Tekmovanja

58. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje – državno tekmovanje

6. razred

A1. Pred dvigalom stoji 6 ljudi, ki tehtajo 65 kg, 68 kg, 75 kg, 81 kg, 85 kg in 106 kg. Nosilnost dvigala je 240 kg. V najmanj koliko skupinah se bodo morali peljati, da ne presežejo nosilnosti?

(A) 5 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 2 **(E)** 1

A2. Na šoli je 84 šestošolcev. Test iz matematike sta pisali $\frac{2}{3}$ šestošolcev. Vse točke sta dosegla 2 učenca, kar predstavlja četrtino tistih, ki so pisali odlično. Kolikšen delež učencev, ki so pisali test, je dobilo odlično oceno?

(A) $\frac{2}{84}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{6}$ **(D)** $\frac{1}{7}$ **(E)** $\frac{1}{8}$

A3. Dolžina daljice AB je $36{,}25$ cm. Na daljici ležita še točki C in D. Pri tem je dolžina daljice AC enaka četrtini daljice CB. Dolžina daljice DB je enake $20{,}20$ cm. Kolikšna je dolžina daljice CD?

(A) $7{,}25$ cm **(B)** $8{,}8$ cm **(C)** $16{,}05$ cm **(D)** $20{,}2$ cm
(E) nemogoče je izračunati

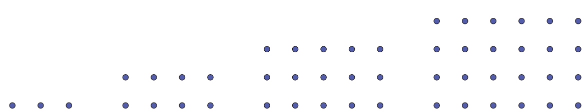
A4. Andrej je na tablo zapisal vsa naravna števila do nekega števila, večjega od 5. Barbara je izbrisala vsa števila, deljiva s 4. Potem je Cilka izbrisala vsa števila, deljiva z 2, in nato Drago vsa števila, deljiva s 3. Koliko števil je zapisal na tablo Andrej, če so Barbara, Cilka in Drago izbrisali enako količino števil?

(A) 8 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 12 **(E)** 14

A5. Babica je na loteriji zadela manjši znesek denarja. Če bi ga razdelila med svojih pet vnukov, vsakemu bi dala enako, bi ji ostali 3 evri. Če pa bi znesku dodala 8 evrov in bi si ga le z dedkom delila na pol, bi vsak od njiju dobil trikrat tolikšen znesek kot vsak vnuk. Koliko denarja je zadela babica na loteriji?

(A) 58 evrov **(B)** 63 evrov **(C)** 68 evrov **(D)** 73 evrov **(E)** 78 evrov

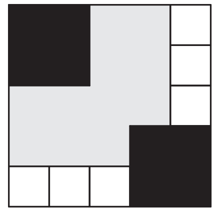
A6. Tina ima na razpolago 150 kroglic. Po vrsti sestavlja vzorec iz pravokotnikov, kot je prikazano na sliki. Koliko kroglic ji ostane, ko še uspe v celoti sestaviti zadnji pravokotnik iz tega vzorca?



(A) 17 **(B)** 7 **(C)** 2 **(D)** 1 **(E)** 0

B1. Pehta je za svoje prijatelje skuhala poln lonec kaše. Prva je prišla Mojca. Dobila je $\frac{1}{10}$ kaše. Za Mojco je prišel Rožle. Njemu je Pehta dala $\frac{1}{9}$ preostale kaše. Brincelj, ki se je spotoma oglasil, je dobil osmino kaše, ki je še ostala. Kekec je dobil sedmino preostale kaše. Ko je Kekec pojedel svoj delež, je dal volkcu šestino kaše, ki je ostala. Za Bedanca je ostalo še $3\,\ell$ kaše. Izračunaj, kolikšen delež kaše je dobil vsak izmed njih in koliko litrov kaše je skuhala Pehta.

B2. Kvadrat razdelimo, kot kaže slika. Vsi mali beli kvadrati so skladni, prav tako sta skladna oba črna kvadrata. Vsota ploščin belih kvadratov je $24\ \mathrm{cm}^2$ in obseg sivega dela je 36 cm. Izračunaj ploščino črnega kvadrata.



7. razred

A1. Katero od naštetih števil se lahko zapiše kot vsota štirih zaporednih naravnih števil?

(**A**) 16 (**B**) 19 (**C**) 22 (**D**) 25 (**E**) 28

A2. Dva pravokotnika imata enako ploščino. Dolžina drugega je za tretjino daljša od dolžine prvega. Za koliko je širina drugega pravokotnika krajša od širine prvega?

(**A**) za četrtino (**B**) za osmino (**C**) za tretjino (**D**) za polovico (**E**) za petino

A3. Tadej je napisal na list papirja 4-mestno število. Nato ga je po nesreči polil s sokom tako, da se zadnji dve števki nista več videli. Kolikšna je vsota zadnjih dveh števk štirimestnega števila 86 __ __, če je prvotno zapisano število deljivo s 3, s 4 in s 5?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 9 (**E**) 13

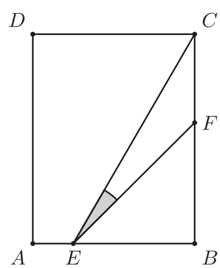
A4. Koliko praštevil p zadošča neenakosti $\frac{3}{8} < \frac{3}{p} < \frac{4}{3}$?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

A5. Trije prijatelji so odšli na planinski izlet in vsak izmed njih je vzel s seboj enako količino vode. Med planinarjenjem je Renata popila polovično količino vode, kot jo je popil Jan. Monika je popila še enkrat toliko vode, kot jo je popil Jan. Vsi skupaj so popili tretjino vode, ki so jo imeli s seboj. Kolikšen del svoje količine vode je popila Renata?

(**A**) $\frac{1}{8}$ (**B**) $\frac{1}{7}$ (**C**) $\frac{1}{6}$ (**D**) $\frac{1}{4}$ (**E**) $\frac{1}{3}$

A6. Na stranici AB pravokotnika $ABCD$, ki je dolga 4 cm, leži točka E, na stranici BC pa točka F. Pri tem velja $|AE| = \frac{1}{4}|AB|$, $|BF| = 3$ cm in kot $ECB = 30°$. Koliko meri kot FEC?



(**A**) $11°$ (**B**) $12°$ (**C**) $13°$ (**D**) $14°$ (**E**) $15°$

B1. Na OŠ je 100 sedmošolcev. Peter je delal anketo, koliko jih v popoldanskem času obiskuje glasbeno šolo ali športne dejavnosti. Zapisal si je takole:

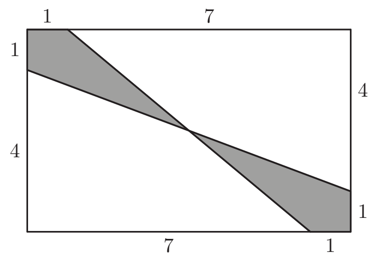
- 31 jih obiskuje glasbeno šolo,
- 27 jih obiskuje šport,
- 12 fantov obiskuje šport,
- obe popoldanski dejavnosti obiskujeta dve dekleti več kot fantov,
- 12 deklet obiskuje samo glasbeno šolo, ne pa športne dejavnosti,
- 50 sedmošolcev ne obiskuje nobene od obeh popoldanskih dejavnosti.

Odgovori na naslednja vprašanja:
Koliko sedmošolcev obiskuje oboje?
Koliko deklet obiskuje samo športno dejavnost in ne glasbene šole?
Koliko fantov obiskuje glasbeno šolo ali športno dejavnost?

B2. Poišči 7-mestni palindrom (to je število, kjer se števke preberejo enako z leve proti desni kot z desne proti levi), pri katerem je druga števka dvakratnik prve, peta števka je dvakratnik četrte, vsota vseh števk v palindromu pa je 26. Odgovor utemelji.

8. razred

A1. Dan je pravokotnik s stranicama 8 cm in 5 cm. Kolikšna je ploščina osenčenega dela pravokotnika?

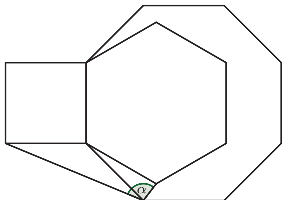


(**A**) $4\frac{3}{5}$ cm^2 (**B**) 5 cm^2
(**C**) $5\frac{1}{4}$ cm^2 (**D**) $6\frac{1}{2}$ cm^2
(**E**) 8 cm^2

A2. Kolikšna je vrednost izraza $\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{0{,}01}}}\right)^{-1}$?

(**A**) 1 (**B**) 0.01 (**C**) $1\frac{1}{11}$ (**D**) $\frac{1}{11}$ (**E**) 11

A3. Jure je narisal pravilni osemkotnik, pravilni šestkotnik, kvadrat in dva trikotnika ter označil kot α, kot je razvidno s slike. Kolikšna je velikost kota α?



(**A**) $90°$ (**B**) $100°$ (**C**) $100,5°$ (**D**) $105°$ (**E**) $108°$

A4. Enakokrakemu trapezu s ploščino 18 cm^2 je včrtana krožnica s polmerom 2 cm. Koliko meri krak tega trapeza?

(**A**) $2{,}25$ cm (**B**) 4 cm (**C**) $4{,}5$ cm (**D**) $6{,}75$ cm (**E**) 9 cm

A5. Za naravna števila m, n in k velja: $2^m \cdot 3^n = 144^k$. Katero od ponujenih vrednosti lahko zavzame vsota $m+n$?

(**A**) 2001 (**B**) 2002 (**C**) 2003 (**D**) 2004 (**E**) 2005

B1. Kot pri oglišču B trikotnika ABC je za $90°$ večji od kota pri oglišču A. Simetrala notranjega kota pri oglišču C seka stranico AB v točki D. Simetrala zunanjega kota pri oglišču C seka nosilko stanice AB v točki E. Dokaži, da je daljica CD skladna z daljico CE.

B2. Na nekem smučišču so letno vozovnico v primerjavi s predhodno sezono podražili za $68\,\%$. Izkupiček pri prodaji pa se je s tem zvišal samo za $5\,\%$. Za koliko odstotkov je upadlo število prodanih vozovnic?

B3. Zapiši vsa cela števila x, ki zadoščajo obema neenačbama:

$$2x - 3(x-2) < 9$$

$$3 - (x-2)(3-x) \geq x^2.$$

Zapiši postopek in odgovor utemelji.

9. razred

A1. Naravna števila od 1 naprej so napisana drugo za drugim od leve proti desni brez presledka. Katera števka je napisana na 2022. mestu?

(**A**) 9 (**B**) 7 (**C**) 5 (**D**) 1 (**E**) 0

A2. Janko je na mizo postavil 10 posod. V prvi posodi je pripravil 100 g raztopine, v kateri je bilo $10\,\%$ sirupa, v drugi posodi 200 g raztopine z $20\,\%$ sirupa itd. V vsaki posodi je pripravil 100 g raztopine več kot v predhodni, tako da je vsebovala $10\,\%$ sirupa več kot raztopina v predhodni posodi. Tako je bilo v 10. posodi 1000 g raztopine s $100\,\%$ sirupa. Vsebino vseh 10 posod je prelil v veliko posodo. Kolikšen je delež sirupa v raztopini v veliki posodi?

(**A**) $50\,\%$ (**B**) $55\,\%$ (**C**) $60\,\%$ (**D**) $65\,\%$ (**E**) $70\,\%$

A3. Stranici pravokotnika sta dolgi 10 cm in 7 cm. Presečišča simetral vseh notranjih kotov pravokotnika so oglišča novega štirikotnika. Kolikšna je ploščina dobljenega štirikotnika?

(**A**) 2 cm^2 (**B**) $4{,}5$ cm^2 (**C**) 5 cm^2 (**D**) 6 cm^2 (**E**) $17{,}5$ cm^2

A4. Anja in Peter imata vsak svojo igralno kocko. Najprej hkrati vržeta kocki. Če sta števili pik na obeh kockah enaki, zmaga Anja. Če sta števili pik različni, Anja ponovno vrže svojo kocko. Če sta po drugem Anjinem metu števili pik na obeh kockah enaki, zmaga Peter, sicer se igra konča z neodločenim izidom. Kolikšna je verjetnost, da se igra konča z neodločenim izidom?

(**A**) 0 (**B**) $\frac{1}{6}$ (**C**) $\frac{5}{6}$ (**D**) $\frac{25}{36}$ (**E**) $\frac{27}{36}$

A5. Oznaka $k!$ pomeni $k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Na primer $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Katero je največje celo število n, za katerega je število $11!$ deljivo z 2^n?

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) ne obstaja

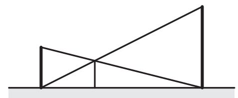
B1. Zbiralnik vode lahko polnimo s tremi različnimi cevmi. S prvo in drugo cevjo hkrati napolnimo zbiralnik v 20 minutah. Z drugo in tretjo cevjo hkrati napolnimo zbiralnik v 15 minutah. S prvo in tretjo cevjo hkrati napolnimo zbiralnik v 12 minutah. V kolikšnem času napolnimo zbiralnik s vsemi tremi cevmi hkrati?

B2. Določi a, da bosta enačbi ekvivalentni.

$$\left(\frac{2x}{3}-2\right)^2-\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)=-\frac{5(x-4)}{3}\cdot\frac{x+2}{3}+3\frac{7}{9}$$

$$\left(\frac{2a-x}{4}\right)^2-\left(\frac{x+a}{2}\right)^2=\left(\frac{3x}{4}\right)^2$$

B3. Jaka je napel vrv od vrha vsakega od dveh kolov, zapičenih v zemljo, do nožišča drugega kola, kot prikazuje slika. Manjši kol je visok 1 m, večji 2 m. Na kateri višini, merjeno od tal, se vrvi križata?



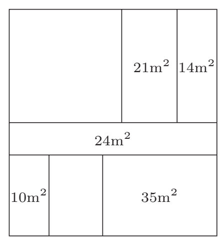
66. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje

1. letnik

A1. Največ koliko izmed vsot $x+y, x+z, x+w, y+z, y+w$ in $z+w$ je lahko lihih, če so x, y, z in w naravna števila?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) 6

A2. Marko je velik pravokotnik razdelil na 7 manjših pravokotnikov, katerih dolžine stranic v metrih so naravna števila. Na 5 od teh pravokotnikov je zapisal njihovo ploščino (glej sliko). Najmanj koliko kvadratnih metrov je skupna ploščina preostavih 2 pravokotnikov?



(**A**) 36 (**B**) 54 (**C**) 64 (**D**) 76 (**E**) 81

A3. Katero je največje naravno število n, za katero velja, da je pri deljenju števila n z 20 ostanek enak količniku?

(**A**) 21 (**B**) 92 (**C**) 231 (**D**) 399 (**E**) 440

B1. Poišči vse pare naravnih števil a in b, za katere velja

$$v=ab-2a-4b,$$

kjer je v najmanjši skupni večkratnik števil a in b.

B2. V kvadratu $ABCD$ so včrtane krožnica $\mathcal{K}$, polkrožnica $\mathcal{P}$ in četrtina krožnice $\mathcal{Q}$. Četrtina krožnice $\mathcal{Q}$ ima središče v oglišču A in vsebuje točki B in D. Polkrožnica $\mathcal{P}$ ima središče v razpolovišču stranice AD in vsebuje točki A in D. Krožnica $\mathcal{K}$ se dotika polkrožnice $\mathcal{P}$ v točki E, četrtine krožnice $\mathcal{Q}$ v točki F in stranice AB kvadrata $ABCD$ v točki G.

(a) Izrazi polmer krožnice $\mathcal{K}$ z dolžino stranice kvadrata $ABCD$.

(b) Dokaži, da je premica EF vzporedna stranici AB.

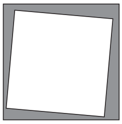
B3. Dana je tabela velikosti $1 \times n$, kjer je $n > 10$ naravno število. Polja tabele so po vrsti od leve proti desni oštevilčena z naravnimi števili od 1 do n. Polje številka 10 je črno in na njem je postavljen žeton, vsa ostala polja tabele so bela. Dva igralca izmenjaje igrata naslednjo igro. Igralec, ki je prvi na potezi, premakne žeton na poljubno belo polje tabele in to polje pobarva črno. V vsaki naslednji potezi igralec, ki je na potezi, premakne žeton na eno od belih polj tabele, pri čemer pa mora z žetonom preskočiti vsaj eno črno polje tabele. Polje, na katerega postavi žeton, nato pobarva črno. Igralec, ki prvi ne more izvesti poteze, izgubi igro. V odvisnosti od števila n določi, kateri igralec ima zmagovito strategijo, tisti, ki je prvi na potezi, ali tisti, ki je drugi na potezi.

2. letnik

A1. Vsota dveh naravnih števil je enaka trikratniku njune razlike, njun zmnožek pa je enak štirikratniku njune vsote. Koliko je vsota teh dveh naravnih števil?

(**A**) 9 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 15 (**E**) 18

A2. Kristina je narisala 2 kvadrata, katerih dolžine stranice v centimetrih so naravna števila, in osenčila del večjega kvadrata, ki leži zunaj manjšega kvadrata (glej sliko). Ploščina osenčenega območja je enaka $43\ \mathrm{cm}^2$. Koliko kvadratnih centimetrov je vsota ploščin obeh Kristininih kvadratov?



(**A**) 882 (**B**) 925 (**C**) 968 (**D**) 1685 (**E**) 2022

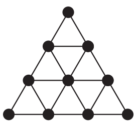
A3. Drugi največji delitelj nekega naravnega števila n je 2022. Kateri je tretji največji delitelj tega naravnega števila n?

(**A**) 337 (**B**) 674 (**C**) 1011 (**D**) 1348 (**E**) 2021

B1. Poišči vse pare naravnih števil k in n, za katere ima ulomek $\frac{4^{k-1}}{n}$ v decimalnem zapisu obliko $0,\overline{n}$, kjer $\overline{n}$ označuje periodo. Na primer, če je $n = 720$, tedaj je $0,\overline{n} = 0{,}720720720\ldots$

B2. Trapez $ABCD$ je včrtan krožnici $\mathcal{K}$. Nosilki stranic AD in BC se sekata v točki M, tangenti na krožnico $\mathcal{K}$ v točkah B in D pa se sekata v točki N. Dokaži, da sta daljici MN in AB vzporedni.

B3. V ravnini je narisanih 10 točk, ki tvorijo pravilno trikotno mrežo (glej sliko).

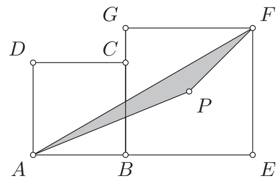


(a) Koliko je vseh enakostraničnih trikotnikov, katerih oglišča ležijo v točkah te mreže?

(b) Najmanj koliko točk moramo izbrisati, da ne bo obstajal noben enakostranični trikotnik, katerega oglišča so v preostalih točkah?

3. letnik

A1. Diagonali kvadratov $ABCD$ in $BEFG$ sta zaporedoma dolgi 8 cm in 11 cm. Točka P je presečišče diagonal kvadrata $BEFG$ (glej sliko). Koliko kvadratnih centimetrov je ploščina trikotnika APF?



(**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 10 (**D**) 11 (**E**) 12

A2. Naj bosta p in q različni praštevili. Za koliko različnih vrednosti a sta obe rešitvi kvadratne enačbe $x^2 + ax + pq = 0$ celoštevilski?

(**A**) 4 (**B**) 3 (**C**) 2 (**D**) 1 (**E**) 0

A3. Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija, za katero velja

$$f(x) = \begin{cases} x; & x \geq 2, \\ f(4-x); & 0 \leq x < 2, \\ f(x+2); & x < 0. \end{cases}$$

Koliko je $f(-5)$?

(**A**) -3 (**B**) -1 (**C**) 1 (**D**) 3 (**E**) 5

B1. Naj bo p praštevilo in $n \leq p^p$ naravno število. Dokaži, da vsaj eno od števil $n + p^p$ in $n \cdot p^p$ ni popoln kvadrat.

B2. Na krožnici $\mathcal{K}$ ležita točki A in B, tako da je dolžina loka $\widehat{AB}$ enaka $\frac{1}{3}$ obsega krožnice $\mathcal{K}$. Točka C leži na loku $\widehat{AB}$, točka D pa na tetivi AB. Izračunaj ploščino trikotnika ACB, če velja $|AD| = 2$, $|BD| = 1$ in $|CD| = \sqrt{2}$.

B3. Dana je tabela velikosti 1×2022. Polja tabele so po vrsti od leve proti desni oštevilčena s števili od 1 do 2022. Na polju 1 je črn žeton, na polju 2 pa bel žeton. Dva igralca, *črni* in *beli*, izmenjaje igrata naslednjo igro. Črni premika le črni žeton, beli pa le beli žeton. Igralec, ki je na potezi, prestavi svoj žeton na prazno polje tabele, tako da ga premakne v smeri proti nasprotnikovemu žetonu. Pri tem lahko nasprotnikov žeton preskoči ali pa tudi ne. Če igralec na potezi ne more izvesti poteze, se igra konča. Prvi na potezi je črni igralec. Določi največje naravno število k, pri katerem lahko črni igralec prisili belega, da prej ali slej prestavi beli žeton na eno od polj s številom večjim ali enakim k.

4. letnik

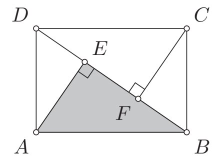
A1. Naravno definicijsko območje funkcije $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + (a+1)x + b}$ je enako $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Koliko je vrednost izraza $5a - 3b$?

(**A**) 3 (**B**) 7 (**C**) 11 (**D**) 13 (**E**) 27

A2. Koeficienti polinoma p stopnje 3 so enomestna naravna števila in hkrati velja $p(\sqrt{10}) = 12 + 34\sqrt{10}$. Koliko je $p(10)$?

(**A**) 46 (**B**) 352 (**C**) 2022 (**D**) 3142 (**E**) 3494

A3. Na diagonali BD pravokotnika $ABCD$ ležita točki E in F, tako da sta premici AE in CF pravokotni na diagonalo BD (glej sliko). Ploščina trikotnika ABE je enaka $\frac{1}{3}$ ploščine pravokotnika $ABCD$. Koliko je razmerje $|AD| : |AB|$?



(**A**) $2 : \sqrt{5}$ (**B**) $1 : \sqrt{2}$ (**C**) $2 : 3$ (**D**) $1 : \sqrt{3}$ (**E**) $1 : 2$

B1. Dano je zaporedje a_n, ki ustreza rekurzivni zvezi $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n}$ za vsa naravna števila n. Določi vse možne vrednosti prvega člena a_1, pri katerih bo zaporedje a_n vsebovalo člen z vrednostjo 2022.

B2. V mošnji je 5 rdečih in 5 zelenih kovancev. Vsak kovanec ima na eni strani zapisano število 0, na drugi strani pa število 1. Vsi kovanci so pošteni, torej je verjetnosti, da na kovancu pade število 0, enaka verjetnosti, da pade število 1. Iz mošnje naključno izberemo 6 kovancev in jih vržemo. Kolikšna je verjetnost, da je vsota števil, ki padejo na rdečih kovancih, enaka vsoti števil, ki padejo na zelenih kovancih?

B3. Poišči vse polinome p s celoštevilskimi koeficienti in vodilnim koeficientom 1, za katere je $p(u)$ iracionalno število za vsako iracionalno število u.

---

22. matematično tekmovanje za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol – državno tekmovanje

1. letnik

A1. Kolikšna je absolutna vrednost razlike rešitev enačbe $(1-(1+x^{-2})^{-1})^{-1} = 3{,}25$?

(**A**) -3 (**B**) -1 (**C**) 1 (**D**) 3 (**E**) 0

A2. V posodi je $60\ \%$ rdečih in $40\ \%$ modrih bonbonov. $30\ \%$ rdečih in $15\ \%$ modrih bonbonov je čokoladnih. Koliko procentov bonbonov ni čokoladnih?

(**A**) $24\ \%$ (**B**) $85\ \%$ (**C**) $90\ \%$ (**D**) $76\ \%$ (**E**) $45\ \%$

A3. Dan je izraz $\dfrac{x^{n-1}}{x^n - 2x^{n-1}} - \dfrac{x^n}{x^{n+1} - 4x^{n-1}}$. Kateri izraz je ekvivalenten izrazu za $x \neq 0$?

(**A**) $\frac{1}{(x-2)}$ (**B**) $\frac{2}{(x-2)(x+2)}$ (**C**) $\frac{1}{(x+2)}$ (**D**) $\frac{2x}{(x-2)(x+2)}$ (**E**) $\frac{1-x}{(x-2)(x+2)}$

B1. Poenostavi izraz $\frac{a^2-4}{a^2-4a+4} : \frac{a^2+5a+6}{a-2} - \frac{a^6-1}{a^4-a^3+a-1} : \frac{(a+3)(a^2+a+1)}{-a+1} + \frac{a^{n-1}}{a^n+3a^{n-1}}$, kjer je $a \in \mathbb{R}$ in hkrati $|a| > 3$.

B2. Točke $A(3,-6)$, B in C so koordinate trikotnika s ploščino 34 in negativno orientacijo. Izračunaj koordinate točke C, če je ordinata točke C dvakratnik njene abscise in sta koordinati točke B rešitvi sistema enačb $7x - \frac{5y}{6} = \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{16}{3}$, $\frac{3x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{2x}{3} + \frac{7y}{6}$, kjer je x prva koordinata in y druga koordinata točke B.

B3. Tone, Luka in Tine so zbirali star papir in dobili denarno nagrado. Prvotno naj bi bila nagrada razdeljena v razmerju $7:6:5$. Kasneje so dogovor spremenili in razdelili nagrado v razmerju $6:5:4$. Obe razmerji sta zapisani v istem vrstem redu, kot so navedena imena.

(a) Katera delitev je za Tineta ugodnejša? Utemelji odgovor.

(b) Tone je dobil pri drugi delitvi 216 evrov več kot Tine. Koliko evrov je dobil vsak izmed njih?

2. letnik

A1. Kateri izraz je ekvivalenten danemu izrazu $\frac{\sqrt[3]{4a^2\cdot\sqrt[3]{ab}\cdot(a+b)^0}}{(8b^{-2}\sqrt{a})^{-\frac{2}{3}}}$; $a,b,a+b\neq 0$?

(**A**) $2^{\frac{8}{3}}a^{\frac{10}{9}}b^{-\frac{11}{9}}$ (**B**) $2^{\frac{2}{3}}a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{4}{9}}$ (**C**) $2^{-3}a^{-\frac{5}{3}}b^{\frac{7}{9}}$ (**D**) $2^{-\frac{7}{6}}a^{-\frac{10}{3}}b^{\frac{5}{9}}$ (**E**) $2^{\frac{7}{3}}a^{-2}b^{\frac{1}{6}}$

A2. V trapezu $ABCD$ je dolžina kraka AD enaka $13\ cm$ in dolžina kraka BC enaka $9\ cm$. Kot $\sphericalangle BAD$ meri $37°$. Kolikšna je velikost kota $\sphericalangle BCD$, zaokrožena na dve decimalni mesti, če je kot $\sphericalangle CBA$ ostri?

(**A**) $37°$ (**B**) $143°$ (**C**) $48{,}29°$ (**D**) $119{,}62°$ (**E**) $71{,}59°$

A3. Za padajočo linearno funkcijo $f(x)=k\cdot x+n$ velja $f(x+y)=f(x)+f(y)-3$ in $f(k)=2f(1)$, za vsak $x,y\in\mathbb{R}$. Koliko je vrednost $f(-1)$?

(**A**) 4 (**B**) 0 (**C**) 2 (**D**) -2 (**E**) -4

B1. Za linearno funkcijo f velja:
a) Če njen smerni koeficient povečamo za 1 in prosti člen za 2, se njena vrednost pri nekem x_0 poveča za 5.
b) Če ta x_0 zmanjšamo za 2, ima funkcija f šestkrat tolikšno vrednost kot pri x_0.
c) Graf funkcije f poteka skozi točko $A(4,-3)$.
Zapiši ustrezne zveze in izračunaj predpis za $f(x)$ in vrednost x_0.

B2. Kvocient dolžin katete a in hipotenuze c v pravokotnem trikotniku je $3:4$.
a) Pod katerim kotom se sekata simetrali ostrih kotov?
b) Pod katerim kotom seka simetrala kota α nasprotno kateto?

B3. Za $x>0$ poenostavi izraz $(\sqrt{7}+2)\cdot\sqrt{11\sqrt{x}-4\sqrt{7x}}+\sqrt[3]{27x^{-3}+27x^{-2}+9x^{-1}+1}-\frac{3x}{\sqrt[4]{x^3}}$.

3. letnik

A1. Kaj je rešitev enačbe $\sqrt[5]{9^{x-3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}=0$?

(**A**) $x=-\frac{7}{4}$ (**B**) $x=-\frac{4}{7}$ (**C**) $x=\frac{4}{7}$ (**D**) $x=\frac{7}{4}$ (**E**) $x=-\frac{9}{4}$

A2. Kolikšen je natančen volumen vrtenine, ki jo dobimo, če pravokotnik s stranicama $a=2$ cm in $b=3\ cm$ zavrtimo okoli simetrale krajše stranice?

(**A**) $2\pi\ cm^3$ (**B**) $4\pi\ cm^3$ (**C**) $12\pi\ cm^3$ (**D**) $\pi\ cm^3$ (**E**) $3\pi\ cm^3$

A3. Katera tangenta na parabolo z enačbo $y = x^2 + x + 9$ je vzporedna premici z enačbo $-4x + 2y - 5 = 0$?

(**A**) $4x - 8y + 37 = 0$ (**B**) $4x - 8y - 37 = 0$ (**C**) $8x - 4y - 35 = 0$
(**D**) $-4x - 8y + 37 = 0$ (**E**) $8x - 4y + 35 = 0$

B1. Oglišča trikotnika ABC ležijo na krožnici s polmerom $5\ cm$ in jo delijo tako, da je razmerje velikosti notranjih kotov trikotnika $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 4$.

a) Na dve decimalni mesti natančno izračunaj dolžino najdaljše stranice.

b) Središčni izsek, katerega tetiva je najdaljša stranica trikotnika, zvijemo v stožec. Natančno izračunaj površino plašča stožca.

B2. Kvadratna funkcija h ima teme v presečišču grafov funkcij $f(x) = \log_3 x$ in $g(x) = -x + 4$ ter začetno vrednost -17. Zapiši predpis kvadratne funkcije h v splošni in temenski obliki. Grafa obeh funkcij f in g nariši v isti kartezični koordinatni sistem.

B3. Reši enačbo $4 \cdot 25^x + 5 \cdot 16^x = 9 \cdot 20^x$.

4. letnik

A1. Koliko je $\frac{13}{5} \sin x$, če je $\frac{13}{12} \cos x = -1$?

(**A**) 1 (**B**) $\frac{5}{13}$ (**C**) $-\frac{5}{13}$ (**D**) -1 (**E**) ± 1

A2. Želimo splesti $20\ m$ dolg navijaški šal. V koliko dneh ga bomo dokončali, če prvi dan spletemo $18\ cm$, nato pa vsak naslednji dan za $4\ cm$ več kot predhodni dan?

(**A**) v 27 dneh (**B**) v 18 dneh (**C**) v 36 dneh (**D**) v 28 dneh (**E**) v 497 dneh

A3. Hkrati vržemo 3 poštene igralne kocke različnih barv. V koliko primerih lahko dobimo vsoto pik 10?

(**A**) 30 (**B**) 27 (**C**) 10 (**D**) 6 (**E**) 36

B1. Vsota četrtega in šestega člena aritmetičnega zaporedja je kvadrat rešitve enačbe

$$\sqrt{16y + 9} - \sqrt{y - 1} = \sqrt{9y + 10}.$$

Razlika petega in tretjega člena je enaka rešitvi enačbe

$$4^{y-1} - 2^{2y-3} - 16^4 = 4^{y-2}.$$

Koliko je vsota prvih trideset členov tega zaporedja?

B2. V množici realnih števil natančno reši enačbo $\dfrac{x^6 - 5x^3}{14} = 1$.

B3. Reši dani nalogi: a) Izračunaj presečišči in velikost kota med krivuljama $y = -x^{-2}$ in $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$. b) Dana je funkcija $f(x) = \frac{x}{\ln x}$. Določi definicijsko območje funkcije f in intervale, na katerih funkcija f narašča in pada.

22. matematično tekmovanje za dijake poklicnih šol – državno tekmovanje

1. in 2. letnik

A1. Število 2022 lahko zapišemo kot produkt: $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$. Katera od spodnjih trditev je pravilna?

(A) Število 2022 je praštevilo. **(B)** Število 337 je praštevilo. **(C)** Število 2022 je deljivo z 10.
(D) $2022 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$ **(E)** 2022 deli 337.

A2. Dana so števila 11, 12, 13, 14, 15, 16 in 17. Koliko izmed njih je praštevil?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

A3. Kateri izmed spodnjih izrazov ima za $x = 11$ najmanjšo vrednost?

(A) $-x^2 + x$ **(B)** $-x^2 + x - 12$ **(C)** $(-x)^2 - x$
(D) $(-x)^2 - x + 12$ **(E)** $(-x)^2 - 12$

A4. V raziskavi je bilo 200 ljudem postavljeno eno vprašanje. Iz tabele je razvidno, kako so odgovarjali. Koliko odstotkov vprašanih moških je odgovorilo z NE?

spol	DA	NE	NE VEM	skupaj
moški	40	36	14	90
ženske	42	56	12	110
skupaj	82	92	26	200

(A) 18 **(B)** 36 **(C)** 40 **(D)** 45 **(E)** 46

A5. Točka $E(4, -\frac{1}{2})$ leži na premici

(A) $y = -4x + \frac{1}{2}$ **(B)** $y = x - \frac{9}{2}$ **(C)** $y = 4x - \frac{1}{2}$ **(D)** $y = -x + \frac{9}{2}$ **(E)** $y = \frac{1}{2}x - 4$

A6. Ko je Matej prevozil $\frac{5}{6}$ poti, mu je do cilja ostalo še 12 km. Kolikšna je dolžina celotne poti?

(A) 60 km **(B)** 72 km **(C)** 48 km **(D)** 36 km **(E)** 10 km

A7. Tekmovanje v triatlonu je sestavljeno iz 1 km plavanja, 24 km kolesarjenja in 6 km teka. Peter je plavanje opravil v 20 minutah. Kolesaril je z desetkrat tolikšno hitrostjo kot plaval, tekel pa s štirikrat tolikšno hitrostjo kot plaval. Če je tekmovanje začel ob 9.30, je prišel na cilj ob:

(A) 10.56 **(B)** 11.00 **(C)** 11.04 **(D)** 11.08 **(E)** 11.12

A8. Maja in Marjan sta kupila rabljen avto. Maja je prispevala 3000 , Marjan pa 5000 . Po letu in pol se je avto pokvaril in popravilo je stalo 1300 . Znesek za popravilo sta si razdelila v istem razmerju kot znesek za nakup avtomobila. Kolikšen znesek v evrih je za popravilo prispevala Maja?

(A) $162{,}50$ **(B)** $260{,}00$ **(C)** $433{,}33$ **(D)** $487{,}50$ **(E)** $812{,}50$

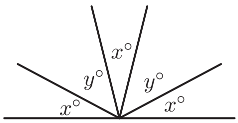
A9. Katera izmed spodnjih trditev ne velja za trikotnik s stranicami $a = 6$ cm, $b = 5.5$ cm in $c = 5$ cm?

(**A**) Kot α je večji od kota β. (**B**) Višina v_c je daljša od težiščnice t_c.

(**C**) Višina v_a je pravokotna na stranico a. (**D**) Simetrala stranice b razpolavlja stranico b.

(**E**) Težiščnica t_c povezuje razpolovišče stranice c z ogliščem C.

A10. Če je $x + y = 76$, je x:



(**A**) 28 (**B**) 30 (**C**) 35 (**D**) 36 (**E**) 38

B1. Med dijaki so opravili anketo o hišnih ljubljenčkih. Vsak je izbral 1 hišnega ljubljenčka, izbirali pa so mačko, psa ali kanarčka. Iz spodnje tabele je razvidno, kako so dijaki izbirali.

letnik	1.	2.	3.	4.
pes	14	16	7	10
mačka	6	11	13	10
kanarček	10	8	10	5

(a) Koliko dijakov je sodelovalo v anketi?

(b) Koliko sodelujočih dijakov 2. letnika ne bi izbralo kanarčka?

(c) Koliko odstotkov sodelujočih dijakov 4. letnika je izbralo mačko?

(d) Kolikšen delež vseh anketirancev bi izbralo mačko?

(e) Odgovore, ki so jih podali dijaki 1. letnika, predstavi s histogramom.

B2. Rešite naloge:

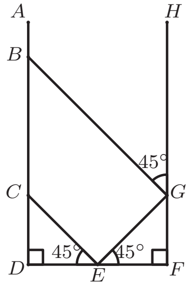
(a) Kolikšna je vrednost izraza $\left(\sqrt{4+\sqrt{4}}\right)^4$?

(b) Koliko je a, če je $\frac{a}{6} + \frac{6}{18} = 1$?

(c) Petmestno število je sestavljeno iz števk 1, 3, 5, 7 in 9. Število je večje od 80000 in manjše od 92000. Na mestu enic je števka 3. Stotice in desetice, v tem zaporedju, sestavljajo dvomestno število, ki je deljivo s 5. Katero je petmestno število?

(d) Šest prijateljev gre na dogodivščino s kanuji. V vsakem kanuju lahko sedita dve osebi. Prijatelje bodo naključno razporedili po kanujih po parih. Na koliko načinov jih lahko razporedijo?

(e) Z laserjem v točki C posvetimo v točko E. Žarek se odbije v točko G in nato v točko B. Razdalja $\overline{DE} = \overline{EF} = 1$ m. Kolikšna je razdalja $\overline{BD}$?



B3. Soda A in B, ki sta valjaste oblike, imata prostornino $1000\ \ell$. V sodu A je $500\ \ell$, v sodu B pa $200\ \ell$ vode. Iz soda A po cevi pretakamo vodo v sod B. Vsako minuto preteče $5{,}5\ \ell$ vode.

(a) Koliko vode je v sodu A po 10 minutah?

(b) Po kolikšnem času polnjenja bi bilo v sodu B $530\ \ell$ vode?

(c) Izračunajte, po kolikšnem času bo v obeh sodih enaka količina vode. Rezultat zaokrožite na minuto natančno.

(d) Do katere višine je na začetku pretakanja napolnjen sod A, če je premer soda $60\ \mathrm{cm}$? Rezultat zaokrožite na dve decimalki natančno.

3. in 4. letnik

A1. Kateri izmed spodnjih izrazov ima za $x = 11$ najmanjšo vrednost?

(A) $-x^2 + x$ **(B)** $-x^2 + x - 12$ **(C)** $(-x)^2 - x$
(D) $(-x)^2 - x + 12$ **(E)** $(-x)^2 - 12$

A2. Točka $E(4, -\frac{1}{2})$ leži na premici

(A) $y = -4x + \frac{1}{2}$ **(B)** $y = x - \frac{9}{2}$ **(C)** $y = 4x - \frac{1}{2}$ **(D)** $y = -x + \frac{9}{2}$ **(E)** $y = \frac{1}{2}x - 4$

A3. V raziskavi je bilo 200 ljudem postavljeno eno vprašanje. Iz tabele je razvidno, kako so odgovarjali. Koliko odstotkov vprašanih moških je odgovorilo z NE?

spol	DA	NE	NE VEM	skupaj
moški	40	36	14	90
ženske	42	56	12	110
skupaj	82	92	26	200

(A) 18 **(B)** 36 **(C)** 40 **(D)** 45 **(E)** 46

A4. Dana je kvadratna enačba $3x^2 + 6x - m = 0$. Če je ena rešitev enačbe $x = -3$, je m enak:

(A) -13 **(B)** -9 **(C)** 3 **(D)** 6 **(E)** 9

A5. Tekmovanje v triatlonu je sestavljeno iz $1\ \mathrm{km}$ plavanja, $24\ \mathrm{km}$ kolesarjenja in $6\ \mathrm{km}$ teka. Peter je plavanje opravil v 20 minutah. Kolesaril je z desetkrat tolikšno hitrostjo kot plaval, tekel pa s štirikrat tolikšno hitrostjo kot plaval. Če je tekmovanje začel ob 9.30, je prišel na cilj ob:

(A) 10.56 **(B)** 11.00 **(C)** 11.04 **(D)** 11.08 **(E)** 11.12

A6. Maja in Marjan sta kupila rabljen avto. Maja je prispevala 3000 , Marjan pa 5000 . Po letu in pol se je avto pokvaril in popravilo je stalo 1300 . Znesek za popravilo sta si razdelila v istem razmerju kot znesek za nakup avtomobila. Kolikšen znesek v evrih je za popravilo prispevala Maja?

(A) $162{,}50$ **(B)** $260{,}00$ **(C)** $433{,}33$ **(D)** $487{,}50$ **(E)** $812{,}50$

A7. Zmnožek števil $3 \cdot 16 \cdot 45 \cdot 81$ je deljiv s 6^n. Določi največji možen n.

(A) $n = 3$ **(B)** $n = 4$ **(C)** $n = 5$ **(D)** $n = 6$ **(E)** $n = 7$

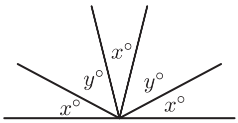
A8. V kontrolni nalogi je 30 vprašanj izbirnega tipa. Za pravilni odgovor dobi dijak 4 točke, za nepravilnega pa -1 točko. Miha je odgovoril na vsa vprašanja in dobil 60 točk. Na koliko vprašanj je odgovoril pravilno?

(A) 10 **(B)** 12 **(C)** 15 **(D)** 18 **(E)** 20

A9. Katera izmed spodnjih trditev ne velja za trikotnik s stranicami $a = 6$ cm, $b = 5.5$ cm in $c = 5$ cm?

(**A**) Kot α je večji od kota β.
(**B**) Višina v_c je daljša od težiščnice t_c.
(**C**) Višina v_a je pravokotna na stranico a.
(**D**) Simetrala stranice b razpolavlja stranico b.
(**E**) Težiščnica t_c povezuje razpolovišče stranice c z ogliščem C.

A10. Če je $x + y = 76$, je x:



(**A**) 28 (**B**) 30 (**C**) 35 (**D**) 36 (**E**) 38

B1. Med dijaki so opravili anketo o hišnih ljubljenčkih. Vsak je izbral 1 hišnega ljubljenčka, izbirali pa so mačko, psa ali kanarčka. Iz spodnje tabele je razvidno, kako so dijaki izbirali.

letnik	1.	2.	3.	4.
pes	14	16	7	10
mačka	6	11	13	10
kanarček	10	8	10	5

(a) Koliko dijakov je sodelovalo v anketi?

(b) Koliko sodelujočih dijakov 2. letnika ne bi izbralo kanarčka?

(c) Koliko odstotkov sodelujočih dijakov 4. letnika je izbralo mačko?

(d) Kolikšen delež vseh anketirancev bi izbralo mačko?

(e) Odgovore, ki so jih podali dijaki 1. letnika, predstavi s histogramom.

B2. Dane so linearne funkcije $f(x) = -x + 1$, $g(x) = -4x + 4$, $h(x) = \frac{1}{3}x - 2$.

(a) Nariši grafe linearnih funkcij v isti koordinatni sistem (enota naj bo 1 cm, k premicam zapiši pripadajočo linearno funkcijo).

(b) Zapiši presečišče $P(x, y)$ funkcij f in g.

(c) Kateri dve funkciji sta padajoči?

(d) Izračunaj ničlo funkcije $h(x)$.

B3. Soda A in B, ki sta valjaste oblike, imata prostornino $1000\ \ell$. V sodu A je $500\ \ell$, v sodu B pa $200\ \ell$ vode. Iz soda A po cevi pretakamo vodo v sod B. Vsako minuto preteče $5{,}5\ \ell$ vode.

(a) Koliko vode je v sodu A po 10 minutah?

(b) Po kolikšnem času polnjenja bi bilo v sodu B $530\ \ell$ vode?

(c) Izračunajte, po kolikšnem času bo v obeh sodih enaka količina vode. Rezultat zaokrožite na minuto natančno.

(d) Do katere višine je na začetku pretakanja napolnjen sod A, če je premer soda 60 cm? Rezultat zaokrožite na dve decimalki natančno.

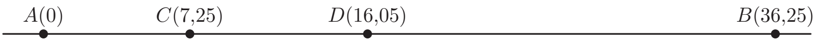
Rešitve 58. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje – državno tekmovanje

6. razred

A1. Vseh šest ljudi tehta skupaj 480 kg. Da bi se vsi peljali le v dveh skupinah, bi morali trije izmed njih tehtati natanko 240 kg, kar pa ni mogoče.

A2. Če dva učenca pomenita četrtino, je vseh učencev, ki so pisali odlično, 8. Test sta pisali $\frac{2}{3}$ od 84 šestošolcev, kar je 56 učencev. Delež učencev, ki so dobili odlično oceno, je $\frac{8}{56} = \frac{1}{7}$.

A3.



Predstavimo točke na številski premici. Naj bo $A(0)$. Potem je $B(36{,}25)$. Ker je dolžina daljice AC enaka četrtini dolžine daljice CB, moramo razdeliti dolžino daljice AB na 5 enakih delov. Točka C je na prvi petini, torej je $C(7{,}25)$. Točka D pa je od B oddaljena $20{,}2$ cm, torej je koordinata točke $D(16{,}05)$ ($36{,}25 - 20{,}2 = 16{,}05$). Dolžina daljice CD je $16{,}05 - 7{,}25 = 8{,}8$ cm.

A4. Barbara je brisala večkratnike števila 4: $4, 8, \ldots$, Cilka večkratnike števila 2: $2, 6, \ldots$ in Drago večkratnike števila 3: $3, 9, \ldots$ Cilka ni izbrisala števila 4, ker ga je izbrisala že Barbara, in Drago ni izbrisal števila 6, ker ga je izbrisala že Cilka. Ker so vsi izbrisali enako količino števil, in sicer po 2, je bilo na tabli 9 števil. Če bi jih bilo zapisanih več, jih ne bi izbrisali vsi enako.

A5. Če bi babica dodala 8 evrov in si znesek delila z dedkom, bi vsak izmed njiju dobil trikrat toliko kot en vnuk, kar pomeni, da bi skupaj imela šestkrat toliko, kot bi dobil en vnuk. Če pa bi dobitek razdelila med pet vnukov, bi ji ostali 3 evri. Torej, če bi tem 3 evrom dodala 8 evrov, bi dobila 11 evrov, kolikor bi dobil en vnuk. To pa pomeni, da je na loteriji zadela $5 \cdot 11 + 3 = 58$ evrov.

A6. Prvi pravokotnik sestavi z $1 \cdot 3 = 3$ kroglicami, drugega z $2 \cdot 4 = 8$ kroglicami, tretjega s $3 \cdot 5 = 15$ kroglicami. Število kroglic, ki bi jih porabila za naslednje pravokotnike po vrsti, je: $24, 35, 48, 63, 80 \ldots$ Sproti preverjamo, kako je s porabo kroglic. Za prve 4 pravokotnike porabi $3 + 8 + 15 + 24 = 50$ kroglic, za prvih 5 pravokotnikov $50 + 35 = 85$ kroglic, za prvih 7 pravokotnikov $85 + 48 = 133$ kroglic. Tedaj bi ji ostalo $150 - 133 = 17$ kroglic, kar ne bi bilo dovolj za oblikovanje naslednjega pravokotnika. Tini ostane 17 kroglic.

B1. Pehta je Mojci dala $\frac{1}{10}$ kaše, v loncu pa je je ostalo še $\frac{9}{10}$. Rožle je dobil $\frac{1}{9}$ preostanka, torej $\frac{1}{10}$ prvotne količine in je je ostalo še $\frac{8}{10}$. Od tega je dobil Brincelj $\frac{1}{8}$, kar pomeni $\frac{1}{10}$ začetne količine. V posodi je bilo tako še $\frac{7}{10}$ kaše, Kekec je je pojedel $\frac{1}{7}$ oziroma $\frac{1}{10}$ celotne kaše. Ostalo je še $\frac{6}{10}$ kaše in ker je je volk pojedel $\frac{1}{6}$, torej $\frac{1}{10}$ vse kaše, je Bedanec dobil polovico lonca kuhane kaše. Iz besedila izvemo, da je Bedanec dobil $3\,\ell$ kaše, torej je Pehta skuhala $6\,\ell$ kaše. Tako je Bedanec dobil polovico kaše, vsak od ostalih pa desetino.

B2. Sivi lik si lahko predstavljamo kot sivi kvadrat, ki ga delno prekrivata črna kvadrata. Obseg vidnega sivega dela je enak obsegu sivega kvadrata. Torej ima dolžino stranice 9 cm. Ker so ob njem trije mali beli kvadrati z dolžino stranice 2 cm, je preostanek 3 cm. Črni kvadrat desno spodaj ima 5 cm dolgo stranico in ploščino 25 cm^2.

7. razred

A1. Če je število enako vsoti štirih zaporednih naravnih števil, mora dati pri deljenju s 4 ostanek 2. Edino navedeno število, ki ustreza temu, je 22.

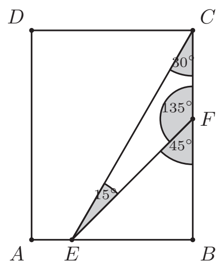
A2. Z a in b označimo dolžini stranic prvega pravokotnika ter z a' in b' stranici novega pravokotnika. Za dolžini velja: $a' = a + \frac{1}{3}a = \frac{4}{3}a$. Ker sta ploščini pravokotnikov enaki, lahko zapišemo: $a \cdot b = \frac{4}{3}a \cdot b'$. Dobimo, da je $b = \frac{4}{3}b'$ oziroma $b' = \frac{3}{4}b$, torej smo širino skrajšali za četrtino.

A3. Ker je število deljivo s 5, mora biti zadnja števka 0 ali 5. Prvotno število se zagotovo konča z 0, saj sicer ne bi bilo deljivo s 4. Število je deljivo s 3, ko je vsota števk deljiva s 3. Torej je predzadnja števka lahko le 1, 4 ali 7. Zaradi deljivosti s 4 ustreza le števka 4, torej se število konča s 40. Vsota zadnjih dveh števk je 4.

A4. Iz $\frac{3}{8} < \frac{3}{p} < \frac{4}{3}$ sledi $\frac{3}{4} < \frac{p}{3} < \frac{8}{3}$ ali $\frac{9}{12} < \frac{4p}{12} < \frac{32}{12}$. Zato je $9 < 4p < 32$ oziroma $\frac{9}{4} < p < 8$. To pomeni, da neenakosti zadoščajo 3 praštevila, in sicer $3, 5$ in 7.

A5. Renata je popila polovično količino vode, kot jo je popil Jan, oziroma je Jan popil dvakrat toliko vode kot Renata. Monika je popila dvakrat toliko vode kot Jan, oziroma štirikrat toliko kot Renata. Skupaj so popili 7-krat toliko vode, kot jo je popila Renata, oziroma toliko vode, kot jo je imel s sabo eden izmed njih. Iz tega sledi, da je Renata popila $\frac{1}{7}$ svoje vode.

A6. Rešitev: Ker je $|AE| = \frac{1}{4}|AB|$, je $|EB| = 3$ cm. Zato je trikotnik EBF enakokraki pravokotni trikotnik in velja $\angle EFB = 45°$. Potem je kot $\angle CFB = 180° - 45° = 135°$. Vsota velikosti kotov trikotnika CEF je $180°$, torej je $\angle FEC = 15°$.

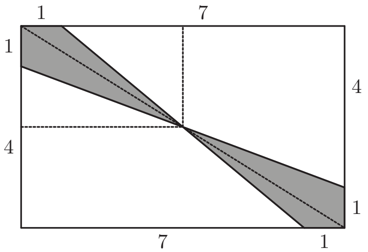


B1. Ker 50 sedmošolcev ne obiskuje nobene od navedenih dejavnosti, jih 50 obiskuje vsaj eno dejavnost. Vemo, da 31 sedmošolcev obiskuje glasbeno šolo in 27 šport, torej jih $31+27-50 = 8$ obiskuje oboje. Obe dejavnosti obiskujeta 2 dekleti več kot fantov, torej obe dejavnosti obiskuje 5 deklet in 3 fantje. Ker šport obiskuje 27 sedmošolcev in jih 8 obiskuje oboje, jih 19 obiskuje samo šport. Šport obiskuje 12 fantov, 3 fantje obiskujejo oboje, torej 9 fantov obiskuje samo šport. Deklet, ki obiskujejo samo šport, je tako $19 - 9 = 10$. Samo glasbo obiskuje $31 - 8 = 23$ sedmošolcev, od tega je 12 deklet, zato je fantov 11. Fantov, ki obiskujejo glasbeno šolo ali športno dejavnost, je $9 + 3 + 11 = 23$.

B2. Ker je druga števka dvakratnik prve in je sedma števka enaka prvi, je tudi šesta števka dvakratnik prve. Zato je vsota prve, druge, šeste in sedme števke šestkratnik prve števke. Vemo še, da je vsota vseh števk sodo število, zato je tudi četrta števka sodo število. Imamo natanko dve možnosti. Če je četrta števka 2, potem sta tretja in peta števka enaki 4. Vsota teh treh je 10, vsota ostalih štirih števk pa je 16. Ker 16 ni deljivo s 6, ta možnost ni prava. Druga možnost je, da je četrta števka enaka 4, potem sta tretja in peta števka enaki 8. Vsota teh treh števk je 20, vsota ostalih pa 6. Iz tega sledi, da sta prva in sedma števka enaki 1, druga in šesta pa 2. Iskani palindrom je 1284821.

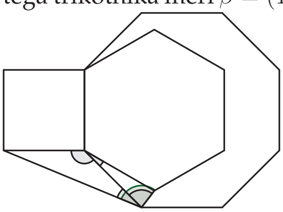
8. razred

A1. Z diagonalo razdelimo osenčeni del na 4 trikotnike, ki imajo eno od stranic dolgo 1 cm. Dva od teh trikotnikov imata višino enako polovici dolžine pravokotnika, to je 4 cm, in ploščino $\frac{1 \cdot 4}{2} = 2$ cm^2. Ostala dva trikotnika imata višino enako polovici širine pravokotnika, to je $2{,}5$ cm, in ploščino $\frac{1 \cdot 2{,}5}{2} = 1{,}25$ cm^2. Vsota ploščin vseh štirih trikotnikov je $2 \cdot 2 + 2 \cdot 1{,}25 = 6{,}5$ cm^2.

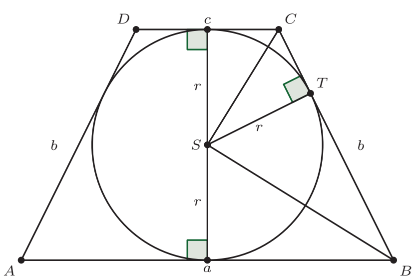


A2. Izračunamo $\left(\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{0.01}}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{0.1}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{1+10}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{11}\right)^{-1} = 11.$

A3. Stranice kvadrata, pravilnega šestkotnika in pravilnega osemkotnika so skladne. Vsak notranji kot v kvadratu meri $90°$, v pravilnem šestkotniku $120°$, v pravilnem osemkotniku pa $135°$. Trikotnik, ki ga omejujeta stranica pravilnega šestkotnika in pravilnega osemkotnika, je enakokraki. Notranji kot ob vrhu tega trikotnika meri $135° - 120° = 15°$. Tedaj je vsak izmed notranjih kotov ob osnovnici tega trikotnika velik $\alpha - \beta = (180° - 15°) : 2 = 82,5°$. Tudi trikotnik, ki ga omejujeta stranica kvadrata in pravilnega osemkotnika, je enakokraki. Notranji kot ob vrhu tega trikotnika meri $135°$, saj je del polnega kota ob vrhu tega trikotnika in ga izračunamo s $360° - 15° - 120° - 90° = 135°$. Tedaj vsak izmed notranjih kotov ob osnovnici tega trikotnika meri $\beta = (180° - 135°) : 2 = 22,5°$. Velikost iskanega kota je $82,5° + 22,5° = 105°$.

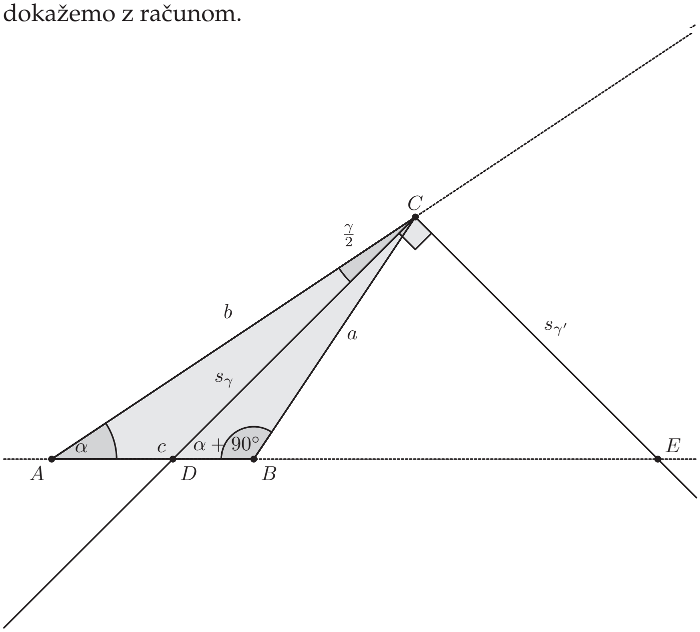


A4. Ker je polmer včrtane krožnice 2 cm, je višina tega trapeza 4 cm. Iz ploščine izračunamo srednjico, ki meri $3{,}5$ cm, torej je vsota dolžin osnovnic 7 cm. Zaradi skladnih trikotnikov je krak b sestavljen iz polovice osnovnice a in c: $b = \frac{a}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a+c}{2}$. Od tod dobimo rezultat, da je $b = 4{,}5$ cm.



A5. Zapišemo $144^k = (2^4 \cdot 3^2)^k = 2^{4k} \cdot 3^{2k}$. Torej je $m = 4k$, $n = 2k$ in $m + n = 6k$. Iskano število mora biti deljivo s 6 (sodo in z vsoto števk, deljivo s 3), med ponujenimi odgovori ustreza samo število 2004.

B1. Narišemo si sliko in vidimo, da se simetrali sekata pod pravim kotom, kar lahko tudi hitro dokažemo z računom.



Notranji kot pri A označimo z α, kot pri B z β in kot pri C z γ. $\angle DCB$ je $\frac{\gamma}{2}$ in $\angle BCE$ je $\frac{\gamma_1}{2}$. Kot γ izrazimo s kotom α: $\gamma = 180° - (\alpha + 90° + \alpha) = 90° - 2\alpha$. Zato je zunanji kot $\gamma_1 = 90° + 2\alpha$. Od tod pa dobimo, da je $\frac{\gamma}{2} = 45° - \alpha$ in $\frac{\gamma_1}{2} = 45° + \alpha$. Vsota teh dveh polovic kotov je $90°$. Sedaj izračunamo kot $\angle BDC$ iz trikotnika BCD: $\angle D = 180° - \left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) = 180° - (90° + \alpha + 45° - \alpha) = 45°$. Na podoben način izračunamo še kot $\angle CEB$ iz trikotnika BEC: $\angle E = 180° - \left(\beta_1 + \frac{\gamma_1}{2}\right) = 180° - (90° - \alpha + 45° + \alpha) = 45°$. Dokazali smo, da sta kota $\angle D$ in $\angle E$ skladna in merita $45°$, zato je trikotnik DEC enakokrak in sta stranici CD in CE skladni.

B2. Denimo, da so v predhodnem letu prodali n vozovnic po ceni c. Tedaj je bil izkupiček enak nc. Nova cena je za $68\,\%$ odstotkov višja in je enaka $1{,}68c$, izkupiček pa je za $5\,\%$ višji in znaša $1{,}05nc$. Število prodanih vstopnic je torej $1{,}05nc : 1{,}68c$, kar znese $0{,}625n$. Torej je število kupcev enako $62{,}5\,\%$ števila kupcev iz predhodnega leta, število prodanih vozovnic se je zmanjšalo za $37{,}5\,\%$.

B3. Rešimo prvo neenačbo: $2x - 3(x - 2) < 9$

$$2x - 3x + 6 < 9$$

$$-x < 3$$

Rešitev: $x > -3$.
Rešimo še drugo neenačbo: $3 - (x - 2)(3 - x) \geq x^2$

$$3 - (-x^2 + 5x - 6) \geq x^2$$

$$x^2 - 5x + 9 \geq x^2$$

$$-5x \geq -9$$

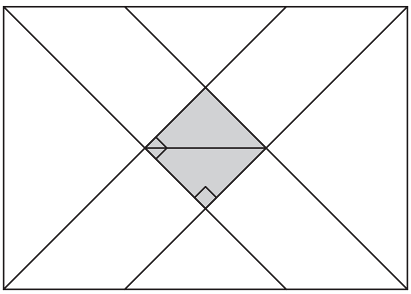
Rešitev: $x \leq 1.8$.
Iščemo vsa cela števila, ki zadoščajo pogoju $-3 < x \leq 1.8$. To so: $-2, -1, 0, 1$.

9. razred

A1. Če eno za drugim zapišemo naravna števila od 1 do 999, zasedejo prvih $9 + 180 + 2700 = 2889$ mest. Enomestna števila zasedejo prvih 9 mest, 90 dvomestnih števil pa naslednjih 180. Torej iščemo trimestno število. Iz enačbe $9 + 180 + 3x = 2022$, izračunamo $x = 611$. Vemo, da je 1. (najmanjše) trimestno število 100, 101. trimestno število je 200, ..., 601. trimestno število je 700, torej je 611. trimestno število 710 in iskana števka je 0.

A2. Ko je Janko prelil vsebine vseh posod v večjo, je bilo v večji posodi $100 + 200 + 300 + 400 + 500 + 600 + 700 + 800 + 900 + 1000 = 5500$ g raztopine. Izračunamo še, koliko gramov sirupa je bilo v posamezni posodi. V prvi posodi je bilo 10 g sirupa ($10\,\%$ od 100 g), v drugi 40 g ($20\,\%$ od 200 g), v tretji 90 g, v četrti 160 g, v peti 250 g, v šesti 360 g, v sedmi 490 g, v osmi 640 g, v deveti 810 g in v deseti posodi 1000 g sirupa. V večji posodi je tako bilo $10+40+90+160+250+360+490 + 640 + 810 + 1000 = 3850$ g sirupa. Delež sirupa v večji posodi je bil $\frac{3850}{5500} = 0{,}7 = 70\,\%$.

A3. Simetrale pravih kotov se sekajo pod pravimi koti. Nastali štirikotnik je kvadrat z diagonalo 3 cm. Njegova ploščina je enaka $p = \frac{d^2}{2} = \frac{3^2}{2} = 4{,}5$ cm^2.



A4. Število različnih možnosti pri metu dveh igralnih kock je 36 in v 30 primerih sta števili pik različni. Pri drugem Anjinem metu je 6 možnih izidov in v petih je izid drugačen od Petrovega. Verjetnost neodločene igre je zato $\frac{30}{36} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.

A5. Razcepimo število $11!$ na prafaktorje: $11! = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 11 \cdot (5 \cdot 2) \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot (3 \cdot 2) \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$. Vidimo, da potenca 2^8 deli $11!$, zato je največji $n = 8$.

B1.
Rešitev 1:
Prva sama napolni zbiralnik v x minutah, v 1 minuti tako $\frac{1}{x}$ zbiralnika. Druga sama napolni zbiralnik v y minutah, v 1 minuti tako $\frac{1}{y}$ zbiralnika. Tretja sama napolni zbiralnik v z minutah, v 1 minuti tako $\frac{1}{z}$ zbiralnika. Prva in druga skupaj v 1 minuti: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{20}$ zbiralnika. Druga in tretja skupaj v 1 minuti: $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{15}$ zbiralnika. Prva in tretja skupaj v 1 minuti: $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{12}$ zbiralnika. Zanimajo nas vse tri cevi skupaj v 1 minuti, tako $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{1}{n}$, kjer z n označimo čas polnjenja s tremi cevmi. Zaradi znanih vsot dveh členov, velja enakost $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 2\cdot\frac{1}{n}$. Vsote dveh členov nadomestimo s števili $(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})+(\frac{1}{z}+\frac{1}{x})+(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) = 2\cdot\frac{1}{n}$ in $\frac{1}{20}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15} = 2\cdot\frac{1}{n}$. Po razširitvi na skupni imenovalec je rešitev enačbe $n = 10$, kar pomeni, da je zbiralnik poln v 10 minutah.

Rešitev 2:
Sklepamo, da v 1 minuti prva in druga cev skupaj napolnita $\frac{1}{20}$ zbiralnika, druga in tretja cev skupaj $\frac{1}{15}$, prva in tretja cev skupaj pa $\frac{1}{12}$ zbiralnika. Če bi torej imeli 6 cevi, in sicer še 3 take, kot jih imamo, bi vseh 6 cevi v 1 minuti napolnilo $\frac{1}{15}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$ zbiralnika in zbiralnik bi bil poln v 5 minutah. Ker pa imamo le 3 cevi, zbiralnik napolnimo v 10 minutah.

B2.

$$\left(\frac{2x}{3}-2\right)^2-\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)=-\frac{5(x-4)}{3}\cdot\frac{x+2}{3}+3\frac{7}{9}$$

$$\frac{4x^2}{9}-\frac{8x}{3}+4-\left(x^2-\frac{4}{9}\right)=-\frac{5}{9}(x^2-2x-8)+3\frac{7}{9}$$

$$\frac{4x^2}{9}-\frac{8x}{3}+4-x^2+\frac{4}{9}=-\frac{5}{9}x^2+\frac{10}{9}x+\frac{40}{9}+\frac{34}{9}$$

$$4x^2-24x+36-9x^2+4=-5x^2+10x+40+34$$

$$-24x-10x=40-36-4+34$$

$$-34x=34$$

$$x=-1$$

$$\left(\frac{2a-x}{4}\right)^2-\left(\frac{x+a}{2}\right)^2=\left(\frac{3x}{4}\right)^2$$

$$\left(\frac{2a-(-1)}{4}\right)^2-\left(\frac{-1+a}{2}\right)^2=\left(\frac{3(-1)}{4}\right)^2$$

$$\left(\frac{2a+1}{4}\right)^2-\left(\frac{a-1}{2}\right)^2=\left(\frac{-3}{4}\right)^2$$

$$\frac{4a^2+4a+1}{16}-\frac{a^2-2a+1}{4}=\frac{9}{16}$$

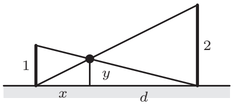
$$4a^2+4a+1-4(a^2-2a+1)=9$$

$$4a^2+4a+1-4a^2+8a-4=9$$

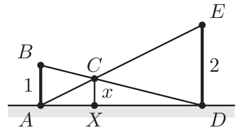
$$12a=12$$

$$a=1$$

B3.
Rešitev 1:
Označimo z d razdaljo med koloma, z x razdaljo med nižjim kolom in presečiščem vrvic ter z y višino presečišča vrvic. Zapišimo sorazmerji istoležnih stranic v podobnih trikotnikih: $1:y=d:(d-x)$ in $2:y=d:x$. Iz drugega sorazmerja izrazimo $x=\frac{yd}{2}$ in vstavimo v prvo sorazmerje $1:y=d:d(1-\frac{y}{2})$, od koder sledi: $1:y=1:(1-\frac{y}{2})$. Rešimo enačbo in dobimo $y=\frac{2}{3}$. To pomeni, da se vrvi križata na višini $\frac{2}{3}$ metra.



Rešitev 2:
Narisana trikotnika ABC in EDC sta podobna, zato sta njuni istoležni stranici v razmerju $2:1$. Če z x označimo iskano višino, z X pa nožišče, zaradi podobnosti trikotnikov ADB in XDC velja: $1 : x = 3 : 2$. To pomeni, da se vrvi križata na višini $\frac{2}{3}$ metra.

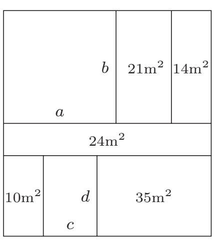


Rešitve 66. matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje

1. letnik

A1. Opazimo, da so dane vsote ravno vse možne vsote po 2 izmed števil x, y, z in w. Če nobeno od števil x, y, z in w ni liho, tudi nobena vsota ni liha. Če je liho natanko 1 izmed števil, so lihe natanko 3 vsote, če sta lihi 2 števili, so lihe 4 vsote, če so liha 3 števila, so lihe 3 vsote, če pa so liha vsa 4 števila, ni nobena vsota liha. Torej so lihe največ 4 vsote.

A2.



Označimo dolžine stranic v metrih preostalih 2 manjših pravokotnikov z a, b, c in d, kot je prikazano na sliki. Opazimo, da je širina velikega pravokotnika največ 24 m. Ker je $21+14 > 24$, mora biti $b > 1$, hkrati pa mora b deliti 21 in 14, saj so stranice pravokotnikov v metrih naravna števila. Ker je največji skupni delitelj števil 21 in 14 enak 7, mora biti $b = 7$. Podobno sklepamo, da je $d > 1$ in d deli 10 in 35, zato je $d = 5$. Širina velikega pravokotnika v metrih je torej enaka $a + \frac{21}{b} + \frac{14}{b} = a + 5$ in hkrati $\frac{10}{d} + c + \frac{35}{d} = c + 9 > 9$. Skupna ploščina preostalih 2 pravokotnikov bo najmanjša takrat, ko bosta a in c najmanjša možna, torej ko bo širina velikega pravokotnika najmanjša možna. Ker pa je ta širina v metrih večja od 9 in mora deliti 24, je enaka najmanj 12. Tedaj je $a = 7$ in $c = 3$, skupna ploščina preostalih 2 pravokotnikov pa je $ab + cd = 7 \cdot 7 + 3 \cdot 5 = 64$ m^2.

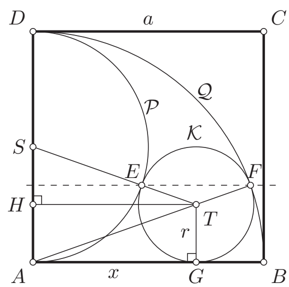
A3. Naj bo k ostanek in količnih pri deljenju števila n z 20. Tedaj je $k \leq 19$ in $n = k \cdot 20 + k = 21k$. Torej je $n \leq 21 \cdot 19 = 399$. Preizkus $399 = 19 \cdot 20 + 19$ pokaže, da število $n = 399$ ustraza pogoju.

B1. Naj bo d največji skupni delitelj števil a in b in naj bosta m in n taki naravni števili, da je $a = dm$ in $b = dn$. Tedaj sta števili m in n tuji in velja $v = dmn$. Z upoštevanjem teh zvez iz dane enačbe sledi $dmn = d^2mn - 2dm - 4dn$, od koder po krajšanju z d dobimo

$$mn = dmn - 2m - 4n.$$

Leva stran enačbe je deljiva z m, zato mora biti tudi desna, kar pomeni, da m deli $4n$. Števili m in n sta tuji, zato m deli 4, torej je $m \in \{1, 2, 4\}$. Podobno sklepamo, da n deli $2m$ in zato n deli 2, torej je $n \in \{1, 2\}$. Ker sta števili m in n tuji, ne moreta biti hkrati sodi, zato imamo za pare (m, n) naslednje štiri možnosti: $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (4, 1)$. Iz zgornje enačbe izrazimo $d = \frac{mn+4n+2m}{mn} = 1 + \frac{4}{m} + \frac{2}{n}$ in za vse štiri možnosti po vrsti izračunamo $d = 7, 6, 5, 4$. Z upoštevanjem enakosti $a = dm$ in $b = dn$, dobimo štiri rešitve za pare (a, b), to so $(7, 7)$, $(6, 12)$, $(10, 5)$ in $(16, 4)$.

B2.



(a) Označimo dolžino stranice kvadrata $ABCD$ z a, polmer krožnice $\mathcal{K}$ pa z r. Naj bo S središče polkrožnice $\mathcal{P}$, T središče krožnice $\mathcal{K}$ in H pravokotna projekcija točke T na stranico AD. Dolžino daljice AG označimo z x. Ker je $|AT| = |AF| - |FT| = a - r$, po Pitagorovem izreku za trikotnik AGT velja $x^2 + r^2 = (a - r)^2$, kar lahko poenostavimo do $x^2 = a^2 - 2ar$. Ker je $AGTH$ pravokotnik, je $|HT| = x$ in $|SH| = |SA| - |AH| = \frac{a}{2} - r$. Hkrati je $|ST| = |SE| + |ET| = \frac{a}{2} + r$, zato po Pitagorovem izreku za trikotnik THS velja $x^2 + (\frac{a}{2} - r)^2 = (\frac{a}{2} + r)^2$, kar lahko poenostavimo do $x^2 = 2ar$. Iz obeh enakosti sledi $a^2 - 2ar = 2ar$ oziroma $r = \frac{a}{4}$.

(b) Iz rezultata pri točki (a) sledi $|AH| = \frac{a}{4}$ in zato tudi $|HS| = |SA| - |AH| = \frac{a}{2} - \frac{a}{4} = \frac{a}{4}$, torej je trikotnik ATS enakokrak z vrhom pri T. Hkrati je tudi trikotnik FTE je enakokrak z vrhom pri T. Od tod izpeljemo

$$\angle EFT = \frac{\pi - \angle FTE}{2} = \frac{\angle ETA}{2} = \angle HTA = \angle GAT,$$

torej je premica EF vzporedna stranici AB.

B3. Pokažimo, da ima v primeru $n = 19$ zmagovito strategijo drugi igralec, za vse ostale n pa prvi igralec.

Naj bo $n = 19$. Tedaj je na vsaki strani polja 10 natanko 9 polj tabele. Če prvi igralec v prvi potezi prestavi žeton na polje manjše od 10, tedaj lahko drugi igralec odigra strategijo $11, 12, 13, \ldots, 19$, pri kateri prvega igralca prisili, da vedno premakne žeton na polje manjše od 10, sam pa premakne žeton na polje večje od 10. Prepričajmo se, da res lahko tako odigra. Ko je na vrsti prvi igralec in je žeton na polju $k > 10$, so vsa polja med 10 in k črna, vsa polja večja od

k pa bela. Prvi igralec mora zato žeton premakniti v levo in pri tem preskočiti polje 10. Ko je na vrsti drugi igralec, lahko izvede svojo potezo, saj preskoči črno polje 10. Ker ima prvi igralec pri tem na voljo največ 9 potez, drugi pa natanko 9 potez, bo prvemu igralcu prej zmanjkalo

ustreznih belih polj kot drugemu in bo zato izgubil. Podobno sklepamo, da če prvi igralec v prvi potezi prestavi žeton na polje večje od 10, tedaj lahko drugi igralec odigra zmagovito strategijo $9, 8, 7, \ldots, 1$.

Naj bo $n \neq 19$. Tedaj je na eni strani polja 10 več polj tabele kot na drugi strani. Če je več polj na levi strani polja 10, lahko prvi igralec odigra zmagovito strategijo $9, 8, 7, \ldots$, saj bo tedaj podobno kot zgoraj drugemu igralcu prej zmanjkalo ustreznih belih polj. Če pa je več polj na desni strani polja 10, lahko prvi igralec odigra zmagovito strategijo $11, 12, 13, \ldots$

2. letnik

A1. Označimo ti dve naravni števili z m in n. Tedaj je $m + n = 3(m - n)$ in $mn = 4(m + n)$. Iz prve enakosti dobimo $4n = 2m$ oziroma $m = 2n$. Ko slednje vstavimo v drugo enakost, dobimo $2n^2 = 12n$, od koder sledi $n = 6$. Torej je $m = 12$ in $m + n = 18$.

A2. Označimo dolžino stranice večjega kvadrata v centimetrih z a, manjšega pa z b. Tedaj je $43 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Ker pa sta $a + b$ in $a - b$ naravni števili in je 43 praštevilo, sledi $a + b = 43$ in $a - b = 1$. Torej je $a = 22$ in $b = 21$. Vsota ploščin obeh Kristininih kvadratov je enaka $a^2 + b^2 = 484 + 441 = 925$ cm^2.

A3. Drugi največji delitelj naravnega števila n je enak $\frac{n}{p}$, kjer je p najmanjše praštevilo, ki deli n. Torej je $n = 2022p = 2 \cdot 3 \cdot 337 \cdot p$. Od tod sledi, da je n deljiv z 2, torej je $p = 2$. Tretji največji delitelj števila n je zato enak $2 \cdot 337 \cdot 2 = 1348$.

B1. Iz navodil naloge sledi $\frac{4^{k-1}}{n} = 0{,}\overline{n}$. Označimo z m število števk števila n. Če enačbo pomnožimo z 10^m, dobimo $\frac{4^{k-1} \cdot 10^m}{n} = n{,}\overline{n}$. Prvo enačbo odštejemo od druge, da dobimo $\frac{4^{k-1} \cdot 10^m}{n} - \frac{4^{k-1}}{n} = n$, kar lahko poenostavimo do

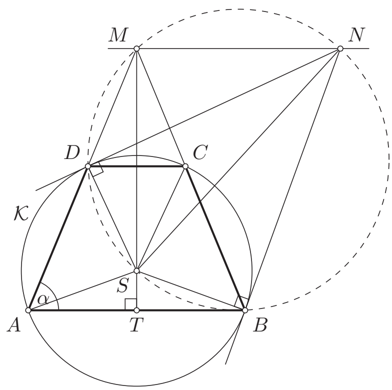
$$4^{k-1} \cdot (10^m - 1) = n^2.$$

Ker je $10^m - 1 = \underbrace{99\ldots99}_{m} = 9 \cdot \underbrace{11\ldots11}_{m}$, sledi

$$4^{k-1} \cdot 9 \cdot \underbrace{11\ldots11}_{m} = n^2.$$

Desna stran enačbe je popoln kvadrat, hkrati pa je tudi število $4^{k-1} \cdot 9 = (2^{k-1} \cdot 3)^2$ popoln kvadrat. Od tod sklepamo, da mora biti tudi število $\underbrace{11\ldots11}_{m}$ popoln kvadrat. Če je $m \geq 2$ je ostanek števila $\underbrace{11\ldots11}_{m}$ pri deljenju s 4 enak ostanku števila 11 pri deljenju s 4, torej 3. Toda popoln kvadrat ima pri deljenju s 4 lahko ostanek le 0 ali 1. Od tod sledi, da mora biti $m = 1$, torej je n cifra. Dobimo enačbo $4^{k-1} \cdot 9 = n^2$. Ker pa je n cifra, je $n^2 \leq 81$, zato mora biti $4^{k-1} \leq 9$ oziroma $k \leq 2$. Rešitvi sta torej $k = 1$ in $n = 3$ ter $k = 2$ in $n = 6$. V prvem primeru imamo $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$, v drugem primeru pa $\frac{4}{6} = 0{,}\overline{6}$.

B2.



Naj bo S središče krožnice $\mathcal{K}$ in T presečišče premice MS s stranico AB. Ker je trapez $ABCD$ tetiven, je enakokrak s krakoma AD in BC. Označimo $\alpha = \angle BAD = \angle CBA$. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da je $|AB| > |CD|$. Trikotnik BMA je enakokrak z vrhom pri M, premica MS pa je zaradi simetrije njegova višina, torej je pravokotna na stranico AB. Kot $\angle BSD$ je središčni kot nad lokom $\widehat{BD}$ krožnice $\mathcal{K}$, kot $\angle BAD = \alpha$ pa obodni kot nad istim lokom, zato je $\angle BSD = 2\alpha$. Ker sta trikotnika SND in SNB skladna, sledi $\angle NSD = \angle BSN = \alpha$. Torej sta trikotnika ATM in SDN podobna, saj je ujemata v dveh kotih (pravem kotu in kotu α), zato je $\angle AMT = \angle SND$. Po izreku o obodnem kotu sledi, da so točke D, S, N in M konciklične, torej je $\angle SMN = \angle SDN = \frac{\pi}{2}$. S tem smo dokazali, da je premica MS pravokotna na daljici MN in AB, zato sta ti dve daljici vzporedni.

2. način. Naj bo S središče krožnice $\mathcal{K}$ in T presečišče premice MS s stranico AB. Podobno kot v prvi rešitvi sklepamo, da je trapez $ABCD$ enakokrak in označimo $\alpha = \angle BAD = \angle CBA$. Zaradi simetrije lahko zopet predpostavimo, da je $|AB| > |CD|$ oziroma $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Tedaj je $\angle DMB = \angle AMB = \pi - \angle MBA - \angle BAM = \pi - 2\alpha$. Kot $\angle BSD$ je središčni kot nad lokom $\widehat{BD}$ krožnice $\mathcal{K}$, kot $\angle BAD = \alpha$ pa obodni kot nad istim lokom, zato je $\angle BSD = 2\alpha$. Štirikotnik $SBND$ je po Talesovem izreku tetiven, zato je $\angle DNB = \pi - \angle BSD = \pi - 2\alpha$. S tem smo pokazali, da je $\angle DNB = \angle DMB$, torej je tudi štirikotnik $DBNM$ tetiven. Od tod sledi

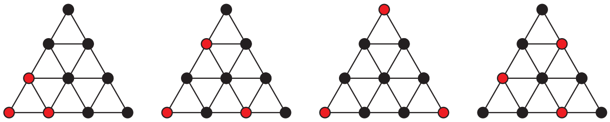
$$\angle AMN = \angle DMN = \pi - \angle NBD = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \angle DBS\right) = \frac{\pi}{2} + \angle DBS = \frac{\pi}{2} + \angle DMS.$$

Zaradi simetrije je premica MS oziroma MT višina enakokrakega trikotnika BMA, zato je $\angle MTA = \frac{\pi}{2}$ in $\angle DMS = \angle DMT = \frac{\pi}{2} - \angle TAM = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Iz zgornje enakosti zato sledi

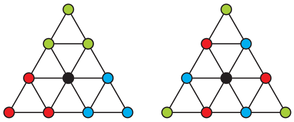
$$\angle AMN = \frac{\pi}{2} + \angle DMS = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \pi - \alpha = \angle ADC,$$

torej sta daljici MN in AB vzporedni.

B3. (a) Takih trikotnikov je natanko 15, od tega je 9 majhnih, 3 so srednje veliki, 1 je velik, 2 pa sta poševna. Slike prikazujejo po en primer trikotnika vsakega od naštetih štirih tipov.



(b) Zagotovo je potrebno izbrisati vsaj 3 točke, sicer bi vsaj 1 od obarvanih enakostraničnih trikotnikov na spodnjih slikah imel vsa oglišča v neizbrisanih točkah.



Če bi zadoščalo izbrisati 3 točke, tedaj srednja točka mreže ne bi bila izbrisana, vsaj 1 izbrisana točka pa bi morala biti oglišče velikega trikotnika. Torej bi bili izmed 6 točk, ki so sosednje srednji točki mreže, izbrisani največ 2 točki, med preostalimi 4 neizbrisanimi pa bi obstajali 2, ki sta sosednji. Ti 2 sosednji točki bi s sredinsko točko mreže tvorili mali enakostranični trikotnik z oglišči v neizbrisanih točkah. Torej je potrebno izbrisati vsaj 4 točke. Kot kaže spodnja slika, zadošča izbrisati 4 točke.

3. letnik

A1. Stranici kvadratov sta dolgi $|AB| = \frac{8}{\sqrt{2}}$ cm in $|BE| = \frac{11}{\sqrt{2}}$ cm. Ker je točka P razpolovišče diagonale BF, je ploščina trikotnika APF enaka ploščini trikotnika ABP, ta pa je enaka

$$\frac{|AB| \cdot \frac{|BG|}{2}}{2} = \frac{\frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{11}{2\sqrt{2}}}{2} = \frac{88}{8} = 11 \text{ cm}^2.$$

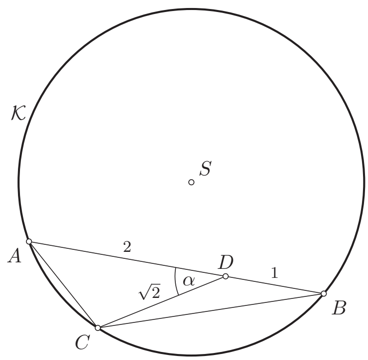
A2. Ker je koeficient pri x^2 enak 1, je po Vietovih pravilih produkt x_1x_2 obeh rešitev enačbe enak pq. Ker morata biti obe rešitvi celoštevilski in sta p in q praštevili, imamo za množico rešitev $\{x_1, x_2\}$ le možnosti $\{1, pq\}$, $\{-1, -pq\}$, $\{p, q\}$ ali $\{-p, -q\}$. Po Vietovih pravilih je koeficient a enak $-(x_1 + x_2)$, zato ima lahko 4 različne vrednosti, to so $1 + pq$, $-1 - pq$, $p + q$ in $-p - q$. Vse 4 vrednosti so med sabo različne.

A3. Z upoštevanjem lastnosti funkcije f izračunamo

$$f(-5) = f(-5 + 2) = f(-3) = f(-3 + 2) = f(-1) = f(-1 + 2) = f(1) = f(4 - 1) = f(3) = 3.$$

B1. Denimo, da sta obe števili popolna kvadrata, torej $n + p^p = a^2$ in $n \cdot p^p = b^2$, kjer sta a in b naravni števili. Če je $p = 2$, tedaj je $n \leq 2^2 = 4$. Toda nobeno od števil $1 + 2^2$, $2 + 2^2$, $3 + 2^2$ in $4 + 2^2$ ni popoln kvadrat. Torej mora biti p liho praštevilo. Pišimo $p = 2k + 1$, kjer je k naravno število. Sledi $n \cdot p^{2k+1} = b^2$. Torej mora biti b^2 deljiv s p^{2k+1} in zato je b deljiv s p^{k+1}. Pišimo $b = p^{k+1}d$, kjer je d naravno število. Tedaj je $n \cdot p^{2k+1} = p^{2k+2}d^2$ oziroma $n = pd^2$. Ker je $n \leq p^p = p^{2k+1}$, sledi $d \leq p^k$. Pišimo $d = p^m u$ in $a = p^r v$, kjer sta m in r nenegativni celi števili, u in v pa naravni števili tuji p. Tedaj je $m \leq k$ in $n = pd^2 = p^{2m+1}u^2$, zato iz enačbe $n+p^p = a^2$ sledi $p^{2m+1}u^2 + p^{2k+1} = p^{2r}v^2$ oziroma $p^{2m+1}(u^2 + p^{2k-2m}) = p^{2r}v^2$. Če je $m < k$, tedaj p deli p^{2k-2m}, a ne deli u^2, zato je največja potenca praštevila p, ki deli levo stran enakosti, p^{2m+1}, največja potenca praštevila p, ki deli desno stran, pa p^{2r}. Prišli smo do protislovja, saj je prva potenca liha, druga pa soda. Torej ostane le možnost $k = m$. Toda v tem primeru je $n = p^{2k+1}u^2 = p^p u^2$, zato iz $n \leq p^p$ sledi $u^2 = 1$ in $n = p^p$. V tem primeru pa število $n + p^p = 2p^p$ ni popoln kvadrat, saj $p \neq 2$. Prišli smo do protislovja, od koder sklepamo, da vsaj eno od števil $n + p^p$ in $n \cdot p^p$ ni popoln kvadrat.

B2.



Naj bo S središče krožnice $\mathcal{K}$. Ker je dolžina loka $\widehat{AB}$ enaka $\frac{1}{3}$ obsega krožnice $\mathcal{K}$, je $\angle ASB = \frac{2\pi}{3}$ oziroma $\angle BSA = \frac{4\pi}{3}$. Po izreku o obodnem in središčnem kotu, je $\angle BCA = \frac{1}{2}\angle BSA = \frac{2\pi}{3}$. Označimo $|BC| = a$ in $|AC| = b$ ter $\angle ADC = \alpha$. Po kosinusnih izrekih za trikotnike ACB, ACD in CBD velja

$$9 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\tfrac{2\pi}{3},$$
$$b^2 = 4 + 2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}\cos\alpha,$$
$$a^2 = 1 + 2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2}\cos(\pi - \alpha).$$

Z upoštevanjem lastnosti $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ in $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ enačbe poenostavimo do

$$9 = a^2 + b^2 + ab,$$
$$b^2 = 6 - 4\sqrt{2}\cos\alpha,$$
$$a^2 = 3 + 2\sqrt{2}\cos\alpha.$$

Če drugi enačbi prištejemo dvakratnik tretje enačbe, dobimo $2a^2 + b^2 = 12$, iz prve enačbe pa izrazimo $a^2 + b^2 = 9 - ab$. Sedaj pokombiniramo ti dve enačbi. Če od prve odštejemo drugo, dobimo $a^2 = 3+ab$, če pa od dvakratnika druge odštejemo prvo, dobimo $b^2 = 6-2ab = 2(3-ab)$. Izpeljani enačbi nazadnje še zmnožimo, da dobimo

$$a^2b^2 = 2(3 - ab)(3 + ab) = 2(9 - a^2b^2) = 18 - 2a^2b^2.$$

Od tod izrazimo $a^2b^2 = 6$ oziroma $ab = \sqrt{6}$. Ploščina trikotnika ACB je zato enaka

$$p = \frac{1}{2}ab\sin\tfrac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

2. način. Ker je $|SA| = |SB|$ in $\angle ASB = \frac{2\pi}{3}$, je trikotnik ABS sestavljen iz dveh polovic enakostraničnega trikotnika. Ker je $|AB| = 3$, sledi $|SA| = |SB| = \sqrt{3}$.

S pomočjo kosinusnega izreka v trikotniku DBS zdaj izračunamo

$$|DS| = \sqrt{|BD|^2 + |BS|^2 - 2|BD|\cdot|BS|\cdot\cos\angle SBD} = \sqrt{1 + 3 - 2\cdot 1\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1,$$

od koder sledi še $\angle BDS = \frac{2\pi}{3}$, saj smo ravnokar dokazali, da je trikotnik BDS enakokrak z vrhom D.

Zdaj pa opazimo, da je $|SD|^2 + |CD|^2 = 1 + 2 = 3 = |SC|^2$, kar pomeni, da je CDS pravokotni trikotnik s pravim kotom ob oglišču D. Sledi, da je $\angle ADC = \frac{\pi}{6}$, od koder s pomočjo

kosinusnega izreka izračunamo

$$|AC| = \sqrt{|AD|^2 + |CD|^2 - 2|AD|\cdot|CD|\cdot\cos\frac{\pi}{6}} = \sqrt{4 + 2 - 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{6 - 2\sqrt{6}}$$

in

$$|BC| = \sqrt{|BD|^2 + |CD|^2 + 2|AD|\cdot|CD|\cos\frac{\pi}{6}} = \sqrt{1 + 2 + 2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3 + \sqrt{6}}.$$

Sledi, da je ploščina trikotnika ABC enaka

$$\frac{1}{2}|AC|\cdot|BC|\cdot\sin\angle BCA = \frac{1}{2}\sqrt{(6 - 2\sqrt{6})(3 + \sqrt{6})}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

B3. Pokazali bomo, da je $k = 2021$. Ce črni igralec vsakič premakne svoj žeton na polje neposredno desno od polja z belim žetonom, mora beli igralec vsakič premakniti svoj žeton v desno in pri tem preskočiti črni žeton. Ker je polj tabele končno mnogo, prej ali slej eden od igralcev ne more izvesti svoje poteze. Če črni igralec ne more izvesti poteze, to pomeni, da je beli žeton na polju 2022. Če beli igralec ne more izvesti poteze, to pomeni, da je črni žeton na polju 2022. Ker pa je na potezi beli, je črni ravnokar odigral svojo potezo, torej je beli žeton na polju 2021. V obeh primerih je bil beli igralec prisiljen postaviti svoj žeton na polje s številom večjim ali enakim 2021.

Pokazati moramo še, da lahko beli igralec igra tako, da žetona nikoli ne postavi na polje 2022. Beli igralec lahko izbere naslednjo strategijo. Če mora svoj žeton prestaviti v levo, ga prestavi na polje 1, če je to prazno, sicer pa na polje 2. Če pa mora svoj žeton prestaviti v desno, ga prestavi na polje 2021, če je to prazno, sicer pa na polje 2020. Pokazati moramo, da pri upoštevanju te strategije beli igralec nikoli ni prisiljen postaviti žetona na polje 2022, torej se lahko drži strategije. Lahko se sicer zgodi, da črni igralec belega postavi v situacijo, ko ta sploh ne more izvesti nobene dovoljene poteze, ampak tedaj se igra konča in belega igralca to ne moti.

Če bi bil beli igralec v svoji potezi prisiljen postaviti žeton na polje 2022, bi to pomenilo, da mora premakniti žeton v desno in da je polje 2022 prazno. Če bi bilo polje 2021 prazno, bi beli igralec po svoji strategiji premaknil žeton na polje 2021. Ker pa tega ne more, mora biti na polju 2021 žeton. Ta žeton ne more biti bel, saj bi sicer beli igralec premikal žeton v levo.

Torej je na polju 2021 črn žeton. Če bi bilo polje 2020 prazno, bi beli igralec po svoji strategiji žeton premaknil na polje 2020. Ker pa tega ne more, mora biti na polju 2020 beli žeton. Toda črni igralec je ravnokar izvedel svojo potezo, kar pomeni, da v prejšnji potezi belega igralca, črni žeton ni bil na polju 2021. Zato beli igralec ob upoštevanju svoje strategije belega žetona zagotovo ne bi prestavil na polje 2020, saj bi to storil le v primeru, ko bi premikal v desno in bi bilo polje 2021 zasedeno s črnim žetonom, kar smo pa ravnokar ovrgli. Do take situacije bi lahko torej prišlo le, če se beli igralec ne bi držal svoje strategije.

4. letnik

A1. Iz pogoja naloge sledi, da mora veljati $x^2 + (a+1)x + b = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$. Torej je $a + 1 = 4$ oziroma $a = 3$ in $b = 4$. Sledi $5a - 3b = 5 \cdot 3 - 3 \cdot 4 = 3$.

A2. Pišimo $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, kjer so a, b, c in d enomestna naravna števila. Tedaj je

$$p(\sqrt{10}) = a \cdot 10\sqrt{10} + b \cdot 10 + c \cdot \sqrt{10} + d = (10b + d) + (10a + c)\sqrt{10}.$$

Ker pa so a, b, c in d enomestna naravna števila, torej števke, je

$$p(\sqrt{10}) = \overline{bd} + \overline{ac}\sqrt{10} = 12 + 34\sqrt{10}.$$

Sledi $b = 1$, $d = 2$, $a = 3$ in $c = 4$. Torej je $p(x) = 3x^3 + x^2 + 4x + 2$ in zato je $p(10) = 3000 + 100 + 40 + 2 = 3142$.

A3. Ker je ploščina trikotnika ABE je enaka $\frac{1}{3}$ ploščine pravokotnika $ABCD$, ploščina trikotnika ABD pa $\frac{1}{2}$ ploščine pravokotnika $ABCD$, je ploščina trikotnika DAE enaka $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ploščine pravokotnika $ABCD$. Razmerje ploščin trikotnikov DAE in ABE je zato enako $p_{DAE} : p_{ABE} = \frac{1}{6} : \frac{1}{3} = 1 : 2$. Ker pa sta ta dva trikotnika podobna, je razmerje njunih istoležnih stranic enako $|AD| : |AB| = \sqrt{1} : \sqrt{2} = 1 : \sqrt{2}$.

B1. S pomočjo rekurzivne zveze izpeljemo

$$a_{n+2}=\frac{1+a_{n+1}}{1-a_{n+1}}=\frac{1+\frac{1+a_n}{1-a_n}}{1-\frac{1+a_n}{1-a_n}}=\frac{(1-a_n)+(1+a_n)}{(1-a_n)-(1+a_n)}=\frac{2}{-2a_n}=-\frac{1}{a_n},$$

z upoštevanjem te zveze pa še

$$a_{n+4}=-\frac{1}{a_{n+2}}=-\frac{1}{-\frac{1}{a_n}}=a_n.$$

Zaporedje a_n je torej periodično s periodo 4, zato imajo njegovi členi le štiri različne vrednosti, to so a_1, $a_2=\frac{1+a_1}{1-a_1}$, $a_3=-\frac{1}{a_1}$ in $a_4=-\frac{1}{a_2}=\frac{a_1-1}{a_1+1}$. Imamo torej štiri možnosti, lahko je $a_1=2022$, lahko je $\frac{1+a_1}{1-a_1}=2022$, od koder izrazimo $a_1=\frac{2021}{2023}$, lahko je $-\frac{1}{a_1}=2022$, od koder dobimo $a_1=-\frac{1}{2022}$, ali pa je $\frac{a_1-1}{a_1+1}=2022$ od koder sledi $a_1=-\frac{2023}{2021}$. Prepričati se moramo še, da v teh primerih noben člen zaporedja ni enak 1, sicer zaporedje z dano rekurzivno zvezo ne bi bilo dobro definirano. V vseh štirih primerih dobimo zaporedje $\ldots,2022,-\frac{2023}{2021},-\frac{1}{2022},\frac{2021}{2023},2022,\ldots$, le da se zaporedje začne pri drugi vrednosti.

2. način. Iz rekurzivne zveze izrazimo $a_n=\frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+1}$. Ker mora biti nek člen v zaporedju enak 2022, s pomočjo izpeljane formule poračunamo, da morajo biti njemu predhodnji členi po vrsti enaki $\frac{2021}{2023},-\frac{1}{2022},-\frac{2023}{2021},2022,\ldots$ Od tod sledi, da je zaporedje periodično in da mora biti člen a_1 enak $\frac{2021}{2023}$, $-\frac{1}{2022}$, $-\frac{2023}{2021}$ ali 2022. V tem primeru iz periodičnosti in izračunanih vrednosti avtomatično sledi, da noben člen v zaporedju ni enak 1.

B2. Ker so kovanci pošteni, lahko verjetnost izračunamo po formuli

$$P=\frac{\text{ugodne možnosti}}{\text{vse možnosti}}.$$

Preštejmo najprej vse možnosti. Dobimo jih tako, da iz posode najprej izberemo 6 kovancev na $\binom{10}{6}$ načinov in nato vsak kovanec vržemo na 2 načina. Vseh možnosti je torej $\binom{10}{6}\cdot 2^6=13\,440$.

Ugodne možnosti preštejemo tako, da obravnavamo primere koliko rdečih kovancev izvlečemo in na koliko od teh kvancev pade število 1.

5 rdečih kovancev lahko izvlečemo na $\binom{5}{5}=1$ način, preostali 1 zelen kovanec pa na $\binom{5}{1}=5$ načinov. Ker je zelen kovanec en sam, lahko na rdečih kovancih pade število 1 bodisi 0-krat ali 1-krat. Prva možnost se lahko zgodi na $\binom{5}{0}=1$ način, druga pa na $\binom{5}{1}=5$ načinov. V obeh primerih je zeleni kovanec enolično določen. To je skupaj

$$1\cdot5\cdot(1+5)=30$$

možnosti.

4 rdeče kovance lahko izvlečemo na $\binom{5}{4}=5$ načinov, preostala 2 zelena kovanec pa na $\binom{5}{2}=10$ načinov. Tedaj lahko na rdečih kovancih pade število 1 bodisi 0-krat, 1-krat ali 2-krat. Prva možnost se lahko zgodi na $\binom{4}{0}=1$ način, saj sta tedaj zelena kovanca enolično določena. Druga možnost se lahko zgodi na $\binom{4}{1}\cdot\binom{2}{1}=8$ načinov, saj mora pasti število 1 na enem od štirih rdečih kovancev in na enem od dveh zelenih kovancev. Zadnja možnost se lahko zgodi na $\binom{4}{2}=6$ načinov, saj sta zelena kovanca tedaj enolično določena. Tako dobimo skupaj

$$5\cdot10\cdot(1+8+6)=750$$

možnosti.

3 rdeče kovance lahko izvlečemo na $\binom{5}{3} = 10$ načinov, preostalie 3 zelena kovanec pa na $\binom{5}{3} = 10$ načinov. Na 3 rdečih kovancih lahko pade število 1 bodisi 0-krat, 1-krat, 2-krat ali 3-krat, ravno tolikokrat pa mora pasti število 1 tudi na 3 zelenih kovancih. Prva možnost se

lahko zgodi na $\binom{3}{0}^2 = 1$ način, druga na $\binom{3}{1}^2 = 9$ načinov, tretja na $\binom{3}{2}^2 = 9$ načinov in zadnja na $\binom{3}{3}^2 = 1$ način. Skupaj je torej

$$10 \cdot 10 \cdot (1 + 9 + 9 + 1) = 2000$$

možnosti.

Zaradi simetrije med rdečimi in zelenimi kovanci je ugodnih možnosti, ko izvlečemo 2 oz. 1 rdeč kovanec, enako kot ugodnih možnosti, ko izvlečemo 2 oz. 1 zelen kovanec, torej toliko kot če izvlečemo 4 oz. 5 rdečih kovancev. Vseh ugodnih možnosti je torej

$$30 + 750 + 2000 + 750 + 30 = 3\,560.$$

Verjetnost, da je vsota števil, ki padejo na rdečih kovancih, enaka vsoti števil, ki padejo na zelenih kovancih, je zato enaka

$$P = \frac{3\,560}{13\,440} = \frac{89}{336}.$$

B3. Edini konstantni polinom z vodilnim koeficientom 1 je $p(x) = 1$, ki pa očitno ne ustreza pogojem naloge. V nadaljevanju zato predpostavimo, da je p nekonstanten polinom, ki ustreza pogojem naloge. Ker ima p celoštevilske koeficiente, je $p(0)$ celo število, zato pogojem naloge ustreza tudi vsak polinom $p_n(x) = p(x) - p(0) - n$, kjer je n celo število. Ker je vodilni koeficient polinoma p enak 1 in p ni konstanten polinom, gre vrednost $p(x)$ čez vse meje, ko gre x proti neskončno, zato za vsak dovolj velik n premica $y = n + p(0)$ seka graf polinoma p. To pa pomeni, da ima polinom p_n vsaj eno realno ničlo. Po predpostavki p_n slika iracionalna števila v iracionalna števila, zato ničla tega polinoma ne more biti iracionalna, ampak je racionalna.
Oglejmo si zdaj polinome p_q, kjer je q praštevilo. Vemo že, da ima za dovolj velik q ta polinom vsaj eno racionalno ničlo. Ker pa ima p_q celoštevilske koeficiente, vodilni koeficient 1 in konstantni koeficient $-q$, so njegove racionalne ničle lahko le 1, -1, q ali $-q$. Vsako od števil 1 in -1 je lahko ničla kvečjemu enega izmed polinomov p_q, saj se ti med seboj razlikujejo za konstanto. To pomeni, da za vsa dovolj velika praštevila q velja, da je q ali $-q$ ničla polinoma p_q, oziroma da je $p(q) = p(0) + q$ ali $p(-q) = p(0) + q$. Torej bodisi obstaja neskončno praštevil q, za katera je $p(q) = p(0) + q$, ali pa obstaja neskončno praštevil q, za katera je $p(-q) = p(0) + q$. Polinoma se lahko ujemata v neskončno točkah le, kadar sta enaka, torej je bodisi $p(x) = p(0) + x$ ali pa $p(x) = p(0) - x$. Ker je vodilni koeficient polinoma p enak 1, druga možnost odpade.
Edini polinomi, ki lahko ustrezajo pogojem naloge, so torej oblike $p(x) = x + a$, kjer je a celo število. Vsi taki polinomi tudi res ustrezajo pogojem naloge.

2. način. Edini konstantni polinom z vodilnim koeficientom 1 je $p(x) = 1$, ki pa očitno ne ustreza pogojem naloge. Torej je p nekonstanten polinom z vodilnim koeficientom 1. To pomeni, da obstaja tako naravno število k, da polinom p na intervalu $[k, \infty)$ strogo narašča proti neskončno in zato na tem intervalu zavzame vse vrednosti večje ali enake $m = p(k)$. To pomeni, da ima vsaka od enačb

$$\begin{aligned} p(x) &= m, \\ p(x) &= m+1, \\ p(x) &= m+2, \\ &\dots \end{aligned}$$

vsaj eno realno rešitev na intervalu $[k, \infty)$. Označimo te rešitve po vrsti z $a_0, a_1, a_2, \ldots$, pri čemer lahko vzamemo $a_0 = k$. Ker je k naravno število, je m celo število, zato iz pogoja naloge sledi, da so rešitve $a_0, a_1, a_2 \ldots$ racionalna števila. Toda za vsako celo število n ima polinom $p(x) - n$ cele koeficiente in vodilni koeficient enak 1, zato so vse njegove racionalne ničle v resnici celoštevilske, zato so $a_0, a_1, a_2, \ldots$ cela števila. Ker polinom p na intervalu $[k, \infty)$ strogo narašča, je zaporedje $a_0, a_1, a_2, \ldots$ strogo naraščajoče. Ker pa ima polinom p celoštevilske koeficiente, za vsako naravno število n število $a_{n+1} - a_n$ deli $p(a_{n+1}) - p(a_n) = 1$. Od koder sledi $a_{n+1} - a_n = 1$, saj je $a_{n+1} > a_n$. Torej je zaporedje $a_0, a_1, a_2, \ldots$ enako $k, k+1, k+2, \ldots$, kar pomeni, da velja

$$\begin{aligned} p(k) &= m, \\ p(k+1) &= m+1, \\ p(k+2) &= m+2, \\ &\dots \end{aligned}$$

Tudi za polinom $r(x) = x + m - k$ velja

$$\begin{aligned} r(k) &= m, \\ r(k+1) &= m+1, \\ r(k+2) &= m+2, \\ &\dots \end{aligned}$$

torej se polinoma p in r ujemata v neskončno mnogo točkah in zato sta enaka. S tem smo pokazali, da je polinom p oblike $p(x) = x + a$ za neko celo število a, vsak tak polinom pa očitno ustreza pogojem naloge.

Rešitve 22. matematičnega tekmovanja za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol – državno tekmovanje

1. letnik

A1. Enačbo prevedemo v obliko $x^{-2} = \frac{4}{9}$. Rešitvi sta $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ in $-\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$. Števili se razlikujeta za 3. Pravilen je odgovor D.

A2. Rdečih čokoladnih je $0,6 \cdot 0,3 = 0,18$, kar je 18 %. Modrih čokoladnih je $0,4 \cdot 0,15 = 0,06$, kar je 6 %. Vseh čokoladnih je vsota, torej 24 % in tistih, ki niso čokoladni 76 %. Pravilen je odgovor D.

A3. V imenovalcih ulomkov izpostavimo skupni faktor ter krajšamo, kar se da $\frac{x^{n-1}}{x^n - 2x^{n-1}} - \frac{x^n}{x^{n+1} - 4x^{n-1}} = \frac{x^{n-1}}{x^{n-1}(x-2)} - \frac{x^n}{x^{n-1}(x^2-4)} = \frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{x^{-1}(x^2-4)}$. Seštejemo ulomka $\frac{1}{(x-2)} - \frac{x}{(x^2-4)} = \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} - \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{2}{(x-2)(x+2)}$. Pravilen je odgovor B.

B1. Razstavimo izraze in izpostavimo skupni faktor $\frac{(a-2)(a+2)}{(a-2)(a-2)} : \frac{(a+2)(a+3)}{a-2} - \frac{(a^3-1)(a^3+1)}{(a^3+1)(a-1)} : \frac{(a+3)(a^2+a+}{-a+1}$ $\frac{a^{n-1}}{a^{n-1}(a+3)}$. Krajšamo ter delimo $\frac{(a+2)}{(a-2)} \cdot \frac{(a-2)}{(a+2)(a+3)} - \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a-1)} \cdot \frac{-a+1}{(a+3)(a^2+a+1)} + \frac{1}{a+3}$. Poenostavimo do oblike $\frac{1}{a+3} - \frac{-a+1}{a+3} + \frac{1}{a+3}$. Seštejemo in dobimo rezultat $\frac{a+1}{a+3}$.

B2. Enačbi $7x - \frac{5y}{6} = \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{16}{3}$, $\frac{3x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{2x}{3} + \frac{7y}{6}$ poenostavimo $40x - 8y = 32$, $5x - 5y = 0$, ter rešimo sistem. Dobimo rešitvi $x = 1$, $y = 1$. Tako imamo točke trikotnika $A(3, -6)$, $B(1, 1)$ in $C(x, 2x)$. Ker je ploščina 34 in orientacija negativna, za determinanto $\mid D \mid = 2S$ vstavimo -68. Torej $D = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$, $-68 = (1 - 3)(2x + 6) - (1 + 6)(x - 3)$. Rešimo enačbo ter dobimo $x = 7$. Koordinati točke $C(x, 2x)$ sta $C(7, 14)$.

B3. Tine bi po prvotnem dogovoru dobil $\frac{5}{7+6+5} = \frac{5}{18} = \frac{25}{90}$ celotne nagrade, po spremembi pa dobi $\frac{4}{6+5+4} = \frac{4}{15} = \frac{24}{90}$ nagrade. Zato je za Tineta ugodnejša prva delitev.
Vemo, da so razdelili nagrado v razmerju $6 : 5 : 4$. Tako je Tonetov delež enak $6x$, Lukov $5x$, Tinetov pa $4x$. Zapišemo zvezo med Tonetovim in Tinetovim deležem $6x - 216 = 4x$ in dobimo $x = 108$. Tone je torej dobil $6x = 6 \cdot 108 = 648$ evrov, Luka $5x = 5 \cdot 108 = 540$ evrov, Tine pa $4x = 4 \cdot 108 = 432$ evrov.

2. letnik

A1. Izraz zapišemo s potencami in dobimo $\frac{4^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{9}} b^{\frac{1}{9}} \cdot 1}{8^{-\frac{2}{3}} b^{\frac{4}{3}} a^{-\frac{1}{3}}}$. Števili 4 in 8 zapišemo kot potenco števila 2 in izraz zapišemo brez ulomka ter dobimo $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^2 \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{9}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{9}} \cdot b^{-\frac{4}{3}}$. Ko združimo potence, dobimo rezultat $2^{\frac{8}{3}} a^{\frac{10}{9}} b^{-\frac{11}{9}}$. Pravilen je odgovor A.

A2. Izračunamo višino trapeza $v = d \cdot \sin\alpha \doteq 7,82\ cm$. Potem iz $\sin\beta = \frac{v}{b}$ dobimo $\beta_1 \doteq 60,38°$ in $\beta_2 = 180° - \beta_1 \doteq 119,62°$. Pravilen je odgovor D.

A3. $f(x+y) = k(x+y)+n = kx+ky+n$ in $f(x)+f(y)-3 = kx+n+ky+n-3$. Iz tega dobimo $n = 3$. Iz $f(k) = 2f(1)$ dobimo enačbo $k \cdot k + 3 = 2k + 6$. Preoblikujemo jo v $k^2 - 2k - 3 = 0$. Rešitev 3 ne ustreza. Za rešitev -1 dobimo $f(x) = -x + 3$. Zato je $f(-1) = 4$. Pravilen je odgovor A.

B1. Linearna funkcija ima predpis $f(x) = k \cdot x + n$.
Pri x_0 ima vrednost $y_0 = f(x_0) = k \cdot x_0 + n$. Če smerni koeficient k povečamo za 1 in prosti člen n za 2, dobimo funkcijo $g(x) = (k+1) \cdot x + n + 2$. Vstavimo x_0 in dobimo $g(x_0) = (k+1) \cdot x_0 + n + 2 = k \cdot x_0 + x_0 + n + 2 = y_0 + x_0 + 2$. Ker se v tem primeru vrednost funkcije $y_0 = f(x_0)$ poveča za 5, dobimo $x_0 + 2 = 5$ in $x_0 = 3$.
Pri $x_0 - 2 = 3 - 2 = 1$ ima funkcija $f(x)$ vrednost $f(1) = k \cdot 1 + n = k + n$. Upoštevamo, da je to šestkrat toliko kot $y_0 = f(x_0) = f(3) = k \cdot 3 + n$ in dobimo enačbo $k + n = 6(3k + n)$. To se preoblikuje v $17k + 5n = 0$.
Če gre graf funkcije $f(x)$ skozi točko $A(4, -3)$, velja $f(4) = -3$. Dobimo enačbo $4k + n = -3$. Rešimo sistem enačb $17k + 5n = 0$ in $4k + n = -3$ in dobimo $k = -5$ in $n = 17$. Iskana linearna funkcija ima torej predpis $f(x) = -5x + 17$.

B2. a) Kot med simetralama ostrih kotov je enak $\varphi = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$. Ker v pravokotnem trikotniku velja, da je $\alpha = 90° - \beta$, je kot φ enak $\varphi = 180° - \frac{90° - \beta}{2} - \frac{\beta}{2} = 180° - 45° = 135°$. Iskani kot je suplementaren kotu φ in je enak $45°$.
b) Kot med simetralo kota α in stranico a je enak $\varphi = 180° - \frac{\alpha}{2} - \beta$. Ker v pravokotnem trikotniku velja, da je $\beta = 90° - \alpha$, je kot φ enak $\varphi = 180° - \frac{\alpha}{2} - (90° - \alpha) = 90° + \frac{\alpha}{2}$. Ker je velikost kota α enak $\alpha = sin^{-1}(\frac{3}{4}) = 48°35'$, je velikost iskanega kota enaka $\varphi = 114°18'$.

B3. Najprej zapišemo $(\sqrt{7}+2)$ pod korenom $(\sqrt{7}+2)=\sqrt{(\sqrt{7}+2)^2}=\sqrt{11+4\sqrt{7}}$, nato zapišemo $\sqrt{11\sqrt{x}-4\sqrt{7x}}$ kot $\sqrt{(11-4\sqrt{7})\cdot\sqrt{x}}$ in izračunamo $(\sqrt{7}+2)\cdot\sqrt{11\sqrt{x}-4\sqrt{7x}}=\sqrt{(11+4\sqrt{7})\cdot(11-4\sqrt{7})\cdot\sqrt{x}}=3\cdot\sqrt[4]{x}$. Nato izračunamo vrednost izraza $\sqrt[3]{27x^{-3}+27x^{-2}+9x^-}$ $\sqrt[3]{\frac{27+27x+9x^2+x^3}{x^3}}=\sqrt[3]{\frac{(x+3)^3}{x^3}}=\frac{x+3}{x}$. Nato racionaliziramo ulomek $\frac{3x}{\sqrt[4]{x^3}}$ in dobimo $\frac{3x}{\sqrt[4]{x^3}}=3\cdot\sqrt[4]{x}$. Ko vse člene seštejemo, dobimo vrednost iskanega izraza, ki je enaka $\frac{x+3}{x}$.

3. letnik

A1. Enačbo preoblikujemo v obliko $9^{\frac{x-3}{5}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ in nadaje v obliko $3^{\frac{2x-6}{5}}=3^{-\frac{1}{2}}$. Ko rešimo to eksponentno enačbo, dobimo rešitev $\frac{7}{4}$. Pravilen je odgovor D.

A2. Če pravokotnik s stranicama $a=2\ cm$ in $b=3\ cm$ zavrtimo okoli simetrale krajše stranice, dobimo vrtenino v obliki valja s polmerom $r=1\ cm$ in višino $v=3\ cm$. Volumen valja izračunamo po obrazcu $V=\pi r^2 v=3\pi\ cm^3$. Pravilen je odgovor E.

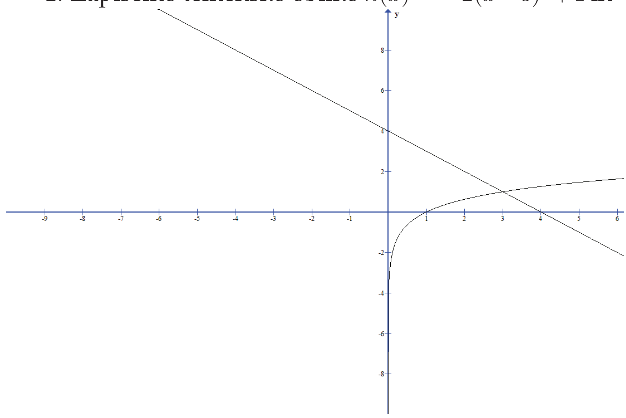
A3. Zapišemo enačbo $x^2+x+9=2x+n$ in jo preoblikujemo do oblike $x^2-x+9-n=0$. Potem upoštevamo pogoj, da ima kvadratna enačba eno dvojno realno rešitev, če je vrednost diskriminante kvadratne enačbe enaka 0. V ta pogoj vstavimo vrednosti parametrov in dobimo enačbo $1-4(9-n)=0$. Rešitev te enačbe je $n=\frac{35}{4}$ in tako je enačba tangente $8x-4y+35=0$. Pravilen je odgovor E.

B1.

a) V razmerje $\alpha:\beta:\gamma=2:3:4$ uvedemo novo spremenljivko npr. t in upoštevamo, da je vsota notranjih kotov trikotnika $180°$. Dobimo enačbo $2t+3t+4t=180°$, katere rešitev je $t=20°$. Tako izračunamo velikost kotov in dobimo rezultat $\alpha=40°$, $\beta=60°$ in $\gamma=80°$. Najdaljša stranica trikotnika je c, saj leži nasproti največjega kota $\gamma=80°$. Stranica c je tudi stranica trikotnika ABS. Kot nasproti stranice c v trikotniku ABS, je središčni kot obodnega kota $\gamma=80°$ in meri $\angle ASB=160°$, . Trikotnik ABS je enakokraki trikotnik s krakom $5\ cm$ in kotom ob vrhu $160°$. S pomočjo kosinusnega izreka $c^2=5^2+5^2-2\cdot5\cdot5\cdot cos160°$ ali pa uporabo kotnih funkcij $sin\frac{160°}{2}=\frac{\frac{c}{2}}{5}$ izračunamo stranico $c\doteq 9,85\ cm$.

b) Plašč stožca je enak ploščini krožnega izseka. Krožni izsek ima središčni kot $160°$ in polmer $5\ cm$. Ploščino krožnega izseka izračunamo po formuli $S_i=\frac{\pi r^2\alpha_s}{360°}=\frac{\pi 5^2\cdot160°}{360°}$ in dobimo $S_{pl}=\frac{100\pi}{9}\ cm^2$.

B2. S pomočjo grafov funkcij $f(x)=log_3 x$ in $g(x)=-x+4$ poiščemo teme iskane kvadratne funkcije, ki je $T(3,1)$. V temensko obliko $h(x)=a(x-p)^2+q$ vstavimo koordinati temena in začetne vrednosti in izračunamo $a = -2$. Zapišemo temensko obliko $h(x) = -2(x-3)^2+1$ in



splošno obliko $h(x) = -2x^2+12x-17$.

B3. Najprej zapišemo $25^x = 5^{2x}$, $16^x = 4^{2x}$ in $20^x = (4 \cdot 5)^x$. Enačbo potem preoblikujemo v obliko $4 \cdot 5^{2x} - 4 \cdot (4 \cdot 5)^x + 5 \cdot 4^{2x} - 5 \cdot (4 \cdot 5)^x = 0$ in izpostavimo skupni faktor $4 \cdot 5^x(5^x - 4^x) + 5 \cdot 4^x(4^x - 5^x) = 0$. Potem preoblikujemo enačbo do oblike $(5^x - 4^x)(4 \cdot 5^x - 5 \cdot 4^x) = 0$. Iz prvega oklepaja dobimo rešitev $x_1 = 0$, iz drugega pa rešitev $x_2 = 1$.

4. letnik

A1. Izrazimo $\cos x = -\frac{12}{13}$ in uporabimo zvezo $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Izračunamo $\sin^2 x$: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - (-\frac{12}{13})^2 = \frac{25}{169}$. Ker je $\sin x = \pm\frac{5}{13}$, je vrednost izraza $\frac{13}{5} \sin x = \frac{13}{5} \cdot (\pm\frac{5}{13}) = \pm 1$. Pravilen je odgovor E.

A2. Ugotovimo, da gre za aritmetično zaporedje s prvim členom 18 in diferenco 4 ter vsoto prvih n členov 2000. Zapišemo njegov splošni člen $a_n = 18 + (n-1)4$ in formulo za vsoto prvih n členov aritmetičnega zaporedja $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = 2000$. Dobimo enačbo oblike $n^2+8n-1000 = 0$. Rešitvi enačbe sta $n_1 \doteq 27,87$ in $n_1 \doteq -35,87$. Ugotovimo, da ustreza samo pozitivna rešitev, torej da bi $20\ m$ šala spletli v 28 dneh. Pravilen je odgovor D.

A3. Vsoto 10 pik dobimo v šestih možnih izidih, in sicer, v izidih $\{1,3,6\}$, $\{1,4,5\}$ in $\{2,3,5\}$ vsakič $3! = 6$, v izidih $\{2,2,6\}$, $\{3,3,4\}$ in $\{4,4,2\}$ pa vsakič $\frac{3!}{2!} = 3$. Če seštejemo vse možnosti $6 \cdot 3 + 3 \cdot 3$ dobimo 27 možnosti. Pravilen je odgovor B.

B1. Enačbo $\sqrt{16y+9} - \sqrt{y-1} = \sqrt{9y+10}$ kvadriramo in dobimo $16y+9+y-1-2\sqrt{(16y+9)(y -}$ $9y+10$. Uredimo jo do oblike $-2\sqrt{16y^2-7y-9} = -8y+2$ in delimo z -2. Dobljeno enačbo $\sqrt{16y^2-7y-9} = 4y-1$ kvadriramo in dobimo enačbo $16y^2 - 7y - 9 = 16y^2 - 8y + 1$. Rešitev enačbe je $y = 10$. Enačbo $4^{y-1} - 2^{2y-3} - 16^4 = 4^{y-2}$ uredimo v obliko $2^{2y-2} - 2^{2y-3} - 2^{2y-4} = 16^4$. Po izpostavljanju skupnega faktorja in ureditvi dobimo $2^{2y-4} \cdot (4-2-1) = 16^4$ in naprej $2^{2y-4} = 2^{16}$, enačimo eksponente $2y - 4 = 16$ in dobimo rešitev je $y = 10$. Rešitev prve enačbe kvadriramo in zapišemo enačbo $a_4 + a_6 = 100$, nato zapišemo še drugo enačbo sistema $a_5 - a_3 = 10$. Po upoštevanju splošnega člena aritmetičnega zaporedja sledi zapis enačb v obliki $a_1 + 3d + a_1 + 5d = 100$ in $a_1 + 4d - a_1 - 2d = 10$. Dobimo rešitvi $d = 5$ in $a_1 = 30$. Izračunamo vsoto prvih tridesetih členov po obrazcu $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ in dobimo $S_{30} = \frac{30}{2}(2 \cdot 30 + (30-1)5) = 3075$.

B2. Uredimo enačbo: $x^6 - 5x^3 - 14 = 0$. Uvedemo novo neznanko npr. $y = x^3$ in zapišemo novo enačbo: $y^2 - 5y - 14 = 0$. Rešimo kvadratno enačbo npr. z razstavljanjem po Vietovem pravilu: $(y-7)(y+2) = 0$. Rešitvi enačbe z novo neznanko sta $y_1 = 7$ in $y_2 = -2$. Vstavimo novo neznanko: $x^3 = 7$ in $x^3 = -2$. Zapišemo natančni rešitvi enačbe: $x_1 = \sqrt[3]{7}$ in $x_2 = -\sqrt[3]{2}$.

B3. a) Enačbi krivulj enačimo $-x^{-2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$, nato množimo s skupnim imenovalcem in uredimo do oblike $x^4 - x^2 - 2 = 0$. Zapišemo v obliki produkta $(x^2-2)(x^2+1) = 0$, nato razstavimo še prvi oklepaj na $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+1) = 0$. Dobimo rešitvi $x_1 = \sqrt{2}$ in $x_2 = -\sqrt{2}$. Izračunammo ustrezni ordinati in zapišemo presečišči $P_1(\sqrt{2}, -\frac{1}{2})$ in $P_2(-\sqrt{2}, -\frac{1}{2})$. Odvajamo prvo krivuljo $y' = 2x^{-3}$ in zapišemo njen smerni koeficient $k_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Odvajamo drugo krivuljo $y' = -x$ in zapišemo njen smerni koeficient $k_2 = -\sqrt{2}$. Vstavimo podatke v obrazec za izračun kota med krivuljama in dobimo $tan\alpha = \left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right| = \left|\frac{-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\sqrt{2}\right)}\right| = \infty$. Kot med krivuljama je $\alpha = 90°$.

b) Funkcija ni definirana v polu pri $x = 1$. Zapišemo definicijsko območje funkcije $D_f = (0,1) \cup (1,\infty)$. Funkcijo odvajamo in dobimo odvod $f'(x) = \frac{lnx-1}{(lnx)^2}$. Izračunamo ničlo odvoda $lnx = 1$ in dobimo rešitev $x = e$. Pol funkcije je pri $x = 1$. Določimo interval naraščanja (e,∞) in intervala padanja $(0,1)\cup(1,e)$.

Rešitve 22. matematičnega tekmovanja za dijake poklicnih šol – državno tekmovanje

1. in 2. letnik

A1. Pravilna je trditev, da je 337 praštevilo.

A2. Med naštetimi števili so tri praštevila: 11, 13, in 17.

A3. Za $x = 11$ so vrednosti izrazov naslednje: $-x^2+x = -110$, $-x^2+x-12 = -122$, $(-x)^2-x = 110$, $(-x)^2-x+12 = 122$, $(-x)^2-12 = 109$. Najmanjšo vrednost za $x = 11$ ima izraz $-x^2+x-12$.

A4. Z NE je odgovorilo 36 od 90 moških, kar predstavlja $40\ \%$.

A5. Točka $E(4, -\frac{1}{2})$ leži na premici $y = x - \frac{9}{2}$, saj je $-\frac{1}{2} = 4 - \frac{9}{2}$.

A6. Če celotno pot označimo z x, velja, da je $\frac{1}{6}x = 12\ \mathrm{km}$. Rešitev enačbe je $x = 72\ \mathrm{km}$.

A7. Peter opravi $1\ \mathrm{km}$ plavanja v $20\ \mathrm{min}$, $1\ \mathrm{km}$ kolesarjenja v $2\ \mathrm{min}$ in $1\ \mathrm{km}$ teka v $5\ \mathrm{min}$. Na tekmovanju je za $1\ \mathrm{km}$ plavanja porabil $20\ \mathrm{min}$, za $24\ \mathrm{km}$ kolesarjenja $48\ \mathrm{min}$ in za $6\ \mathrm{km}$ teka $30\ \mathrm{min}$, skupaj $98\ \mathrm{min}$. Če je tekmovanje začel ob 9:30, je prišel na cilj ob 11:08.

A8. Znesek za popravilo 1300 sta si razdelila v razmerju $\mathrm{Maja{:}Marjan} = 3{:}5$. Maja je prispevala $\frac{3}{8} \cdot 1300 = 487{,}50$, Marjan pa $812{,}50$.

A9. Za trikotnik ne velja, da je višina v_c je daljša od težiščnice t_c.

A10. Velja, da je $x + y + x + y + x = 180$, oz. $76 + x + 76 = 180$. Iz tega sledi, da je $x = 28$.

B1.

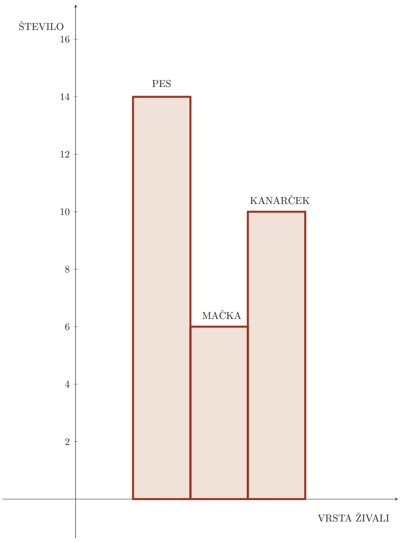
(a) Odgovorilo je $14 + 16 + 7 + 10 + 6 + 11 + 13 + 10 + 10 + 8 + 10 + 5 = 120$ dijakov.

(b) V 2. letniku ne bi izbralo kanarčka $16 + 11 = 27$ dijakov.

(c) V 4. letniku je izbralo mačko 10 od 25 dijakov, kar predstavlja $\frac{10}{25} = 0{,}4 = 40\ \%$.

(d) Mačko bi izbralo 40 od 120 dijakov, kar predstavlja $\frac{40}{120} = \frac{1}{3} = 33{,}33\ \%$.

(e)



B2.

(a) Vrednost izraza $\left(\sqrt{4+\sqrt{4}}\right)^4 = 36$.

(b) Vrednost $a = 4$.

(c) Upoštevajoč vse navedene lastnosti števila ugotovimo, da je iskano število 91753.

(d) Razporedijo jih lahko na $\frac{6\cdot5}{2} \cdot \frac{4\cdot3}{2} \cdot 1 = 90$ načinov.

(e) S slike ugotovimo, da so trikotniki CDE, EFG in BCG enakokraki. Iz tega sledi, da je $\overline{DE} = \overline{DC} = 1\ \mathrm{m}$ in $\overline{CG} = \overline{CB} = 2\ \mathrm{m}$. Razdalja $\overline{BD} = 1\ \mathrm{m} + 2\ \mathrm{m} = 3\ \mathrm{m}$.

B3.

(a) V sodu A je po desetih minutah $500 - 55 = 445\ \ell$ vode.

(b) Zapišemo enačbo $200 + 5{,}5x = 530$. Rešitev $x = 60$. V sodu B bi bilo $530\ \ell$ vode po 60 minutah oz. po 1 uri.

(c) Če zapišemo enačbo, $500 - 5{,}5x = 200 + 5{,}5x$, dobimo rešitev $x = 27{,}3$. V obeh sodih bi bila enaka količina vode po 27 minutah.

(d) Iskano višino izračunamo po formuli $v = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{500\ \mathrm{dm}^3}{\pi(3\ \mathrm{dm})^2} = 17{,}68\ dm$.

3. in 4. letnik

A1. Za $x = 11$ so vrednosti izrazov naslednje: $-x^2+x = -110$, $-x^2+x-12 = -122$, $(-x)^2-x = 110$, $(-x)^2-x+12 = 122$, $(-x)^2-12 = 109$. Najmanjšo vrednost za $x = 11$ ima izraz $-x^2+x-12$.

A2. Točka $E(4, -\frac{1}{2})$ leži na premici $y = x - \frac{9}{2}$, saj je $-\frac{1}{2} = 4 - \frac{9}{2}$.

A3. Z NE je odgovorilo 36 od 90 moških, kar predstavlja $40\ \%$.

A4. Upoštevajoč $x = -3$ dobimo: $3 \cdot (-3)^2 + 6 \cdot (-3) - m = 0$, iz česar sledi rešitev $m = 9$.

A5. Peter opravi $1\ \mathrm{km}$ plavanja v $20\ \mathrm{min}$, $1\ \mathrm{km}$ kolesarjenja v $2\ \mathrm{min}$ in $1\ \mathrm{km}$ teka v $5\ \mathrm{min}$. Na tekmovanju je za $1\ \mathrm{km}$ plavanja porabil $20\ \mathrm{min}$, za $24\ \mathrm{km}$ kolesarjenja $48\ \mathrm{min}$ in za $6\ \mathrm{km}$ teka 30 min, skupaj $98\ \mathrm{min}$. Če je tekmovanje začel ob 9:30, je prišel na cilj ob 11:08.

A6. Znesek za popravilo 1300 sta si razdelila v razmerju $\mathrm{Maja{:}Marjan} = 3{:}5$. Maja je prispevala $\frac{3}{8} \cdot 1300\ = 487{,}50$, Marjan pa $812{,}50$.

A7. Zmnožek $3 \cdot 16 \cdot 45 \cdot 81$ lahko zapišemo tudi kot $3 \cdot 16 \cdot 45 \cdot 81 = 6^4 \cdot 3^3 \cdot 5$. Iz tega sledi, da je $n = 4$.

A8. Število pravilnih odgovor označimo z x. Tedaj je nepravilnih odgovorv $30 - x$ in lahko zapišemo enačbo $x \cdot 4 + (30 - x) \cdot (-1) = 60$. Rešitev je $x = 18$.

A9. Za trikotnik ne velja, da je višina v_c je daljša od težiščnice t_c.

A10. Velja, da je $x + y + x + y + x = 180$, oz. $76 + x + 76 = 180$. Iz tega sledi, da je $x = 28$.

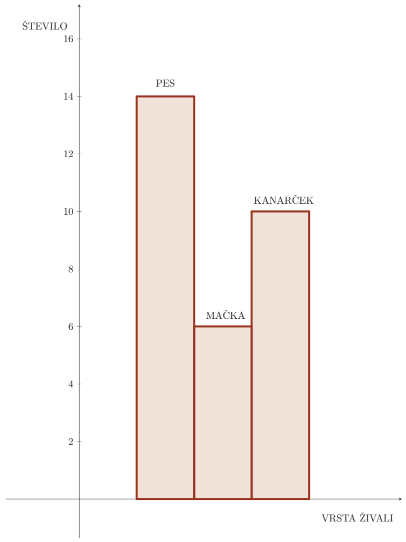
B1.

(a) Odgovorilo je $14 + 16 + 7 + 10 + 6 + 11 + 13 + 10 + 10 + 8 + 10 + 5 = 120$ dijakov.

(b) V 2. letniku ne bi izbralo kanarčka $16 + 11 = 27$ dijakov.

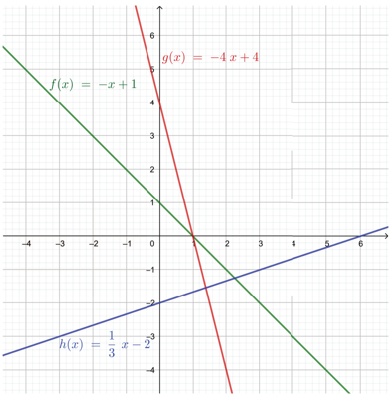
(c) V 4. letniku je izbralo mačko 10 od 25 dijakov, kar predstavlja $\frac{10}{25} = 0{,}4 = 40\ \%$.

(d) Mačko bi izbralo 40 od 120 dijakov, kar predstavlja $\frac{40}{120} = \frac{1}{3} = 33{,}33\ \%$.



(e)

B2.



(a)

(b) Koordinata x iskanega presečišča je rešitev enačbe $-x+1 = -4x+4 \Rightarrow x = 1$. Pripadajoča koordinata y je $-x+1 = -1+1 = 0$. Presečišče P je $P(1, 0)$.

(c) Padajoči sta funkciji f in g, ker imata negativna smerna koeficienta.

(d) Ničla funkcije h je rešitev enačbe $h(x) = 0$ oz. $\frac{1}{3}x - 2 = 0$. Rešitev je $x = 6$.

B3.

(a) V sodu A je po desetih minutah $500 - 55 = 445\ \ell$ vode.

(b) Zapišemo enačbo $200 + 5{,}5x = 530$. Rešitev $x = 60$. V sodu B bi bilo $530\ \ell$ vode po 60 minutah oz. po 1 uri.

(c) Če zapišemo enačbo, $500 - 5{,}5x = 200 + 5{,}5x$, dobimo rešitev $x = 27{,}3$. V obeh sodih bi bila enaka količina vode po 27 minutah.

(d) Iskano višino izračunamo po formuli $v = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{500\ \mathrm{dm}^3}{\pi (3\ \mathrm{dm})^2} = 17{,}68\ dm$.