $V$ , in načrtamo krožni lok  $A_0A_1$ . Točno lahko določimo središče  $A_2$  loka  $A_0A_1$ , nato središče  $A_3$  loka  $A_1A_2$ , nato središče  $A_4$  loka  $A_2A_3$ , nato središče  $A_5$  loka  $A_3A_4$  in tako dalje, dokler želimo.

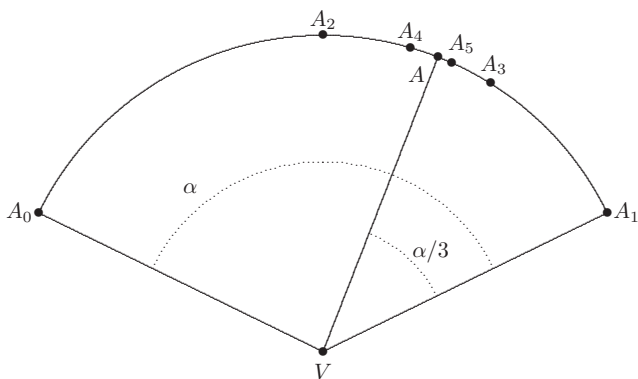
Zaporedje točk  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$  se približuje točki  $A$ , ki pove, kje je tretjina loka  $A_1A_0$ . Res?

Naj bo  $\ell$  dolžina loka od  $A_1A_0$  (slika ??). Lok od  $A_1$  do  $A_2$  meri zato  $\ell/2$ , od  $A_1$  do  $A_3$  pa  $\ell/2 - \ell/4$ . Lok od  $A_1$  do  $A_4$  meri  $\ell/2 - \ell/4 + \ell/8$ , lok od  $A_1$  do  $A_5$  pa je dolg  $\ell/2 - \ell/4 + \ell/8 - \ell/16$ . Opazimo, da je

# Križne vsote

↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



SLIKA 1.

Približno tretjinjenje kota.

dolžina loka od  $A_2$  do  $A$  vsota vrste

$$\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{4} + \frac{\ell}{8} - \frac{\ell}{16} + \dots = \frac{\ell}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots \right).$$

Vrsta v oklepaju na desni strani enačaja je geometrijska s količnikom  $q = -1/2$ . Po znani formuli

$$1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1 - q}, \quad |q| < 1,$$

dobimo:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1 - (-1/2)} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}.$$

Dolžina loka od točke  $A_1$  do točke  $A$  je  $(2/3)(\ell/2) = \ell/3$ , torej točka  $A$  res tretjini lok. Tako lahko dani kot razdelimo na tri enake dele tako natančno, kot želimo.

## Literatura

[1] I. Vidav, *Rešeni in nerešeni problemi matematike*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1972.

× × ×

		15	5			
7				14		
19					13	
			13			11
				15		
				4		

↓↓↓

## REŠITEV KRIŽNE VSOTE

ε	1	4				
8	7	15				
11	5	8	13			
		13	9	4	6	19
			14	1	9	7
				5	15	

× × ×

# Pillaijeva dekompozicija



JURIJ KOVIČ IN ALEKSANDER SIMONIČ

→ Osnovni izrek aritmetike zagotavlja, da se da vsako naravno število večje od 1 zapisati v obliki produkta praštevil. V nasprotju s to temeljno trditvijo iz teorije števil, mnogo vprašanj o dekompoziciji naravnih števil na vsote praštevil še vedno ostaja odprtih. Slavna *Goldbachova domneva* sprašuje po pravilnosti izjave, da se da vsako sodo število  $n \geq 4$  izraziti z vsoto dveh praštevil. Če slednje drži, potem lahko vsako liho število  $n > 7$  zapišemo z vsoto treh lihih praštevil. Ta izjava je znana kot *šibka Goldbachova domneva*. Terence Tao je leta 2014 v [6] dokazal, da se da vsako liho število  $n > 1$  zapisati v obliki vsote največ petih praštevil. Leto prej pa je Harald Helfgott naznanil pravilnost šibke Goldbachove domneve, vendar je njegov dokaz še vedno v postopku preverjanja, glej [1].

## 1. Pillaijeva dekompozicija

Iskanje primerov dekompozicij naravnih števil na vsote praštevil je za velika števila računsko zahtevna naloga. Indijski matematik **Subbayya S. Pillai** (1901–1950) je študiral podobne dekompozicije, kjer lahko postopek celo zapišemo s preprostim algoritmom.

### ALGORITEM PILLAI

**Vhod:** Naravno število  $n$ .

1. Če je  $n = 1$ , potem zapiši 1 in se ustavi.
2. Če je  $n$  praštevilo, potem zapiši  $n$  in se ustavi.
3. Drugače zapiši največje praštevilo  $p < n$ .
4. Zamenjaj  $n$  z  $n - p$  in uporabi algoritem Pillai.

**Izhod:** Padajoče zaporedje  $P(n)$  različnih praštevil, ki se lahko konča z 1.

Napišimo nekaj primerov, ki jih poda algoritem Pillai:

- $P(10) = \{7, 3\}$ ,
- $P(11) = \{11\}$ ,
- $P(27) = \{23, 3, 1\}$ ,
- $P(123) = \{113, 7, 3\}$ ,
- $P(1354) = \{1327, 23, 3, 1\}$ .

Zaradi prvih treh korakov algoritma so števila v zaporedju  $P(n)$  nesestavljena, četrti korak pa zagotavlja, da je vsota vseh števil enaka  $n$ . Opazimo, da algoritem lahko poda dekompozicije, ki zadoščajo (šibki) Goldbachovi domnevi, vendar se to ne zgodi vedno. Prav tako se zaporedje lahko konča z 1, ki pa ni praštevilo. Algoritem spada v družino *požrešnih algoritmov* in ga je enostavno napisati v vsakem programskem jeziku, ki ima na voljo osnovno knjižnico za delo s praštevili.

Očitno je  $P(n)$  padajoče zaporedje praštevil, ki se lahko konča z 1. Zakaj so pa v zaporedju vedno različna praštevila? To bo res, če pokažemo, da za največje praštevilo  $p < n$ ,  $n \geq 3$ , velja neenakost  $n - p < p$ . Uporabili bomo naslednji izrek, ki je

znan tudi kot *Bertrandov postulat*. Dokaz bomo zaradi zahtevnosti izpustili, bralec pa ga lahko najde v [5] skupaj z zgodovinskim ozadjem problema.

**Izrek 1.** *Za vsako naravno število  $n \geq 2$  obstaja praštevilo  $p \in (n, 2n)$ .*

Vzemimo  $n \geq 3$  in recimo, da za največje praštevilo  $p < n$  velja  $2p \leq n$ . Izrek 1 zagotavlja obstoj praštevila  $q \in (p, 2p)$ , od koder sledi  $p < q < n$ . Toda to ne more biti res, saj je po predpostavki  $p$  največje praštevilo, ki je manjše od  $n$ . Zato mora veljati  $n < 2p$ . S tem smo pokazali, da ima zaporedje  $P(n)$  vse zahtevane lastnosti. Dekompoziciji iz algoritma bomo pravili *Pillaijeva dekompozicija*.

Pillai, ki je algoritem objavil leta 1932 v [4], se je osredotočil na študiranje rasti števila členov zaporedja  $P(n)$ . V prispevku bomo dokazali naslednji trditvi.

1. Označimo z  $R(n)$  število členov zaporedja  $P(n)$ . Potem velja
  - $R(n) \leq 1 + \log_2 n$ . (1)
2. Za vsako naravno število  $k$  obstaja tako naravno število, da je njegova Pillaijeva dekompozicija sestavljena iz natanko  $k$  praštevil.

Glavno orodje v dokazu prve trditve je Bertrandov postulat, zato lahko imamo dokaz za primer zanimive in elementarne uporabe izreka 1. Dokaz druge trditve pa sloni na dejstvu, da lahko vedno najdemo poljubno število zaporednih sestavljenih števil (Izrek 2).

Opazimo, da nam druga trditev zagotavlja neomejenost funkcije  $R: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . To pomeni, da ne obstaja pozitivno število  $M$ , za katero bi vedno veljalo  $R(n) \leq M$ . Za bralce, ki poznajo pojem neskončne limite, navedimo še, da je Pillai z zahtevnejšimi prijemi iz teorije števil dokazal

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R(n)}{\log n} = 0$ .

To precej izboljša oceno (1) za velika števila  $n$ . Pillai je celo domneval, da funkcija  $R(n)/\log \log n$  ni omejena. Slednje je bilo dokazano šele leta 2009, glej [2].

## 2. Dokaz prve trditve

Najprej opazimo, da lahko Bertrandov postulat poplošimo do naslednje trditve: za vsako realno število  $x \geq 1$  obstaja praštevilo  $p \in (x, 2x]$ . To je očitno res za  $1 \leq x < 2$ . Za  $x \geq 2$  pa nam izrek 1 zagotavlja obstoj praštevila  $p \in ([x], 2[x])$ , kjer smo z  $[x]$  označili celi del števila  $x$ . Sledi

- $p \in [[x] + 1, 2[x]) \subset (x, 2x]$ ,

saj velja še  $[x] \leq x < [x] + 1$ .

Lahko privzamemo  $n \geq 4$ , saj je drugače neenakost (1) očitno pravilna. Naj bo  $l = \lfloor \log_2 n \rfloor$  in pišimo

- $\left(\frac{n}{2^l}, \frac{n}{2^{l-1}}\right) \cup \left[\frac{n}{2^{l-1}}, \frac{n}{2^{l-2}}\right) \cup \dots \cup \left[\frac{n}{2}, n\right)$ . (2)

Opazimo, da je množica (2) pravzaprav interval  $(n2^{-l}, n)$ , za katerega velja  $[2, n) \subset (n2^{-l}, n) \subseteq (1, n)$ . Vidimo še, da je število intervalov enako  $l$  ter poljubna intervala sta vedno disjunktna. Označimo z  $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_l$  te intervale po vrsti od leve proti desni. Naj bo  $p_{n_1} \leq n$  največje tako praštevilo, kjer smo z  $p_i$  označili  $i$ -to praštevilo. Potem je  $p_{n_1} \in (n/2, n]$  in s tem  $n - p_{n_1} < n/2$ . Torej je  $n - p_{n_1}$  lahko 0, 1 ali pa je element intervala  $\mathcal{I}_{j_1}$  za neki  $j_1 \in \{1, \dots, l\}$ . Privzemimo, da velja slednje. Potem imamo

- $2 \leq n - p_{n_1} < \frac{n}{2^{l-j_1}}$ .

Če je  $p_{n_2} \leq n - p_{n_1}$  največje tako praštevilo, je potem to praštevilo vsebovano v intervalu  $((n - p_{n_1})/2, n - p_{n_1}]$  od koder sledi

- $n - p_{n_1} - p_{n_2} < \frac{n - p_{n_1}}{2} < \frac{n}{2^{l-j_1+1}}$ .

Torej je  $n - p_{n_1} - p_{n_2}$  lahko 0, 1 ali pa je element intervala  $\mathcal{I}_{j_2}$  za  $j_2 < j_1$ . S ponavljanjem tega postopka sklepamo naslednje: če je za  $\delta \in \{0, 1\}$

- $n = p_{n_1} + p_{n_2} + \dots + p_{n_r} + \delta$

*Pillaijeva dekompozicija števila  $n$ , potem število  $r$  ni večje od števila intervalov  $v$  (2).* Torej  $R(n) \leq l + 1$ , od koder sledi (1). S tem je prva trditev iz uvoda dokazana.



→ **3. Dokaz druge trditve**

Naj bo  $d_n = p_{n+1} - p_n$   $n$ -ta praštevilska vrzel, torej  $d_1 = 1, d_2 = d_3 = 2, d_4 = 4$  itd. Z izjemo  $d_1$  je  $d_n$  vedno sodo število, saj so vsa praštevila  $p \geq 3$  liha. Dokaz druge trditve iz uvoda temelji na dejstvu, da vedno obstaja poljubno velika praštevilska vrzel, saj je zaporedje  $\{d_n : n \in \mathbb{N}\}$  neomejeno. To takoj sledi iz nalsednjega izreka.

**Izrek 2.** Za vsako naravno število  $l$  obstaja  $l$  zaporednih sestavljenih števil.

*Dokaz.* Spomnimo, da je *fakulteta*  $n!$  za  $n \in \mathbb{N}$  definirana kot  $n! = n(n-1)!$  in  $0! = 1$ . Naj bo  $K_l = (l+1)! + 2$  za  $l \in \mathbb{N}$ . Potem so števila v množici

$$\{K_l, K_l + 1, \dots, K_l + l - 1\} \tag{3}$$

sestavljena, saj velja

$$K_l + j = (2 + j) \left( 1 + \frac{(l+1)!}{2+j} \right)$$

in število  $(l+1)!$  je deljivo s številom  $2+j$  za  $0 \leq j \leq l-1$ . □

V nasprotju s to enostavno trditvijo so vprašanja o porazdelitvi števil  $d_n$  izjemno zahtevna, saj se na primer še vedno ne ve, ali je množica  $\{n \in \mathbb{N} : d_n = 2\}$  neskončna (*domneva o praštevilskih dvojčkih*).

V nadaljevanju je prikladno uvesti funkcijo  $\pi(x)$  ki šteje tista praštevila, ki ne presegajo realnega števila  $x \geq 2$ , npr.  $\pi(3) = 2$  in  $\pi(10.9) = 4$ . Opazimo, da imamo  $\pi(p_n) = n$  in  $p_{\pi(x)} \leq x$ , kjer enačaj velja natanko tedaj, ko je  $x$  praštevilo. Ker je število elementov v množici (3) enako  $l$  in ti elementi so zaporedna naravna števila, sledi

$$d_{\pi(K_l)} = p_{\pi(K_l)+1} - p_{\pi(K_l)} \geq (K_l + l) - (K_l - 1) = l + 1 > l. \tag{4}$$

Vemo že, da trditev velja za  $k = 1$ . Vzemimo poljubno naravno število  $n_1$  ter pišimo  $m_1 = p_{n_1}$  in  $n_2 = \pi(K_{m_1})$ . Neenakost (4) nam zagotavlja  $d_{n_2} > p_{n_1}$ . To pomeni, da za število

$$m_2 = p_{n_2} + p_{n_1} \tag{5}$$

velja  $p_{n_2} < m_2 < p_{n_2+1}$ , torej je  $p_{n_2}$  največje praštevilo manjše od  $m_2$ . S tem smo pokazali, da je (5) Pillaijeva dekompozicija števila  $m_2$ . Torej trditev velja za  $k = 2$ . Naj bo  $n_3 = \pi(K_{m_2})$  in

$$m_3 = p_{n_3} + p_{n_2} + p_{n_1} \tag{6}$$

Podobno kakor prej sklepamo, da velja  $d_{n_3} > m_2$ , torej je (6) Pillaijeva dekompozicija števila  $m_3$ . Sedaj ni težko sklepati naslednje: *če smo s takim postopkom pokazali, da je  $m_i = p_{n_i} + \dots + p_{n_1}$  Pillaijeva dekompozicija števila  $m_i$ , je potem*

$$m_{i+1} = p_{n_{i+1}} + m_i = p_{n_{i+1}} + p_{n_i} + \dots + p_{n_1}$$

za  $n_{i+1} = \pi(K_{m_i})$  Pillaijeva dekompozicija števila  $m_{i+1}$ . S tem je druga trditev iz uvoda dokazana.

**4. Pillaijevo zaporedje**

Pillai je uvedel zaporedje  $\{a(n) : n \in \mathbb{N}\}$ , kjer je

$$a(n) = \min \{m \in \mathbb{N} : R(m) = n\}.$$

Druga trditev iz uvoda nam zagotavlja, da za vsako naravno število  $n$  člen  $a(n)$  res obstaja. Ker je  $R(27) = 3$  in  $R(n) \leq 2$  za  $n < 27$ , sledi  $a(3) = 27$ . Na podoben način lahko sklepamo še  $a(1) = 1, a(2) = 4$  in  $a(4) = 1354$ .

Opazimo, da za izračun  $a(n+1)$  potrebujemo prvo praštevilsko vrzel, ki je večja od  $a(n)$ : če je  $d_m$  taka vrzel, potem velja  $a(n+1) = p_m + a(n)$ . Ponazorimo ta sklep s primeroma. Ker je  $a(2) = 4$  in prva praštevilska vrzel večja od 4 se pojavi med praštevila 23 in 29, sledi

$$a(3) = 23 + a(2) = 27.$$

Ker se prva praštevilska vrzel večja od 27 pojavi med praštevila 1327 in 1361, sledi še

$$a(4) = 1327 + a(3) = 1354.$$

Danes se to zaporedje imenuje po Pillaiju. Ni težko verjeti, da bodo elementi zaporedja kmalu postali izjemno velika števila. Število  $a(5)$  je že osemnajstmestno, preostali elementi pa še niso znani, glej [3]. Internetna enciklopedija številskih zaporedij OEIS<sup>1</sup> zaznamuje Pillaijevo zaporedje s šifro A066352.

<sup>1</sup>The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, glej <https://oeis.org/>.

Literatura

- [1] H. A. Helfgott, osebna spletna stran, <https://webusers.imj-prg.fr/~harald.helfgott/anglais/book.html> (datum ogleda 4. 4. 2025).
- [2] F. Luca, R. Thangadurai, *On an arithmetic function considered by Pillai*, J. Théor. Nombres Bordeaux **21** (2009), 693–699.
- [3] OEIS Foundation Inc. (2025), Entry A066352 in The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, <https://oeis.org/A066352> (datum ogleda 4. 4. 2025).
- [4] S. S. Pillai, *On an arithmetic function concerning primes*, Annamalai University Journal I (1932), 159–167.
- [5] A. Simonič, *Bertrandov postulat*, Obzornik Mat. Fiz. **66** (2019), št. 1, 11–21.
- [6] T. Tao, *Every odd number greater than 1 is the sum of at most five primes*, Math. Comp. **83** (2014), no. 286, 997–1038.

# Barvni sudoku

↓↓↓

→ V  $8 \times 8$  kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih iste barve (pravokotnikih  $2 \times 4$ ) nastopalo vseh osem števil.

	7					4	
		5	8			1	
			2	5		7	
	5				4		6
6		2		3			1
				6			
8		7		2			
3							

× × ×

REŠITEV BARVNI SUDOKU

7	6	8	4	5	1	2	3
5	3	1	2	6	7	4	8
4	8	2	6	7	3	1	5
1	5	7	3	4	2	8	6
6	2	4	1	3	8	5	7
8	7	3	5	2	4	6	1
2	1	6	7	8	5	3	4
1	4	2	8	1	6	7	2

→  
→

× × ×

[www.presek.si](http://www.presek.si)

[www.fmf.uni-lj.si/si/zalozba/](http://www.fmf.uni-lj.si/si/zalozba/)

# Mednarodno matematično tekmovanje Náboj prvič v Sloveniji



KARLA FERJANČIČ

→ Na dan števila Pi, 14. 3. 2025, je na Fakulteti za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije Univerze na Primorskem potekala zelo uspešna prva izvedba mednarodnega tekmovanja Náboj, ki je združila več kot 150 dijakov iz vse Slovenije.

Tekmovanje Náboj se že vrsto let sočasno odvija v različnih evropskih državah in je namenjeno spodbujanju hitrega razmišljanja, inovativnega reševanja zahtevnih matematičnih problemov ter tudi sodelovanja in timskega povezovanja vrstnikov. Gre namreč za ekipno tekmovanje, kjer vsako ekipo sestavlja do pet dijakov, ki tekmujejo v dveh starostnih kategorijah: mlajši »Junior« in starejši »Senior«. To



SLIKA 1.

Slovenske ekipe med tekmovanjem v Kopru.

predstavlja pomembno novost v slovenskem prostoru, saj sta poleg matematičnega znanja za dobro uvrstitev potrebni tudi ustvarjalnost in sposobnost hitrega prilagajanja in učinkovitega sodelovanja med člani ekipe.

Tekmovanje traja 120 minut. Na začetku prejme vsaka ekipa sklop šestih nalog. Rešitve nalog so numerične, njihovo pravilnost preverjajo ocenjevalci. Takoj ko ekipa pravilno reši katerokoli nalogo, prejme novo. Praviloma se težavnost nalog stopnjuje. Zmaga ekipa, ki pravilno reši največ nalog. Čeprav se rezultati primarno ocenjujejo na lokalni ravni, predstavlja sočasni vpogled v mednarodne rezultate edinstveno priložnost, da lahko dijaki primerjajo svoje sposobnosti in znanje s sovrstniki iz drugih držav.

Prvega slovenskega tekmovanja Náboj se je udeležilo 32 ekip iz vse Slovenije. Tekmovanje je potekalo v odličnem vzdušju, ob podpori mentorjev in organizatorjev, ki so poskrbeli za nemoteno izvedbo dogodka.

V kategoriji Junior Slovenija je prvo mesto dosegla Gimnazija Bežigrad, ki je na mednarodni ravni izmed 785 ekip dosegla odlično osmo mesto. Drugo mesto je v isti kategoriji osvojila 1. Gimnazija Celje, tretje pa Gimnazija Novo mesto D.

V kategoriji Senior Slovenija je prvo mesto osvojila Gimnazija Bežigrad, ki je na mednarodni ravni dosegla 35. mesto od 743 ekip. Drugo mesto je zasedla Gimnazija Koper B, tretje pa Gimnazija Nova Gorica.

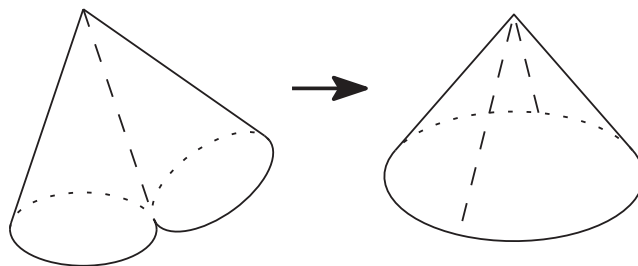
Zmagovalne ekipe so ob koncu prejele tudi priznanja ter denarno nagrado v vrednosti 500 evrov. Vsi udeleženci so pokazali veliko zavzetost, dobro matematično znanje in timski duh, za kar jim iskreno čestitamo. Hvala tudi mentorjem za vso podporo. Verjamemo, da tekmovanje Náboj pomembno prispeva k popularizaciji matematike med mladimi ter k razvoju znanj in spretnosti, ki so ključne tako v znanosti kot tudi v vsakdanjem življenju, zato bomo tekmovanje organizirali tudi v prihodnjem letu. Že sedaj vas vabimo, da se nam pridružite v Kopru, in sicer 13. marca 2026.

Vabljeni tudi k ogledu nalog letošnjega tekmovanja, ki so dostopne v arhivu na spletni strani slovenskega tekmovanja: <https://math.naboj.org/si/sl/>. V nadaljevanju sta priloženi dve nalogi z najvišjo zaporedno številko, ki ju je uspelo rešiti najuspešnejšima ekipama: slovenski ekipi (naloga 48) in najuspe-

šnejši ekipi na mednarodni ravni (naloga 57).

### Naloga 48.

Gal ima tri enake papirnate modele plašča pravičnega stožca (brez osnovne ploskve). Osnovna ploskev stožca je krog, pravokoten na os, ki povezuje njegovo središče z vrhom stožca, vendar ta krog ni del papirnatih modelov. Najprej je Gal postavil dva stožca skupaj od roba do vrha tako, da sta si delila stranico stožca. Oba plašča stožcev je odrezal vzdolž skupne stranice in združil obe površini tako, da je ustvaril plašč večjega stožca (kot je prikazano na sliki). Prostornina polnega stožca, ki ustreza temu večjemu plašču, je bila 10. Nato je Gal na enak način združil ta večji plašč s tretjim (prvotnim) plaščem stožca in nato nameraval izmeriti prostornino nastalega stožca. Ugotovil je, da je rezultat enak nič. Kolikšna je bila prostornina prvotnega stožca?



SLIKA 2.

#### Rezultat.

$$\sqrt{10}$$

#### Rešitev.

Dejstvo, da ima končni stožec ničelni volumen, pomeni, da z združitvijo treh enakih plaščev dobimo poln krog. Posledično vsak posamezen plašč stožca ustreza krožnemu izseku s središčnim kotom  $120^\circ$ . Naj bo  $l$  stranica prvotnega stožca in  $r$  polmer njegove osnovne ploskve. Po formuli za obseg dobimo  $2\pi l = 3 \cdot (2\pi r)$  oziroma  $l = 3r$ . Upoštevajmo, da stranica stožca ostane nespremenjena pri vseh treh stožcih, vključno z degeneriranim. Vmesni stožec,



→ ki ga tvori spajanje dveh plaščev, ima središčni kot  $240^\circ$ , kar mu daje polmer osnovne ploskve  $2r$ . Po Pitagori je njegova višina enaka  $v = \sqrt{l^2 - (2r)^2} = r\sqrt{5}$  in z uporabo formule za prostornino stožca dobimo

$$\blacksquare 10 = \frac{1}{3}\pi(2r)^2v = \frac{4\sqrt{5}}{3}\pi r^3.$$

Od tod izrazimo  $r^3 = \frac{3\sqrt{5}}{2\pi}$  in podobno kot prej izračunamo še prostornino prvotnega stožca

$$\blacksquare \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{(3r)^2 - r^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi r^3 = \sqrt{10}.$$

### Naloga 57.

Stavba ima 160 nadstropij. V vsakem nadstropju je hodnik, do katerega se dostopa preko dvojnih glavnih vrat in na vsakem hodniku so štiri sobe. Vsaka soba ima svoja vrata, v vsaki sobi pa živi ena oseba. Na vsaka vrata, vključno z vrati hodnika, bo nameščena ena ključavnica, ključi pa bodo razdeljeni tako, da bo veljalo naslednje:

- vsaka oseba lahko dostopa do svoje sobe, vendar ne do sob drugih oseb,
- vsaka oseba lahko dostopa do hodnika v svojem nadstropju,
- dovoljeno je, da ima kdo dostop do hodnikov v drugih nadstropjih.

Vsaka ključavnica je povezana z edinstvenim ključem in se lahko odklene le s tem ključem. Vendar se ista ključavnica lahko po potrebi uporabi na več vratih, izdelati pa je mogoče poljubno število kopij njenega ključa. Posamezniki lahko imajo toliko ključev, kot je potrebno. Podjetje, odgovorno za namestitev, želi minimizirati skupne stroške izdelave ključev. Ustvarjanje novega ključa stane 3, medtem ko izdelava kopije obstoječega ključa stane 2. Kakšen je minimalen skupni strošek vseh ključev ob upoštevanju zgornjih pogojev?

### Rezultat.

2432

### Rešitev.

Obravnavajmo čim cenejšo razporeditev ključavnic in ključev. Jasno je, da ima v takem primeru vsak stanovalec največ dva ključa. Pokažimo najprej, da lahko predpostavimo, da je v vsakem nadstropju vsaj en stanovalec (oz. natanko en stanovalec, saj več kot en tak ne more obstajati), ki ima natanko en ključ. Ta ključ odklepa tako vrata od njegove sobe kot ena vrata od hodnika, medtem ko drugi stanovalci v tem nadstropju uporabljajo druga vrata, za dostop do hodnika.

Predpostavimo, da v enem nadstropju to ne drži. Potem ena vrata za dostop do hodnika, recimo jim  $D$ , uporabljata največ dva stanovalca od štirih, ki prebivajo v tem nadstropju - stanovalec  $a$  in morda stanovalec  $b$ . Če nihče od štirih stanovalcev nima ključa za vrata  $D$ , si izberemo poljubnega izmed njih in ga obravnavamo, kot da je stanovalec  $a$ . Sistem ključev in ključavnic pa spremenimo na naslednji način: Na vratih  $D$  zamenjamo ključavnico s popolnoma novo ključavnico in enako ključavnico namestimo tudi na vrata sobe stanovalca  $a$ . Sedaj potrebuje  $a$  samo en ključ, ki stane 3, medtem ko je prejšnja konfiguracija z dvema ključema stala vsaj  $2 + 2 = 4$ . S tem smo zmanjšali strošek za vsaj 1.

Če obstaja tudi stanovalec  $b$ , mu dodelimo ključ za druga vrata od hodnika v tem nadstropju, s čimer nismo povišali stroška. Vendar pa ima sedaj  $b$  lahko kombinacijo ključev, ki mu omogoča dostop do sobe v kakšnem drugem nadstropju; da bi to popravili, zamenjamo ključavnico na vratih od sobe stanovalca  $b$  s popolnoma novo ključavnico, s čimer povečamo strošek za največ 1.

S tem postopkom se skupni strošek za posamezno nadstropje ne poveča, zato lahko zaključimo, da je takšna konfiguracija stroškovno učinkovita, saj zagotovo ne bo dražja od poljubne alternative. V nadaljevanju zato privzamemo, da je v vsakem nadstropju natanko en stanovalec, ki ima samo en ključ.

Problem se torej pretvori na minimizacijo stroškov ključev za 160 nadstropij, kjer ima vsak hodnik le en vhod in tri ločene sobe. Naj bo  $n$  število različnih tipov ključev, označenih kot  $1, 2, \dots, n$ . Vsak stanovalec prejme en ključ za svojo sobo in en ključ za hodnik. Ta dva ključa ne moreta biti iste vrste; če bi bil ključ stanovalčeve sobe enak ključu za hodnik, bi preostala dva stanovalca, ki si delita hodniški ključ, bodisi dobila dostop do stanovalčeve sobe

# Križne vsote



→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse številke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

	5	18	
13			
			14
17			
		7	



## REŠITEV KRIŽNE VSOTE

5	2		
6	7	1	
	9	4	

bodisi sploh ne bi mogla vstopiti v hodnik. Prav tako nobena dva stanovanca ne smeta imeti istega para ključev, saj bi to pomenilo, da imata dostop do iste sobe. Zato je število veljavnih kombinacij ključev enako  $\frac{1}{2}n(n - 1)$ .

Ker razdeljujemo skupno  $3 \cdot 160 = 480$  parov ključev, določimo spodnjo mejo za  $n$  iz neenačbe

▪  $\frac{1}{2}n(n - 1) \geq 480$ .

Rešimo za pozitivno celo število  $n$  in dobimo  $n \geq 32$ . Zdaj pokažimo, da je mogoče uporabiti natanko  $n = 32$  različnih tipov ključev. Da to dosežemo, razdelimo 160 nadstropij v 32 skupin po 5 nadstropij. Razporeditev ključev poteka na naslednji način (prvi ključ v paru je za hodnik, drugi za sobo):

- 15 stanovalcev v prvi skupini prejme pare ključev  $(1, 2), (1, 3), \dots, (1, 16)$ .
- Druga skupina dobi pare ključev  $(2, 3), (2, 4), \dots, (2, 17)$ .
- Ta vzorec se nadaljuje, pri čemer 31. skupina prejme pare ključev


$$(31, 32), (31, 1), \dots, (31, 14).$$

- Na koncu zadnja, 32. skupina, prejme pare ključev  $(32, 1), (32, 2), \dots, (32, 15)$ .

Zlahka vidimo, da ta razporeditev izpolnjuje dane pogoje. Zato je  $n = 32$  najmanjše število unikatnih ključev, ki jim dodamo še 928 kopij, da pokrijemo vseh  $160 \cdot 3 \cdot 2 = 960$  ključev. Ob upoštevanju stanovanalcev, omenjenih v prvem odstavku, je treba izdelati skupno  $32 + 160 = 192$  unikatnih ključev. Tako je končni strošek izračunan kot  $192 \cdot 3 + 928 \cdot 2 = 2432$ .





					GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ	ANGLEŠKI MATEMATIK IN FILOZOF (ALFRED NORTH)	AMERIŠKI IGRALEC IN REŽISER (CLINT)	GLASEN SREBLJAJ	DELOVANJE SILE NA ENOTO POVRŠINE	NAŠ GEOGRAF, AKADEMIK (ANTON)	CENIEN PREDSTAVNIK POPKULTURE	NIKELJ	ŽITNA GLIVIČNA BOLEZEN	OTOK V FRANC. POLINEZIJ	VZGOJA, IZOBRAŽEVANJE	RADJSKI DETEKTOR OBJEKTOV V OKOLICI			
					VLADNA CETRT LONDONA					4									
					ŠALJIV PRIZOR S HARLEKINOM														
					DEL FOTOPARATA ZA USMERJ. PROTI MOTIVU										NEKD. IZR. PREMIER BARAK LETALSKA FORMACIJA				
					ENAKA SOGLASNIKA					NAUK O GIBANJU NEMŠKI KNJIŽNI SPOMENIK									
					POLJSKA POLITIČARKA KOPACZ						KONJSKI TEK NAPRAVA NA OTROŠ. IGRISČU					KRAJ PRI POREČU FR. SKLADATELJ DELIBES			
					KONIČEK								NEMŠKO IME ZA IVNIK NA AVSTR. STAJER.	GLASNO IZREČEN POZIV PO IMENU					ITALIJAN. MESTO OB JADRAN. MORJU
					ANGLEŠKI IGRALEC (HUGH)														
															ALBERT EINSTEIN		IGOR PAPIČ MODER PRAH ZA OBARVANJE STEKLA		
					KVADRATNI DEKAMETER	NEZMOŽEN GOVORITL. MUTAST	SLABŠALNI IZRAZ ZA AMERICANA	NEKDANJI KAMERUN. NOGOMETNI ZVEZDNIK (SAMUEL)	ITALIJAN. KOŠARKAR (PIETRO) KONSENZ. PRIVOLITEV						MAPA SPISOV O KOM ORGANSKA SPOJINA				
							GOZDNI LISTAVEC DEL ODRA PRED ZAVESU	8				KATALON. OSAMOSV. VODITELJ (ARTUR) KOLUT							
							OGRADE IZ KOLOV ŠVED. OCEANOGRAFI (V. WALFRID)					11	STOPINJA CELZIJA HOKEJIST OGRAJENSK						
RAZNOVRSTNOST			7								SMUČARSKA ŠTUHEC								
JAKOST SEVANJA ZVEZDE											BARJ								
	IZUM ZA VOŽNJO ALPSKA DOLINA NA BOVSKEM					ČRN PTIČ PEVEC ANDREJ BAUER			AM. LEKSIKOGRAF (NOAH) SPRAVILO ZITA										
			KAN. PEVEC (BRYAN) NEKD. HRV. KOŠARKAR KNEGO				STADION CRVENE ZVEZDE ATLETINJA HORVAT												
		ZNIŽANI TON A TV VODITELJICA KOČAR		AMERIŠKA IGRALKA (LAUREN) JAP. SMUČARKA (ASA)															
POSODA ZA DELANJE MASLA						SKLADATELJ FIRŠT													
NASELJE NAD VIPAVO						LESNI KATRAN													
							NEVTRAL ZA SEŠEVANJE ENAKI ČRKI								VOLT-AMPER				
5				CEPITEV, RAZKOSAVANJE															
				REKA V SLAVONIJI, KI SE IZLIVA V SAVO										10					

### NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

[www.presek.si/krizanka](http://www.presek.si/krizanka)

ter ga oddajte do **8. junija 2025**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×

# Atwoodov stroj z nihajočo utežjo

↓↓↓

ANDREJ LIKAR

→ Atwoodov stroj je načeloma preprosta naprava, s katero je George Atwood (1745–1807), profesor fizike, širokemu krogu radovednih poslušalcev njegovih poljudnoznanstvenih predavanj prikazal lastnosti enakomerno pospešenega gibanja. Preko škripca je napeljana vrstica, na njenih koncih pa visita dve uteži, glej Sliko 1. Ni težko uganiti, da se uteži umirita, če sta enakih mas. Trenje v škripcu je sicer lahko majhno, a kljub temu prav trenje umiri uteži, če seveda prej ne trčita z mizo. Če pa ima ena utež večjo maso kot druga, se začne težja spuščati, lažja pa dvigovati. Ker je vsota sil na katerokoli utež konstantna, je gibanje uteži enakomerno pospešeno. Galileo Galilei je enakomerno pospešeno gibanje telesa opazoval na klancu, vendar se je Atwood s svojim strojem lahko bolj izognil trenju kot Galilei.

Na izbrano utež delujeta dve sili, teža navzdol in povezovalna vrstica navzgor. Vrstica povezuje obe uteži in je neraztegljiva. Napeta vrstica z navpično usmerjeno silo z velikostjo  $F_v$  deluje na obe uteži. Ker je neraztegljiva, sta po velikosti pospeška obeh uteži enaka, a nasprotno usmerjena. Pri reševanju te naloge smo kot dijaki v mislih prestavili uteži iz škripca na ravno mizo brez trenja in s tem preusmerili levi in desni del vrstice in sili teže za  $90^\circ$  (glej Sliko 2). S tem smo se izognili škripcu, pospešek pa je bil v tem primeru po velikosti enak kot prej. Sedaj ni bilo težko napisati Newtonova zakona za pospešek uteži. Z upoštevanjem privzetega koordinatnega sistema sta ustrezni enačbi:

$$\blacksquare m_1 a = F_v - m_1 g, \quad (1)$$

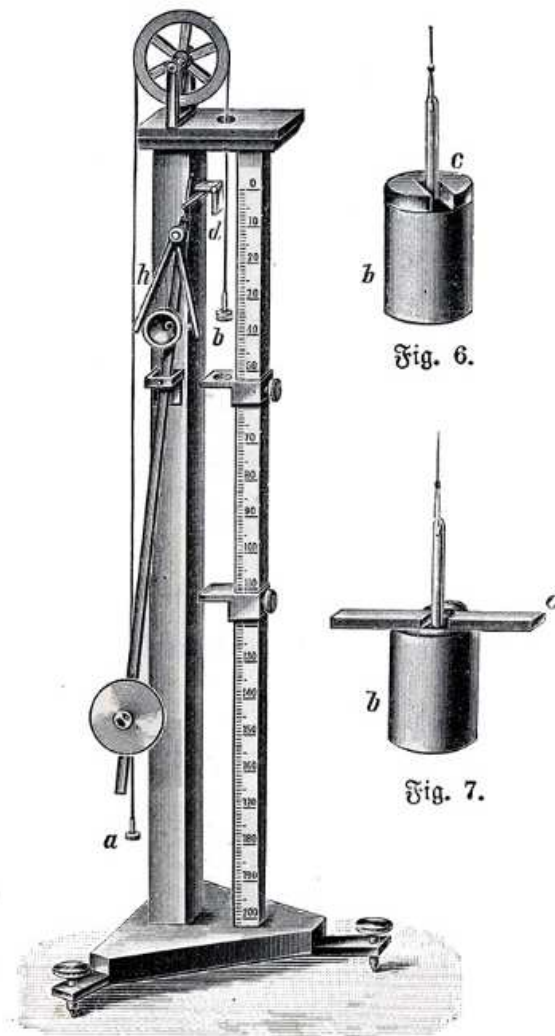
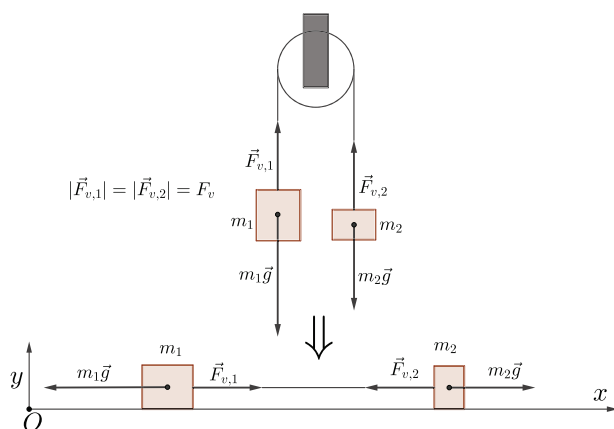


Fig. 5.  
Atwood'sche Fallmaschine

SLIKA 1.

Originalni Atwoodov stroj


**SLIKA 2.**

Prerejena skica sil pri Atwoodovem stroju.

$$\blacksquare m_2 a = m_2 g - F_v. \quad (2)$$

Iz enačb (1) in (2) dobimo:

$$\blacksquare \frac{F_v}{m_1} - g = g - \frac{F_v}{m_2}, \quad (3)$$

S preureditvijo enačbe (3) sledi:

$$\blacksquare F_v \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = 2g.$$

Torej je sila vrvice:

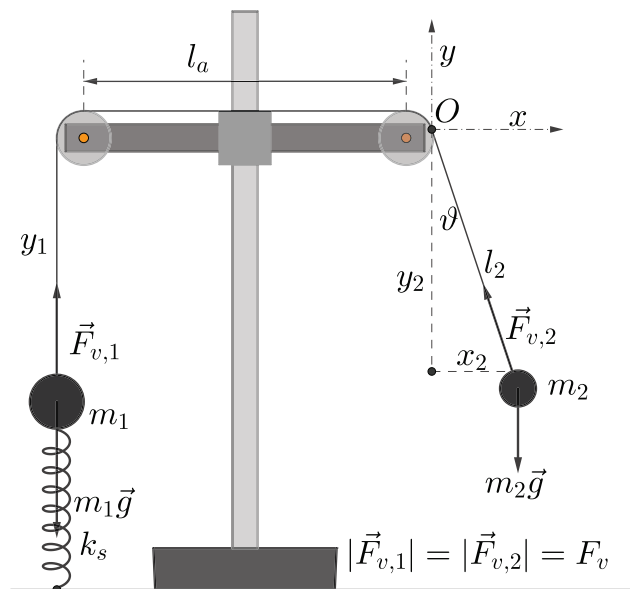
$$\blacksquare F_v = 2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Pospešek pa je:

$$\blacksquare a = g \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}.$$

Pospešek je v našem primeru, ko je  $m_1 > m_2$  pač negativen, to pa pomeni, da se težja utež na levi strani giblje navzdol, lažja na desni pa navzgor.

Atwood je svoj stroj izpopolnil tako, da je dodal metronom, s katerim je s štetjem klikov meril čas, in kaveljček, ki je hkrati sprožil gibanje uteži in bitje metronoma. Posebno pozornost je posvetil zgradbi škripca. Z več kolesi je zmanjšal njegovo trenje.


**SLIKA 3.**

Atwoodov stroj z nihajočo utežjo na desni strani. Če sta masi uteži na obeh straneh enaki, stabiliziramo stroj z vzmetjo na levi strani.

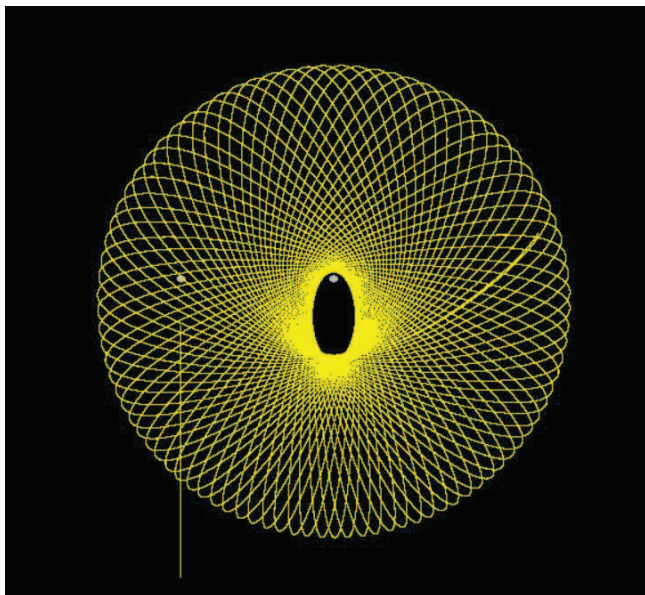
Različica Atwoodovega stroja je na Sliki 3, kjer vrvico napeljemo preko dveh škripcev. To sicer ni nikakršna izboljšava, saj smo z drugim škripcem le povečali trenje v napravi. A taka zgradba omogoča, da eno od uteži zanihamo. Ker sta uteži povezani z neraztegljivo vrvico, s tem poženemo tudi drugo utež. S Slike 3 razberemo sile, ki delujejo na uteži. Na naši sliki se leva utež lahko giblje le gor in dol, medtem ko se desna poleg tega giblje tudi vodoravno. Pa napišimo Newtonov zakon za obe uteži! Na levo deluje le vrvica, teža in mehka vzmet s koeficientom  $k_s$ , ki uteži drži v stabilni ravnovesni legi. Vse sile so le v navpični smeri, torej :

$$\blacksquare m_1 a_{y,1} = -m_1 g + F_v - k_s (y_1 + l_s). \quad (4)$$

Leva utež se v ravnovesni legi ustavi pri  $y_1 = -l_s$ . V smeri  $x$  leva utež ves čas miruje, zato sta pri njej pospešek in hitrost enaki nič, lega  $x_1$  pa je konstantna.

Na desno utež delujeta prav tako teža in vrvica, vendar vrvica ni vseskozi navpična. Za pospešek v





SLIKA 4.

Tir nihajoče uteži pri Atwoodovem stroju, ko utež z veliko hitrostjo poženemo v vodoravni smeri. Navpična črta predstavlja tir uteži na levi strani, ki se premika le gor in dol.

vodoravni smeri velja:

$$\blacksquare m_2 a_{x,2} = -F_v \sin \vartheta, \quad (5)$$

saj sila teže deluje le v navpični smeri. Za pospešek v navpični smeri pa velja:

$$\blacksquare m_2 a_{y,2} = -m_2 g + F_v \cos \vartheta. \quad (6)$$

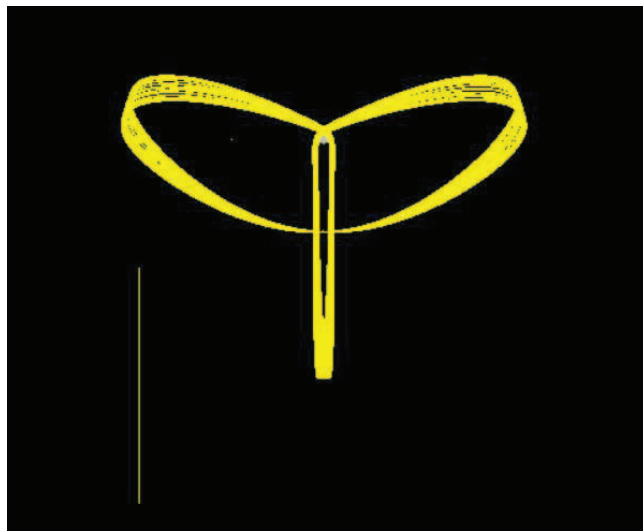
Za kotni funkciji nismo v zadregi, napišemo ju brez težave:

$$\blacksquare \sin \vartheta = \frac{x_2}{l_2}.$$

$$\blacksquare \cos \vartheta = -\frac{y_2}{l_2},$$

pri čemer je

$$\blacksquare l_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}.$$



SLIKA 5.

Tir nihajoče uteži pri Atwoodovem stroju, ko utež sunemo v vodoravni smeri.

Glede na orientacijo koordinatnega sistema na Sliki 3 sta v mirovni legi tako  $y_1$  kot  $y_2$  negativna.

Pri sili v vrivici pa se zatakne. Le kako naj jo določimo, da bomo sledili gibanju z računalnikom? Spomnimo se, da nobena vrivica ni zares povsem toga. Privzeli bomo, da je vrivica elastična in zanjo privzeli Hookov zakon za njeno raztezanje:

$$F_v = k \Delta s,$$

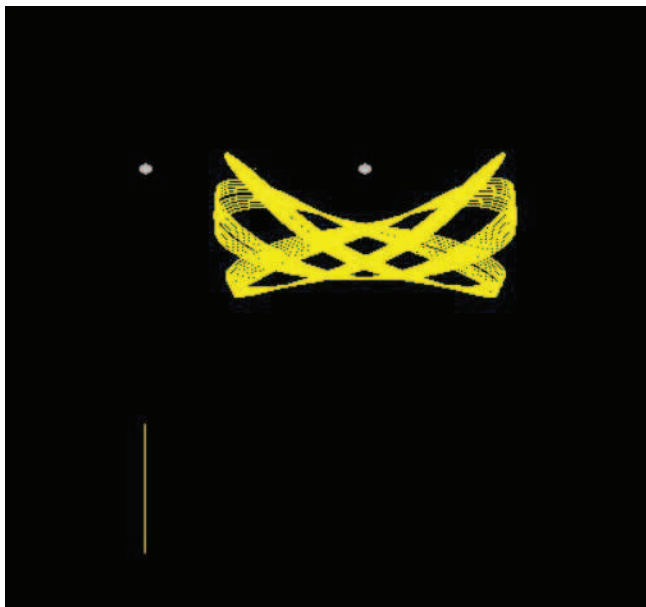
kjer je  $\Delta s$  njen raztezek,  $k$  pa Hookov koeficient vzmeti. Da pa bomo vseeno imeli vrivico s kolikor toliko konstantno dolžino, bomo v računih postavili koeficient  $k$  na zelo veliko vrednost. Raztezek vrivice je

$$\blacksquare \Delta s = |y_1| + l_a + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} - l, \quad (7)$$

kjer je  $l$  dolžina neraztegnjene vrivice,  $l_a$  pa razdalja med škripcema, ki se ne spreminja. Torej bomo za silo vrivice, ki deluje na uteži, privzeli:

$$\blacksquare F_v = k \left( |y_1| + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} + l_a - l \right). \quad (8)$$

Velik koeficient  $k$  bo poskrbel, da bo izraz v oklepaju blizu nič, kar pomeni, da bo dolžina vrivice ves čas skoraj enako dolga.



SLIKA 6.

Tir nihajoče uteži pri Atwoodovem stroju, ko utež narahlo su-nemo v vodoravni smeri

Ko programiramo, bomo premike, nihajni kot  $\vartheta$  in hitrosti računali v zaporednih trenutkih  $t = n\Delta t$ . Ustrezno označimo spremenljivke, ki nastopajo v Newtonovih enačbah (4), (5) in (6), na primer:

$$\blacksquare x(t) = x(n\Delta t) = x_n$$

Iz pospeškov določimo hitrosti:

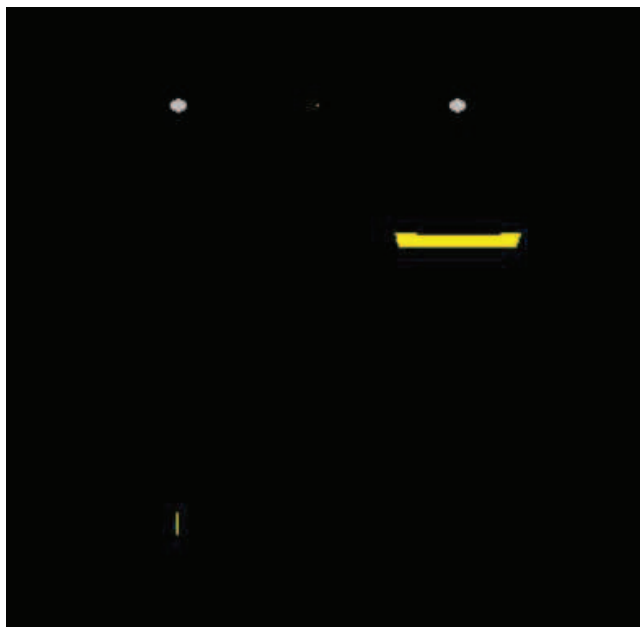
$$\blacksquare v_{y_1, n+1} = v_{y_1, n} + a_{y_1} \Delta t$$

in analogno za preostali dve hitrosti  $v_{x_2}$  in  $v_{y_2}$ . Do premikov pa pridemi iz izračunanih hitrosti:

$$\blacksquare x_{2, n+1} = x_{2, n} + v_{x_2, n+1} \Delta t.$$

Oglejmo si nekaj tirov pri različnih začetnih hitrostih. Na Sliki 4 je tir, ko smo desno utež pognali z veliko hitrostjo iz ravnovesne lege, Slika 5 do Slike 7 pa pri postopoma manjših začetnih hitrostih. Ker gre v našem primeru za neke vrste računalniške igre, se ne smemo čuditi, da lahko utež na desni strani tudi zaokroži okrog škripca. Pri resničnem Atwoodovem stroju na Sliki 3 to seveda ni mogoče, saj bi se vrstica

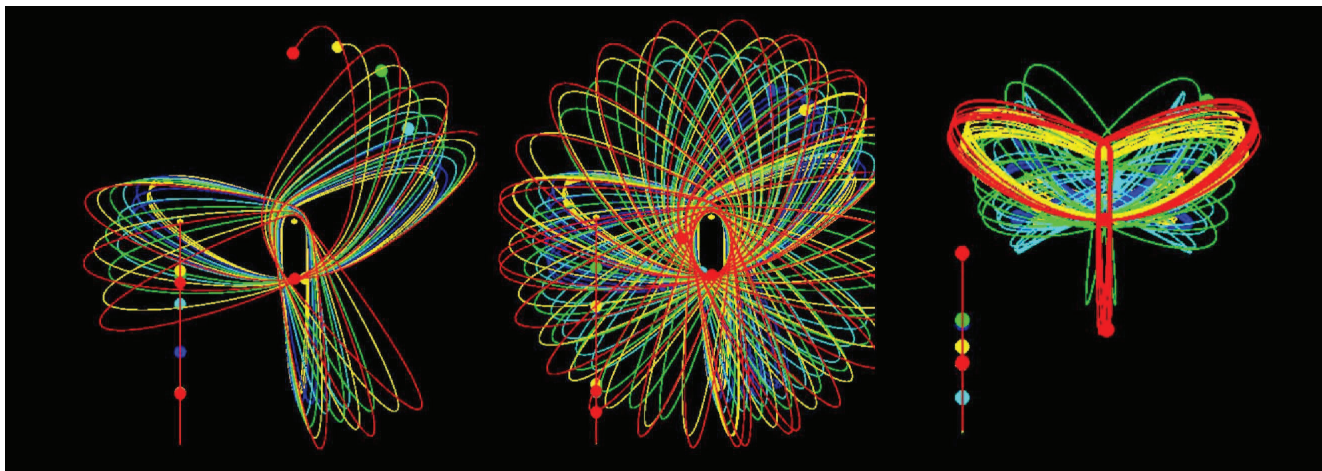
snela. Mislimo si, da je izvedba stroja pač takšna, da vrstica ves čas leži na desnem škripcu. Tu si ne bomo belili glave kako bi tak stroj zgradili. Konec koncev pri resničnem stroju ne bi mogli dobiti vseh teh slik, saj se ne moremo izogniti trenju in upor v zraku, česar pa z računalnikom ni težko doseči. Na Sliki 8 je še nekaj za oko prijetnih slik tirov nihajoče desne uteži. Na slikah leva utež pušča sled v obliki navpične daljice, saj se premika le gor-dol.



SLIKA 7.

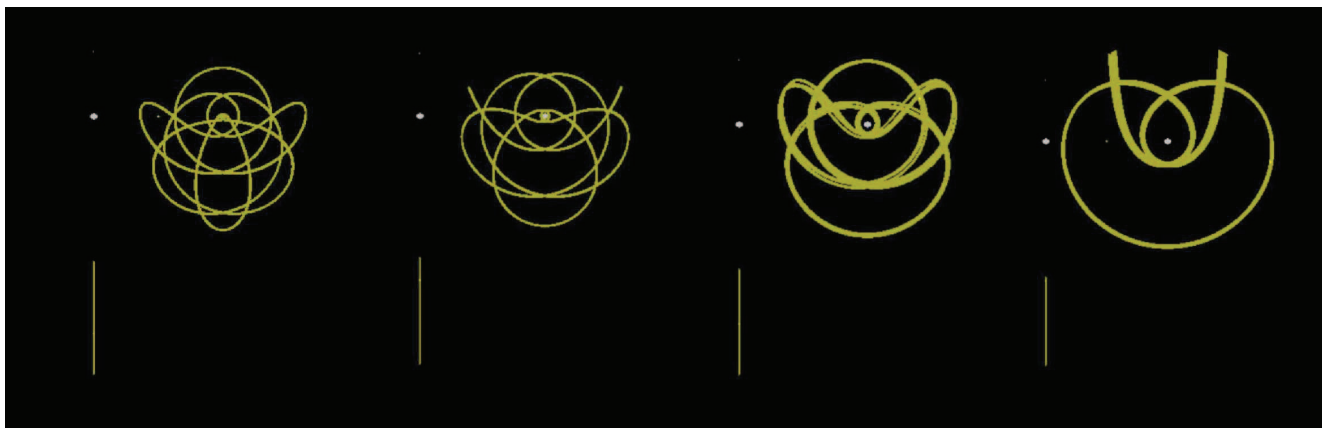
Tir nihajoče uteži pri Atwoodovem stroju, ko utež niha z zelo majhno amplitudo.

Ko ima utež na levi večjo maso kot tista na desni, ravnovesno vzmet lahko odstranimo. Nekaj tirov desne uteži pri njenih izbranih začetnih hitrostih in razmerjem mas  $\frac{m_1}{m_2} = 4$  je prikazano na Sliki 9. Ker imamo na izbiro precej parametrov, se lahko igramo z njimi in iščemo zanimive vzorce teh tirov.



SLIKA 8.

Tiri nihajoče uteži pri Atwoodovem stroju. Z barvami so označeni tiri pri različnih začetnih pogojih



SLIKA 9.

Tiri nihajoče uteži pri Atwoodovem stroju pri razmerju mas  $\frac{m_1}{m_2} = 4$ .

× × ×

# Kozmološki učinki na razdaljo



VID KAVČIČ

→ Zaradi širjenja vesolja se razdalja med zelo oddaljenimi nebesnimi telesi s časom povečuje. Pri merjenju razdalj na velikih skalah moramo torej pazljivo upoštevati kozmološke učinke na razdaljo. V članku se bomo seznanili z različnimi kozmološkimi definicijami razdalj in izpeljali povezave med njimi.

## Uvod v kozmologijo

Danes vemo, da je vesolje na največjih razsežnostih homogeno in izotropno, kar povzema tako imenovano **kozмолоško načelo**. To pomeni, da je na takšnih skalah vesolje povsod enako, poleg tega pa je tudi videti enako v vseh smereh. Posledica tega načela je, da v vesolju na razdaljah, večjih od okoli 100 Mpc, ni odlikovanega položaja ali odlikovane smeri. Vesolje se širi, kar pomeni, da se razdalje med telesi na kozmoloških skalah povečujejo. To pomeni, da raztezanje vesolja vpliva na razdaljo, ki jo s tako ali drugačno metodo izmerijo astronomi.

Prvi pomemben eksperimentalni dokaz, da se vesolje res širi, je **Hubble-Lemaîtrejev zakon**. Hubble in Lemaître, ki sta do ugotovitve neodvisno prišla v letih 1927-1929, sta opazila, da so spektralne črte oddaljenih galaksij opazno zamaknjene. Ugotovila sta, da je izmerjeni rdeči premik  $z$  sorazmeren z oddaljenostjo  $d$  nebesnega telesa. Premik spektralnih črt sta pripisala temu, da se galaksije dejansko od nas oddaljujejo s hitrostjo  $v = zc$ . Zapisala sta torej sorazmerje med navidezno hitrostjo  $v$  oddaljevanja

in oddaljenostjo  $d$  galaksije:

$$\blacksquare v = H_0 d, \quad (1)$$

kjer je  $H_0 \approx 70$  (km/s)/Mpc **Hubbleova konstanta**. Odkritje ima zelo velik pomen: če se galaksije medsebojno oddaljujejo, to pomeni, da se vesolje širi in da so bile v preteklosti bližje skupaj. S tem potrjuje, da je imelo vesolje svoj začetek, ki mu pravimo **veliki pok** oziroma **prapok**.

## Kozmološki rdeči premik

Hubble je predpostavil, da je premik spektralnih črt oddaljenih galaksij posledica Dopplerjevega pojava. Vendar je pri tem prostor in čas obravnaval klasično. V resnici je treba vesolje obravnavati v sklopu Einsteinove splošne teorije relativnosti, ki poenoti prostor in čas ter opiše vesolje kot gibko tkanino prostor-časa, ki se lahko razteguje ali krči.

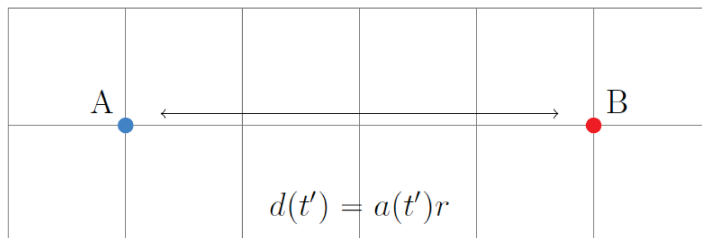
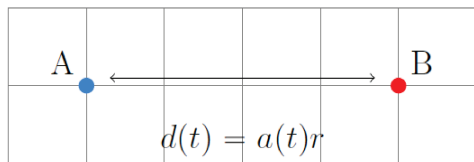
Izmerjeni rdeči premik tako ni posledica Dopplerjevega premika, kot je domneval Hubble, temveč je posledica raztezanja vesolja. V času, ko svetloba potuje od zelo oddaljene galaksije do nas, se lahko vesolje opazno razširi. Valovna dolžina svetlobe se zato medtem podaljša, kar opazimo kot rdeči premik.

**Kozmološki rdeči premik** definiramo kot relativno spremembo valovne dolžine neke opazovane spektralne črte, ki ni posledica gibanja galaksije v prostoru, pač pa širjenja vesolja:

$$\blacksquare z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{\text{odd}}} = \frac{\lambda_{\text{pr}} - \lambda_{\text{odd}}}{\lambda_{\text{odd}}}, \quad (2)$$

kjer je  $\lambda_{\text{odd}}$  valovna dolžina svetlobe, ki je bila oddana, in  $\lambda_{\text{pr}}$  valovna dolžina te svetlobe, kot jo izmerimo. Hubble-Lemaîtrejev zakon pravilneje zapišemo kot sorazmernost med rdečim premikom  $z$  in





SLIKA 1.

Mreža sogibajočih koordinat  $r$  ob času  $t$ , ko je prava razdalja med galaksijama enaka  $d(t)$ , skalirni faktor pa  $a(t)$ . Ob kasnejšem času  $t'$  se sogibajoča razdalja med galaksijama A in B (število kvadratkov) ni spremenila, kljub temu pa se je prava razdalja povečala na  $d(t')$ , ker se je vesolje razširilo. Skalirni faktor se je povečal na  $a(t')$ .

oddaljenostjo  $d$ :

$$\blacksquare z = \frac{H_0}{c}d. \quad (3)$$

Hubble-Lemaîtrejev zakon velja le za bližnja telesa. Pri večjih oddaljenostih galaksij, ko je  $z > 0,2$ , je zveza med  $z$  in  $d$  bolj zapletena in moramo poznati sestavo vesolja. V preteklosti ali v prihodnosti je sorazmernostni koeficient drugačen in ga imenujemo **Hubbllov parameter**  $H(t)$ . Hubblova konstanta je tako le vrednost Hubblovega parametra danes, kar označimo kot  $H_0 = H(t_0)$ .

### Skalirni faktor, prava razdalja in sogibajoča razdalja

Širjenje vesolja opišemo s **skalirnim faktorjem**  $a(t)$ . Razdaljo med dvema telesoma ob nekem času  $t$  zapišemo kot

$$\blacksquare d(t) = a(t)r. \quad (4)$$

Razdalji  $d$  pravimo **prava razdalja**, razdalji  $r$  pa **sogibajoča razdalja**. Sogibajoča razdalja je v sedanjem času  $t_0$  enaka pravi razdalji. Grafično ponazoritev skalirnega faktorja prikazuje slika 1.

Hubbllov parameter lahko po zgornji definiciji izrazimo kot

$$\blacksquare H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (5)$$

kjer je  $\dot{a}$  časovni odvod skalirnega faktorja, to je hitrost spreminjanja skalirnega faktorja s časom.

Pokažemo lahko, da za kozmološki rdeči premik na splošno velja zveza

$$\blacksquare \frac{a(t_{pr})}{a(t_{odd})} = \frac{\lambda_{pr}}{\lambda_{odd}} = 1 + z, \quad (6)$$

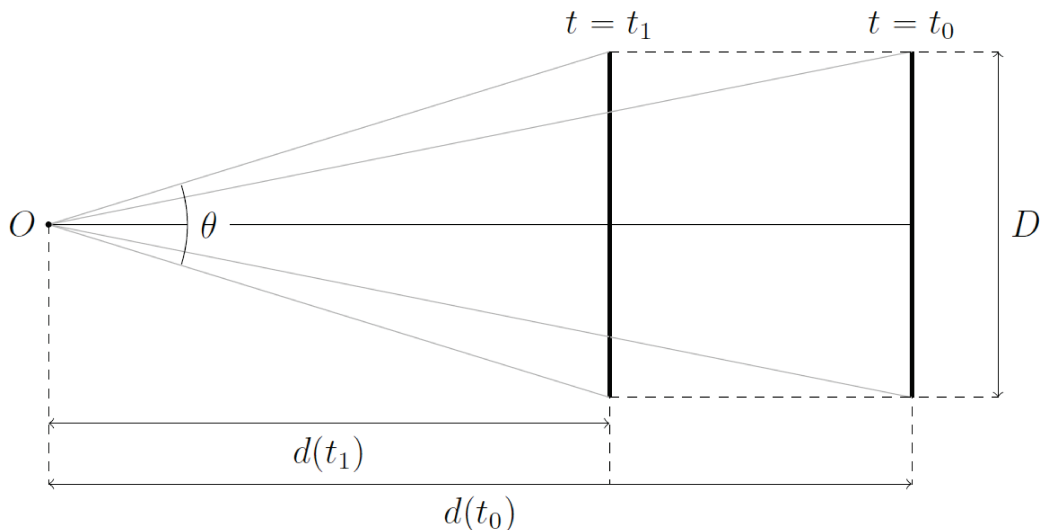
kjer sta  $a(t_{odd})$  in  $a(t_{pr})$  skalirna faktorja ob časih  $t_{odd}$  oziroma  $t_{pr}$ , ko je bila svetloba oddana oziroma prejeta, ter  $\lambda_{odd}$  in  $\lambda_{pr}$  valovni dolžini svetlobe, ko je bila oddana oziroma prejeta. Za vrednost skalirnega faktorja danes navadno vzamemo  $a(t_0) = 1$ , zato velja

$$\blacksquare a = \frac{1}{1 + z}. \quad (7)$$

Zdaj, ko smo se seznanili z osnovami kozmologije in spoznali dve definiciji razdalje – pravo razdaljo in sogibajočo razdaljo, si oglejmo še dve drugi definiciji razdalje, ki izhajata iz dveh elementarnih metod merjenja razdalj v astronomiji.

### Razdalja kotne velikosti

Zamislimo si nebesno telo s fiksno velikostjo  $D$ , na primer galaksijo. Takoj na začetku naj posebej poudarimo, da se vrednost  $D$  s časom zaradi raztezanja vesolja ne spreminja. Denimo, da izmerimo, da je kotna velikost galaksije na našem nebu enaka  $\theta$ .


**SLIKA 2.**

Poenostavljena slika medsebojne lege opazovalke in galaksije ob času  $t = t_1$  in ob času  $t = t_0$ . Čeprav nam kopernikansko načelo pravi, da položaj Zemlje v vesolju ni nikakor odlikovan, je zavoljo preglednosti na skici položaj opazovalke v obeh primerih na istem mestu. Spremenjena je le lega galaksije. Z drugimi besedami, skica prikazuje spremembo relativnega položaja galaksije glede na opazovalko.

**Razdaljo kotne velikosti** (angl. *angular diameter distance*) s tem v zvezi definiramo kot

$$\blacksquare d_A = \frac{D}{\theta}. \quad (8)$$

Denimo, da se galaksija z velikostjo  $D$  nahaja na sogibajoči razdalji  $r$  in da je svetlobo, ki jo opazujemo danes, oddala ob času  $t = t_1$ . To svetlobo nato opazovalka zazna ob času  $t = t_0$  na razdalji  $r = 0$ . Poenostavljen oris pojava prikazuje slika 2. Če želimo izraziti velikost  $D$  galaksije z izmerjeno kotno velikostjo  $\theta$ , moramo v izračunu torej upoštevati oddaljenost galaksije, ko je galaksija svetlobo, ki jo opazujemo danes, oddala.

Če predpostavimo, da je vesolje ravno, lahko velikost  $D$  nebesnega telesa zapišemo kot

$$\blacksquare D = \theta \cdot a(t_1)r,$$

kjer smo z  $a(t_1)$  označili skalirni faktor ob času  $t_1$ . Če upoštevamo, da je  $a(t_0)/a(t_1) = 1+z$  in  $a(t_0) = 1$ ,

lahko razdaljo kotne velikosti izrazimo kot

$$\blacksquare d_A = \frac{D}{\theta} = a(t_1)r = \frac{r}{1+z}.$$

Povzamemo, da za med razdaljo kotne velikosti in sogibajočo razdaljo  $r$ , ki je v ravnem vesolju po definiciji enaka današnji vrednostni prave razdalje  $d(t_0)$ , velja povezava

$$\blacksquare d_A = \frac{r}{1+z}. \quad (9)$$

Ker je  $z > 0$ , to pomeni, da je današnja vrednost prave razdalje  $d(t_0) = r$  do galaksije v resnici za faktor  $(1+z)$  večja od razdalje  $d_A$ , ki jo določimo iz meritve kotne velikosti galaksije. Z drugimi besedami, zaradi kozmoloških učinkov so galaksije videti večje, kot bi bile, če se vesolje ne bi raztezalo. Če opazujemo dve galaksiji, ki imata enako fizično velikost, bo na našem nebu večja videti galaksija, ki leži na višjem rdečem premiku.



## → Razdalja izseva

Oddaljenost  $d_L$  nebesnega telesa lahko preprosto izračunamo, če poznamo njegov izsev  $L$  in izmerimo gostoto svetlobnega toka  $j$ . Velja

$$\blacksquare j = \frac{L}{4\pi d_L^2}.$$

Razdaljo, ki jo dobimo iz izseva in izmerjene gostote svetlobnega toka, imenujemo **razdaljo izseva** (angl. *luminosity distance*) in jo označimo z  $d_L$ . Neposredno jo torej definiramo kot

$$\blacksquare d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi j}}.$$

Svetloba s tega nebesnega telesa je prepotovala razdaljo  $r$  in se porazdelila po sferi s površino  $4\pi r^2$ . Če želimo podobno kot prej izpeljati povezavo s sogibajočo razdaljo, moramo upoštevati še dva pomembna učinka.

Zaradi rdečega premika se energija fotona zmanjša. Označimo energijo fotona oddane svetlobe z

$$E_{y,\text{odd}} = h\nu_{\text{odd}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{odd}}},$$

energijo fotona svetlobe, ki jo opazujemo na Zemlji, pa z

$$\blacksquare E_{y,\text{pr}} = h\nu_{\text{pr}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{pr}}}.$$

Če upoštevamo definicijo kozmološkega rdečega premika

$$\blacksquare z = \frac{\lambda_{\text{odd}} - \lambda_{\text{pr}}}{\lambda_{\text{pr}}},$$

lahko energijo fotona prejete svetlobe v zvezi z energijo fotona oddane svetlobe izrazimo kot

$$\blacksquare E_{y,\text{pr}} = \frac{E_{y,\text{odd}}}{1+z}.$$

Vidimo, da je energija prejetega fotona za faktor  $1+z$  manjša od energija oddanega fotona.

Drugi učinek pa je povezan s številom fotonov, ki jih v danem časovnem intervalu zaznamo. Denimo,

da galaksija v časovnem intervalu  $\Delta t_{\text{odd}}$  odda  $N$  fotonov in da na Zemlji teh  $N$  fotonov zaznamo v časovnem intervalu  $\Delta t_{\text{pr}}$ . Potem velja

$$\blacksquare \frac{\Delta t_{\text{pr}}}{\Delta t_{\text{odd}}} = \frac{a(t_{\text{pr}})}{a(t_{\text{odd}})} = 1+z.$$

Z drugimi besedami, število prejetih fotonov v danem (fiksni) časovnem intervalu se zmanjša za faktor  $1+z$ , zato ponovno sklenemo, da se gostota svetlobnega toka zaradi tega učinka zmanjša za faktor  $1+z$ .

Če upoštevamo oba učinka, lahko izmerjeno gostoto svetlobnega toka  $j$  v zvezi z izsevom  $L$  izrazimo kot

$$\blacksquare j = \frac{L}{4\pi r^2(1+z)^2}.$$

Iz enačbe izluščimo izraz za razdaljo izseva

$$d_L = r(1+z).$$

S tem lahko zvezo med različnimi definicijami razdalj povzamemo z eno samo enačbo kot

$$\blacksquare d_L = (1+z)r = (1+z)^2 d_A.$$

Pri majhnih rdečih premikih ( $z \ll 1$ ) pričakovano velja  $d_L \approx r \approx d_A$ . Na tem mestu je treba znova poudariti, da je sogibajoča razdalja enaka današnji vrednosti prave razdalje,  $r = d(t_0)$ .

## Modul razdalje

Navidezni sij  $m$  in absolutni sij  $M$  nebesnega telesa, ki se nahaja na razdalji  $d$ , povezuje standardna zveza

$$\blacksquare m - M = 5 \log \left( \frac{d}{10 \text{ pc}} \right).$$

Količino  $\mu = m - M$  pogosto imenujemo **modul razdalje** (angl. *distance modulus*). Na kozmoloških skalah se pojavi vprašanje, katero od zgoraj definiranih razdalj moramo upoštevati v enačbi, če želimo na primer izračunati absolutni sij telesa, ki mu izmerimo navidezni sij  $m$ . Ker je sij v zvezi z gostoto svetlobnega toka, je naravna in edina smiselna izbira razdalja izseva  $d_L$ . Enačbo za modul razdalje v tem primeru prepisemo v

$$m - M = 5 \log \left( \frac{d_L}{10 \text{ pc}} \right).$$

Poudarimo naj, da zveza velja le za bolometrični sij. Zveza za sij pri določeni valovni dolžini (spektralni sij) ali na posebnem intervalu valovnih dolžin je na splošno bolj zapletena in vsebuje še dodatne popravke.

### Zgled

Oglejmo si računski zgled, v katerem bomo ilustrirali izračun navideznega sija supernove tipa Ia in pri tem upoštevali kozmološki popravek k razdalji.

**Naloga.** V spiralni galaksiji, ki jo opazujemo s strani, opazimo izbruh supernove tipa Ia. Opazujemo središče galaksije. V spektru opazimo spektralno črto  $H\alpha$ , ki ima v laboratoriju valovno dolžino  $\lambda_0 = 656,3 \text{ nm}$ . Izmerimo, da se črta nahaja pri valovni dolžini  $\lambda = 721,9 \text{ nm}$ . Izračunaj navidezni sij  $m$  supernove ob največji svetlosti za opazovalko na Zemlji. Upoštevaj, da je rdeči premik posledica izključno kozmoloških učinkov. Znano je, da je absolutni sij teh supernov ob največji svetlosti enak  $M = -19,5$ .

#### Rešitev.

Najprej določimo rdeči premik  $z$  galaksije. Velja

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = 0,10.$$

Rdeči premik bo dovolj velik, da bo opazno vplival na popravek k razdalji, in hkrati dovolj majhen, da pravo razdaljo  $d$  galaksije določimo s Hubble-Lemaîtrejevim zakonom:

$$d = \frac{zc}{H_0} = 428 \text{ Mpc}.$$

Ker nas zanima navidezni sij  $m$  galaksije, moramo najprej izračunati razdaljo izseva  $d_L$ :

$$d_L = (1 + z)d = 471 \text{ Mpc}.$$

S tem za navidezni sij galaksije sledi

$$m = M + 5 \log \left( \frac{d_L}{10 \text{ pc}} \right) = 18,9.$$

### Zaključek

V članku smo izpeljali povezavo med sogibajočo razdaljo, razdaljo kotne velikosti in razdaljo izseva. Velikega pomena je poudariti, da izpeljane zveze temeljijo na ključni predpostavki, da je vesolje ravno, kar nam je račune izjemno poenostavilo. Za vesolje, ki ni ravno, sta zvezi za razdalji  $d_A$  in  $d_L$  veliko bolj zapleteni ter odvisni od kozmološkega modela.

Na splošno razdalja kotne velikosti in razdalja izseva nista odvisni le od kozmološkega rdečega premika  $z$ , pač pa tudi od vrednosti ostalih kozmoloških parametrov, ki opisujejo sestavo vesolja. Mednje sodijo današnja vrednost Hubblovega parametra ( $H_0$ ), parameter gostote snovi ( $\Omega_m$ ), parameter gostote sevanja ( $\Omega_r$ ), parameter ukrivljenosti ( $\Omega_k$ ) in parameter gostote temne energije ( $\Omega_\Lambda$ ).

### Literatura

- [1] Guštin, A., Fabjan, D., Kavčič, V. in Bukovšek, S. (2024). **Zbirka nalog z astronomskih tekmovalanj 2009–2024: teorija in rešene naloge za srednje šole** (Let. 98, str. 363). Fakulteta za matematiko in fiziko.
- [2] Weinberg, S. (2008). **Cosmology**. OUP Oxford.
- [3] Weinberg, S. (1972). **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity**. John Wiley & Sons.
- [4] Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M., & Donner, K. J. (2007). **Fundamental Astronomy** (5th ed.). Springer.

× × ×

[www.presek.si](http://www.presek.si)

[www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/](http://www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/)

# Raznoliki materiali iz vsakdanjega življenja v najbolj domiselnih matematičnih preobrazbah ob Matematičnem dnevu 2025



KARLA FERJANČIČ

→ Mednarodni dan matematike, ki ga vsako leto praznujemo 14. marca, smo letos pri DMFA obeležili z natečajem "Matematika, ki se je lahko dotakneš". Učence in dijake smo povabili, da s svojo ustvarjalnostjo in umetniškim navdihom iz vsakdanjih materialov - iz gospodinjstva, učilnice, narave ali celo z domiselno postavitvijo ljudi - oblikujejo skulpture, ki bodo prenesle matematiko iz glav in knjig v resnični, oprijemljivi svet. Prejeli smo 25 prispevkov razredov oz. manjših skupin učencev iz 13 različnih šol. Sodelujoči učenci so skupaj z mentorji uspeli združiti svojo domišljijo z matematično vsebino in ustvariti izvirne izdelke, ki prikazujejo geometrijske like, vzorce, matematične izraze in še mnogo več. Učenci so pri tem razvijali svoje matematično razmišljanje, spoznavali povezave matematike z ostalimi področji - od umetnosti do kulinarike - ter dokazali, da je matematika resnično vsepovsod okoli nas.

Komisija je imela zelo težko nalogo, saj so bili izdelki raznoliki in kakovostni. V vsaki od štirih kategorij (1., 2. in 3. triada OŠ ter SŠ) je komisija na koncu izbrala izstopajoč izdelek, ki dobro odraža duh gesla "Matematika, ki se je lahko dotakneš" ter je tudi likovno, matematično ali kako drugače zanimiv. Njihovi mentorji bodo na svojo šolo prejeli simbolično nagrado: didaktične igrače (1. triada), strip (2. in 3. triada) oz. knjigo Matematični sprehodi v naravo (SŠ).

Iskrene čestitke prav vsem mladim ustvarjalcem in njihovim mentorjem za inovativne ideje in navdušujoče projekte!

Člani komisije: Andreja Drobnič Vidic, Karla Ferjančič in Jasna Prezelj.

Nagrajeni prispevki:



SLIKA 1.

1. triada OŠ: Merjenje kilometra (Waldorfska šola Ljubljana, OE Savinja, Žalec, 3. razred). Učenci so si izdelali iz lesene palice dolžine en meter in z njimi skupaj izmerili kilometer.



**SLIKA 2.**

2. triada OŠ: Osna simetrija (Waldorfska šola Ljubljana, OE Savinja, Žalec, 5. razred). Vsak učenec si je narisal svoj osno simetričen načrt vezanja in po načrtu izvezel svoj vzorec. Vzorce so učenci našili na blago in si izdelali peresnico.



**SLIKA 3.**

3. triada OŠ: Platonska telesa (Waldorfska šola Ljubljana, OE Savinja, Žalec, 9. razred). Učenci so poslikali trde liste. Nato so na njih načrtali pravilne petkotnike in jih izrezali. Vsako stranico petkotnika so razpolovili in jo povezali s sosednjim razpoloviščem stranice. Po teh povezavah so prepognili petkotnike. Zavihke so pazljivo zlepili skupaj in nastal je svečnik v obliki dekodaedra. Na stranskih ploskvah pa so zažarele petkrake zvezde.



**SLIKA 4.**

Srednja šola: Morski rez (ŠC Celje, Gimnazija Lava, Taja Novak). Avtorica je našla navdih med izmenjavo v Španiji. Spiralna skulptura s školjkami predstavlja v naravi pogosto prisotno razmerje zlatega reza  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1,62$ . Avtorica je pripisala še: "Moj izdelek ni popoln (tako kot tudi narava ni), je pa mešanica mojih strasti - matematike, ustvarjalnosti in narave."

× × ×

# 16. mednarodna fizikalna olimpiada, Portorož 1985



→ Letos mineva 40 let od prvega velike mednarodnega tekmovanja iz znanja, ki je potekalo v Sloveniji, natančneje, nekdanji Jugoslaviji. Leta 1985 je namreč v Portorožu potekala 16. mednarodna fizikalna olimpijada z 99 tekmovalci iz 20 držav. Kratek prispevek o njej je za revijo Presek napisal Bojan Golli, ki je bil med njenimi glavnimi organizatorji in je bil kasneje vrsto let vodja slovenske ekipe na fizikalnih olimpijadah in nepogrešljiv strokovni sodelavec državnih tekmovanj iz fizike. Eksperimentalni del olimpijade je prvič v zgodovini olimpijade potekal z uporabo osebnih računalnikov Iskra Delta, s kakršnimi so se tekmovalci večinoma srečali prvič v življenju. Poleg kopanja v Portorožu so si tekmovalci privoščili tudi izleta v Lipico in v Postojnsko jamo, na večernem koncertu v Avditoriju pa so skupaj s spremljevalci poslušali pianistko Dubravko Tomšič.



Najuspešnejši tekmovalec Patrik Španel iz Češkoslovaške je za nagrado prejel povsem nov izdelek tovarne Iskra, šolski helij-neonski laser, katerega žarek so lahko udeleženci prvič občudovali na zaključni podelitvi. Natančnejši opis olimpijade vključno z nalogami teoretičnega in eksperimentalnega dela lahko najdete v reviji Obzornik za matematiko in fiziko, letnik 33, številka 1/2, ki je na voljo v spletnem arhivu na strani [www.obzornik.si](http://www.obzornik.si).

## 16. MEDNARODNA FIZIKALNA OLIMPIADA

V Portorožu in Kopru je bila od 23. do 30. junija 1985 v organizaciji Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije 16. mednarodna fizikalna olimpiada. Udeležilo se je 20 delegacij iz Avstrije, Bolgarije, Kanade, Kube, Češkoslovaške, Zvezne republike Nemčije, Nemške demokratične republike, Finske, Velike Britanije, Madžarske, Islandije, Nizozemske, Norveške, Poljske, Romunije, Sovjetske zveze, Švedske, Turčije, Vietnama in Jugoslavije; skupaj 99 tekmovalcev in 40 spremljevalcev. Udeležba je bila rekordna po številu držav in po številu tekmovalcev. Olimpiada je vzbudila veliko zanimanje tudi v ZDA, ki se do sedaj olimpiad niso udeleževale; letos so v Portorož poslale dva opazovalca. Prišla sta tudi opazovalca iz Kitajske in Italije.

Naloge in eksperimentalno opremo so pripravili na Oddelku za fiziko Fakultete za naravoslovje in tehnologijo v Ljubljani ob pomoči sodelavcev Instituta za fiziko iz Zagreba, Srednje naravoslovne in pedagoške šole iz Kopra in



Slika 1. Pri prvem poskusu je bil prvič v zgodovini fizikalnih olimpiad uporabljen računalnik, Deltin Partner, pri merjenju pospeševanja in zaviranju elektromotorja..



Andrej Guštin, Dunja Fabjan, Vid Kavčič, Simon Bukovšek

# Zbirka nalog z astronomskih tekmovanj 2009–2024

## Teorija in rešene naloge za srednje šole

Ob 15. obletnici tekmovanj iz astronomije je pri založbi FMF izšla Zbirka nalog z astronomskih tekmovanj – teorija in rešene naloge za srednje šole.

Poleg več kot **230 rešenih nalog** s šolskih, z državnih in izbirnih tekmovanj za srednje šole prinaša zbirka tudi **povzetke teorije**, ki bodo v pomoč tekmovalkam in tekmovalcem pri pripravi na astronomska tekmovanja. Zbirko bogati več kot **140 skic in fotografij**, ki bralkam in bralcem pomagajo pri razumevanju vsebine.

Zbirka je razdeljena na šest tematskih sklopov: **osnove astronomije**, **nebesna mehanika**, **svetloba in sevanje**, **zvezde in zvezdni sistemi**, **kozmozologija** in **optika**. Vsak tematski sklop se začne s povzetkom teoretičnih vsebin, vse od temeljnih pa do zahtevnejših konceptov. Sledi izbor nalog, ki se navezujejo na obravnavano tematiko. Urejene so po težavnosti, hkrati pa je vsaka naloga opremljena tudi z oznako letnice in ravni tekmovanja. Poleg tega zbirka zajema tudi sklope **koristne matematične veze**, **obdelava podatkov** in **vrtljiva zvezdna karta**.

Zbirka predstavlja prvo tovrstno gradivo pri nas, zato je nepogrešljiv pripomoček za mlade astronomke in astronome, ki si želijo boljšega razumevanja in bolj poglobljenega stika z astronomijo. Hkrati pa lahko služi kot odličen pripomoček za pripravo na šolska, državna in izbirna tekmovanja iz astronomije – tako za dijakinje in dijake kot tudi njihove mentorice in mentorje. V veliko pomoč pa bo tudi študentkam in študentom, ki se astronomiji posvečajo v okviru univerzitetnega študija na prvi stopnji.

Poleg omenjene knjige ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitev so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<https://www.fmf.uni-lj.si/sl/zalozba/katalog/>

Dodatne informacije lahko dobite v knjižnici Fakultete za matematiko in fiziko po telefonu (01) 4766 558.



9 770351 665258