Tekmovanja

Tekmovanje v znanju fizike za bronasto Stefanovo priznanje – področno tekmovanje

8. razred

A1 Kitara zazveni, ko zabrenkamo na eno od njenih strun. Na isto struno zabrenkamo še enkrat, močneje. V čem se zven kitare razlikuje od prvega zvena?

(**A**) Frekvenca se ne spremeni, amplituda zvočnega valovanja se poveča.

(**B**) Frekvenca se poveča, amplituda zvočnega valovanja se ne spremeni.

(**C**) Ne spremeni se niti frekvenca niti amplituda zvočnega valovanja.

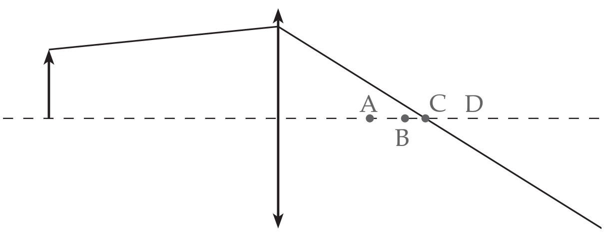
(**D**) Poveča se oboje, frekvenca in amplituda zvočnega valovanja.

A2 Na neko telo deluje pet sil, ki vse ležijo v vodoravni ravnini: sila $F_1 = 80$ N deluje na telo v smeri proti severu (S), sila $F_2 = 54$ N v smeri proti vzhodu (V), sila $F_3 = 63$ N v smeri proti jugu (J), sila $F_4 = 71$ N v smeri proti zahodu (Z) in sila F_5. Približno kolikšna je F_5 in v katero smer deluje, da telo miruje?

(**A**) $F_5 = 17$ N, deluje v smeri proti SZ. (**B**) $F_5 = 17$ N, deluje v smeri proti JV.

(**C**) $F_5 = 24$ N, deluje v smeri proti SZ. (**D**) $F_5 = 24$ N, deluje v smeri proti JV.

A3 Slika prikazuje potek enega izmed žarkov pri preslikavi predmeta skozi zbiralno lečo. V kateri izmed označenih točk je gorišče leče?



A4 Prostornino zaprtih (votlih) prostorov v ladjah merimo z enoto RT, registrsko tono, ki je enaka 100 kubičnih čevljev, 1 čevelj = 0,3048 m. *Seawise giant* je bil s 458,45 m dolžine najdaljši tanker na svetu. Prostornina vseh zaprtih prostorov na tej ladji (BRT, bruto registrska tonaža ladje) je bila 260 851 RT. Koliko približno meri rob kocke, ki ima tolikšno prostornino?

(**A**) 20 m (**B**) 90 m (**C**) 200 m (**D**) 860 m

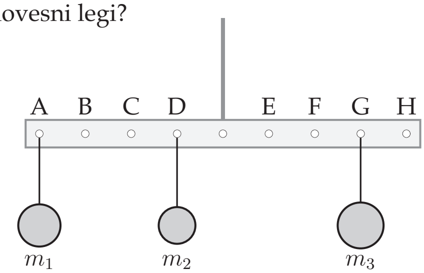
A5 Na vrvici visi lahka prečka, z enakomerno razmaknjenimi luknjicami A, B ... H. Na prečko obesimo 3 uteži, kot prikazuje skica. Mase uteži so $m_1 = 30$ g, $m_2 = 20$ g in $m_3 = 40$ g. Prečko uravnovesimo, ko nanjo obesimo še četrto utež. Kolikšna naj bo njena masa m_4 in kam jo obesimo, da bo prečka v vodoravni ravnovesni legi?

(**A**) $m_4 = 10$ g, utež obesimo v C.

(**B**) $m_4 = 20$ g, utež obesimo v D.

(**C**) $m_4 = 20$ g, utež obesimo v F.

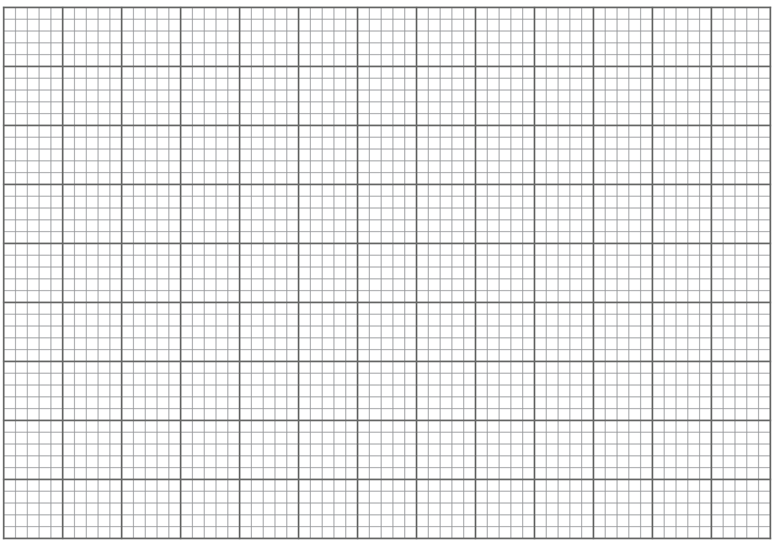
(**D**) $m_4 = 5$ g, utež obesimo v H.



B1 Špela in Mojca se odpravita na sprehod in tek. Špela hodi, Mojca teče. Obe se premikata s stalno hitrostjo. Začneta ob času $t = 0$ sočasno pred domom, njun cilj je od doma oddaljen $4{,}0$ km. Špela je na cilju 60 minut zatem, ko je krenila na pot.

(a) S kolikšno hitrostjo hodi Špela?

(b) Nariši graf, ki prikazuje, kako se Špelina lega spreminja s časom od doma do cilja.



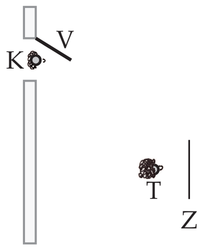
(c) Mojca teče s hitrostjo $20\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ko Mojca priteče do cilja, se obrne in teče nazaj do Špele. S črtkano črto v isti koordinatni sistem nariši graf, ki prikazuje, kako se s časom spreminja Mojčina lega od začetka teka do trenutka, ko s cilja priteče nazaj do Špele.

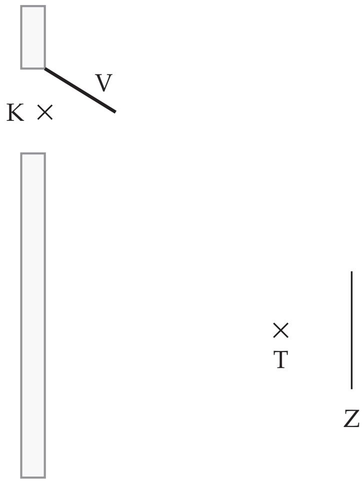
(d) Izračunaj, kdaj Mojca priteče do Špele in kako daleč od doma sta takrat.

(e) Ko Mojca prvič priteče do Špele, se takoj obrne in teče spet do cilja, se tam obrne in teče nazaj do Špele. S črtkano črto v isti koordinatni sistem nadaljuj risanje grafa, ki prikazuje, kako se s časom spreminja Mojčina lega.

(f) Iz grafa preberi, kdaj Mojca priteče drugič do Špele in kako daleč od doma sta takrat.

B2 Blagajničarka Tončka (T) je obrnjena s hrbtom proti zidu, v katerem so vrata (V), kot prikazuje slika v tlorisu. Tončka ima ob blagajni pred seboj navpično ravno zrcalo (Z) tako, da v njem vidi sliko vsakega novega kupca (K), ki vstopi v trgovino. Zrcalo je vzporedno z zidom, ki je za Tončkinim hrbtom.



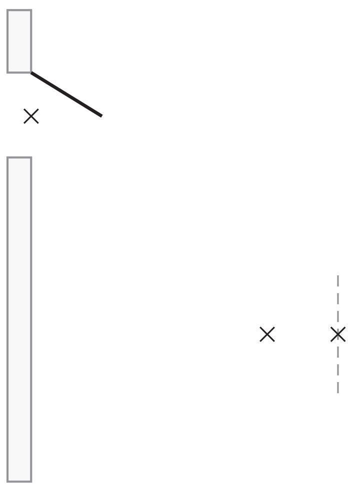


(a) Tončka je obrnjena naravnost proti zrcalu. Pod kolikšnim kotom glede na smer, v katero je obrnjena, mora Tončka zasukati oči (pri čemer glave ne premakne), da v zrcalu vidi sliko kupca, ki vstopa v trgovino?

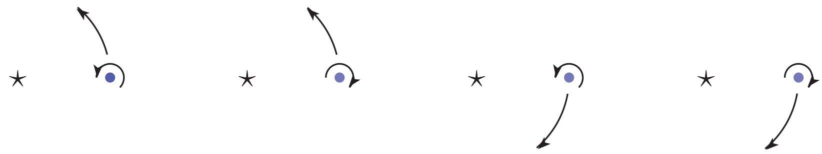
(b) V tabeli jasno označi z DA oziroma z NE, ali kupec, ki pravkar vstopa v trgovino, v zrcalu lahko vidi sliko Tončke in samega sebe.

sliko Tončke	sliko sebe

(c) Zrcalo je vrtljivo vpeto v osi, ki je navpična in gre po sredini zrcala. Na sliki je os označena s križcem ×. Tončka se naveliča obračanja oči in zrcalo zasuče okoli te osi tako, da vidi sliko vstopajočega kupca natanko v smeri, kot je obrnjena (s hrbtom proti zidu). Z načrtovanjem ugotovi, kolikšen je kot med zrcalom in ravnim zidom za Tončko v tem primeru.



A1 Na slikah je prikazan pogled na Sonce (ki je označeno z zvezdico) in Zemljo, če ju opazujemo visoko iznad ravnine, v kateri Zemlja kroži okoli Sonca. Južni pol Zemlje je nad ravnino lista, severni pol pa pod njo. Označeni sta smeri Zemljinega vrtenja okoli svoje osi in kroženja okoli Sonca. Katera slika pravilno prikazuje obe smeri gibanja?



(**A**) (**B**) (**C**) (**D**)

A2 Prostornino zaprtih (votlih) prostorov v ladjah merimo z enoto RT, registrsko tono, ki je enaka 100 kubičnih čevljev, 1 čevelj $= 0{,}3048$ m. *Seawise giant* je bil s $458{,}45$ m dolžine najdaljši tanker na svetu. Prostornina vseh zaprtih prostorov na tej ladji (BRT, bruto registrska tonaža ladje) je bila $260\,851$ RT. To je prostornina, ki je enaka prostornini kocke z robom dolgim približno ...

(**A**) 20 m. (**B**) 90 m. (**C**) 200 m. (**D**) 860 m.

A3 Z vrha 6-nadstropnega bloka spustimo v razmiku $0{,}5$ s dve enaki žogici. Zračni upor je zanemarljiv. Kako se med padanjem žogic spreminja razdalja med njima?

(**A**) Razdalja med žogicama se povečuje.

(**B**) Razdalja med žogicama se zmanjšuje.

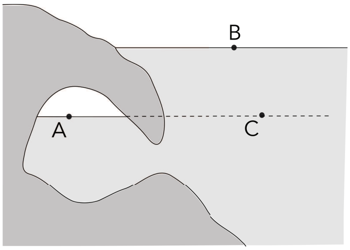
(**C**) Razdalja med žogicama se ne spreminja, ves čas je enaka.

(**D**) Razdalja med žogicama se najprej povečuje, potem se ustali.

A4 Ura ima dva kazalca, minutnega in urnega. Kolikšno je razmerje med frekvencama vrtenja minutnega in urnega kazalca?

(**A**) $11 : 1$ (**B**) $12 : 1$ (**C**) $13 : 1$ (**D**) $24 : 1$

A5 Pod vodo je votlina, v kateri je ujet zrak, kot prikazuje skica. Katera izjava o tlaku v točkah A, B in C je pravilna?



(**A**) $p_A = p_B < p_C$ (**B**) $p_B < p_C < p_A$

(**C**) $p_B < p_C = p_A$ (**D**) $p_B < p_A < p_C$

B1 Na vodoravnih tleh je velika klada z maso $M = 10$ kg. Ko se klada po podlagi giblje, deluje nanjo sila trenja $\vec{F}_t$, katere velikost je premo sorazmerna pravokotni komponenti sile podlage (pravokotni sili podlage) $F_{p,\perp}$,

$$F_t = k_t \cdot F_{p,\perp} \, .$$

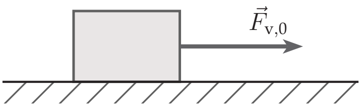
Koeficient premega sorazmerja k_t imenujemo *koeficient trenja*.

Ko klada na podlagi miruje, nanjo *lahko* deluje *sila lepenja* F_l, ki je vzporedna s podlago in deluje v smeri, da prepreči zdrs klade. Velikost sile lepenja določa neenačba

$$F_l \leq k_l \cdot F_{p,\perp} \, ,$$

kjer je k_l koeficient lepenja. Predpostavimo, sta vrednosti obeh koeficientov enaki, $k_l = k_t$.

(a) Koeficient trenja velike klade po podlagi je $k_{t1} = 0{,}2$. Vsaj kolikšna naj bo vlečna sila $F_{\mathrm{v},0}$, s katero klado vlečemo vzporedno s podlago, da klada po podlagi drsi (mejna sila)?

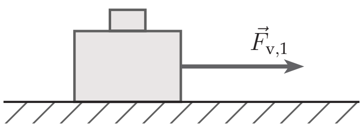


(b) Kolikšna je sila lepenja, ki deluje na klado, če se vlečna sila zmanjša na tretjino svoje mejne vrednosti $F_v = \frac{1}{3}\, F_{v,0}$?

(c) Na veliko klado postavimo majhno klado z maso $m = 1$ kg. Velika klada je podlaga za malo klado. Koeficient trenja (in lepenja) med majhno in veliko klado je $k_{t2} = k_{l2} = 0{,}4$. Vsaj kolikšna naj bo vlečna sila $F_{\mathrm{v},1}$, s katero veliko klado vlečemo vzporedno s podlago, da klada še miruje (mejna sila)?

(d) Na veliko klado, ki miruje, deluje mejna vlečna sila $\vec{F}_{\mathrm{v},1}$ vzporedno s podlago. Uporabi merilo, kjer pomeni 1 cm silo 5 N in nariši vse sile, ki delujejo na **malo** klado.

(e) Vlečna sila se poveča na vrednost $F_{\mathrm{v},2} = 1{,}5 \cdot F_{\mathrm{v},1}$. S kolikšnim pospeškom a_1 se gibljeta kladi?

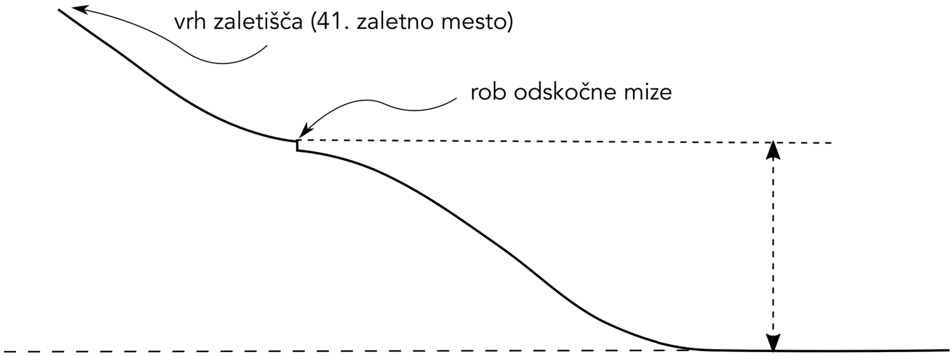


(f) Kolikšna sila lepenja deluje medtem, ko se kladi gibljeta s pospeškom a_1, na malo klado?

(g) S kolikšnim največjim pospeškom a_{max} se gibljeta kladi, da mala klada na veliki miruje?

(h) Kolikšna je največja vlečna sila $F_{\mathrm{v},3}$, da mala klada glede na veliko miruje?

B2 Na sliki je v merilu prikazan profil srednje skakalnice v Zhangjiakou.



(a) Navpična razdalja med vodoravnim iztekom doskočišča in robom odskočne mize je 68 m. Kolikšna je navpična razdalja med vrhom zaletišča in robom odskočne mize?

(b) Skakalnica ima 41 zaletnih mest, ki so enakomerno razmaknjena. Od 41. (najvišjega) zaletnega mesta do roba mize je pot po zaletišču dolga 100 m, od 1. (najnižjega) do roba mize pa 75 m. Urša se spusti s 14. zaletnega mesta. Kolikšno pot opravi od starta do roba odskočne mize?

(c) Naklon zaletišča je v zgornjem delu stalen in enak $35°$. Z načrtovanjem ugotovi, kolikšna je navpična razdalja med robom odskočne mize in 14. zaletnim mestom.

(d) Urša, ki se spusti s 14. zaletnega mesta, ima maso 56 kg in tik pred odskočno mizo, ki je dolga $6{,}5$ m, hitrost $87{,}4\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Koliko svoje mehanske energije izgubi na zaletišču zaradi zračnega upora in trenja?

(e) Odskočna miza je nagnjena navzdol za $11°$ glede na vodoravnico, kar pa v nadaljevanju zanemarimo in predpostavimo, da je miza **vodoravna**. Urša se na mizi odrine v smeri, ki je pravokotna na odskočno mizo. Uršin odriv na mizi traja $0{,}5$ s, njen povprečni pospešek v smeri, pravokotni na mizo, je med odrivom enak $0{,}7\,g$, kjer je g težni pospešek. Komponenta Uršine hitrosti, ki je vzporedna z mizo, se med odrivom na mizi ne spremeni. Kolikšna je Uršina hitrost takoj po odrivu?

(f) Koliko kinetične energije Urša pridobi med svojim odrivom?

60. fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije – področno tekmovanje

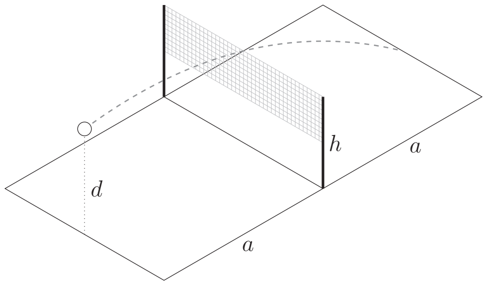
Skupina I

1. Odbojkar udari žogo točno nad sredino zadnje črte igrišča na višini $d = 3{,}05$ m. Igrišče ima obliko pravokotnika, ki ga mreža deli na dve kvadratni polji s stranico $a = 9{,}00$ m, višina zagornjega roba mreže je $h = 2{,}45$ m. Pri vseh vprašanjih privzemi, da je žoga točkasto telo.

   a) V prvem poskusu odleti žoga po udarcu v vodoravni smeri s tolikšno začetno hitrostjo, da bi ravno zadela sredino zadnje črte nasprotnega polja. Kolikšna je začetna hitrost žoge?

   b) Ali v primeru a) žoga preleti mrežo? Odgovor utemelji z računom.

   c) Na kolikšni višini točno nad sredino zadnje črte mora odbojkar udariti žogo v vodoravni smeri, da bo sredino igrišča prečkala tik nad mrežo in padla na tla ravno na sredini zadnje črte nasprotnega polja?

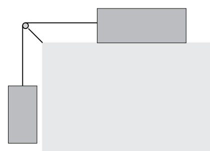


2. Utež z maso 2 kg je z lahko prožno vrvico preko lahkega škripca povezana s klado z maso 4 kg, ki miruje na vodoravni površini mize kot kaže slika. Prožnostni koeficient vrvice je 100 N/m, koeficient lepenja med klado in mizo je 0,3, koeficient trenja pa 0,2. Utež najprej podpiramo z roko ravno toliko, da je vrvica med klado in škripcem vodoravna in med škripcem in utežjo navpična, a ni napeta. Roko umaknemo in utež začne padati.

   a) Za kolikšno višino se spusti utež do trenutka, ko se prične klada premikati?

   b) Kolikšen je v tem trenutku pospešek uteži?

   c) Kolikšen je takrat pospešek klade?



3. V merilnem valju z notranjim polmerom 9 cm sega voda do višine 20 cm. Žoga iz porozne snovi je ravno toliko manjša od valja, da se še lahko neovirano premika znotraj valja (v računih za polmer žoge vzemi kar 9 cm). Porozna snov je prepletena z mnogo med seboj povezanimi kanalčki (porami) različnih dolžin in premerov, stene por so iz snovi z določeno gostoto. Primer porozne snovi je spužvasta goba za pomivanje. Voda lahko počasi pronica v ali skozi porozno snov. Ko je žoga iz porozne snovi suha, pore napolnjuje zrak. Ko je žoga dovolj dolgo v vodi, pore napolni voda, ki izrine ves zrak.

   a) Suho žogo počasi spustimo v vodo v valju. Ko v žogo še ne prodre nič vode, je potopljena do polovice. Na kolikšni višini nad dnom valja je takrat najvišja točka na žogi?

   b) V žogo pronica voda in po dolgem času je potopljena na dnu valja. Takrat sega voda do višine 24 cm. Izračunaj delež prostornine žoge, ki ga predstavljajo pore.

   c) Kolikšna je gostota snovi, iz katere so stene por?

   d) Ko damo suho žogo v vodo (vprašanje a), v žogo pronica voda in žoga počasi tone. Do kolikšne višine sega voda v trenutku, ko je žoga tik pod gladino?

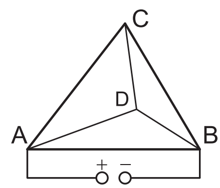
Skupina II

1. Matic živi v pritlični hiši z dvema enakima stanovanjema. Stanovanji med seboj deli notranja stena z debelino 15 cm in površino 20 m^2. Preostale stene Matičevega stanovanja s površino 60 m^2 in strop s površino 64 m^2 mejijo z zunanjostjo. Debelina stropa in zunanjih sten je 20 cm. Zunanja temperatura je 0 °C, v sosednjem stanovanju je temperatura ves čas 24 °C. Toplotne izgube skozi tla zanemari. Toplotna prevodnost notranje stene je 1,2 W/m K, zunanjih sten in stropa 0,07 W/m K.

   a) S kolikšno močjo greje peč v Matičevem stanovanju, da je v njem stalna temperatura 24 °C?
   b) Zaradi podražitve ogrevanja se Matic odloči, da bo znižal temperaturo v stanovanju na 20 °C. Sosed se za znižanje temperature v svojem stanovanju ne odloči. Za koliko odstotkov se zmanjša moč peči v Matičevem stanovanju?
   c) Matic se domisli varčevanja na račun sosednjega stanovanja. Skozi notranjo steno, ki si jo deli s sosedom, izvrta luknje pravokotno na steno in vanje vstavi valjaste železne palice s prečnim presekom 10 cm^2 in z dolžino, ki je enaka debelini notranje stene. Najmanj koliko palic mora vstaviti v steno, da bo v svojem stanovanju ohranjal temperaturo vsaj 20 °C in mu ne bo potrebno plačevati ogrevanja? Toplotna prevodnost železa je 80 W/m K.

2. Ema šest enakih ravnih vodnikov zvari v tetraeder, da vsak vodnik tvori enega od robov pravilne tristrane piramide, kot kaže slika. Na oglišči A in B priključi vir s stalno napetostjo 0,50 V.

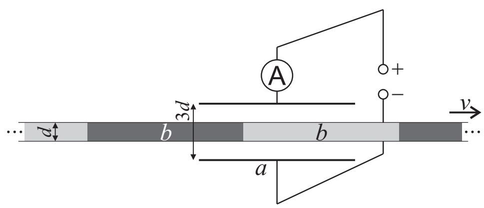
   a) Ko Ema po nerodnosti pretrga vodnik med ogliščema A in C, je tok skozi vir 400 mA. Kolikšen je upor posameznega vodnika, ki tvori rob piramide?
   b) Ema krajišči pretrganega vodnika stakne, da ima vodnik med ogliščema A in C spet enak upor kot vsak drug vodnik med oglišči. Razmisli, kolikšen tok teče skozi vodnik med ogliščema C in D. Kolikšen tok teče skozi vir?



   c) Da ji ne bi bilo potrebno ves čas držati skupaj pretrganih delov vodnika med ogliščema A in C, ju Ema zvari skupaj. Zvarjeni vodnik ima upor 2,8 Ω, kar je različno od upora preostalih petih vodnikov. Kolikšen tok sedaj teče skozi vir?

3. Kondenzator sestavljata kvadratni plošči s stranico $a = 10$ cm, ki sta razmaknjeni za $3d = 0{,}3$ mm. Kondenzator vežemo v vezje z ampermetrom in virom napetosti $U = 1$ kV, kot kaže slika. V kondenzator vstavimo $a = 10$ cm širok trak z debelino $d = 0{,}1$ mm, ki ima izmenične pasove z dielektričnostjo 3 (temno na sliki) in 1 (svetlo na sliki). Slika je v navpični smeri povečana, da se bolje vidi debelina traku d in razmik med ploščama $3d$. Dolžina vsakega pasu (b na sliki) je enaka $b = a = 10$ cm; deli traku z enako dielektričnostjo so kvadratne oblike. Trak po širini zapolni ves kondenzator.

   a) Kolikšna je kapaciteta kondenzatorja, ko je v njem samo del traku z dielektričnostjo 1? Kolikšna je kapaciteta kondenzatorja, ko je v njem samo del traku z dielektričnostjo 3?
   b) Trak vlečemo s hitrostjo $v = 1$ m/s v vodoravni smeri, kot kaže slika. Kolikšen tok kaže ampermeter?



   c) Grafično prikaži odvisnost toka od časa. Čas štejemo od trenutka, ko začne v kondenzator vstopati del traku z dielektričnostjo 3.

Skupina III

1. Decembra lani so iz Francoske Gvajane izstrelili v vesolje do zdaj največji vesoljski teleskop imenovan James Webb. Poslali so ga k drugi Lagrangevi točki, imenovani točka L2. Točka L2 leži na premici Zemlja-Sonce na večji oddaljenosti od Sonca kot Zemlja in na takem mestu, da je skupna gravitacijska sila Zemlje in Sonca na telo ravno pravšnja, da telo kroži okoli Sonca z enakim obhodnim časom kot Zemlja. Ker teleskop energijo za delovanje prejema s sončimi celicami in je točka L2 ves čas v Zemljini senci, so teleskop utirili v tako imenovano Halo orbito okoli točke L2. Oddaljenost Zemlje od Sonca je mnogo večja od oddaljenosti točke L2 od Zemlje. Polmer Halo orbite teleskopa okoli točke L2 je mnogo manjši od razdalje med točko L2 in Zemljo. Vse orbite so krožne. Vplive gravitacijskih sil Lune in ostalih planetov na gibanje teleskopa zanemari.

   a) Izračunaj oddaljenost točke L2 od Zemlje.

   b) Izračunaj obhodni čas teleskopa pri kroženju v Halo orbiti okoli točke L2.

2. Plošča z debelino 5 cm miruje na klancu z naklonom 15°. Koeficient trenja med klancem in ploščo je odvisen od temperature plošče na stiku s podlago T. Odvisnost opišemo z enačbo $k(T) = k_0T_0/T$, kjer je $k_0 = 0{,}3$ in $T_0 = 300$ K stalna zunanja temperatura. Temperaturi v enačbi za $k(T)$ morata biti izraženi v kelvinih. Gostota plošče je 2 kg/dm^3, toplotna prevodnost plošče je 1,3 W/m K.

   a) Ploščo rahlo potisnemo po klancu navzdol. Najmanj kolikšno stalno temperaturo mora imeti, da se ne ustavi?

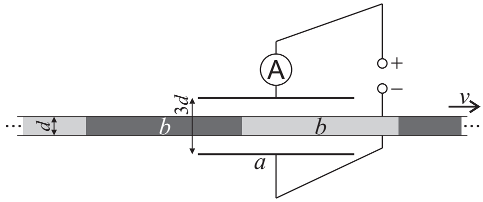
   V drugem primeru ploščo potiskamo s konstantno hitrostjo po klancu navzdol, dokler se v njej ne vzpostavi stacionarno stanje, tedaj je temperatura zgornje ploskve plošče ves čas T_0, temperatura spodnje ploskve plošče pa se ne spreminja več. Zanemari toplotni tok skozi stranske ploskve plošče. Na spodnji ploskvi prehaja v ploščo polovica toplote, ki se sprošča zaradi dela sile trenja.

   b) Najmanj kolikšna mora biti hitrost plošče, da se ne začne ustavljati, ko jo prenehamo potiskati?

3. Kondenzator sestavljata kvadratni plošči s stranico $a = 10$ cm, ki sta razmaknjeni za $3d = 0{,}3$ mm. Kondenzator vežemo v vezje z ampermetrom in virom napetosti $U = 1$ kV, kot kaže slika. V kondenzator vstavimo $a = 10$ cm širok trak z debelino $d = 0{,}1$ mm, ki ima izmenične pasove z dielektričnostjo 3 (temno na sliki) in 1 (svetlo na sliki). Slika je v navpični smeri povečana, da se bolje vidi debelina traku d in razmik med ploščama $3d$. Dolžina vsakega pasu (b na sliki) je enaka $b = a = 10$ cm; deli traku z enako dielektričnostjo so kvadratne oblike. Trak po širini zapolni ves kondenzator.

   a) Kolikšna je kapaciteta kondenzatorja, ko je v njem samo del traku z dielektričnostjo 1? Kolikšna je kapaciteta kondenzatorja, ko je v njem samo del traku z dielektričnostjo 3?

   b) Trak vlečemo s hitrostjo $v = 2$ m/s v vodoravni smeri, kot kaže slika. Kolikšen tok kaže ampermeter?



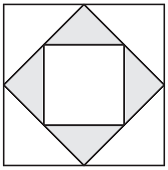
   c) Grafično prikaži odvisnost toka od časa. Čas štejemo od trenutka, ko začne v kondenzator vstopati del traku z dielektričnostjo 3.

   d) Na drugem grafu prikaži odvisnost toka od časa za primer, ko je dolžina delov traku s konstantno dielektričnostjo enaka $b = 2a$.

58. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje – regijsko tekmovanje

Naloge za 6. razred

A1. Najprej povežemo razpolovišča stranic danega kvadrata, da dobimo manjši kvadrat, nato pa postopek ponovimo na dobljenem kvadratu (glej sliko). Kolikšen del danega kvadrata predstavlja osenčeni del?



(**A**) $\frac{1}{4}$ (**B**) $\frac{1}{3}$ (**C**) $\frac{1}{2}$ (**D**) $\frac{2}{3}$ (**E**) $\frac{3}{4}$

A2. Polnemu sodu, ki drži 20 litrov vode, ob 12. uri odpremo pipo, skozi katero izteče vsako minuto $0{,}25\,\ell$ vode. Ob kateri uri bo sod prazen?

(**A**) 13.10 (**B**) 12.40 (**C**) 13.20 (**D**) 13.00 (**E**) 13.40

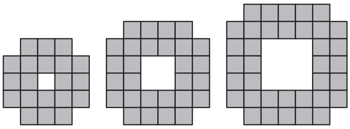
A3. Kolikšen je zmnožek prvih šestih naravnih števil, ki so deljiva s 5, niso pa deljiva s 3?

(**A**) 35 000 000 (**B**) 150 000 000 (**C**) 30 000 000 (**D**) 10 000 000 (**E**) 25 000 000

A4. Razliko med največjim in najmanjšim številom, ki ju lahko zapišeš z vsemi šestimi rimskimi znaki C, D, I, L, V in X (vsak znak je zastopan samo enkrat), deli s številom 2. Kolikšen je količnik?

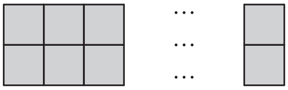
(**A**) CCXXII (**B**) CXI (**C**) DLV (**D**) DCII (**E**) CDXLIV

A5. Narisan je niz prvih treh slik zaporedja, ki so sestavljene iz malih sivih kvadratkov. Koliko malih sivih kvadratkov bi bilo na 12. sliki danega zaporedja?



(**A**) 108 (**B**) 116 (**C**) 144 (**D**) 196 (**E**) 200

B1. Z 2022 enakimi kvadrati oblikujemo pravokotnik, kot kaže slika. Ploščina pravokotnika je $18198\ \mathrm{cm}^2$. Izračunaj obseg pravokotnika.



B2. Izračunaj:

$$((1-0{,}45)\cdot 8+7\cdot(0{,}22+0,58))\cdot 2+(2^2-1):10\cdot(1-3:10)+1:100=$$

Naloge za 7. razred

A1. Nogometni trener želi za svoje tekmovalce pripraviti osvežilno pijačo v veliki posodi. Najprej napolni $\frac{2}{3}$ posode, nato prilije še 3 litre pijače. Če bi prilil še za $\frac{1}{4}$ posode pijače, bi bila posoda polna. Koliko litrov drži posoda?

(**A**) $12\,\ell$ (**B**) $36\,\ell$ (**C**) $24\,\ell$ (**D**) $9\,\ell$ (**E**) $45\,\ell$

A2. Števila z decimalnimi zapisi $0{,}\overline{1}$, $0{,}\overline{12}$, $0{,}1\overline{2}$, $0{,}11\overline{2}$, $0{,}\overline{121}$ uredimo po velikosti. Katero število bo na sredini?

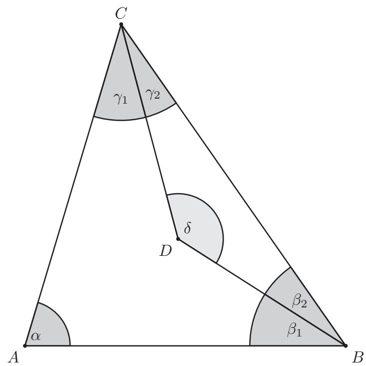
(**A**) $0{,}\overline{1}$ (**B**) $0{,}\overline{12}$ (**C**) $0{,}1\overline{2}$ (**D**) $0{,}11\overline{2}$ (**E**) $0{,}\overline{121}$

A3. Med naravnimi števili, ki so večja od 10 in manjša od 30, izberemo dve, za kateri velja, da je njun največji skupni delitelj 5 in njun najmanjši skupni večkratnik 100. Kolikšna je vsota teh dveh števil?

(**A**) 45 (**B**) 35 (**C**) 23 (**D**) 30 (**E**) 40

A4. Koliko meri kot α, če kot δ meri 130° ter velja $\gamma_1 = 1{,}5 \cdot \gamma_2$ in kot $\beta_1 = 1{,}5 \cdot \beta_2$.

(**A**) 55° (**B**) 50° (**C**) 45° (**D**) 60° (**E**) 65°



A5. Vsota števca in imenovalca nekega ulomka je 352. Če ta ulomek okrajšamo, dobimo $\frac{5}{11}$. Kateri ulomek smo okrajšali?

(**A**) $\frac{35}{317}$ (**B**) $\frac{100}{252}$ (**C**) $\frac{80}{272}$ (**D**) $\frac{110}{242}$ (**E**) $\frac{125}{227}$

B1. Mali in veliki polž pojesta skupaj jagodo v 6 minutah. Veliki polž v istem času poje trikrat toliko kot mali polž. V kolikšnem času bi to jagodo pojedel veliki polž sam?

B2. Naj bo D razpolovišče osnovnice AB enakokrakega trikotnika ABC z vrhom C. Obseg trikotnika ABC je 80 cm, obseg trikotnika ADC pa 64 cm. Koliko meri višina na osnovnico?

Naloge za 8. razred

A1. Utrdba ima dovolj zalog, da nahrani vse prebivalce, za 90 dni. Po 20 dneh prispe v utrdbo še 600 vojakov in tako ostane hrane samo še za 50 dni. Koliko ljudi je bilo v utrdbi na začetku?

(**A**) 900 (**B**) 3000 (**C**) 600 (**D**) 1500 (**E**) 1200

A2. Katero naravno število n zadošča enačbi $\sqrt{27^4} \cdot \left(3^{2020}\right)^2 : 27 : \sqrt{9^{2019}} = 3^{2n}$?

(**A**) nobeno (**B**) 1011 (**C**) 1012 (**D**) 2020 (**E**) 2024

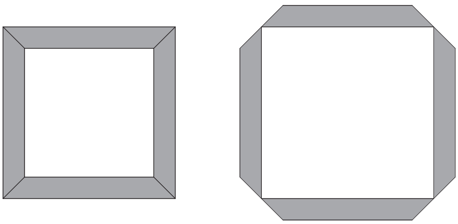
A3. Ko so les posekali, je vseboval $40\,\%$ suhe snovi in $60\,\%$ vode. Po sušenju je les vseboval le še $50\,\%$ vode. Kolikšna je bila masa lesa po sušenju, če je pred sušenjem tehtal 2250 kg?

(**A**) 1900 kg (**B**) 2020 kg (**C**) 1800 kg (**D**) 1750 kg (**E**) 900 kg

A4. Zmnožek števk v letnici 2022 je 0. V koliko letnicah se to zgodi med letoma 2000 in 2999, vključno s tema letnicama?

(**A**) 300 (**B**) 271 (**C**) 243 (**D**) 200 (**E**) 169

A5. Kvadratno sliko s ploščino $2{,}25$ dm^2 uokvirimo z okvirjem, sestavljenim iz štirih skladnih enakokrakih trapezov. Če te trapeze obrnemo, kot kaže slika, lahko uokvirimo kvadratno sliko, ki ima $1{,}75$ dm^2 večjo ploščino od prve. Za koliko centimetrov se razlikujeta dolžini osnovnic enega trapeza?



(**A**) 2 cm (**B**) 5 cm (**C**) 1 dm (**D**) 2 dm (**E**) 5 dm

A6. Palindrom je število, ki se v obe smeri bere enako, na primer števili 313 in 791197. Kolikšna je vsota števk v najmanjšem palindromu, ki je večji od 2022?

(**A**) 6 (**B**) 8 (**C**) 10 (**D**) 12 (**E**) 16

B1. V večkotniku iz izbranega oglišča poteka skupaj 25 stranic in diagonal. Koliko je vsota velikosti notranjih kotov tega večkotnika?

B2. Izračunaj vrednost izraza.

$$5^2 \cdot \left(\frac{(5^n)^2 \cdot 125}{(5^n)^5} \cdot \frac{25 \cdot (5^3)^n}{5^5} \right)^5 =$$

Naloge za 9. razred

A1. V kvadru $ABCDEFGH$ je kot med ploskovno diagonalo AC in telesno diagonalo AG velik $30°$. Natančno koliko cm meri ploskovna diagonala AC, če meri rob $|CG| = 4$ cm?

(**A**) 8 cm (**B**) $8\sqrt{3}$ cm (**C**) $4\sqrt{3}$ cm (**D**) $4\sqrt{2}$ cm (**E**) 12 cm

A2. Volk in zajec sta na ravni stezi. Zajec je 10 zajčjih skokov oddaljen od volka. Ko se volk požene v lov za zajcem, ta hkrati začne po stezi bežati pred volkom. Zajec napravi 3 skoke v sekundi, volk pa 2, vendar sta 2 volčja skoka enako dolga kot 5 zajčjih. Koliko skokov bo napravil zajec na begu do tedaj, ko ga bo volk ujel?

(**A**) 10 (**B**) 15 (**C**) 20 (**D**) 25 (**E**) 30

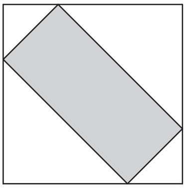
A3. Na krožnico narišemo 8 točk, ki tvorijo oglišča pravilnega osemkotnika. Med njimi naključno izberemo nekaj točk. Najmanj koliko jih moramo izbrati, da bodo 4 izmed izbranih zagotovo tvorile oglišča pravokotnika?

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

A4. Kolikšen je ostanek pri deljenju števila $2^{2022} + 1$ z 9?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 5 (**E**) 9

A5. Iz kvadrata izrežemo pravokotnik, ki ima stranice vzporedne z diagonalama (slika). Ploščina ostanka je 18 m^2 . Kolikšna je dolžina diagonale izrezanega pravokotnika?



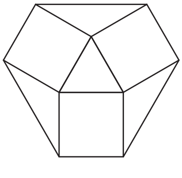
(**A**) 2 m (**B**) $3\sqrt{2}$ m (**C**) 6 m (**D**) $6\sqrt{2}$ m (**E**) 9 m

A6. Jure je pravilno poenostavil izraz $3^{n+2} \cdot (-3)^{2n-1} \cdot (-3)^{2n+2} - 2 \cdot 3^{5n+3}$. Katerega od navedenih zapisov je dobil Jure?

(**A**) 1 (**B**) 3^{-10n-6} (**C**) 9^{5n+3} (**D**) -3^{5n+4} (**E**) -3^{5n+3}

B1. Poišči vse pare naravnih števil a, b, kjer je $a > b$, da bo razlika njunih kvadratov največje dvomestno naravno število.

B2. Nad vsako stranico enakostraničnega trikotnika z dolžino stranice 10 cm je narisan kvadrat. Če povežemo še oglišča kvadratov, ki niso oglišča trikotnika, dobimo šestkotnik (slika). Natančno izračunaj obseg in ploščino tega šestkotnika.

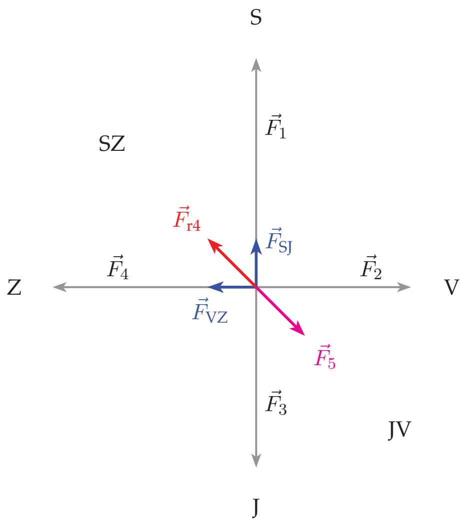


Rešitve nalog s tekmovanja v znanje fizike za bronasto Stefanovo priznanje

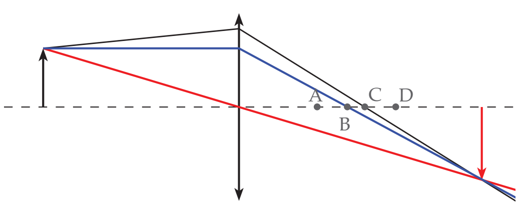
8. razred

A1 Kitara zazveni, ko zabrenkamo na eno od njenih strun. Na isto struno zabrenkamo še enkrat, močneje. Frekvenca zvena kitare se ne spremeni, amplituda zvočnega valovanja se poveča (A).

A2 Na skici so v merilu, kjer 1 cm ustreza sili 2 N, prikazane sile $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ in $\vec{F}_4$, ki delujejo na telo. Z modro sta narisani rezultanti sil $\vec{F}_{SJ} = \vec{F}_1 + \vec{F}_3$ ($F_{SJ} = 17$ N) in $\vec{F}_{VZ} = \vec{F}_2 + \vec{F}_4$ ($F_{VZ} = 17$ N), z rdečo pa rezultanta vseh 4 sil $\vec{F}_{r4} = \vec{F}_{SJ} + \vec{F}_{VZ}$ ($F_{r4} = 24$ N). Da telo miruje, mora nanj delovati 5. sila $\vec{F}_5$, ki uravnovesi prve štiri sile oziroma njihovo rezultanto $\vec{F}_{r4}$. Sila $\vec{F}_5$ deluje na telo v smeri JV (D).



A3 Gorišče leče določimo s pomočjo konstrukcije dveh posebnih žarkov: z rdečo črto narišemo središči žarek, ki izhaja z vrha predmeta in prehaja lečo v nespremenjeni smeri. Kjer se središči žarek seka s prvim, že narisanim žarkom, nastane slika vrha predmeta; narišemo tudi sliko celega predmeta. Zdaj lahko začrtamo še vzporedni žarek (narisan z modro): žarek izhaja iz vrha predmeta in je, preden vstopi v lečo, vzporeden optični osi leče, po prehodu skozi lečo pa nadaljuje v smeri proti točki, v kateri nastane slika vrha predmeta in se v njej že sekata prvi žarek in središčni žarek. Gorišče leče je točka, v kateri vzporedni žarek po prehodu leče seka optično os leče: točka B.



A4 Prostornina V vseh zaprtih prostorov na ladji Seawise giant je bila

$$V = 260\,851 \text{ RT } = 260\,851 \cdot 100 \text{ cevelj}^3 = 26\,085\,100 \cdot (0{,}3048\,\text{m})^3 = 738\,648\,\text{m}^3\,.$$

Tretji koren $\sqrt[3]{V} = 90{,}4$ m. Tolikšno prostornino, kot je V, ima kocka z robom dolgim približno 90 m (B).

A5 Naj bo razdalja med sosednjima luknjicama v prečki a, enota za silo pa $F_0 = 0{,}05$ N, kar je enako teži najlažje uteži m_4, ki jo ponujajo možni odgovori. Luknjici A in H sta od sredine prečke, kjer je prečka obešena na vrvico, oddaljeni za $r_4 = 4a$, luknjici B in G sta od sredine prečke oddaljeni za $r_3 = 3a$, luknjici C in F sta oddaljeni za $r_2 = 2a$ ter luknjici D in E za $r_1 = a$. Na prečko delujeta na levi strani prečke pri $r_4 = 4a$ prva utež s silo $F_1 = 0{,}3\,\mathrm{N} = 6\,F_0$ in pri $r_1 = a$ druga utež s silo $F_2 = 0{,}2\,\mathrm{N} = 4\,F_0$. Tretja utež deluje na prečko na desni strani pri $r_3 = 3a$ s silo $F_3 = 0{,}4\,\mathrm{N} = 8\,F_0$. Prečka je v ravnovesju, ko sta vsoti produktov sile in ročice na levi in desni strani od obesišča enaki. Preden na prečko obesimo še četrto utež, je vsota produktov sile in ročice na levi strani enaka

$$F_1 \cdot r_4 + F_2 \cdot r_1 = 6\,F_0 \cdot 4\,a + 4\,F_0 \cdot a = 28\,F_0 \cdot a\,,$$

na desni pa

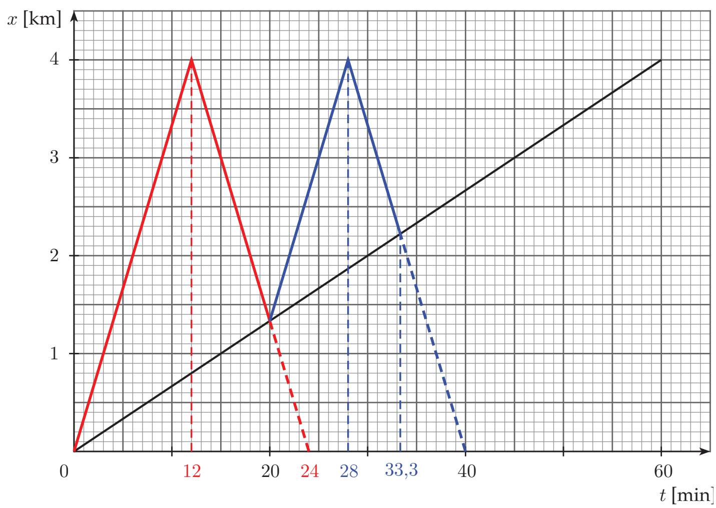
$$F_3 \cdot r_3 = 8\,F_0 \cdot 3\,a = 24\,F_0 \cdot a\,.$$

Četrto utež moramo obesiti na desno stran prečke. K vsoti produktov sile in ročice mora prispevati $28\,F_0 \cdot a - 24\,F_0 \cdot a = 4\,F_0 \cdot a = F_0 \cdot 4\,a$, iz česar tako vidimo, da je pravilni odgovor (D): na prečko na levi strani deluje četrta utež s silo F_0 na oddaljenosti $4a$ od sredine prečke.

B1 (a) Dom je od cilja oddaljen za $d = 4{,}0$ km. Špela, ki hodi enakomerno, opravi od doma do cilja pot $s = d = 4{,}0$ km v času $t = 60$ min $= 1$ h. Hodi s hitrostjo

$$v_Š = \frac{s}{t} = \frac{4{,}0\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{h}} = 4{,}0\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

(b) V koordinatnem sistemu je s črno črto narisan graf, ki prikazuje, kako se s časom spreminja Špelina lega.



(c) Mojca teče s hitrostjo $v_M = 20\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, kar pomeni, da preteče razdaljo $d = 4{,}0$ km od doma do cilja v eni petini ure, kar je $t_1 = 12$ minut. Ko je na cilju, se takoj obrne in teče z enako hitrostjo nazaj proti Špeli. Če bi tekla do doma, ki je pri $x = 0$, bi domov pritekla ob času $t' = 2t_1 = 24$ minut. Z rdečo črto je v koordinatnem sistemu pri (b) narisan graf, ki prikazuje, kako se s časom spreminja Mojčina lega od trenutka, ko odide od doma, do trenutka, ko prvič priteče nazaj do Špele. (Špelo sreča po 20 minutah, kar lahko razberemo iz grafa.)

(d) Mojca in Špela v času t_2 do prvega srečanja skupaj opravita pot $s_\mathrm{M} + s_\mathrm{Š}$, ki je enaka dvakratniku razdalje med domom in ciljem $2 \cdot d = 8{,}0$ km. Mojca opravi pot $s_\mathrm{M} = v_\mathrm{M} \cdot t_2$, Špela pa pot $s_\mathrm{Š} = v_\mathrm{Š} \cdot t_2$. Zapišemo

$$v_\mathrm{M} \cdot t_2 + v_\mathrm{Š} \cdot t_2 = (v_\mathrm{M} + v_\mathrm{Š}) \cdot t_2 = 2 \cdot d\,.$$

Iz enačbe izrazimo in izračunamo čas t_2,

$$t_2 = \frac{2 \cdot d}{v_\mathrm{M} + v_\mathrm{Š}} = \frac{8{,}0\,\mathrm{km}}{20\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} + 4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} = \frac{1\,\mathrm{km}}{3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} = \frac{1}{3}\,\mathrm{h} = 20\,\mathrm{min}.$$

Do trenutka t_2 je Špela opravila pot

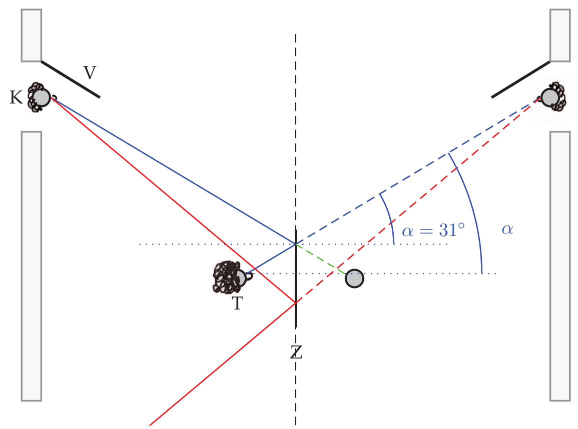
$$s_\mathrm{Š} = v_\mathrm{Š} \cdot t_2 = 4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot \frac{1}{3}\,\mathrm{h} = \frac{4}{3}\,\mathrm{km} = 1{,}33\,\mathrm{km}.$$

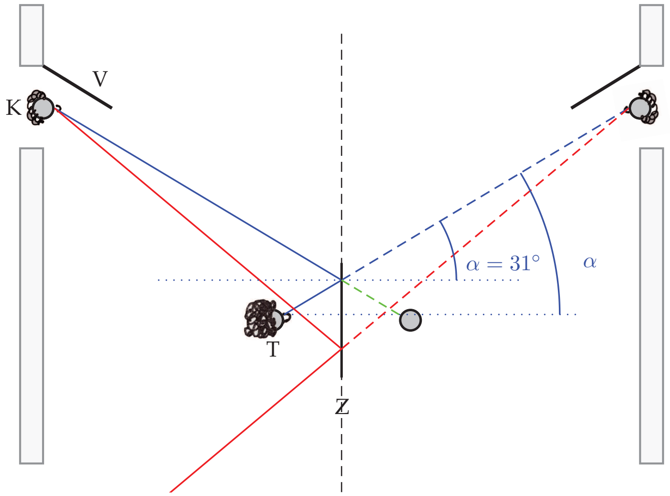
Tako daleč od doma sta Špela in Mojca ob prvem srečanju.

(e) Mojca je prvič na cilju v trenutku $t_1 = 12$ minut, pri Špeli pa v trenutku $t_2 = 20$ minut. Za tek od cilja do Špele potrebuje čas $\Delta t = t_2 - t_1 = 8$ minut. Pri Špeli se obrne in teče nazaj proti cilju z nespremenjeno hitrostjo. Do cilja priteče v enakem času Δt, kar pomeni, da je drugič na cilju v trenutku $t_3 = t_2 + \Delta t = 28$ minut. Na cilju se obrne in teče še vedno z enako hitrostjo nazaj proti Špeli. Pri risanju grafa si pomagamo s časom, ki bi ga Mojca potrebovala, če bi tekla do doma; ta čas je enak $t_1 = 12$ minut, domov bi pritekla v trenutku $t'' = t_3 + t_1 = 40$ minut. V koordinatnem sistemu pri (b) je z modro črto narisano nadaljevanje grafa Mojčine lege v odvisnosti od časa od trenutka t_2 do trenutka t_4, ko drugič sreča Špelo.

(f) Trenutek $t_4 = 33{,}3$ min dobimo kot presečišče dveh črt: grafa Špeline lege v odvisnosti od časa in grafa, ki bi ustrezal odvisnosti Mojčine lege v odvisnosti od časa, če bi po drugem obratu na cilju tekla z nespremenjeno hitrostjo do doma. Ko Mojca drugič priteče do Špele, sta od doma oddaljeni $2{,}2$ km, kar preberemo iz grafa.

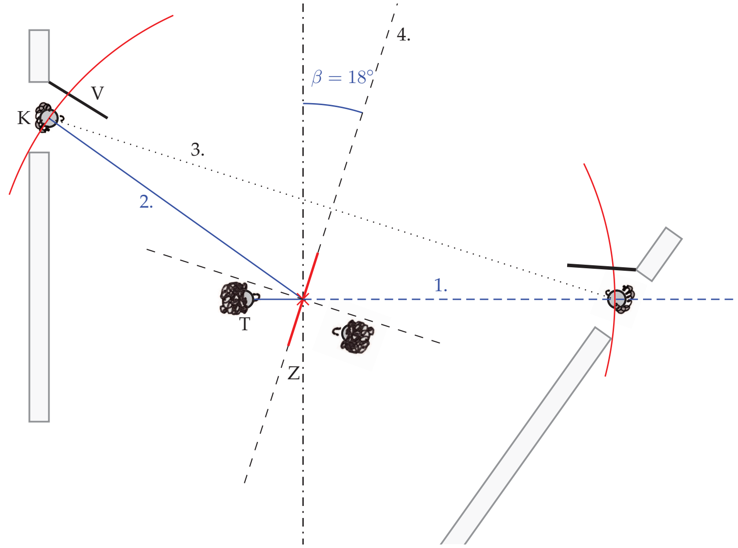
B2 (a) Skica prikazuje konstrukcijo navidezne slike kupca, ki vstopa v prodajalno, v ravnem zrcalu pred blagajničarko Tončko.





(b) Ko kupec vstopa v trgovino in ima lego, prikazano na skici, **ne** vidi svoje slike v Tončkinem zrcalu, lahko pa vidi sliko Tončke. Sliko Tončke vidi v smeri podaljška vpadnega modrega žarka (na skici narisan z zeleno črtkano črto).

(c) Ko Tončka zasuče zrcalo, vidi sliko vstopajočega kupca naravnost pred sabo, v smeri modre črtkane črte 1. Ta črta gre tudi skozi točko, kjer je os zrcala (na skici rdeč križec; ker je os natanko pred Tončko). To pomeni, da v smeri te črte do njenih oči prihaja snop svetlobe, ki gre od kupca do zrcala (črta 2) in se na zrcalu odbije po odbojnem zakonu. Slika kupca je od osi zrcala (točke $\times$) oddaljena enako, kot je od nje oddaljen kupec, r. Presečišče krožnega loka s polmerom r in črte 1 je lega slike kupca. Povežemo kupca in njegovo sliko s pikčasto daljico 3 in narišemo njeno simetralo 4 (premico, ki razpolavlja daljico in je nanjo pravokotna). Na tej simetrali po novem leži zrcalo, na skici prikazano z rdečo črto. Izmerimo kot zasuka in ugotovimo, da je $\beta = 18° \pm 2°$.



9. razred

A1 Zemlja se v enem dnevu zavrti okrog svoje osi v smeri od zahoda proti vzhodu. Če jo opazujemo visoko iznad severnega pola Zemlje, se vrti v obratni smeri kot urini kazalci. Če pa jo opazujemo visoko iznad južnega pola Zemlje, se vrti v isti smeri kot urini kazalci. V enem letu Zemlja enkrat obkroži Sonce in sicer v isti smeri kot urini kazalci, če ju opazujemo visoko iznad južnega pola Zemlje. Slika, ki pravilno prikazuje obe smeri gibanja Zemlje, je (D).

A2 Prostornina V vseh zaprtih prostorov na ladji Seawise giant je bila

$$V = 260\,851 \text{ RT } = 260\,851 \cdot 100 \text{ cevelj}^3 = 26\,085\,100 \cdot (0{,}3048\,\text{m})^3 = 738\,648\,\text{m}^3 \, .$$

Tretji koren $\sqrt[3]{V} = 90{,}4$ m. Tolikšno prostornino, kot je V, ima kocka z robom dolgim približno 90 m (B).

A3 V trenutku $t = 0$, ko spustimo drugo žogico (ki ima tedaj hitrost $v_2 = 0$), se prva žogica, ki smo jo spustili prej, že giblje z neko hitrostjo $v_1 > 0$. Od trenutka $t = 0$ naprej se obe hitrosti s časom enakomerno povečujeta; obe žogici se gibljeta enakomerno pospešeno s pospeškom g. V vsakem trenutku ima prva žogica glede na drugo večjo hitrost $v_1 > v_2$ (če je zračni upor zanemarljiv, je razlika med njunima hitrostma $\delta v = v_1 - v_2$ konstantna) in zato v istem času prva žogica opravi daljšo pot kot druga. Razdalja med žogicama se med prostim padanjem žogic povečuje (A).

A4 Minutni kazalec naredi v 1 uri en obrat, torej se vrti s frekvenco $\nu_m = \frac{1}{\text{h}}$. Urni kazalec naredi en obrat v 12 urah, torej se vrti s frekvenco $\nu_u = \frac{1}{12\,\text{h}}$. Razmerje med frekvencama je $\nu_m : \nu_u = 12 : 1$ (B).

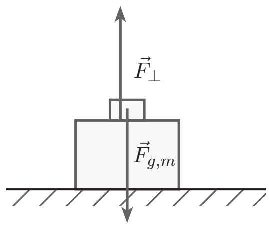
A5 V točki B je tlak enak normalnemu zračnemu tlaku. V točki C je tlak večji od normalnega zračnega tlaka, saj k tlaku prispeva svoj del še hidrostatični tlak. Torej je $p_B < p_C$. Za mirujoče tekočine velja, da je tlak v tekočini na isti globini enak, kar pomeni da velja $p_A = p_C$. Pravilni odgovor je (C).

B1 (a) Na klado med drsenjem po vodoravnih tleh delujejo štiri sile: teža $\vec{F}_{g.M}$, vlečna sila $\vec{F}_{\text{v},0}$, na podlago pravokotna sila podlage $\vec{F}_{p,0}$ ter sila trenja $\vec{F}_{t,0}$. V smeri vzporedno s podlago na klado delujeta dve sili, $\vec{F}_{\text{v},0}$ in $\vec{F}_{t,0}$. Klada po podlagi drsi enakomerno, kar pomeni, da vlečna sila ravno uravnovesi silo trenja. Za njuni velikosti velja $F_{\text{v},0} = F_{t,0}$. Sila trenja meri $F_{t,0} = k_{t1} \cdot F_{p,0}$. Na vodoravni podlagi sta uravnovešeni tudi pravokotna sila podlage in teža, za njuni velikosti velja $F_{p,0} = F_{g,M} = 100\,\text{N}$. Koeficient trenja je enak $k_{t1} = 0{,}2$, zato je $F_{t,0} = 0{,}2 \cdot 100\,\text{N} = 20\,\text{N}$. Mejna vlečna sila je po velikosti enaka sili trenja, $F_{\text{v},0} = 20\,\text{N}$.

(b) V primeru, da se vlečna sila zmanjša na tretjino svoje mejne vrednosti, $F_v = \frac{1}{3} F_{\text{v},0} = \frac{1}{3} \cdot 20\,\text{N} = 6,67\,\text{N}$, klada ne drsi, ampak miruje. Sile nanjo so v ravnovesju. Vlečno silo uravnovesi nasprotno enaka sila lepenja, $F_l = F_v = 6,67\,\text{N}$.

(c) Če miruje velika klada, ki jo vlečemo, miruje na njej zagotovo tudi majhna klada (koeficient trenja oziroma lepenja med majhno in veliko klado na to, dokler kladi mirujeta, sploh ne vpliva). Najhitreje se prikopljemo do rezultata, če obe kladi obravnavamo kot sistem z maso, ki je enaka vsoti mas majhne in velike klade $M' = M + m = 11$ kg. Sklepanje gre od tu naprej povsem po isti poti kot pri vprašanju (a). Na sistem obeh klad med mirovanjem delujejo štiri sile: teža obeh klad skupaj $\vec{F}_{g,M'}$ (po velikosti enaka 11 N), vlečna sila $\vec{F}_{v,1}$, sila podlage $\vec{F}_{p,1}$ (ki uravnovesi težo obeh klad in je po velikosti enaka 11 N) ter sila lepenja $\vec{F}_{l,1}$, s katero podlaga deluje na veliko klado. Vlečna sila $\vec{F}_{v,1}$ in sila lepenja $\vec{F}_{l,1}$ sta uravnovešeni in ko se povečuje vlečna sila, se povečuje tudi sila lepenja, do največje vrednosti, ki je določena z neenačbo $F_{l,1} \leq k_{l1} \cdot F_{p,1}$. Ko je presežena največja vrednost $F_{l,1,max} = k_{l1} \cdot F_{p,1}$, sistem klad zdrsne. Koeficient trenja je $k_{t1} = k_{l1} = 0{,}2$, zato je $F_{l,1,max} = 0{,}2 \cdot 110\,\mathrm{N} = 22\,\mathrm{N}$. Mejna vlečna sila je po velikosti enaka največji sili lepenja, $F_{\mathrm{v},1} = 22\,\mathrm{N}$. (Ker je koeficient lepenja med majhno in veliko klado $k_{t2} = k_{l2} = 0{,}4$ večji od $k_{t1} = k_{l1} = 0{,}2$, se skupaj z veliko klado potem, ko vlečna sila malce preseže mejno silo, giblje tudi majhna klada – kot bi bila prilepljena na veliko.)

(d) Če miruje velika klada, miruje na njej tudi majhna klada. Na majhno klado ne deluje nobena sila v vodoravni smeri, pač pa le dve sili v navpični smeri: v smeri navzdol deluje teža majhne klade, $\vec{F}_{g,m}$, in v smeri navzgor deluje sila velike klade (podlaga, ki deluje na majhno klado), $\vec{F}_{\perp}$.



(e) Ko vlečno silo na veliko klado povečamo (in je večja od mejne sile lepenja $F_{l,1,max}$), kladi drsita po podlagi enakomerno pospešeno. Velikost vlečne sile je enaka $F_{v,2} = 1{,}5 \cdot 22\,\mathrm{N} = 33\,\mathrm{N}$. Rezultanta vseh sil kaže vzdolž podlage in je enaka vsoti vlečne sile $\vec{F}_{\mathrm{v},2}$, ki je vzporedna s smerjo gibanja, in sile trenja (na veliko klado), ki je nasprotna smeri gibanja in po velikosti enaka mejni sili lepenja $F_{t2} = F_{l,1,max} = 22$ N, velja $\vec{F}_{rez} = \vec{F}_{\mathrm{v},2} + \vec{F}_{t,2}$. Velikost rezultante sil je enaka razliki med tema silama, $F_{rez} = F_{\mathrm{v},2} - F_{t,2}$. Klada se giblje s pospeškom a_1,

$$a_1 = \frac{F_{rez}}{M+m} = \frac{F_{v,2} - F_{t,2}}{M+m} = \frac{33\,\mathrm{N} - 22\,\mathrm{N}}{11\,\mathrm{kg}} = \frac{11\,\mathrm{N}}{11\,\mathrm{kg}} = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

(f) Da lahko odgovorimo na to vprašanje, moramo zamenjati opazovani sistem. Do tu smo obravnavali obe kladi kot sistem in brez komentarja predpostavili, da v vseh doslej obravnavanih primerih obe mirujeta ali se gibljeta skupaj kot eno telo (z istim pospeškom; da torej majhna klada glede na veliko miruje). To je sicer res in povezano z dejstvom, da je koeficient lepenja med majhno in veliko klado k_{l2} večji od koeficienta lepenja med veliko klado in podlago k_{l1}. Zdaj opazujmo le majhno klado. Majhna klada se torej giblje s pospeškom a_1 v vodoravni smeri, ker nanjo deluje velika klada s silo lepenja (kako primerno poimenovanje sile; majhna klada je kot prilepljena na veliko). Pravokotna sila podlage $\vec{F}_{\perp}$ na majhno klado uravnovesi težo majhne klade $\vec{F}_{g,m}$. Rezultanta vseh sil na majhno klado je enaka sili lepenja na majhno klado,

$$F_{l,m} = m \cdot a_1 = 1\,\mathrm{kg} \cdot 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1\,\mathrm{N}$$

(g) Največji pospešek a_{max}, s katerim se lahko gibljeta kladi, pri čemer majhna klada še miruje na veliki, je odvisen od največje (mejne) sile lepenja med majhno in veliko klado $F_{l,m,max}$. Njena velikost je $F_{l,m,max} = k_{l2} \cdot F_{\perp}$, kjer je $F_{\perp}$ po velikosti enaka teži majhne klade, $F_{g,m} = 10$ N. Iz 2. Newtonovega zakona za gibanje majhne klade dobimo pospešek

$$a_{max} = \frac{F_{l,m,max}}{m} = \frac{k_{l2} \cdot F_{\perp}}{m} = \frac{0{,}4 \cdot 10\,\mathrm{N}}{1\,\mathrm{kg}} = \frac{4\,\mathrm{N}}{1\,\mathrm{kg}} = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

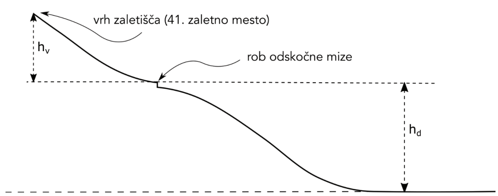
(h) Za sistem sedaj spet vzamemo obe kladi skupaj. Pri prejšnjem delu naloge smo izračunali, s kolikšnim največjim pospeškom a_{max} se gibljeta kladi, da majhna klada glede na veliko miruje. Rezultanta sil na sistem obeh klad je enaka

$$F_{rez,max} = (M+m)\cdot a_{max} = 11\,\mathrm{kg}\cdot 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 44\,\mathrm{N}.$$

Na veliko klado še vedno deluje podlaga s silo trenja (nespremenjeno, $F_{t2} = 22$ N). Rezultanta sil na sistem vlečne sile in sile trenja na veliko klado, $\vec{F}_{rez,max} = \vec{F}_{v,3} + \vec{F}_{t,2}$ je po velikosti enaka razliki med velikostma vlečne sile in sile trenja $F_{rez,max} = F_{v,3} - F_{t,2}$. Največja vlečna sila je po velikosti enaka $F_{v,3} = F_{rez,max} + F_{t,2} = 44\,\mathrm{N} + 22\,\mathrm{N} = 66\,\mathrm{N}$.

B2 (a) Ker je profil skakalnice narisan v merilu, lahko navpično razdaljo med vrhom zaletišča in robom odskočne mize določimo z razmerjem dolžin. Navpična razdalja med vodoravnim iztekom doskočišča in robom odskočne mize je $h_d = 68\,\mathrm{m}$. Na sliki ta razdalja meri $h_{d,slika} = 3{,}5\,\mathrm{cm} \pm 0{,}1\,\mathrm{cm}$. Navpična razdalja med vrhom zaletišča in robom odskočne mize meri na sliki $h_{v,slika} = 2{,}2\,\mathrm{cm} \pm 0{,}1\,\mathrm{cm}$. Navpično razdaljo med vrhom zaletišča in robom odskočne mize na skakalnici h_v je

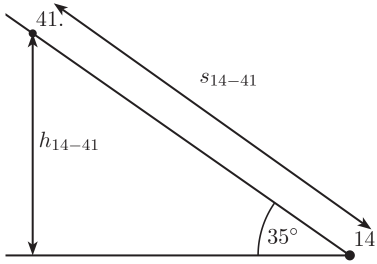
$$h_v = \frac{h_d \cdot h_{v,slika} =}{h_{d,slika} =} = \frac{68\,\mathrm{m}\cdot 2{,}2\,\mathrm{cm}}{3{,}5\,\mathrm{cm}} = 42,7\,\mathrm{m} \pm 3\,\mathrm{m}.$$



(b) Vseh 41 zaletih mest je enakomerno razporejenih na zgornjem delu zaletišča na razdalji $s_{1-41} = s_{41} - s_1 = 100\,\mathrm{m} - 75\,\mathrm{m} = 25\,\mathrm{m}$. Od 1. do 41. zaletnega mesta je 40 *korakov* s_1, pri čemer je korak s_1 razdalja med sosednjima zaletnima mestoma, $s_1 = \frac{25\,\mathrm{m}}{40} = 0{,}625\,\mathrm{m}$. Od 1. (najnižjega) do 14. zaletnega mesta pridemo v 13 korakih, torej je razdalja med njima enaka $s_{1-14} = 13\cdot 0{,}625\,\mathrm{m} = 8{,}125\,\mathrm{m}$. Urša torej od startnega mesta do roba odskočne mize opravi pot

$$s = s_1 + s_{1-14} = 75\,\mathrm{m} + 8{,}125\,\mathrm{m} = 83{,}125\,\mathrm{m}\,.$$

(c) Najprej z načrtovanjem v merilu iz razmerja (podobno kot pri (a)) določimo navpično razdaljo med 14. in 41. zaletnim mestom (vrhom zaletišča), kot prikazuje slika. Razdalja med 14. in 41. zaletnim mestom meri $s_{14-41} = s_{1-41} - s_{1-14} = 25\,\mathrm{m} - 8{,}125\,\mathrm{m} = 16{,}875\,\mathrm{m}$, za navpično razdaljo pa dobimo $h_{14-41} = 10\,\mathrm{m} \pm 0{,}5\,\mathrm{m}$. Navpično razdaljo med robom odskočne mize in 14. zaletnim mestom izračunamo tako, da od celotne višine zaletišča h_v odštejemo razdaljo med 14. in 41. zaletnim mestom, $h_{14} = h_v - h_{14-41} = 42{,}7\,\mathrm{m} - 10\,\mathrm{m} = 32{,}7\,\mathrm{m} \pm 3\,\mathrm{m}$.



(d) Pri spustu s 14. zaletnega mesta na višini h_{14} do roba odskočne mize se Uršina mehanska energija (vsota njene kinetične in potencialne energije) zmanjša za delo, ki ga na njej opravita sila upora in trenja. Odločimo se, da merimo potencialno energijo od roba odskočne mize. Na startu ima Urša potencialno energijo

$$W_p = m \cdot g \cdot h_{14} = 56\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 32{,}7\,\mathrm{m} = 18\,312\,\mathrm{J} \pm 1680\,\mathrm{J}$$

in nič kinetične energije. Tik pred odskočno mizo ima Urša hitrost $v = 87{,}4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 24{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ in kinetično energijo

$$W_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 56\,\mathrm{kg} \cdot \left(24{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 16\,503\,\mathrm{J}$$

in nič potencialne energije. Izgubljena mehanska energija je razlika med kinetično energijo Urše tik pred odskočno mizo in njeno potencialno energijo na 14. zaletnem mestu

$$\Delta W_{\mathrm{meh}} = W_k - W_p = 18\,312\,\mathrm{J} - 16\,503\,\mathrm{J} = 1809\,\mathrm{J} \pm 1680\,\mathrm{J} \approx 1{,}8\,\mathrm{kJ} \pm 1{,}68\,\mathrm{kJ}.$$

Zaradi verjetne razmeroma velike napake, ki izvira iz merjenja višine Uršinega zaletnega mesta z načrtovanjem pri (a) so pri vrednostih W_p in ΔW_{meh} (ne pa pri vrednosti W_k) možna (in dopustna, v okviru napake) velika odstopanja. Še posebej prosimo, da upoštevate verižno napako.

(e) Urša se na mizi odriva le navzgor, kar vpliva na komponento njene hitrosti $v_\perp$, ki je pravokotna na mizo. Pred odrivom je ta komponenta enaka 0, po odrivu s pospeškom $a_\perp = 0{,}7\,g$, ki traja $t_0 = 0{,}5\,\mathrm{s}$ pa je

$$v_\perp = a_\perp \cdot t_0 = 0{,}7 \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}5\,\mathrm{s} = 3{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Komponenta Uršine hitrosti, ki je vzporedna z mizo, se med odrivom ne spremeni, $v_\parallel = v = 24{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Skupno hitrost po odrivu, v_{po} izračunamo po Pitagorovem izreku ali z načrtovanjem

$$v_{\mathrm{po}} = \sqrt{v_\perp^2 + v_\parallel^2} = \sqrt{\left(3{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + \left(24{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 24{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

(f) Urša med svojim odrivom pridela kinetično energijo

$$\Delta W_k = W_{k,\mathrm{po}} - W_k = \frac{1}{2}\,m \cdot \left(v_\perp^2 + v_\parallel^2\right) - \frac{1}{2}\,m \cdot v_\parallel^2 =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_\perp^2 = \frac{1}{2} \cdot 56\,\mathrm{kg} \cdot \left(3{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 343\,\mathrm{J}.$$

Rešitve nalog s tekmovanja v znanju fizike za srednješolce

I. skupina

1. $d = 3{,}05$ m, $a = 9{,}00$ m, $h = 2{,}45$ m.

a) V navpični smeri žoga prosto pada. Za čas padanja t velja:

$$d = \tfrac{1}{2} g t^2\,, \qquad t = \sqrt{\frac{2d}{g}} = 0{,}79\ s\,.$$

V tem času v vodoravni smeri prepotuje razdaljo $2a$ s hitrostjo

$$v_0 = \frac{2a}{t} = 22{,}8\ \mathrm{m/s} \approx 23\ \mathrm{m/s}\,.$$

b) Žoga prispe do mreže v polovičnem času; v tem času se spusti za

$$d_m = \tfrac{1}{2} g \left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{gt^2}{8} = 0{,}76 \text{ m}$$

in se na višini $h' = d - d_m = 2{,}29$ m dotakne mreže.

Žoga torej ne preleti mreže, saj je $h' < h$.

c) Za novo višino d' in čas preleta igrišča t' velja:

$$d' = \tfrac{1}{2} g t'^2 , \qquad t' = \sqrt{\frac{2d'}{g}} ,$$

Po času $t'/2$ mora biti tik nad mrežo.

Torej se v tem času spusti ravno za razliko med začetno višino in višino mreže:

$$d' - h = \tfrac{1}{2} g \left(\frac{t'}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} d', \qquad h = \frac{3}{4} d' ,$$

od koder lahko takoj izrazimo začetno višino:

$$d' = \frac{4}{3} h = 3{,}27 \text{ m} \approx 3{,}3 \text{ m} .$$

2. $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 4$ kg, $k = 100$ N/m, $k_l = 0{,}3$, $k_t = 0{,}2$.

a) Klada se premakne, ko sila v vrvici F preseže silo lepenja.

$$F \geq m_2 g k_l ,$$

V mejnem primeru za raztezek vrvice h velja:

$$F = kh , \qquad h = \frac{m_2 g k_l}{k} = 12 \text{ cm} .$$

Utež se torej spusti za 12 cm.

b) Na utež deluje teža in sila vrvice v nasprotni smeri. Vsota sil je enaka masi pomnoženi s pospeškom uteži:

$$m_1 a_1 = m_1 g - F$$

$$F = kh = m_2 g k_l ,$$

$$a_1 = g \left(1 - \frac{m_2 k_l}{m_1}\right) = 3{,}9 \text{ m/s}^2 .$$

c) Takoj, ko se klada premakne, nanjo deluje sila trenja (in nič več sila lepenja).

Ker je ta sila manjša od sile lepenja, se klada prične gibati pospešeno, s pospeškom a_2:

$$m_2 a_2 = F - m_2 g k_t = m_2 g k_l - m_2 g k_t = m_2 g (k_l - k_t) ,$$

$$a_2 = g(k_l - k_t) = 0{,}98 \text{ m/s}^2 \approx 1{,}0 \text{ m/s}^2 .$$

3. $R = 9$ cm, $H = 20$ cm, $\rho_0 = 1$ kg/dm^3, $h_b = 24$ cm.

a) Označimo z $V_0 = 4\pi R^3/3$ prostornino krogle s polmerom R in s H višino gladine, ko v merilnem valju ni žoge. Ko suha žoga plava, je v vodo potopljena polovica žoge, kar pomeni, da je skupna prostornina vode in polovice žoge enaka prostornini valja z višino h in osnovno ploskvijo πR^2

$$\pi R^2 H + \frac{1}{2} V_0 = \pi R^2 H + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \pi R^2 h ,$$

kar nam da za višino gladine $h = H + 2R/3 = 26$ cm.

Najvišja točka na žogi je še za polmer R višje:

$$h_a = h + R = H + \frac{5R}{3} = 35\,\mathrm{cm}.$$

b) Ko je žoga na dnu, so vse pore napolnjene z vodo, gladina je takrat na višini $h_b = 24$ cm. Označimo delež prostornine žoge, ki ga predstavljajo pore, z η. Ohranjanje prostornin nam da

$$\pi R^2 h_b = \pi R^2 H + (1-\eta)V_0 = \pi R^2 H + (1-\eta)\frac{4}{3}\pi R^3\,,$$

kjer drugi člen na desni predstavlja prostornino sten por v žogi oziroma tisti del prostornine potopljene žoge, ki ga ne zapolnjuje voda v porah.

Enačbo poenostavimo v $4R - 3(h_b - H) = 4\eta R$ in za η dobimo

$$\eta = 1 - \frac{3(h_b - H)}{4R} = 1 - \frac{3\cdot 4\,\mathrm{cm}}{4\cdot 9\,\mathrm{cm}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,.$$

c) V žogi prazen prostor v porah predstavlja $\eta = 2/3$ celotne prostornine in stene por $1-\eta = 1/3$ celotne prostornine. Masa sten por je enaka masi žoge, ki je iz podatkov pri a) delu enaka masi izpodrinjene vode $m = \rho_0 V_0/2$. Gostota sten por ρ je masa sten ulomljeno s prostornino sten, kar nam da

$$\rho = \frac{m}{(1-\eta)V_0} = \frac{\rho_0 V_0}{2(1-\eta)V_0} == \frac{\rho_0}{2(1-\eta)} = \frac{1}{2/3}\rho_0 = \frac{3}{2}\rho_0 = 1{,}5\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}\,.$$

d) Ko je žoga tik pod gladino, še vedno velja ravnovesje sil, in je celotna masa v krogli s polmerom R (torej na mestu, ki ga zaseda z vodo delno prepojena žoga) enaka masi izpodrinjene vode, torej je prostornina V vode v žogi ravno tolikšna, da je masa z vodo delno prepojene žoge enaka masi vode s prostornino V_0

$$\rho_0 V_0 = (1-\eta)\rho V_0 + \rho_0 V\,,$$

oziroma

$$V = V_0\left(1 - (1-\eta)\frac{\rho}{\rho_0}\right) = V_0\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}V_0\,.$$

Zdaj ponovno pogledamo bilanco prostornin

$$\pi R^2 h_d = \pi R^2 H + V_0 - V = \pi R^2 H + \frac{1}{2}V_0 = \pi R^2 H + \frac{2}{3}\pi R^3\,,$$

kar nam da

$$h_d = H + \frac{2R}{3} = h = 26\,\mathrm{cm}.$$

Do istega rezultata lahko pridemo z razmislekom. Ko voda postopno pronica v pore, žoga plava, a se njena najvišja točka spušča proti gladini. Če si kot "žogo" mislimo samo snov, ki tvori stene por, je masa žoge konstantna in se sila vzgona ne spreminja, dokler žoga plava na gladini. Na začetku vodo izpodriva del sten por, ki je pod gladino, in zrak, ki je v porah pod gladino. Ko voda vdira v pore, se prostornina zraka pod gladino zmanjšuje, da se ohranja sila vzgona, žoga tone in vodo izpodriva vse več sten por. Gladina vode se ne spreminja, saj vsak mililiter zraka pod gladino nadomesti mililiter snovi, ki tvorijo stene por. Zato je gladina vode, dokler žoga plava, na isti višini kot pri vprašanju a) in je enaka $h = 26$ cm. Gladina se začne spuščati šele, ko se žoga potaplja pod gladino, saj takrat zraka, ki ga iztisne iz por voda, ne nadomešča več snov, iz katere so stene por, ker je ta snov že vsa pod vodno gladino.

II. skupina

1. $S_n = 20\ \mathrm{m}^2$, $S_z = 60\ \mathrm{m}^2$, $S_s = 64\ \mathrm{m}^2$, $d_n = 15$ cm, $d_z = 20$ cm, $T_z = 0\ ^\circ\mathrm{C}$, $T_s = 24\ ^\circ\mathrm{C}$, $T_n = 20\ ^\circ\mathrm{C}$, $\lambda_n = 1{,}2\ \mathrm{W/m\,K}$, $\lambda_n = 0{,}07\ \mathrm{W/m\,K}$, $\lambda_{Fe} = 80\ \mathrm{W/m\,K}$, $S_{Fe} = 10\ \mathrm{cm}^2$.

   a) Moč peči mora biti enaka toplotnemu toku, ki odteka skozi zunanje stene in strop, skozi notranjo steno pa ni izmenjave toplote, ker sta stanovanji pri enaki temperaturi:

$$P = \frac{\lambda_z(S_z + S_s)(T_s - T_z)}{d_z} = 1040\ \mathrm{W}\,.$$

   b) Ko se temperatura Matičevega stanovanja zniža na T_n, steče toplotni tok tudi iz sosednjega stanovanja, ki prispeva k ogrevanju Matičevega stanovanja, tok skozi zunanje stene in strop pa se zmanjša:

$$P' + \frac{\lambda_n S_n(T_s - T_n)}{d_n} = \frac{\lambda_z(S_z + S_s)(T_n - T_z)}{d_z}\,.$$

   Moč peči je v tem primeru enaka

$$P' = \frac{\lambda_z(S_z + S_s)(T_n - T_z)}{d_z} - \frac{\lambda_n S_n(T_s - T_n)}{d_n} = 228\ \mathrm{W}\,,$$

   kar predstavlja znižanje

$$\eta = \frac{P - P'}{P} = 78\ \%\,.$$

   c) Skozi posamezno palico teče v Matičevo stanovanje dodatni toplotni tok

$$P_1 = \frac{\lambda_{Fe} S_1(T_n - T_z)}{d_n} = 2{,}13\ \mathrm{W}\,.$$

   V mejnem primeru je toplotni tok iz sosednjega stanovanja skozi notranjo steno in N palic enak toplotnemu toku, ki odteka skozi zunanje stene in strop:

$$\frac{\lambda_n(S_n - NS_1)(T_s - T_n)}{d_n} + NP_1 = \frac{\lambda_z(S_z + S_s)(T_n - T_z)}{d_z}\,,$$

   pri čemer smo upoštevali, da se površina notranje stene zmanjša za NS_1. Izraz na levi preuredimo:

$$\frac{\lambda_n(S_n - NS_1)(T_s - T_n)}{d_n} + \frac{\lambda_{Fe} NS_1(T_n - T_z)}{d_n} = \frac{\lambda_n S_n(T_s - T_n)}{d_n} + \frac{(\lambda_{Fe} - \lambda_n)NS_1(T_s - T_n)}{d_n}\,.$$

   Izluščimo

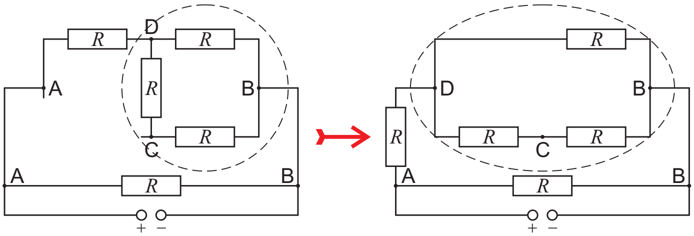
$$\begin{aligned} N &= \frac{d_n}{(\lambda_{Fe} - \lambda_n)S_1(T_s - T_n)}\left(\frac{\lambda_z(S_z + S_s)(T_n - T_z)}{d_z} - \frac{\lambda_n S_n(T_s - T_n)}{d_n}\right) \\ &= \frac{d_n P'}{(\lambda_{Fe} - \lambda_n)S_1(T_s - T_n)} = \frac{P'}{P_1}\frac{\lambda_{Fe}}{(\lambda_{Fe} - \lambda_n)} = 109\,. \end{aligned}$$

   Ker je v našem primeru $\lambda_{Fe} \gg \lambda_n$, lahko končni izraz poenostavimo

$$N \approx \frac{P'}{P_1} = 108\,.$$

2. $U = 0{,}5$ V, $I_a = 400$ mA, $R_1 = 2{,}8\ \Omega$.

   a) Nadomestno vezje, ko je vodnik med ogliščema A in C prekinjen, kaže slika levo. Na sliki desno je vezje preoblikovano, da se nazorneje vidi, kateri uporniki so vezani vzporedno in kateri zaporedno. Točke A, B, C in D na shemi vezave ustrezajo enako označenim ogliščem na sliki tetraedra v nalogi. Na sliki levo je posebej označeno, da sta obe točki A na tetraedru ista točka, enako velja za točki B.



Upor črtkano obkroženega dela je

$$R'_a = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}\right)^{-1} = \left(\frac{2+1}{2R}\right)^{-1} = \frac{2R}{3}\,.$$

Za nadomestni upor celotnega vezja dobimo

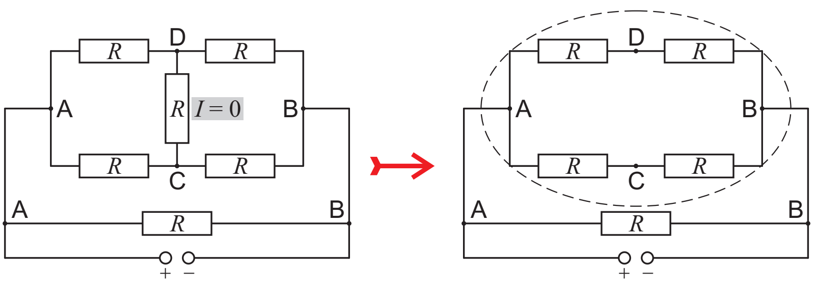
$$R_a = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R+R'_a}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R+2R/3}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{R} + \frac{3}{5R}\right)^{-1} = \left(\frac{5+3}{5R}\right)^{-1} = \frac{5R}{8}\,.$$

Podatki v nalogi nam dajo

$$U = I_a R_a = \frac{5 I_a R}{8} \qquad \Longrightarrow \qquad R = \frac{8U}{5I_a} = 2\,\Omega\,.$$

b) Ker so vsi vodniki enaki, zaradi simetrije po vodniku med ogliščema C in D tok ne teče (slika levo), saj sta na enakem potencialu.

Vezje se zato poenostavi v vezje na sliki desno.



Upor črtkano obkroženega dela na sliki desno je

$$R'_b = \left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}\right)^{-1} = R\,.$$

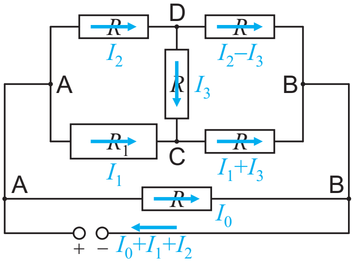
Nadomestni upor celotnega vezja je

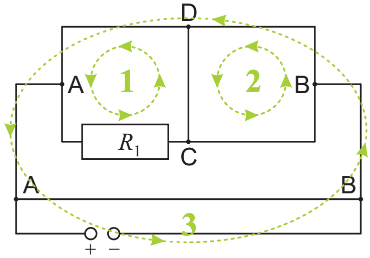
$$R_b = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'_b}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right)^{-1} = \frac{R}{2}\,.$$

Iskani tok je

$$I_b = \frac{U}{R_b} = 500\,\mathrm{mA}.$$

c) Simetrije ni več, ker je upor $R_1 = 2{,}8\ \Omega$ med ogliščema A in C različen od uporov vodnikov med ostalimi pari oglišč R, kot kaže shema vezja levo. Označeni so tokovi skozi posamezne dele vezja. Iskani tok skozi vir je $I_c = I_0 + I_1 + I_2$.





Tok I_0 dobimo zlahka $I_0 = U/R = 250$ mA.

Tokova I_1 in I_2, ki ju moramo še določiti, poiščemo z uporabo Kirchhoffovega izreka o napetostih po zaključenih zankah, pri čemer so zanke, ki jih uporabimo, oštevilčene na sliki desno. V enačbah se pojavi tudi tok I_3 v vodniku med ogliščema C in D, ki zaradi $R_1 \neq R$ sedaj ni nič. Pri zapisu enačb za napetosti se držimo dogovora, da v smeri toka potencial na uporniku pade oziroma je napetost negativna. Zanke 1 (A-C-D-A), 2 (C-B-D-C) in 3 (B-D-A-vir-B) na desni sliki dajo po vrsti enačbe

$$\begin{aligned} -I_1R_1 + I_3R + I_2R &= 0\,, && (\mathbf{1})\\ -(I_1+I_3)R + (I_2-I_3)R - I_3R &= 0\,, && (\mathbf{2})\\ (I_2-I_3)R + I_2R - U &= 0\,. && (\mathbf{3}) \end{aligned}$$

Z vpeljavo $x \equiv R_1/R = 1{,}4$ in upoštevajoč $U/R = I_0$ dobimo preglednejši zapis istih enačb

$$\begin{aligned} xI_1 - I_2 - I_3 &= 0\,, && (\mathbf{1})\\ I_1 - I_2 + 3I_3 &= 0\,, && (\mathbf{2})\\ 2I_2 - I_3 &= I_0\,. && (\mathbf{3}) \end{aligned}$$

Iz (**2**) izrazimo $I_1 = I_2 - 3I_3$ in rezultat nesemo v (**1**), kar nam da

$$(x-1)I_2 - (3x+1)I_3 = 0$$

oziroma

$$I_2 = \frac{3x+1}{x-1}I_3\,. \qquad (\mathbf{1+2})$$

Ko (**1+2**) vstavimo v (**3**) dobimo

$$2\frac{3x+1}{x-1}I_3 - I_3 = I_0 \qquad \Longrightarrow \qquad I_3 = \frac{x-1}{5x+3}I_0 = \frac{0{,}4}{10}I_0 = \frac{1}{25}I_0 = 10\,\mathrm{mA}.$$

Zdaj iz (**1+2**) izračunamo

$$I_2 = \frac{3x+1}{5x+3}I_0 = \frac{5{,}2}{10}I_0 = \frac{13}{25}I_0 = 130\,\mathrm{mA}$$

in nato iz (**2**) še

$$I_1 = \frac{3x+1}{5x+3}I_0 - 3\frac{x-1}{5x+3}I_0 = \frac{4}{5x+3}I_0 = \frac{2}{5}I_0 = 100\,\mathrm{mA}.$$

Za tok skozi vir dobimo

$$I_c = I_0 + I_1 + I_2 = \left(1 + \frac{4}{5x+3} + \frac{3x+1}{5x+3}\right)I_0 = \frac{8(x+1)}{5x+3}I_0 = \frac{48}{25}I_0 = 480\,\mathrm{mA}.$$

3. $a = 10$ cm, $d = 0{,}1$ mm, $U = 1$ kV, $b = a = 10$ cm, $\varepsilon = 3$, $v = 1$ m/s.

a) Ko je v kondenzatorju del traku z dielektričnostjo 1, je kapaciteta kondenzatorja enaka kapaciteti praznega kondenzatorja z razmikom $3d$ med ploščama

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 a^2}{3d} = \frac{1}{3}C_0\,,$$

kjer vpeljemo kapaciteto $C_0 = \varepsilon_0 a^2/d = 8{,}9 \cdot 10^{-10}$ F$= 0{,}89$ nF in je $C_1 = 0{,}30$ nF.

Ko je v kondenzatorju del traku z dielektričnostjo $\varepsilon = 3$, se kondenzator obnaša kot dva zaporedno vezana kondenzatorja, en polnjen s snovjo z dielektričnostjo ε in razmikom med ploščama d (C_d), ter drugi prazen in z razmikom med ploščama $2d$ (C_{2d}). Skupna kapaciteta je

$$C_\varepsilon = \left(\frac{1}{C_d} + \frac{1}{C_{2d}}\right)^{-1} = \left(\frac{d}{\varepsilon\varepsilon_0 a^2} + \frac{2d}{\varepsilon_0 a^2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\varepsilon C_0} + \frac{2}{C_0}\right)^{-1} = \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}C_0 = \frac{3}{7}C_0 = 0{,}38\,\mathrm{nF}.$$

b) Ko je v kondenzatorju dolžina x dela traku z dielektričnostjo ε, ima kondenzator kapaciteto, kot da bi bil sestavljen iz dveh vzporedno vezanih kondenzatorjev, s kapacitetama

$$C_{\epsilon,x} = \frac{x}{a}C_\varepsilon \qquad \text{in} \qquad C_{1,(a-x)} = \frac{a-x}{a}C_1\,.$$

Skupna kapaciteta vzporedno vezanih kondenzatorjev je vsota kapacitet posameznih kondenzatorjev, kar nam da

$$C(x) = C_{\epsilon,x} + C_{1,(a-x)} = \frac{x}{a}\cdot\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}C_0 + \frac{a-x}{a}\cdot\frac{1}{3}C_0 = \frac{1}{3}C_0 + \frac{x}{a}\cdot\frac{\varepsilon-1}{3(1+2\varepsilon)}C_0$$

Ko se trak giblje s hitrostjo v, je ob času t po začetku vstopa dela traku z dielektričnostjo ε v kondenzator v kondenzatorju dolžina $x = vt$ traku z dielektričnostjo ε. Odvisnost kapacitete od časa ima obliko $C(t) = C_1 + kt$, kjer je

$$k = \frac{v}{a}\cdot\frac{\varepsilon-1}{3(1+2\varepsilon)}C_0 = 10\,\mathrm{s}^{-1}\cdot\frac{2}{21}C_0 = 0{,}848\,\mathrm{nF/s} \approx 0{,}85\,\mathrm{nF/s}.$$

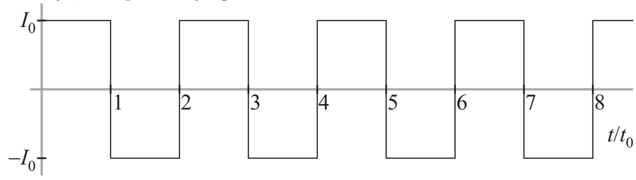
Ko del traku z dielektričnostjo ε izstopa iz kondenzatorja, je v kondenzatorju dolžina dela traku z dielektričnostjo ε enaka $y = a - vt$ in se kapaciteta s časom t' od pričetka izstopanja dela z dielektričnostjo ε zmanjšuje kot $C(t') = C_1 + k(\frac{a}{v} - t') = C_\varepsilon - kt'$.

Ker je kondenzator priključen na vir konstantne napetosti U, se naboj na ploščah kondenzatorja spreminja kot $e(t) = C(t)U$. Električni tok je definiran kot pretakanje naboja $I = de/dt$. Ker se kapaciteta kondenzatorja spreminja linearno s časom, se linearno s časom spreminja tudi naboj na kondenzatorju. Tok, ki teče skozi ampermeter, je enak

$$I = \frac{de}{dt} = U\frac{dC(t)}{dt} = \pm kU = \pm\frac{v}{a}\cdot\frac{\varepsilon-1}{3(1+2\varepsilon)}UC_0 = \pm 0{,}848\,\mu\mathrm{A} \approx \pm 0{,}85\,\mu\mathrm{A}.$$

praznega kondenzatorja z razmikom $3d$ med ploščama

c) Tok v času vstopa dela traku z dielektričnostjo ε je pozitiven in ima velikost I_0 do časa $t_0 = a/v = 0{,}1$ s. Od t_0 naprej do časa $2t_0$ del traku z dielektričnostjo ε izstopa iz kondenzatorja in tok je negativen in enako velik, $I = -I_0$. Potem v kondenzator v času $2t_0 < t < 3t_0$ spet vstopa del traku z dielektričnostjo ε, tok je $I = I_0$, sledi spet t_0 dolgo obdobje s tokom $I = -I_0$ in tako se tok periodično spreminja, kar prikazuje graf



1. razdalja Sonce-Zemlja $d = 1{,}5 \cdot 10^8$ km, masa Sonca $m_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg, masa Zemlje $m_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg.

a) Krožno frekvenco kroženja Zemlje okoli Sonca izpeljemo iz Newtonovega zakona:

$$m_Z a_r = m_Z \Omega^2 d = \frac{G m_Z m_S}{d^2}\,, \qquad \Omega^2 = \frac{G m_S}{d^3}\,.$$

Telo z maso m v L2 naj kroži z enako frekvenco Ω na razdalji l od Zemlje in $d+l$ od Sonca:

$$m(d+l)\Omega^2 = \frac{G m m_S}{(d+l)^2} + \frac{G m m_Z}{l^2}\,.$$

Upoštevamo gornji izraz za Ω^2 in okrajšamo m in G:

$$\frac{m_S(d+l)}{d^3} = \frac{m_S}{(d+l)^2} + \frac{m_Z}{l^2}$$

Izluščimo

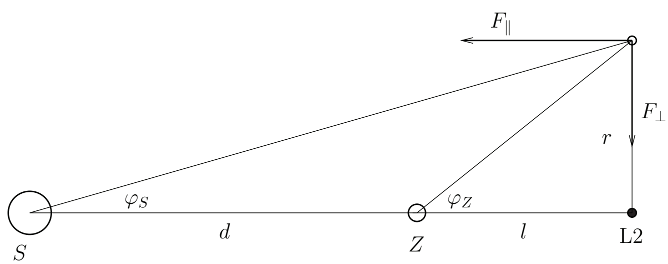
$$\begin{aligned}\frac{1}{l^2} &= \frac{m_S}{m_Z}\left(\frac{d+l}{d^3} - \frac{1}{(d+l)^2}\right) = \frac{m_S}{m_Z}\,\frac{(d+l)^3 - d^3}{d^3\,(d+l)^2} = \frac{m_S}{m_Z}\,\frac{3d^2\,l + 3d\,l^2 + l^3}{d^3(d+l)^2}\\ &\approx \frac{m_S}{m_Z}\,\frac{3d^2\,l}{d^3\,d^2}\,.\end{aligned}$$

Upoštevali smo $l \ll d$ in v števcu zanemarili člena $3dl^2$ in l^3 v primerjavi z $3d^2 l$ in v imenovalcu l v primerjavi z d.

Po preureditvi sledi

$$\frac{1}{l^2} = \frac{m_S}{m_Z}\,\frac{3l}{d^3}\,, \qquad \frac{d^3}{l^3} = \frac{3m_S}{m_Z}\,, \qquad l = d\,\sqrt[3]{\frac{m_Z}{3m_S}} = 1{,}0 \cdot 10^{-2}\,d = 1{,}5 \cdot 10^6\ \text{km}\,.$$

b) Na sliki so prikazane komponente rezultante sil na teleskop na oddaljenosti r od točke L2. Predpostavljamo, da je r mnogo manjši od l. (Na sliki je zaradi preglednosti razdalja r narisana pretirano velika.)



Komponenta vsote sil, vzporedna z zveznico Sonce-Zemlja, je enaka:

$$F_\parallel = \frac{G m m_S}{(d+l)^2}\cos\varphi_S + \frac{G m m_Z}{l^2}\cos\varphi_Z \approx \frac{G m m_S}{(d+l)^2} + \frac{G m m_Z}{l^2}\,,$$

pri čemer smo upoštevali $r \ll l$ in $r \ll d$, kar pomeni, da sta kota zelo majhna in velja $\cos\varphi_Z \approx 1$ in $\cos\varphi_S \approx 1$. Sila je praktično enaka kot v točki L2, kar zagotavlja, da je obhodni čas teleskopa okoli Sonca enak Zemljinemu. Pomeni tudi, da mora teleskop krožiti na konstantni razdalji glede na Zemljo in glede na Sonce, torej v ravnini, pravokotni na zveznico Sonce-Zemlja-L2.

Za kroženje okoli L2 je odgovorna komponenta vsote gravitacijskih sil, pravokotna na zveznico:

$$F_\perp = \frac{G m m_S}{(d+l)^2}\sin\varphi_S + \frac{G m m_Z}{l^2}\sin\varphi_Z$$

$$F_\perp \approx \frac{Gmm_S}{(d+l)^2}\tan\varphi_S + \frac{Gmm_Z}{l^2}\tan\varphi_Z = \frac{Gmm_S}{(d+l)^2}\,\frac{r}{(d+l)} + \frac{Gmm_Z}{l^2}\,\frac{r}{l}\,.$$

Ker so koti po predpostavki majhni, smo lahko sinuse nadomestili s tangensi. Upoštevajmo še $l \ll d$ in izraz za l, izpeljan pri a):

$$F_\perp = \frac{Gmm_S\,r}{d^3} + \frac{Gmm_Z\,r}{l^3} = \frac{Gmm_S\,r}{d^3} + \frac{3Gmm_S\,r}{d^3} = \frac{4Gmm_S\,r}{d^3}\,.$$

Zapišimo še Newtonov zakona za kroženje s frekvenco $\omega_\perp$:

$$ma_r = m\omega_\perp^2 r = \frac{4Gmm_S\,r}{d^3}\,,$$

od koder takoj sledi

$$\omega_\perp^2 = \frac{4Gm_S}{d^3} = 4\Omega^2\,,$$

oziroma

$$\omega_\perp = 2\Omega\,, \qquad \text{ali} \qquad t_\perp = \tfrac{1}{2}T_Z = 6 \text{ mesecev}\,,$$

pri čemer je T_Z zemeljsko leto.

2. $d = 5$ cm, $\varphi = 15°$, $k_0 = 0{,}3$, $T_0 = 300$ K, $\rho = 2$ kg/dm^3, $\lambda = 1{,}3$ W/m K.

a) Plošča se giblje z enakomerno hitrostjo, ko dinamična sila uravnovesi trenje:

$$mg\sin\varphi = kmg\cos\varphi\,,$$

od koder sledi za koeficient trenja $k = \tan\varphi$,
in iz podane enačbe za odvisnost koeficienta trenja od temperature:

$$T = \frac{k_0T_0}{k} = \frac{k_0T_0}{\tan\varphi} = 336 \text{ K} = 63\ °\text{C}\,.$$

b) Ko plošča doseže stacionarno stanje, se temperatura spodnje ploskve T ustali, in polovica toplote, ki se sprošča na stiku, se prevaja skozi ploščo do zgornje ploskve na temperature T_0.

Polovica sproščene toplote je enaka polovici dela trenja:

$$P_{tr} = \tfrac{1}{2}F_{tr}v = \tfrac{1}{2}k(T)mg\cos\varphi\, v$$

in je enaka toplotnemu toku skozi ploščo:

$$P_{prev} = \frac{\lambda S(T-T_0)}{d}\,,$$

kjer je S površina plošče.

Velja $m = \rho Sd$, temperatura spodnje ploskve T in koeficient trenja k pa sta povezana z zvezo, izpeljano pri a). Iz $P_{tr} = P_{prev}$ sledi:

$$\tfrac{1}{2}k\rho Sdg\cos\varphi\, v = \frac{\lambda S(T-T_0)}{d}\,.$$

Velja $k = \tan\varphi$ in sledi

$$v = \frac{2\lambda(T-T_0)}{d^2\rho g\tan\varphi\cos\varphi} = \frac{2\lambda(T-T_0)}{d^2\rho g\sin\varphi} = 7{,}357 \text{ m/s} \approx 7{,}4 \text{ m/s}\,.$$

3. $a = 10$ cm, $d = 0{,}1$ mm, $U = 1$ kV, $b = a = 10$ cm, $\varepsilon = 3$, $v = 2$ m/s.

a) Ko je v kondenzatorju del traku z dielektričnostjo 1, je kapaciteta kondenzatorja enaka kapaciteti praznega kondenzatorja z razmikom $3d$ med ploščama

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 a^2}{3d} = \frac{1}{3} C_0 \,,$$

kjer vpeljemo kapaciteto $C_0 = \varepsilon_0 a^2/d = 8{,}9 \cdot 10^{-10}$ F= 0,89 nF in je $C_1 = 0{,}30$ nF.

Ko je v kondenzatorju del traku z dielektričnostjo $\varepsilon = 3$, se kondenzator obnaša kot dva zaporedno vezana kondenzatorja, en polnjen s snovjo z dielektričnostjo ε in razmikom med ploščama d (C_d), ter drugi prazen in z razmikom med ploščama $2d$ (C_{2d}). Skupna kapaciteta je

$$C_\varepsilon = \left(\frac{1}{C_d} + \frac{1}{C_{2d}} \right)^{-1} = \left(\frac{d}{\varepsilon \varepsilon_0 a^2} + \frac{2d}{\varepsilon_0 a^2} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{\varepsilon C_0} + \frac{2}{C_0} \right)^{-1} = \frac{\varepsilon}{1 + 2\varepsilon} C_0 = \frac{3}{7} C_0 = 0{,}38\,\mathrm{nF}.$$

b) Ko je v kondenzatorju dolžina x dela traku z dielektričnostjo ε, ima kondenzator kapaciteto, kot da bi bil sestavljen iz dveh vzporedno vezanih kondenzatorjev, s kapacitetama

$$C_{\epsilon,x} = \frac{x}{a} C_\varepsilon \qquad \text{in} \qquad C_{1,(a-x)} = \frac{a - x}{a} C_1 \,.$$

Skupna kapaciteta vzporedno vezanih kondenzatorjev je vsota kapacitet posameznih kondenzatorjev, kar nam da

$$C(x) = C_{\epsilon,x} + C_{1,(a-x)} = \frac{x}{a} \cdot \frac{\varepsilon}{1 + 2\varepsilon} C_0 + \frac{a - x}{a} \cdot \frac{1}{3} C_0 = \frac{1}{3} C_0 + \frac{x}{a} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{3(1 + 2\varepsilon)} C_0 \,.$$

Ko se trak giblje s hitrostjo v, je ob času t po začetku vstopa dela traku z dielektričnostjo ε v kondenzator v kondenzatorju dolžina $x = vt$ traku z dielektričnostjo ε. Odvisnost kapacitete od časa ima obliko $C(t) = C_1 + kt$, kjer je

$$k = \frac{v}{a} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{3(1 + 2\varepsilon)} C_0 = 20\,\mathrm{s}^{-1} \cdot \frac{2}{21} C_0 = 1{,}695\,\mathrm{nF/s} \approx 1{,}70\,\mathrm{nF/s}.$$

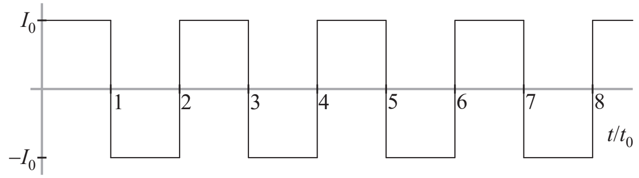
Ko del traku z dielektričnostjo ε izstopa iz kondenzatorja, je v kondenzatorju dolžina dela traku z dielektričnostjo ε enaka $y = a - vt$ in se kapaciteta s časom t' od pričetka izstopanja dela z dielektričnostjo ε zmanjšuje kot $C(t') = C_1 + k(\frac{a}{v} - t') = C_\varepsilon - kt'$.

Ker je kondenzator priključen na vir konstantne napetosti U, se naboj na ploščah kondenzatorja spreminja kot $e(t) = C(t)U$. Električni tok je definiran kot pretakanje naboja $I = de/dt$. Ker se kapaciteta kondenzatorja spreminja linearno s časom, se linearno s časom spreminja tudi naboj na kondenzatorju. Tok, ki teče skozi ampermeter, je enak

$$I = \frac{de}{dt} = U \frac{dC(t)}{dt} = \pm kU = \pm \frac{v}{a} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{3(1 + 2\varepsilon)} U C_0 = \pm 1{,}695\,\mu\mathrm{A} \approx \pm 1{,}70\,\mu\mathrm{A}.$$

Ampermeter kaže tok velikosti $I_0 = 1{,}70\,\mu$A.

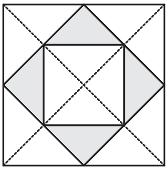
c) Tok v času vstopa dela traku z dielektričnostjo ε je pozitiven in ima velikost I_0 do časa $t_0 = a/v = 0{,}05$ s. Od t_0 naprej do časa $2t_0$ del traku z dielektričnostjo ε izstopa iz kondenzatorja in tok je negativen in enako velik, $I = -I_0$. Potem v kondenzator v času $2t_0 < t < 3t_0$ spet vstopa del traku z dielektričnostjo ε, tok je $I = I_0$, sledi spet t_0 dolgo obdobje s tokom $I = -I_0$ in tako se tok periodično spreminja, kar prikazuje graf



Rešitve nalog s tekmovanja v znanju matematike

6. razred

A1. Če narišemo še obe diagonali kvadrata, dobimo 16 skladnih trikotnikov. Pobarvani so 4 trikotniki od 16, kar je ravno $\frac{1}{4}$ celotnega kvadrata.



A2. Če iz soda izteče vsako minuto $0{,}25\,\ell$ vode, vsake 4 minute izteče $1\,\ell$ vode. To pomeni, da $20\,\ell$ vode izteče v 80 minutah. Ker smo pipo odprli ob 12. uri, bo sod prazen po 80 minutah, to je ob 13.20.

A3. Števila, ki so deljiva s 5 in hkrati s 3, so večkratniki števila 15. Torej iščemo večkratnike števila 5, ki niso večkratniki števila 15. To so števila: $5, 10, 20, 25, 35$ in 40. Njihov produkt je: $5 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 35 \cdot 40 = (5 \cdot 20) \cdot (25 \cdot 40) \cdot 10 \cdot 35 = 100 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot 35 = 35\,000\,000$.

A4. Največje število, ki ga lahko zapišemo z danimi znaki, je 666: DCLXVI. Najmanjše število, ki ga lahko zapišemo z vsemi danimi znaki, je 444: CDXLIV. Izračunamo $(666 - 444) : 2 = 111$. Rezultat je CXI.

A5. Število malih sivih kvadratkov je na vsaki naslednji sliki večje za 8, zato je na 12. sliki $20 + 8 \cdot 11 = 108$.

B1. Če ploščino pravokotnika delimo s številom kvadratov, dobimo ploščino enega kvadrata, to je $18198 : 2022 = 9$ cm^2. Stranica takega kvadrata meri 3 cm. Pravokotnik je sestavljen iz dveh vrst po 1011 kvadratov. Krajša stranica pravokotnika meri $2 \cdot 3 = 6$ cm. Daljša stranica pa meri $1011 \cdot 3 = 3033$ cm. Obseg pravokotnika je potem $2 \cdot 3033 + 2 \cdot 6 = 6078$ cm.

B2.

$$
\begin{aligned}
&((1 - 0{,}45) \cdot 8 + 7 \cdot (0{,}22 + 0{,}58)) \cdot 2 + (2^2 - 1) : 10 \cdot (1 - 3 : 10) + 1 : 100 = \\
&= (0,55 \cdot 8 + 7 \cdot 0{,}8) \cdot 2 + (4 - 1) : 10 \cdot (1 - 0{,}3) + 0{,}01 = \\
&= (4{,}4 + 5,6) \cdot 2 + 3 : 10 \cdot 0{,}7 + 0{,}01 = \\
&= 10 \cdot 2 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}01 = \\
&= 20 + 0{,}21 + 0{,}01 = \\
&= 20{,}22
\end{aligned}
$$

7. razred

A1. Ko trener napolni $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ posode in prilije 3 litre pijače, je $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ posode prazne, kar pomeni, da je $\frac{9}{12}$ posode polne. Torej 3 litri napolnijo $\frac{1}{12}$ posode, zato polna posoda drži $36\,\ell$.

A2. Ker je $0{,}\overline{1} = 0{,}1111..$, $0{,}\overline{12} = 0{,}1212...$, $0{,}1\overline{2} = 0{,}1222...$, $0{,}11\overline{2} = 0{,}1122...$ in $0{,}\overline{121} = 0{,}1211..$, je $0{,}\overline{1} < 0{,}11\overline{2} < 0{,}\overline{121} < 0{,}\overline{12} < 0{,}1\overline{2}$. Na sredini je število $0{,}\overline{121}$.

A3. Iskani števili sta večkratnika števila 5, torej izbiramo med 15, 20 in 25. Ker število 100 ni večkratnik števila 15, sta iskani števili 20 in 25, njuna vsota pa je 45.

A4. Vsota velikosti notranjih kotov trikotnika BCD je $\beta_2 + \gamma_2 + 130° = 180°$ oziroma $\beta_2 + \gamma_2 = 50°$. Vsota velikosti notranjih kotov trikotnika ABC je $\alpha + \beta_1 + \gamma_1 + \beta_2 + \gamma_2 = 180°$ oziroma $\alpha + 2{,}5 \cdot (\beta_2 + \gamma_2) = 180°$. Torej je $\alpha + 2{,}5 \cdot 50° = 180°$. Iz tega sledi $\alpha = 55°$.

A5. Neokrajšan ulomek ima obliko: $\frac{5k}{11k}$. Vsota števca in imenovalca je $5k + 11k = 352$, zato je $k = 22$. Izračunamo: $\frac{5 \cdot 22}{11 \cdot 22} = \frac{110}{242}$.

B1. Ker veliki polž poje trikrat toliko kot mali polž, pojesta v istem času štiri dele. Torej poje mali polž četrtino, veliki pa tri četrtine jagode v 6 minutah. Zato mali polž poje celo jagodo v $4 \cdot 6 = 24$ minutah. Veliki polž poje jagodo trikrat hitreje, torej v $24 : 3 = 8$ minutah.

B2. Za obseg enakokrakega trikotnika ABC velja $|AB| + 2 \cdot |AC| = 80$ cm. Ker je D razpolovišče osnovnice AB enakokrakega trikotnika, je CD ravno višina tega trikotnika. Če obseg trikotnika ABC razpolovimo, dobimo $|AD| + |AC| = 40$ cm. Obseg trikotnika ADC je: $|AD| + |AC| + |CD| = 64$ cm. Od obsega trikotnika ACD odštejemo dolžini stranic AC ter AD in dobimo višino, ki tako meri $64 - 40 = 24$ cm.

8. razred

A1. Naj bo x število ljudi v utrdbi na začetku. Po 20 dneh je bilo v utrdbi še $(90 - 20)x$ zalog hrane. To je porabilo $x + 600$ ljudi v 50 dneh. Zapišemo enačbo $70x = 50(x + 600)$. Rešitev enačbe je $x = 1500$, kar pomeni, da je bilo na začetku v utrdbi 1500 ljudi.

A2. Poenostavimo levo stran enačbe: $\sqrt{27^4} \cdot (3^{2020})^2 : 27 : \sqrt{9^{2019}} = \sqrt{(27^2)^2} \cdot 3^{4040} : 3^3 : \sqrt{(3^2)^{2019}} = 27^2 \cdot 3^{4040} : 3^3 : \sqrt{(3^{2019})^2} = (3^3)^2 \cdot 3^{4040} : 3^3 : 3^{2019} = 3^{4046} : 3^3 : 3^{2019} = 3^{4043} : 3^{2019} = 3^{2024}$. Potenci z enako osnovo sta enaki, če imata enaka eksponenta, zato je $2n = 2024$ in $n = 1012$.

A3. Posekan les je vseboval $40\,\% \cdot 2250$ kg suhe snovi oziroma 900 kg in $60\,\% \cdot 2250$ kg vode oziroma 1350 kg. Po sušenju je les vseboval toliko vode kot suhe snovi, to je 900 kg. Zato je masa lesa po sušenju 1800 kg.

A4. Iščemo števila med 2000 in 2999 (vključno z njima), ki imajo vsaj eno števko enako 0. Števko 0 na mestu stotic ima 100 števil (od 2000 do 2099). Števko 0 na mestu desetic ima 100 števil (2000, 2001, ..., 2009, 2100, 2101, ..., 2109, ..., 2900, 2901, ...,2909), vendar je med njimi prvih 10 takšnih, ki imajo števko 0 že na mestu stotic (2000, 2001, ..., 2009). Števko 0 na mestu enic ima ravno tako 100 števil (2000, 2010, ..., 2090, 2100, 2110, ..., 2190, ..., 2900, 2910, ..., 2990), a je med njimi prvih 10 takšnih, ki imajo števko 0 na mestu stotic (2000, 2010, ..., 2090) in potem še 9 takšnih, ki imajo števko 0 na mestu desetic (2100, 2200, ..., 2900). Vseh števil, ki imajo vsaj eno števko enako 0, je $100 + (100 - 10) + (100 - 10 - 9) = 271$.

Rešitev 2: Opazujemo 1000 števil. Nobene števke 0 nima $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ števil. Torej je rešitev: $1000 - 729 = 271$.

A5. Ker je ploščina kvadratne slike enaka $2{,}25$ dm^2, je stranica slike dolga $\sqrt{2{,}25} = 1{,}5$ dm in je enaka krajši osnovnici trapeza. Ko trapeze obrnemo, lahko uokvirimo sliko s ploščino $2{,}25 + 1{,}75 = 4$ dm^2. Stranica večje slike je $\sqrt{4} = 2$ dm in je enaka daljši osnovnici trapeza. Zato se dolžini osnovnic trapeza razlikujeta za $2 - 1{,}5 = 0{,}5$ dm oziroma 5 cm.

A6. Najmanjši palindrom, ki je večji od 2022, je 2112. Torej je vsota števk 6.

B1. Število stranic in diagonal iz izbranega oglišča določa preostalih 25 oglišč. Iskani večkotnik je 26-kotnik. Vsota velikosti notranjih kotov 26-kotnika je $180° \cdot (n - 2) = 180° \cdot (26 - 2) = 4320°$.

9. razred

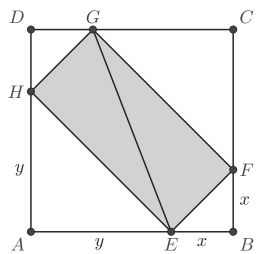
A1. Trikotnik ACG je polovica enakostraničnega trikotnika. Tako je dolžina telesne diagonale 8 cm. Dolžino ploskovne diagonale izračunamo s Pitagorovim izrekom.

A2. Volk naredi dva skoka na sekundo oziroma 5 zajčjih skokov na sekundo. Naj bo t čas, v katerem volk ujame zajca. Razdalja, ki jo naredi volk, je enaka razdalji, ki jo naredi zajec, pri čemer upoštevamo še njegovo prednost: $10 + \frac{3}{s} \cdot t = \frac{5}{s} \cdot t$ in $t = 5$ s. Zajec naredi $\frac{3}{s} \cdot 5s = 15$ skokov, ko ga ujame volk.

A3. Če naključno izberemo 4 zaporedne točke, so to oglišča trapeza, ki ni pravokotnik. Tudi če izberemo 5 zaporednih točk, ne moremo štirih povezati v pravokotnik. Preverimo vse možnosti pri izboru 6 točk in opazimo, da je ne glede na izbor vedno mogoče izbrati oglišča pravokotnika.

A4. Zapišimo prvih deset števil $2^n + 1$, pri čemer je n naravno število: $3, 5, 9, 17, 33, 65, 129, 257, 513, 1025$ ... Določimo še ostanke pri deljenju teh števil z 9: $3, 5, 0, 8, 6, 2, 3, 5, 0, 8$... Opazimo, da se ostanki od šeste potence naprej ponavljajo. Ker je število 2022 večkratnik števila 6, je ostanek števila $2^{2022} + 1$ enak šestemu ostanku, to je 2.

A5. Delčka na stranici kvadrata označimo z x in y. Ploščina ostankov je vsota ploščin kvadratov, zato velja: $x^2 + y^2 = 18$. Stranici pravokotnika merita: $x\sqrt{2}$ in $y\sqrt{2}$. Sledi $|EG|^2 = 2x^2 + 2y^2 = 2(x^2 + y^2) = 36$ in zato $|EG| = 6$.



A6. $3^{n+2} \cdot (-3)^{2n-1} \cdot (-3)^{2n+2} - 2 \cdot 3^{5n+3} = -3^{5n+3} - 2 \cdot 3^{5n+3} = -3 \cdot 3^{5n+3} = -3^{5n+4}$

B1. Označimo naravni števili z a in b. Razlika njunih kvadratov je 99: $a^2 - b^2 = 99$. Razliko kvadratov zapišemo kot: $(a + b)(a - b) = 99$. Sedaj razčlenimo na prafaktorje število 99 in zapišemo vse različne zmnožke dveh števil, ki dajo rezultat 99: $99 = 1 \cdot 99 = 3 \cdot 33 = 9 \cdot 11$. Tako dobimo 3 enačbe: $(a + b)(a - b) = 1 \cdot 99$, $(a + b)(a - b) = 3 \cdot 33$ in $(a + b)(a - b) = 9 \cdot 11$. Vsako enačbo reši svoj par, ki pa so: $(50, 49)$, $(18, 15)$ in $(10, 1)$.

B2. Ploščina enakostraničnega trikotnika s stranico 10 cm je $25\sqrt{3}$ cm^2. Ploščine treh enakokrakih trikotnikov so enake ploščini enakostraničnega trikotnika (zaradi velikosti kotov; glej sliko). Tako je ploščina šestkotnika, $p = (100\sqrt{3} + 3 \cdot 100)$ cm^2 ali $p = 100(\sqrt{3} + 3)$ cm^2. Obseg je vsota dolžin stranic šestkotnika, med katerimi so tri dolžine 10 cm (stranice kvadrata) in šest višin enakostraničnega trikotnika, $6 \cdot \frac{(10\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$ cm. Obseg šestkotnika je tako, $o = 30(\sqrt{3} + 1)$ cm.