

Tekmovanja

18. tekmovanje v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike za srednje šole – državno tekmovanje

1. skupina: Poslovna matematika

1. NALOGA

Dva delavca sta dvorišče v velikosti 10 m dolžine in 6 m širine tlakovala 4 dni in 6 ur na dan. Potrebovala sta 1020 tlakovcev dimenzije 30 cm dolžine in 20 cm širine.

- a) Koliko ur na dan bi morali delati 4 delavci, če želijo delo opraviti v treh dneh in če se površina dvorišča zaradi cvetlične grede zmanjša za 3 m^2 , za 1 m^2 pa potrebujemo 17 tlakovcev iste dimenzije? Rezultat izrazi v urah in minutah.
- b) Koliko delavcev bi moralo dodatno priti na delo, če bi morali tlakovati še prostor dimenzije 12 m^2 pred vrtno uto? Delo bi opravljali 6 dni po 7,5 ure na dan s tlakovci dimenzije 20 cm dolžine in 20 cm širine. Zaradi slabše kakovosti tlakovcev jih morajo naročiti 10 % več, na kvadratni meter pa se položi 25 tlakovcev? Pri izračunu uporabite izhodiščne podatke.

2. NALOGA

Športno društvo prireja tekmovanje. V vsaki prijavljeni ekipi je 5 tekmovalcev. Društvo ima na razpolago 2.000,00 EUR lastnih sredstev in 1.500,00 EUR denarnih sredstev, ki jih je pridobilo s strani sponzorjev.

- a) Za izvedbo tekmovanja potrebuje 1.000,00 EUR, 75 % preostanka pa bo razdelilo med šest tekmovalnih ekip, in sicer tako, da vsaka ekipa dobi 100,00 EUR, ostanek pa prejmejo tri prvouvršene ekipe v razmerju 3 : 2 : 1. Koliko prejme posamezna ekipa in koliko posamezni tekmovalec v ekipi?
- b) Zaradi napovedi slabega vremena so tekmovanje prestavili za en teden. V tem času so uspeli pridobiti še 1.000,00 EUR dodatnih sponzorskih sredstev, prijave pa so se še štiri tekmovalne ekipe. Sedaj za izvedbo potrebujejo 1.200,00 EUR, 75 % preostanka pa bodo razdelili med vse tekmovalne ekipe tako, da vsaka ekipa prejme 100,00 EUR, ostanek pa razdelijo med pet prvouvršenih ekip tako, da vsaka ekipa dobi 50,00 EUR manj kot prejšnja. Koliko prejme posamezna ekipa in koliko posamezni tekmovalec v ekipi?

3. NALOGA

Neža si namerava kupiti nove smuči, smučarske čevlje in smučarske palice. Na razpolago ima 600,00 EUR.

Cena smuči v trgovini A je 350,00 EUR, smučarskih čevljev 240,00 EUR in smučarskih palic 30,00 EUR. Želi si še novo smučarsko čelado, ki stane 100,00 EUR. S kartico zvestobe lahko pridobi še 25 % popusta. Z nakupi v preteklem letu si je na kartici zvestobe »nabrala« še bonus v vrednosti 20,00 EUR.

V trgovini B stanejo smuči in palice skupaj 400,00 EUR, smučarski čevlji pa 250,00 EUR. Smučarska čelada stane 80,00 EUR. Pri nakupu z gotovino nudijo še 20-% popust. Trgovina nudi še posebno »akcijo«. V kolikor znaša nakup nad 500,00 EUR, lahko kupec kupi čelado za 1,00 EUR.

- a) Izračunajte, katera trgovina je ugodnejša in koliko denarja ostane Neži po nakupu.
- b) Neža se s prijatelji odpravlja na smučanje. Cena za dva dni znaša 150,00 EUR. Za žepnino potrebuje 50,00 EUR. Čez nekaj dni se pričnejo razprodaje. V trgovini A so ceno smuči znižali za 30 %, smučarskih palic za 10 %, smučarskih čevljev za 40 % in čelado za 50 %. Na izdelke, ki so na razprodaji, se 25 % popusta s kartico zvestobe ne more obračunati, lahko pa unovči bonus v vrednosti 20,00 EUR. V trgovini B so ceno kompleta smuči in palic znižali za 50 %, smučarskih čevljev za 30 % ter čelado za 10 %. Izračunajte, katera trgovina je ugodnejša v času razprodaj. Ali ima Neža dovolj denarja za vso smučarsko opremo in za smučanje? V kolikor ne, čemu in v kateri trgovini se naj odreče, da bo vseeno lahko odšla na smučanje? Pri izračunu uporabite izhodiščne podatke.

Smučarska oprema	Trgovina A	Popust v %	Cena po pocenitvi Trgovina A	Trgovina B	Popust v %	Cena po pocenitvi Trgovina B

4. NALOGA

- a) Banka A nam za čas pol leta za glavnico 600,00 EUR ponuja 2,75-% obresti, obrestovane po navadnem obrestnem računu. Koliko obresti bi nam banka A pripisala po šestih mesecih?
Banka B pa nam za čas pol leta in isti znesek ponuja izplačilo 608,10 EUR. Po kakšni obrestni meri obrestuje glavnico banka B, če za izračun obresti uporablja navadni obrestni račun?
- b) V banko smo vložili 2.250,00 EUR in čez šest let ugotovili, da smo dobili h glavnici 896,77 EUR obresti. Po kakšni obrestni meri se je obrestovala glavnica, če banka uporablja obrestno-obrestni račun, celoletno kapitalizacijo in dekurzivno obrestovanje?
Koliko obresti manj pa bi dobili, če bi banka za obračun obresti uporabljala navadni obrestni račun?
- c) V koliko letih se pri 2-% letni obrestni meri neka glavnica podvoji, če banka pri celoletni kapitalizaciji uporablja dekurzivno obrestovanje in obrestno-obrestni račun?

2. skupina: Statistika

1. NALOGA

Tabela 1: Uporaba interneta pri rednih uporabnikih interneta po namenu uporabe in po starostnih skupinah v Sloveniji v letu 2014

Namen uporabe	Število uporabnikov - SKUPAJ	16–24	25–34	35–44	44–54	55–64	64–74
Pošiljanje ali prejemanje e-pošte	973.942	181.332	254.935	231.453	164.420	102.477	39.324
E-bančništvo	504.143	48.192	168.083	140.247	77.714	55.043	14.865
Iskanje informacij o blagu, storitvah	969.576	164.597	250.050	238.194	176.194	99.222	41.319
Uporaba storitev, povezanih s potovanji in nastanitvijo	437.267	54.123	121.163	111.593	86.364	42.924	21.101
Branje spletnih novic, časopisov, revij	912.680	160.951	231.708	215.069	171.022	97.235	36.695
E-naročanje obiska pri zdravniku	101.031	10.337	21.513	24.570	22.373	14.522	7.715
Sodelovanje v spletnih družabnih omrežjih	653.076	171.427	199.356	152.500	72.020	45.960	11.813

Vir: SURS, 2019

- a) Izračunajte strukturo uporabe interneta po namenu uporabe za vse uporabnike skupaj. (Strukturo izrazite v odstotkih. Odstotke zaokrožite na dve decimalni mesti natančno in jih vpišite v tabelo 2.)

Tabela 2: Struktura uporabe interneta po namenu uporabe v Sloveniji v letu 2014

Namen uporabe	
Pošiljanje ali prejemanje e-pošte	
E-bančništvo	
Iskanje informacij o blagu, storitvah	
Uporaba storitev, povezanih s potovanji in nastanitvijo	
Branje spletnih novic, spletnih časopisov, spletnih revij	*
E-naročanje obiska pri zdravniku	
Sodelovanje v spletnih družabnih omrežjih	
Skupaj	

- b) Komentirajte podatek v tabeli 2, ki je označen z zvezdico.
- c) Izračunajte strukturo uporabe interneta za e-bančništvo po starostnih skupinah. (Strukturo izrazite v odstotkih. Odstotke zaokrožite na dve decimalni mesti natančno in jih vpišite v tabelo 3.)

Tabela 3: Struktura uporabe interneta za e-bančništvo po starostnih skupinah v Sloveniji v letu 2014

Namen uporabe	Število uporabnikov - SKUPAJ	16–24	25–34	35–44	44–54	55–64	64–74

- d) Komentirajte največji in najmanjši rezultat, izračunan pod točko c.
- e) Dopolnite trditev:

Od uporabnikov, ki uporabljajo internet za pošiljanje ali prejemanje e-pošte jih je največ v starostni skupini _____ in sicer _____ odstotkov.

2. NALOGA

V srednji šoli »Modri učenjak« so ob koncu šolskega leta zbrali podatke o številu dijakov, številu učiteljev in nekatere statistične koeficiente: število nezadostnih dijakov na 1000 dijakov, število dijakov na enega nezadostnega dijaka, število dijakov na učitelja. Podatke so vnesli v tabelo. V tabeli nekateri podatki manjkajo.

Tabela 4: Število dijakov, število učiteljev in drugi kazalci uspešnosti dijakov srednje šole »Modri učenjak« ob koncu posameznega šolskega leta

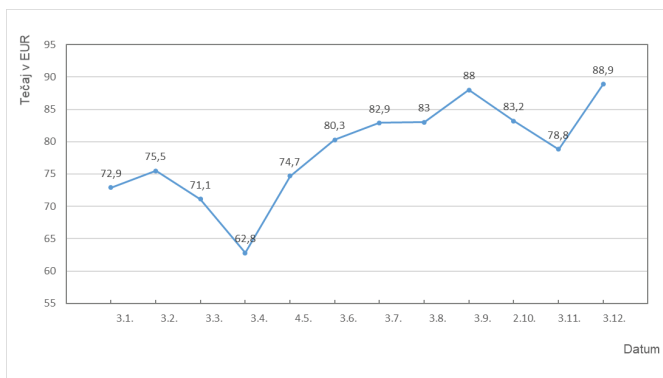
Šolsko leto	Število dijakov	Število učiteljev	Število nezadostnih dijakov	Število nezadostnih na 1000 dijakov	Število dijakov na 1 nezadostnega	Število dijakov na učitelja
2011/12	518	38			51,8	
2012/13	380	30		28,3		
2013/14	420	32		35,7		
2014/15	460				25,5	13,9
2015/16	410	32		43,9		
2016/17	523				22,7	14,1
2017/18	518				18,5	14,0
2018/19	620			50,0		15,5

Vir: Prirejani podatki

- Izračunajte število nezadostnih dijakov v posameznih letih.
(Rezultate zaokrožite na celo število in jih vpišite v zgornjo tabelo.)
- Dopolnite podatke o številu učiteljev po letih.
(Rezultate zaokrožite na celo število in jih vpišite v zgornjo tabelo.)
- Izračunajte manjkajoče podatke za vse tri statistične koeficiente.
(Rezultate zaokrožite na eno decimalno mesto natančno in jih vpišite v zgornjo tabelo.)
- Koliko odstotkov dijakov je bilo v šolskem letu 2018/19 nezadostnih? Iz katerega podatka v tabeli lahko to odčitate?

3. NALOGA

Krka je eno izmed uspešnih slovenskih podjetij, ki veliko svojih izdelkov izvozi na trge drugih držav. Grafikon prikazuje gibanje povprečnega tečaja delnice Krke v letu 2020.



Slika 1: Gibanje povprečnega tečaja delnice Krke v obdobju od 3. 1. 2020 do 3. 12. 2020

Vir: Ljubljanska borza, januar 2021

- a) S pomočjo ustreznih indeksov izračunajte, za koliko odstotkov več oz. manj je bila vredna delnica Krke, d. d. v primerjavi s prejšnjim mesecem. (Rezultate zaokrožite na 1 decimalno mesto natančno in jih vpišite v prazni stolpec v tabeli.)

Datum v I. 2019	Tečaj v EUR	
3.1.	72,9	
3.2.	75,5	
3.3.	71,1	
3.4.	62,8	
4.5.	74,7	
3.6.	80,3	
3.7.	82,9	
3.8.	83,0	
3.9.	88,0	
2.10.	83,2	
3.11.	78,8	
3.12.	88,9	

Vir: Ljubljanska borza, januar 2021

- b) Grafično prikažite izračunane indekse pod točko a.
- c) Kolikšna bi bila vrednost delnice konec meseca decembra 2021, če je tečaj delnice 30. 12. 2020 znašal 91,70 EUR, povprečna mesečna stopnja rasti tečaja delnice v letu 2021 pa bi bila 2.1 odstotka.
- d) Podjetje Krka, d. d. je v letu 2018 za izplačilo dividend namenilo 101.835.696,00 evrov dobička. V letu 2018 je imela Krka izdanih 32.793.448 delnic, domače fizične osebe pa so imele v lasti 39,16 % delnic. Izračunajte znesek dividend v evrih, ki so ga prejele domače fizične osebe v letu 2018.

4. NALOGA

Skupina osmih prijateljev je ugotovila, da je njihova povprečna telesna masa 78,75 kg. Pri tem eden izmed njih ne tehta več kot 65 kg. 12,5 % jih ima maso nad 75 do 85 kg, najtežji trije pa nimajo več kot 100 kg, od tega ima en sam več kot 95 kg telesne mase.

- a) Oblikujte frekvenčno porazdelitev za razvrstitev prijateljev po telesni masi.

Tabela 5: Frekvenčna porazdelitev telesne mase osmih prijateljev

Telesna masa v kg	Število oseb	

- b) Izračunajte telesno maso, od katere je polovica prijateljev imela enako ali nižjo, polovica pa višjo telesno maso.
- c) Grafično prikažite kumulativno absolutnih in relativnih frekvenc.
- d) Grafično ocenite odstotek prijateljev, ki tehtajo nad 80 do 90 kilogramov.

3. skupina

1. V spodnji tabeli so zbrani podatki o količini izbranih dobrin, ki smo jih lahko s povprečno mesečno neto plačo kupili v posameznem letu, in potrebnem delovnem času za nakup enote dobrine pri povprečni plači. Predpostavimo, da je v vsakem mesecu 168 delovnih ur.

Leto	Količina dobrin, kupljenih s povprečno mesečno neto plačo				Delovni čas, potreben za nakup 1 kg dobrine [v minutah]			
	Kruh [v kg]	Pšenična moka [v kg]	Kurilno olje [v ℓ]	Svinjina [v kg]	Kruh	Pšenična moka	Krompir	Kava
2005			1311		23	8		91
2006			1250		25	8		92
2007	444	1175	1350				9	
2008	474					10		85
2009	487					10		
2010				192	19	9	6	75
2011	520	1122						
2012				178	20	9		79
2013	501	1146						
2014				170	18	8	7	
2015	542	1333						
2016				181	18	7		77
2017	568	1397						
2018	513	1656						
2019	449	1717	1157	236	20	6	8	80

Vir: Statistični urad Republike Slovenije

- a) Koliko časa skupaj je bilo pri povprečni plači leta 2010 potrebno delati za 1,2 kg kruha, 5 kg krompirja in 20 dag kave? Rezultat zaokroži na minuto.
- b) Leta 2017 je znašala povprečna neto plača 1067 €, leta 2018 pa 1093 €. Leta 2017 smo z njo lahko skupaj kupili 112 kg svinjine in 580 kg krompirja, leta 2018 pa 56 kg svinjine in 1040 kg krompirja. Kilogram svinjine je bil leta 2018 za 1,5 € cenejši kot leta 2017, kilogram krompirja pa za 0,15 € dražji kot leta 2017. Koliko je stal kilogram krompirja leta 2018 in koliko časa smo morali delati za vrečo (10 kg) krompirja leta 2018? Rezultata zaokroži na cent oziroma minuto.
- c) Leta 2008 je bila povprečna neto plača za 15 % višja kot leta 2006, z njo pa smo lahko kupili 125 litrov kurilnega olja manj kot leta 2006. Kako in za koliko odstotkov se je spremenila cena kurilnega olja od leta 2006 do 2008? Rezultat v odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.
- d) Leta 2006 smo razmišljali o tem, ali se nam z vidika *porabe časa* bolj splača kruh kupovati v trgovini ali peči doma. Predpostavimo, da lahko naenkrat spečemo ves kruh, ki ga potrebujemo za en mesec. Za peko 1 kg kruha porabimo 600 g pšenične moke. Da zaslužimo za preostale sestavine, ki jih potrebujemo za peko 1 kg kruha, moramo v službi delati 5 minut. Čas priprave prvega kg kruha je 1,5 ure, za vsak nadaljnji kg kruha pa še dodatnih 10 minut. Najmanj koliko kruha moramo speči, da bomo za to porabili manj časa, kot je potrebno delati, da zaslužimo za nakup enake količine kruha v trgovini? Rezultat zaokroži na kilogram.
2. Nakup s kreditno kartico omogoča obročno odplačevanje dolga. Banka predpisuje najmanjši mesečni obrok v višini 100 € in najdaljšo dobo odplačila tri leta. Prvi obrok plačamo ob nakupu, zadnjega pa najkasneje tri leta po nakupu. Zadnji obrok, s katerim odplačamo preostanek dolga, je lahko nižji od 100 €. Za dolg na kreditni kartici banka uporablja relativno mesečno obrestovanje in 6 % letno obrestno mero.

Rezultate v evrih zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) Kolikšen je najvišji možen nakup, če želimo plačevati minimalne obroke?
 - b) Kolikšne (enake) obroke bomo plačevali, če kupimo računalnik v vrednosti 1500 € in ga želimo odplačati eno leto po nakupu?
 - c) Kako dolgo bomo odplačevali računalnik, če želimo plačevati minimalne obroke?
3. Znani sta naslednji letni efektivni obrestni meri, kjer čas t merimo v letih.

t	1	2
$R(0, t)$	3,20 %	4,20 %

Kuponska obveznica A ima do dosvetja še tri leta in izplačuje letne kupone v višini 4 €, prvega čez natanko eno leto. Njena nominalna vrednost je 100 €.

Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) Določi obrestno mero $R(0, 3)$, če veš, da je obveznica A naprodaj po 96 % svoje nominalne vrednosti.
 - b) Donosnost do dosvetja obveznice je konstantna letna efektivna obrestna mera R , pri kateri je sedanja vrednost vseh prihodnjih izplačil obveznice enaka trenutni ceni obveznice. Dokaži, da donosnost do dosvetja obveznice A znaša med 5,4 % in 5,5 %.
 - c) Finančna institucija je kupila večje število obveznic A in vsako razbila v dva ločena vrednostna papirja: papir B vsebuje samo izplačilo nominalne vrednosti obveznice A, papir C pa vse kupone iste obveznice A. Institucija prodaja papirje B in C na istem trgu, kot so na voljo obveznice A. Za vsakega od papirjev B in C določi, kako in za koliko odstotkov se spremeni njegova vrednost, če vse obrestne mere $R(0, t)$ v hipu padejo za eno odstotno točko.
 - d) Pojasni, zakaj se odstotni spremembi v nalogi c) močno razlikujeta.
4. Danes (10. aprila 2021) znaša cena 159-litrskega sodčka lahke nafte na finančnih trgih 59,40 \$. Na borzi so na voljo tri evropske nakupne opcije na lahko nafto z zapadlostjo čez tri mesece. Vsaka opcija se nanaša na 1000 sodčkov nafte. Njihove izvršilne cene so $K_1 = 58$ \$, $K_2 = 59$ \$ in $K_3 = 60$ \$ za sodček lahke nafte. Na borzi je možen tako nakup kot kratka prodaja teh opcij.

Kratka prodaja opcije pomeni, da si od drugega vlagatelja (brez stroškov) izposodimo opcijo in jo prodamo. Zanj od kupca prejmemo premijo. Če opcija ob zapadlosti prinaša dohodek, smo dolžni tega izplačati prvotnemu lastniku opcije.

Letna efektivna obrestna mera znaša 1,5 % za vsa dosvetja. Rezultate v ameriških dolarjih zaokroži na dve decimalni mesti.

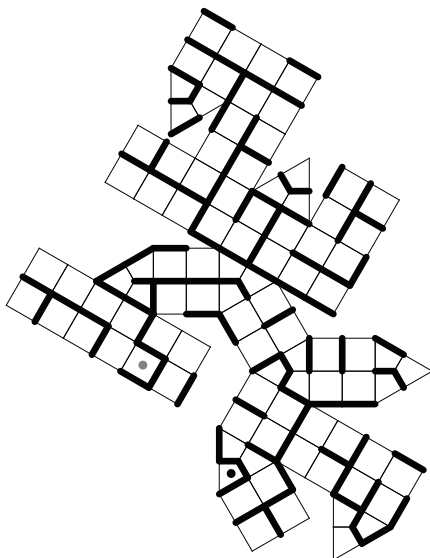
- a) Finančno podjetje danes kupi po eno nakupno opcijo z izvršilnima cenama K_1 in K_3 ter kratko proda dve opciji z izvršilno ceno K_2 . Izrazi izplačilo, ki ga bo podjetje prejelo ob zapadlosti teh opcij, kot funkcijo takratne cene sodčka lahke nafte. Nariši graf funkcije izplačila.
- b) Kolikšna mora biti ob zapadlosti opcij cena sodčka lahke nafte, da bo izplačilo portfelja štirih opcij vsaj 250 \$?
- c) Premije evropskih nakupnih opcij iz naloge a) so $c_1 = 5810$ \$ za opcijo z izvršilno ceno K_1 , $c_2 = 5260$ \$ za opcijo z izvršilno ceno K_2 in $c_3 = 4530$ \$ za opcijo z izvršilno ceno K_3 . Na trgu je možna arbitražna. Pripravi arbitražno strategijo.

31. tekmovanje iz razvedrilne matematike – državno tekmovanje

6. in 7. razred osnovne šole

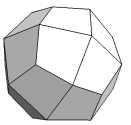
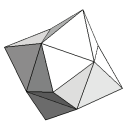
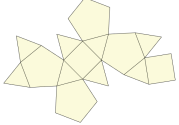
1. Labirint na poliedru

Dan je labirint na mreži poliedra. Med sosednjima poljema lahko prehajaš, če med njima ni odebeljene črte. Poišči najkrajšo pot med pikama v labirintu. Pot lahko označuješ z zaporednimi naravnimi števili ali s črto. Če jo označuješ s črto, mora biti jasno razvidno, kako se stranice zlepijo v isti rob, ko sestavimo polieder.



2. Poliedri

Dani so trije poliedri. Izpolni spodnjo preglednico! Upoštevaj, da imajo poliedri čim večjo simetrijo in da se na prvih dveh slikah vidi približno polovica poliedra.

Polieder			
Število mejnih ploskev			
Število oglišč			
Število robov			

3. Virus na otoku vitezov in oprod

Nekje v oceanu obstaja otok, na katerem živijo prebivalci dveh vrst, vitezi, ki vedno govorijo resnico, in oprode, ki vedno govorijo neresnico. Na otoku že eno leto razsaja virus. Na daljavo smo se pogovarjali s štirimi domačini, ki so povedali:

A: "Če je C bolan, potem je B vitez."

B: "D je oproda ali je A zdrav."

C: "A je oproda in vsaj dva izmed nas sta zdrava."

D: "C je vitez in največ dva izmed nas sta zdrava."

A: "Če je vsaj eden od nas zdrav, potem je C vitez."

Za vsakega od teh domačinov ugotovi, katere vrste je (vitez/oproda) in kakšno je njegovo zdravstveno stanje (zdrav/bolan), ter izpolni spodnjo preglednico.

	vrsta domačina	zdravstveno stanje
A		
B		
C		
D		

4. Označeni sudoku

V vsak prazen kvadraterk vpiši po eno od naravnih števil od 1 do 5, tako da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih z isto črko nastopalo vseh 5 števil.

B	E	A ²	B	B
E	E	C	C	D ³
E	D	A	A	D
C	A	A	C	B ¹
D	E	C	D ⁵	B

5. Kenken

V vsak prazen kvadraterk vpiši po eno od naravnih števil od 1 do 5, tako da bo v vsaki vrstici in vsakem stolpcu vpisanih vseh 5 števil in da bo v vsakem od likov, omejenih z odebeljenimi črtami, vsota (v primeru znaka +), razlika (v primeru znaka −) oziroma produkt (v primeru znaka ×) vseh števil v tem liku enaka napisanemu številu. Na primer, razlika večjega in manjšega števila v tretjem in četrtem kvadratu prvega stolpca je 1.

×4	−1		+12	
	+12			+7
−1		×30		
			+7	×4
×15				

6. Kvadrat s produkti

V vsak prazen kvadraterk vpiši po eno od naravnih števil od 1 do 9, tako da bo v kvadratu napisanih vseh 9 števil in da bo produkt števil v vsaki vrstici in vsakem stolpcu enak številu, napisanemu ob vrstici oziroma stolpcu.

			90
			168
			24
12	189	160	

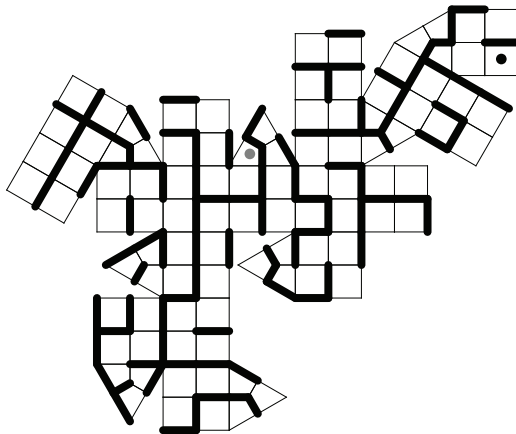
7. Račun

S pomočjo števil 3, 13, 17 in 19, računskih operacij seštevanja, odštevanja, množenja in deljenja ter oklepajev sestavi račun, katerega rezultat bo celo število, čim bližje številu 80. Vsako od števil 3, 13, 17, in 19 lahko uporabiš največ enkrat.

8. in 9. razred osnovne šole

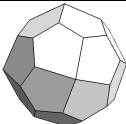
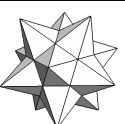
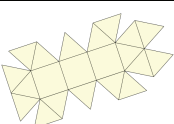
1. Labirint na poliedru

Dan je labirint na mreži poliedra. Med sosednjima poljema lahko prehajaš, če med njima ni odebeljene črte. Poišči najkrajšo pot med pikama v labirintu. Pot lahko označuješ z zaporednimi naravnimi števili ali s črto. Če jo označuješ s črto, mora biti jasno razvidno, kako se stranice zlepijo v isti rob, ko sestavimo polieder.



2. Poliedri

Dani so trije poliedri. Izpolni spodnjo preglednico! Upoštevaj, da imajo poliedri čim večjo simetrijo in da se na prvih dveh slikah vidi približno polovica poliedra.

Polieder			
Število mejnih ploskev			
Število oglišč			
Število robov			

3. Virus na otoku vitezov in oprod

Nekje v oceanu obstaja otok, na katerem živijo prebivalci dveh vrst, vitezi, ki vedno govorijo resnico, in oprode, ki vedno govorijo neresnico. Na otoku že eno leto razsaja virus. Vsak prebivalec lahko zbolí največ enkrat. Na daljavo smo se pogovarjali s štirimi domačini, ki so povedali:

A: "B je oproda, če in samo če je največ eden izmed nas bolan."

B: "Vsaj eden izmed nas ima nameščeno aplikacijo za sledenje stikov in vsak, ki ima nameščeno aplikacijo, je oproda."

C: "A ima nameščeno aplikacijo za sledenje stikom in vsaj polovica tistih, ki so zboleli, je že ozdravela."

D: "Če sta A in C oba viteza, potem je B zdrav."

A: "D je vitez, če in samo če je C vitez."

B: "Če je C zdrav, potem imajo vsaj trije izmed nas nameščeno aplikacijo za sledenje stikov."

C: "Sem zdrav ali pa je D bolan."

D: "A je oproda in vsi smo že zboleli."

Za vsakega od teh domačinov ugotovi, katere vrste je (vitez/oproda), kakšno je njegovo zdravstveno stanje (bolan/ozdravel/ni zbolel) in ali ima nameščeno aplikacijo za sledenje stikov (da/ne), ter izpolni spodnjo preglednico.

	vrsta domačina	zdravstveno stanje	aplikacija
A			
B			
C			
D			

4. Označeni sudoku

V vsak prazen kvadraterk vpiši po eno od naravnih števil od 1 do 5, tako da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih z isto črko nastopalo vseh 5 števil.

E	A	C	C	B
A	D	A	E	A
B	C	D	D	B ⁴
B	E	E ¹	A	E
B ⁵	D ³	C	D	C

5. Kenken

V vsak prazen kvadraterk vpiši po eno od naravnih števil od 1 do 6, tako da bo v vsaki vrstici in vsakem stolpcu vpisanih vseh 6 števil in da bo v vsakem od likov, omejenih z odebeljenimi črtami, vsota (v primeru znaka +), razlika (v primeru znaka -) oziroma produkt (v primeru znaka ×) vseh števil v tem liku enaka napisanemu številu. Na primer, razlika večjega in manjšega števila v prvih dveh kvadratih zadnjega stolpca je 3.

×90		+8	-2		-3
			-3		
×20		-3		×18	
+4		+10		-1	
	×72		+12		+8
×8					

6. Kvadrat s produkti

V vsak prazen kvadraterk vpiši po eno od naravnih števil od 1 do 16, tako da bo v kvadratu napisanih vseh 16 števil in da bo produkt števil v vsaki vrstici in vsakem stolpcu enak številu, napisanemu ob vrstici oziroma stolpcu.

				12012
				1024
				225
				7560
2184	198	3600	13440	

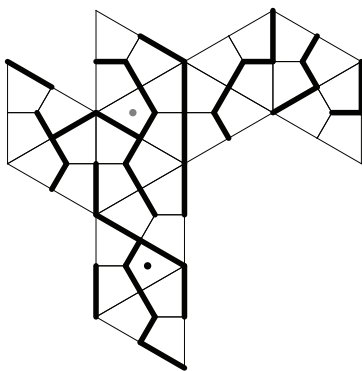
7. Račun

S pomočjo števil 6, 15, 100 in 170, računskih operacij seštevanja, odštevanja, množenja in deljenja ter oklepajev sestavi račun, katerega rezultat bo celo število, čim bližje številu 35. Vsako od števil 6, 15, 100 in 170 lahko uporabiš največ enkrat.

1. in 2. letnik srednje šole

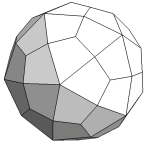
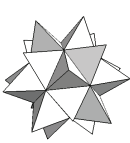
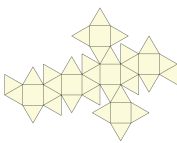
1. Labirint na poliedru

Dan je labirint na mreži poliedra. Med sosednjima poljema lahko prehajaš, če med njima ni odebeljene črte. Poišči najkrajšo pot med pikama v labirintu. Pot lahko označuješ z zaporednimi naravnimi števili ali s črto. Če jo označuješ s črto, mora biti jasno razvidno, kako se stranice zlepijo v isti rob, ko sestavimo polieder.



2. Poliedri

Dani so trije poliedri. Izpolni spodnjo preglednico! Upoštevaj, da imajo poliedri čim večjo simetrijo in da se na prvih dveh slikah vidi približno polovica poliedra.

Polieder			
Število mejnih ploskev			
Število oglišč			
Število robov			

3. Virus na otoku vitezov in oprod

Nekje v oceanu obstaja otok, na katerem živijo prebivalci dveh vrst, vitezi, ki vedno govorijo resnico, in oprode, ki vedno govorijo neresnico. Na otoku že eno leto razsaja virus. Vsak prebivalec lahko zbolí največ enkrat. Na daljavo smo se pogovarjali s štirimi domačini, ki so povedali:

A: "Vsaj trije izmed nas imamo nameščeno aplikacijo za sledenje stikov in B je oproda."

B: "Če je C vitez, potem sta C in D že oba zbolela."

C: "A je bolan ali je D oproda."

D: "Vsaj dva izmed nas sta že ozdravela, če in samo če ima C nameščeno aplikacijo za sledenje stikov."

A: "Če je D oproda, potem B ni zbolel."

B: "A in D imata nameščeno aplikacijo za sledenje stikov in A je zdrav."

C: "B ni zbolel, jaz pa sem bolan."

D: "Vsaj dva izmed nas sta že zbolela ali pa ima B nameščeno aplikacijo za sledenje stikov."

Za vsakega od teh domačinov ugotovi, katere vrste je (vitez/oproda), kakšno je njegovo zdravstveno stanje (bolan/ozdravel/ni zbolel) in ali ima nameščeno aplikacijo za sledenje stikov (da/ne), ter izpolni spodnjo preglednico.

	vrsta domačina	zdravstveno stanje	aplikacija
A			
B			
C			
D			

4. Označeni sudoku

V vsak prazen kvadrataek vpiši po eno od naravnih števil od 1 do 6, tako da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih z isto črko nastopalo vseh 6 števil.

A	D	B	F	D	B
E	A	C ³	E ⁵	E	C
F ⁶	F	B	F ²	E	F
B	D	A	A	D	C
D	A	B	A	D	C
F ¹	B	C	E	C	E

5. Kenken

V vsak prazen kvadrataek vpiši po eno od naravnih števil od 1 do 6, tako da bo v vsaki vrstici in vsakem stolpcu vpisanih vseh 6 števil in da bo v vsakem od likov, omejenih z odebeljenimi črtami, vsota (v primeru znaka +), razlika (v primeru znaka -) oziroma produkt (v primeru znaka ×) vseh števil v tem liku enaka napisanemu številu. Na primer, razlika večjega in manjšega števila v prvih dveh kvadratih zadnjega stolpca je 3.

×12		+11	-4		-3
			-4		
×18		-4		×20	
+7		+6		-2	
	×15		+14		+7
×24					

6. Kvadrat s produkti

V vsak prazen kvadraterk vpiši po eno od naravnih števil od 1 do 16, tako da bo v kvadratu napisanih vseh 16 števil in da bo produkt števil v vsaki vrstici in vsakem stolpcu enak številu, napisanemu ob vrstici oziroma stolpcu.

				2700
				3456
				560
				4004
9984	1120	7425	252	

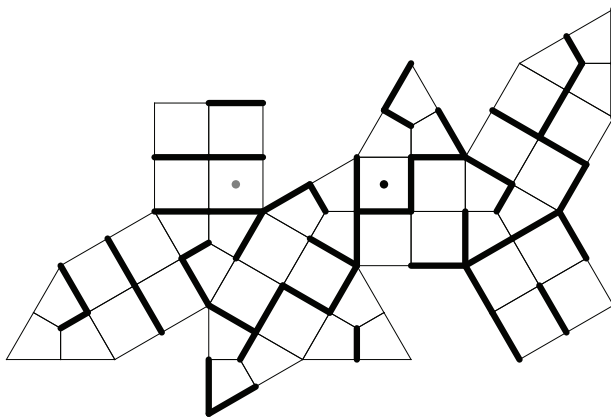
7. Račun

S pomočjo števil 2, 4, 15, 64 in 123, računskih operacij seštevanja, odštevanja, množenja in deljenja ter oklepajev sestavi račun, katerega rezultat bo celo število, čim bližje številu 320. Vsako od števil 2, 4, 15, 64 in 123 lahko uporabiš največ enkrat.

3. in 4. letnik srednje šole

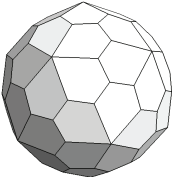
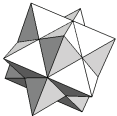
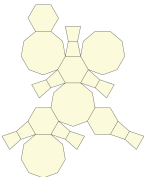
1. Labirint na poliedru

Dan je labirint na mreži poliedra. Med sosednjima poljema lahko prehajaš, če med njima ni odebeljene črte. Poišči najkrajšo pot med pikama v labirintu. Pot lahko označuješ z zaporednimi naravnimi števili ali s črto. Če jo označuješ s črto, mora biti jasno razvidno, kako se stranice zlepijo v isti rob, ko sestavimo polieder.



2. Poliedri

Dani so trije poliedri. Izpolni spodnjo preglednico! Upoštevaj, da imajo poliedri čim večjo simetrijo in da se na prvih dveh slikah vidi približno polovica poliedra.

			
Polieder			
Število mejnih ploskev			
Število oglišč			
Število robov			

3. Virus na otoku vitezov in oprod

Nekje v oceanu obstaja otok, na katerem živijo prebivalci dveh vrst, vitezi, ki vedno govorijo resnico, in oprode, ki vedno govorijo neresnico. Na otoku že eno leto razsaja virus. Vsak prebivalec lahko zbolí največ enkrat. Na daljavo smo se pogovarjali s štirimi domačini, ki so povedali:

A: "B je oproda, če in samo če nas je bila več kot polovica že bolnih."

B: "A je oproda in nihče od tistih izmed nas, ki ima nameščeno aplikacijo za sledenje stikov, ni zbolel."

C: "A in B sta oba bolna ali je D vitez."

D: "C je oproda in več kot polovica zbolelih je že ozdravela."

A: "Če je D oproda, potem niti B niti C nimata nameščene aplikacije za sledenje stikov."

B: "Če sta C in D oba ozdravela, potem A ni zbolel."

C: "B je vitez in A je oproda."

D: "A in B sta oba oprodi ali pa sem jaz bolan."

Za vsakega od teh domačinov ugotovi, katere vrste je (vitez/oproda), kakšno je njegovo zdravstveno stanje (bolan/ozdravel/ni zbolel) in ali ima nameščeno aplikacijo za sledenje stikov (da/ne), ter izpolni spodnjo preglednico.

	vrsta domačina	zdravstveno stanje	aplikacija
A			
B			
C			
D			

4. Označeni sudoku

V vsak prazen kvadrata vpiši po eno od naravnih števil od 1 do 6, tako da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih z isto črko nastopalo vseh 6 števil.

F	F ¹	A	B ⁴	D	F
D ⁵	E	E	F	B	E
D	B	B	E	C	B
C ²	C	C	C	F	D
D ⁶	E	A	B	A	A
A	C	E	D	A	F

5. Kenken

V vsak prazen kvadraterk vpiši po eno od naravnih števil od 1 do 6, tako da bo v vsaki vrstici in vsakem stolpcu vpisanih vseh 6 števil in da bo v vsakem od likov, omejenih z odebeljenimi črtami, vsota (v primeru znaka +), razlika (v primeru znaka -) oziroma produkt (v primeru znaka $\times$) vseh števil v tem liku enaka napisanemu številu. Na primer, razlika večjega in manjšega števila v prvih dveh kvadratkah zadnjega stolpca je 3.

$\times 48$		$+9$	-1		-3
			-1		
$\times 30$		-3		$\times 30$	
$+7$		$+10$		-1	
	$\times 8$		$+10$		$+11$
$\times 15$					

6. Kvadrat s produkti

V vsak prazen kvadraterk vpiši po eno od naravnih števil od 1 do 16, tako da bo v kvadratu napisanih vseh 16 števil in da bo produkt števil v vsaki vrstici in vsakem stolpcu enak številu, napisanemu ob vrstici oziroma stolpcu.

				4032
				1456
				900
				3960
2496	12600	693	960	

7. Račun

S pomočjo števil 14, 21, 33, 55 in 60, računskih operacij seštevanja, odštevanja, množenja in deljenja ter oklepajev sestavi račun, katerega rezultat bo celo število, čim bližje številu 360. Vsako od števil 14, 21, 33, 55 in 60 lahko uporabiš največ enkrat.

Rešitve 8. tekmovanja v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike za srednje šole – državno tekmovanje

1. skupina: Poslovna matematika

Naloga 1a.

2 delavca	60 m ²	4 dni	6 ur	1020 tlakovcev	600 cm ²
↓	↑	↓	↑	↑	↓
4 delavci	57 m ²	3 dni	x ur	969 tlakovcev	600 cm ²

$$x = \frac{6 \times 2 \times 57 \times 4 \times 969 \times 600}{4 \times 60 \times 3 \times 1020 \times 600} = \underline{\underline{3.61 \text{ ure}}}$$

Odg.: Na dan bi morali delati 3 ure in 37 minut.

Naloga 1b.

2 delavca	60 m ²	4 dni	6 ur	1020 tlakovcev	600 cm ²	100 %
↑	↑	↓	↓	↑	↓	↑
x delavcev	72 m ²	6 dni	7,5 ur	1800 tlakovcev	400 cm ²	110 %

$$x = \frac{2 \times 72 \times 4 \times 6 \times 1800 \times 600 \times 110}{60 \times 6 \times 7,5 \times 1020 \times 400 \times 100} = \underline{\underline{3.73 \text{ delavca}}}$$

Odg.: Dodatno bi potrebovali še dva delavca.

Naloga 2a.

$$2.000,00 + 1.500,00 = 3.500,00 \text{ EUR}$$
$$3.500,00 - 1.000,00 = 2.500,00 \text{ EUR}$$
$$2.500,00 \times 75 \% = \underline{\underline{1.875,00 \text{ EUR za nagrade}}}$$
$$1.875,00 - (6 \times 100,00) = 1.275,00 \text{ EUR za prve tri ekipe}$$

Ekipa	Razmerje	Nagrada za tri prvuvršene ekipe	Vsaka ekipa	Ekipa skupaj	Tekmovalec
1	3x	637,50	100,00	737,50	147,50
2	2x	425,00	100,00	525,00	105,00
3	1x	212,50	100,00	312,50	62,50
4			100,00	100,00	20,00
5			100,00	100,00	20,00
6			100,00	100,00	20,00
	6x = 1275,00				
	x = 212,50				
				1 T	1 T

Naloga 2b.

$$2.000,00 + 1.500,00 + 1.000,00 = 4.500,00$$
$$4.500,00 - 1.200,00 = 3.300,00$$
$$3.300,00 \times 75 \% = \underline{\underline{2.475,00 \text{ EUR za nagrade}}}$$
$$2.475,00 - (10 \times 100,00) = \underline{\underline{1.475,00 \text{ EUR}}}$$

Ekipe	Razmerje	Nagrajeni ekipi	Vsaka ekipa	Ekipe skupaj	Tekmovalec
1	x	395,00	100,00	495,00	99,00
2	x - 50,00	345,00	100,00	445,00	89,00
3	x - 100,00	295,00	100,00	395,00	79,00
4	x - 150,00	245,00	100,00	345,00	69,00
5	x - 200,00	195,00	100,00	295,00	59,00
6			100,00	100,00	20,00
7			100,00	100,00	20,00
8			100,00	100,00	20,00
9			100,00	100,00	20,00
10			100,00	100,00	20,00
	5x - 500,00 = 1.475,00				
	x = 395,00				
		1 T		1 T	1 T

Naloga 3a.

Trgovina A

350,00 + 240,00 + 30,00 + 100,00 = 720,00 – (25 % od 720,00) = 720,00 – 180,00 = 540,00 EUR
540,00 – 20,00 = **520,00 EUR**

Trgovina B

400,00 + 250,00 = 650,00 – (20 % od 650,00) = 650,00 – 130,00 = 520,00 + 1,00 = **521,00 EUR**

Izračun ostanka po nakupu = 600,00 – 520,00 = **80,00 EUR**

Odgovor: Za 1 EUR je ugodnejša trgovina A in Neži, po nakupu v trgovini A, ostane 80,00 EUR.

Naloga 3b.

Smučarska oprema	Trgovina A	Popust v %	Cena po pocenitvi Trgovina A	Trgovina B	Popust v %	Cena po pocenitvi Trgovina B
smuči	350,00	30 %	245,00	400,00	50 %	200,00
palice	30,00	10 %	27,00			
čevlji	240,00	40 %	144,00	250,00	30 %	175,00
čelada	100,00	50 %	50,00	80,00	10 %	72,00
			466,00			Σ 447,00
	466,00 – 20,00 (bonus)		Σ 446,00			

Odgovor: Za 1 EUR je ugodnejša trgovina A.

Odgovor: Neža nima dovolj denarja. Če želi na smučanje, naj v trgovini A ne kupi čelade za 50 €.

Naloga 4a.

G = 600,00 EUR

m = 6

p = 2,75 %

o = ? EUR

$$o = \frac{G \times p \times m}{1200}$$

$$o = \frac{600 \times 2,75 \times 6}{1200} = 8,25 \text{ EUR}$$

Odgovor: Banka A bi nam pripisala 8,25 EUR obresti.

G = 600,00 EUR

m = 6

o = 8,10 EUR

p = ? %

$$o = \frac{G \times p \times m}{1200}$$

$$p = \frac{o \times 1200}{G \times m} = \frac{8,10 \times 1200}{600,00 \times 6} = 2,7\%$$

Odgovor: Banka B obrestuje po 2,7-% letni obrestni meri.

Naloga 4b.

$$G_0 = 2.250,00 \text{ EUR}$$

$$G_n = 3.146,77 \text{ EUR}$$

$$m = 1$$

$$n = 6 \text{ let}$$

$$p = ? \%$$

$$G_n = G_0 \times r^n$$
$$r^n = \frac{G_n}{G_0}$$
$$r = \sqrt[n]{G_n/G_0} = \sqrt[6]{3146,77/2250} = 1,057500092 \dots$$
$$p = (r - 1) \times 100$$
$$\underline{\underline{p = 5,75 \%$$

$$G = 2.250,00 \text{ EUR}$$

$$p = 5,75 \%$$

$$l = 6 \text{ let}$$

$$o = x \text{ EUR}$$

$$o = \frac{G \times p \times l}{100}$$

$$o = \frac{2.250,00 \times 5,75 \times 6}{100} = 776,25 \text{ EUR}$$

$$896,77 - 776,25 = \underline{\underline{120,52 \text{ EUR}}}$$

Odgovor: Če banka uporablja navadni obrestni račun, bi dobili 120,52 EUR obresti manj.

Naloga 4c.

$$G_n = 2 \times G_0$$

$$p = 2 \%$$

$$r = 1,02$$

$$m = 1$$

$$n = ? \text{ let}$$

$$G_n = G_0 \times r^n$$

$$n = \frac{\log 2}{\log r} = \frac{\log 2}{\log 1,02} = 35 \text{ let}$$

Odgovor: Neka glavnica pri 2 % obrestni meri bi se podvojila v 35 letih.

2. skupina: Statistika

Naloga 1a.

Namen uporabe	Delež v %
Pošiljanje ali prejemanje e-pošte	21,40
E-bančništvo	11,07
Iskanje informacij o blagu, storitvah	21,30
Uporaba storitev, povezanih s potovanji in nastanitvijo	9,61
Branje spletnih novic, spletnih časopisov, spletnih revij	20,05*
E-naročanje obiska pri zdravniku	2,22
Sodelovanje v spletnih družabnih omrežjih	14,35
Skupaj	100,0

Naloga 1c.

Namen uporabe	Število uporabnikov - SKUPAJ	16–24	25–34	35–44	44–54	55–64	64–74
E-bančništvo	100,0	9,56	33,34	27,82	15,41	10,92	2,95

Naloga 1d.

Od vseh uporabnikov interneta za e-bančništvo je največ uporabnikov v starostni skupini od 25 do 34 let, in sicer 33,34 odstotka, najmanj pa jih je v starostni skupini od 64 do 74 let, in sicer 2,95 odstotka.

Naloga 1e.

Od uporabnikov, ki uporabljajo internet za pošiljanje ali prejemanje e-pošte, jih je največ v starostni skupini **od 25 do 34 let**, in sicer **26,18** odstotkov.

Namen uporabe	Število uporabnikov - SKUPAJ	16–24	25–34	35–44	44–54	55–64	64–74
Pošiljanje in prejemanje e-pošte	100,00	18,62	26,18	23,76	16,88	10,52	4,04

Naloga 2a.

Šolsko leto	Število dijakov	Število učiteljev	Število nezadostnih dijakov	Število nezadostnih na 1000 dijakov	Število dijakov na 1 nezadostnega	Število dijakov na učitelja
2011/12	518	38	10	19,3	51,8	13,6
2012/13	380	30	11	28,3	34,5	12,7
2013/14	420	32	15	35,7	28,0	13,1
2014/15	460	33	18	39,1	25,5	13,9
2015/16	410	32	18	43,9	22,8	12,8
2016/17	523	37	23	44,0	22,7	14,1
2017/18	518	37	28	54,1	18,5	14,0
2018/19	620	40	31	50,0	20,0	15,5

$$\text{Št. nezad. dij.} = \frac{\text{št. nezad. na 1000 dij.} \cdot \text{št. dijakov}}{1000}$$

ali

$$\text{Št. nezad. dij.} = \frac{\text{št. dijakov}}{\text{št. dijakov na 1 nezad.}}$$

Naloga 2b.

$$\text{Št. učiteljev} = \frac{\text{št. dijakov}}{\text{št. dijakov na učitelja}}$$

Naloga 2c.

$$\text{Št. nezad. na 1000 dij.} = \frac{\text{št. nezadostnih dij.}}{\text{št. dijakov}} \cdot 1000$$

$$\text{Št. dijakov na 1 nezad.} = \frac{\text{št. dijakov}}{\text{št. nezad. dij.}}$$

$$\text{Št. dijakov na učitelja} = \frac{\text{št. dijakov}}{\text{št. učiteljev}}$$

Naloga 2d.

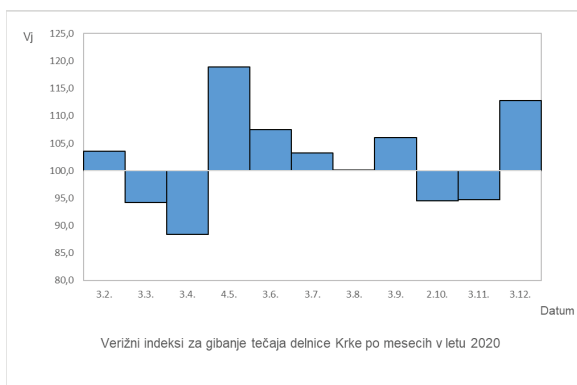
V šolskem letu 2018/19 je bilo nezadostnih 5 % dijakov.

To lahko razberemo iz kazalca število nezadostnih na 1000 dijakov oz. ta kazalec izrazimo kot število nezadostnih dijakov na 100 dijakov.

Naloga 3a.

Datum v l. 2020	Tečaj v EUR	V _j
3.1.	72,9	-
3.2.	75,5	103,6
3.3.	71,1	94,2
3.4.	62,8	88,3
4.5.	74,7	118,9
3.6.	80,3	107,5
3.7.	82,9	103,2
3.8.	83,0	100,1
3.9.	88,0	106,0
2.10.	83,2	94,5
3.11.	78,8	94,7
3.12.	88,9	112,8

Naloga 3b.



Naloga 3c.

$$\text{Tečaj delnice dec. 2021} = 91,70 \cdot 1,021^{12} = 117,67 \text{ EUR}$$

Naloga 3d.

$$\text{Dividende domačih fizičnih oseb} = 101.835.696 \cdot 0,3916 = 39.878.858,55 \text{ EUR}$$

ali

$$\text{Št. delnic domačih fizičnih oseb} = 32.793.448 \cdot 0,3916 = 12.841.914 \text{ delnic}$$

$$\text{Dividenda na delnico} = \frac{101.835.696}{12.841.914} = 3,11 \text{ EUR}$$

$$\text{Dividende domačih fizičnih oseb} = 12.841.914 \cdot 3,11 = 39.938.352,54 \text{ EUR}$$

Naloga 4a.

Telesna masa v kg	Število oseb	F _j
do 65	1	1
nad 65 do 75	3	4
nad 75 do 85	1	5
nad 85 do 95	2	7
nad 95 do 105	1	8
Skupaj	8	

Naloga 4b.

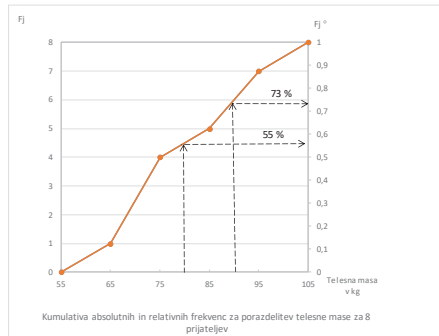
$$R = \frac{N+1}{2} = \frac{8+1}{2} = 4,5$$

Medialni razred: nad 75 do 85

$$Me = 75 + 10 \cdot \frac{4,5 - 4}{1} = 80 \text{ kg}$$

Polovica prijateljev je imela telesno maso 80 kg ali manj, polovica prijateljev pa je imela višjo telesno maso.

Naloga 4c.



Naloga 4d.

18 odstotkov prijateljev je tehtalo nad 80 do 90 kg.

3. skupina

Naloga 1a.

Rešitev

Delovni čas, potreben za nakup 1 kg vsake dobrine, pomnožimo z zahtevano količino:

$$19 \cdot 1,2 + 6 \cdot 5 + 75 \cdot 0,2 = 67,8 \text{ minute.}$$

Potrebno je bilo delati 68 minut.

Naloga 1b.

Rešitev

Naj bo x cena kilograma svinjine, y pa cena kilograma krompirja v letu 2017.

Z upoštevanjem plače dobimo sistem dveh enačb z dvema neznankama:

$$112x + 580y = 1067$$

$$56(x - 1,5) + 1040(y + 0,15) = 1093$$

V drugi enačbi odpravimo oklepaje ter jo pomnožimo z 2:

$$112x + 580y = 1067$$

$$112x + 2080y = 2042$$

Enačbi odštejemo, da se znebimo spremenljivke x . Ostane nam linearna enačba

$$1500y = 975$$

z rešitvijo $y = 0,65$ €.

Cena kilograma krompirja v letu 2018 je bila za 0,15 € višja, kar zneso 0,80 €.

Cena vreče krompirja je bila 8 €.

Upoštevamo, da ima mesec $168 \cdot 60 = 10\,080$ delovnih minut, kar pomeni, da smo morali za vrečo krompirja delati

$$\frac{8}{1093} \cdot 10\,080 = 73,8 \text{ minute,}$$

oziroma 74 minut.

Naloga 1c.

Rešitev

Iz tabele preberemo, da smo leta 2006 s povprečno plačo kupili 1250 litrov kurilnega olja. V letu 2008 smo ga s povprečno plačo lahko kupili 125 litrov manj, kar je 10 % manj.

Če upoštevamo, da se je povprečna plača povišala za 15 %, lahko izračunamo spremembo cene kurilnega olja. Dobimo

$$\frac{1 + 0,15}{1 - 0,10} = 1,2778.$$

Cena kurilnega olja se je povišala za 27,78 %.

Naloga 1d.

Rešitev

Označimo s q mesečno količino kruha v kg.

Nakup kruha v trgovini:

Za 1 kg kruha smo delali 25 minut, za q kg pa skupaj $25q$ minut.

Peka kruha doma:

Za 1 kg pšenične moke smo delali 8 minut, za 600 g pšenične moke pa $0,6 \cdot 8 = 4,8$ minute.

Za ostale sestavine za 1 kg kruha smo delali še dodatnih 5 minut.

Za sestavine za q kg kruha smo delali $(4,8 + 5)q = 9,8q$ minut.

Za pripravo prvega kg kruha smo porabili 90 minut, za ves nadaljnji kruh pa še $10(q - 1)$ minut. Skupaj smo pripravi namenili $90 + 10(q - 1)$ minut.

Da smo z domačo peko skupaj porabili manj časa, mora veljati neenakost

$$9,8q + 90 + 10(q - 1) < 25q$$

z rešitvijo $q > 15,38$.

Doma smo morali speči vsaj 16 kg kruha.

Naloga 2a.

Rešitev

Izberemo največje število obrokov.

Višina obroka je $a = 100$ €, višino nakupa označimo z G .

Mesečni obrestni faktor je $r = 1 + \frac{p}{12 \cdot 100} = 1,005$.

Denarne tokove prikazuje spodnja shema.



Redukcijski termin postavimo na konec tretjega leta.

Vse denarne tokove naobrestimo do redukcijskega termina.

$$Gr^{36} = ar^{36} + ar^{35} + \dots + ar + a$$

$$Gr^{36} = a(r^{36} + r^{35} + \dots + r + 1)$$

$$Gr^{36} = a \cdot \frac{r^{37} - 1}{r - 1}$$

$$G = a \cdot \frac{r^{37} - 1}{r^{36}(r - 1)}$$

$$G = 100 \cdot \frac{1,005^{37} - 1}{1,005^{36}(1,005 - 1)} = 3387,10 \text{ €}$$

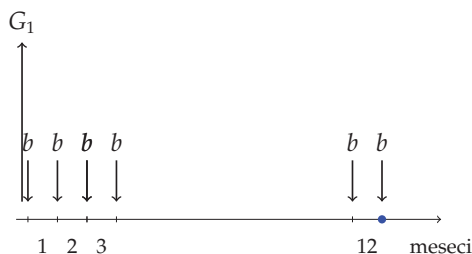
Najvišji možni nakup znaša 3387,10 €.

Naloga 2b.

Rešitev

Računalnik stane $G_1 = 1500 \text{ €}$, višino obroka označimo z b .

Denarne tokove prikazuje spodnja shema.



Redukcijski termin postavimo na konec prvega leta.

Vse denarne tokove naobrestimo do redukcijskega termina.

$$G_1r^{12} = br^{12} + br^{11} + \dots + br + b$$

$$G_1r^{12} = b(r^{12} + r^{11} + \dots + r + 1)$$

$$G_1r^{12} = b \cdot \frac{r^{13} - 1}{r - 1}$$

$$b = G_1 \cdot \frac{r^{12}(r - 1)}{r^{13} - 1}$$

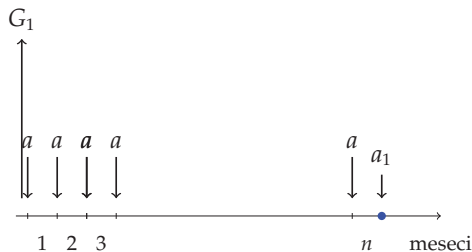
$$b = 1500 \cdot \frac{1,005^{12}(1,005 - 1)}{1,005^{13} - 1} = 118,87 \text{ €}$$

Mesečni obrok znaša 118,87 €.

Naloga 2c.

Rešitev

Denarne tokove prikazuje spodnja shema.



Število obrokov je najmanjše naravno število n , da velja $a_1 \leq a = 100 \text{ €}$.

Redukcijski termin postavimo na konec n -tega meseca.

Vse denarne tokove naobrestimo do redukcijskega termina in izrazimo zadnji obrok.

$$G_1 r^n = ar^n + ar^{n-1} + \dots + ar + a_1$$

$$G_1 r^n = ar(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + r + 1) + a_1$$

$$G_1 r^n = ar \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} + a_1$$

$$a_1 = G_1 r^n - ar \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Iz pogoja $a_1 \leq a$ dobimo:

$$G_1 r^n - ar \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \leq a$$

$$G_1 r^n (r - 1) - ar(r^n - 1) \leq a(r - 1)$$

$$r^n (G_1 r - G_1 - ar) + ar \leq a(r - 1)$$

$$r^n (G_1 + ar - G_1 r) \geq a$$

Izrazimo r^n in logaritmiramo:

$$\begin{aligned} r^n &\geq \frac{a}{G_1 + ar - G_1 r} \\ n \ln r &\geq \ln \frac{a}{G_1 + ar - G_1 r} \\ n &\geq \frac{\ln a - \ln(G_1 + ar - G_1 r)}{\ln r} \\ n &\geq \frac{\ln 100 - \ln(1500 + 100 \cdot 1,005 - 1500 \cdot 1,005)}{\ln 1,005} = 14,55 \end{aligned}$$

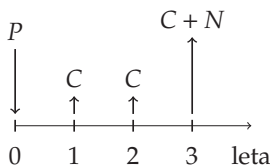
Računalnik bomo odplačali v 16 obrokih, zadnji obrok 15 mesecev po nakupu.

Naloga 3a.

Rešitev

Kuponska obveznica izplača kupon $C = 4 \text{ €}$ čez eno in dve leti ter kupon C skupaj z nominalno vrednostjo $N = 100 \text{ €}$ čez tri leta.

Cena obveznice je $P = 96 \text{ €}$.



Denarne tokove povezuje formula za vrednotenje obveznic

$$P = C \cdot D(0, 1) + C \cdot D(0, 2) + (C + N) \cdot D(0, 3).$$

Izrazimo najprej

$$D(0, 3) = \frac{P - C \cdot D(0, 1) - C \cdot D(0, 2)}{C + N}$$

$$D(0, 3) = \frac{P - \frac{C}{1+R(0,1)} - \frac{C}{(1+R(0,2))^2}}{C + N}$$

$$D(0, 3) = \frac{96 - \frac{4}{1,032} - \frac{4}{1,042^2}}{104}$$

$$D(0, 3) = 0,850385$$

Ker je

$$D(0, 3) = \frac{1}{(1 + R(0, 3))^3},$$

dobimo

$$R(0, 3) = \sqrt[3]{\frac{1}{D(0, 3)}} - 1 = 5,55 \, \%.$$

Naloga 3b.

Rešitev

S formulo za vrednotenje obveznic

$$P = C \cdot D(0, 1) + C \cdot D(0, 2) + (C + N) \cdot D(0, 3)$$

pri danih denarnih tokovih in iskani konstantni obrestni meri R dobimo enačbo

$$P = \frac{C}{1+R} + \frac{C}{(1+R)^2} + \frac{C+N}{(1+R)^3}$$

$$96 = \frac{4}{1+R} + \frac{4}{(1+R)^2} + \frac{104}{(1+R)^3}$$

Samo desna stran je odvisna od R .

Pri $R_1 = 5,4 \, \%$ na desni strani dobimo vrednost

$$\frac{4}{1,054} + \frac{4}{1,054^2} + \frac{104}{1,054^3} = 96,22,$$

pri $R_2 = 5,5 \, \%$ pa

$$\frac{4}{1,055} + \frac{4}{1,055^2} + \frac{104}{1,055^3} = 95,95.$$

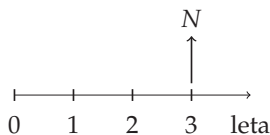
Zaradi zveznosti vemo, da je desna stran enaka 96 pri obrestni meri $R \in (5,4 \, \%; 5,5 \, \%)$.

Opomba: Ker je desna stran enačbe padajoča funkcija obrestne mere R , je rešitev natanko ena. Z računalnikom dobimo boljši približek 5,48 %.

Naloga 3c.

Rešitev

Denarni tokovi vrednostnega papirja B:



Cena pred spremembo obrestnih mer je

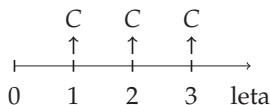
$$P_B = N \cdot D(0, 3) = \frac{N}{(1 + R(0, 3))^3} = \frac{100}{1,0555^3} = 85,04 \text{ €}.$$

Cena po padcu obrestnih mer za $\delta = 1\%$ je

$$\bar{P}_B = N \cdot \bar{D}(0, 3) = \frac{N}{(1 + R(0, 3) - \delta)^3} = \frac{100}{1,0455^3} = 87,50 \text{ €}.$$

Cena se poviša za $87,50 - 85,04 = 2,46 \text{ €}$, kar je $\frac{2,46}{85,04} = 2,89\%$.

Denarni tokovi vrednostnega papirja C:



Cena pred spremembo obrestnih mer:

$$\begin{aligned} P_C &= C \cdot D(0, 1) + C \cdot D(0, 2) + C \cdot D(0, 3) \\ P_C &= \frac{C}{1 + R(0, 1)} + \frac{C}{(1 + R(0, 2))^2} + \frac{C}{(1 + R(0, 3))^3} \\ P_C &= \frac{4}{1,032} + \frac{4}{1,042^2} + \frac{4}{1,0555^3} \\ P_C &= 10,96 \text{ €} \end{aligned}$$

Cena po padcu obrestnih mer:

$$\begin{aligned} \bar{P}_C &= C \cdot \bar{D}(0, 1) + C \cdot \bar{D}(0, 2) + C \cdot \bar{D}(0, 3) \\ \bar{P}_C &= \frac{C}{1 + R(0, 1) - \delta} + \frac{C}{(1 + R(0, 2) - \delta)^2} + \frac{C}{(1 + R(0, 3) - \delta)^3} \\ \bar{P}_C &= \frac{4}{1,022} + \frac{4}{1,032^2} + \frac{4}{1,0455^3} \\ \bar{P}_C &= 11,17 \text{ €} \end{aligned}$$

Cena se poviša za $11,17 - 10,96 = 0,21 \text{ €}$, kar je $\frac{0,21}{10,96} = 1,92\%$.

Naloga 3d.
Rešitev

Višina obrestnih mera določa časovno vrednost denarja.

V daljšem časovnem obdobju je učinek spremembe obrestne mer izrazitejši.

Papir C edini denarni tok izplača šele čez 3 leta.

Papir B tretjino skupnega denarnega toka izplača že čez 1 leto in tretjino čez 2 leti.

Naloga 4a.
Rešitev

Naj bo S_T cena *enega* sodčka nafte ob zapadlosti opcij.

Vrednost evropske nakupne opcije na *en* sodček nafte z izvršilno ceno K ob zapadlosti T znaša

$$C_T = \max\{S_T - K, 0\}.$$

Če je vrednost C_T pozitivna, lastnik opcijo izvrši in prejme takšno izplačilo.

Ker podjetje kupi po eno opcijo z izvršilnima cenama K_1 in K_3 ter kratko proda dve opciji z izvršilno ceno K_2 , bo njegovo izplačilo na *en* sodček lahke nafte znašalo

$$V_T = \max\{S_T - K_1, 0\} + \max\{S_T - K_3, 0\} - 2 \max\{S_T - K_2, 0\}.$$

Upoštevamo izvršilne cene in dobimo

$$V_T = \max\{S_T - 58, 0\} + \max\{S_T - 60, 0\} - 2 \max\{S_T - 59, 0\}.$$

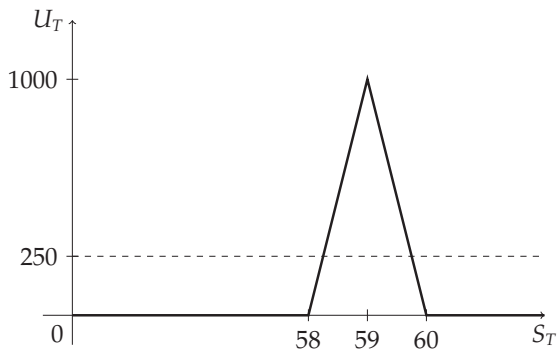
Z obravnavo izraza na ločenih intervalih dobimo

$$V_T = \begin{cases} S_T - 58, & \text{če je } 58 \leq S_T \leq 59; \\ 60 - S_T, & \text{če je } 59 < S_T \leq 60; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Izplačilo portfelja štirih opcij je 1000-kratnik zgornjega izraza:

$$U_T = \begin{cases} 1000S_T - 58\,000, & \text{če je } 58 \leq S_T \leq 59; \\ 60\,000 - 1000S_T, & \text{če je } 59 < S_T \leq 60; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Funkcija $U_T(S_T)$ je odsekoma linearna funkcija.



Naloga 4b.

Rešitev

Izplačilo portfelja bo enako 250 \$, če bo

$$1000S_T - 58\,000 = 250 \Rightarrow S_T = 58,25 \$$$

ali

$$60\,000 - 1000S_T = 250 \Rightarrow S_T = 59,75 \$.$$

Izplačilo portfelja bo vsaj 250 \$, če bo cena sodčka lahke nafte med 58,25 \$ in 59,75 \$.

Naloga 4c.

Rešitev

Arbitražna strategija je naslednja:

Danes (10. aprila 2021, $t = 0$):

- Kupimo eno nakupno opcijo z izvršilno ceno K_1 ,
- kupimo eno nakupno opcijo z izvršilno ceno K_3 ,
- kratko prodamo dve nakupni opciji z izvršilno ceno K_2 .

Denarni tok je enak $U_0 = 2c_2 - c_1 - c_3 = 10\,520 - 5810 - 4530 = 180 \$$.

Čez 3 mesece (10. julija 2021, $T = \frac{1}{4}$):

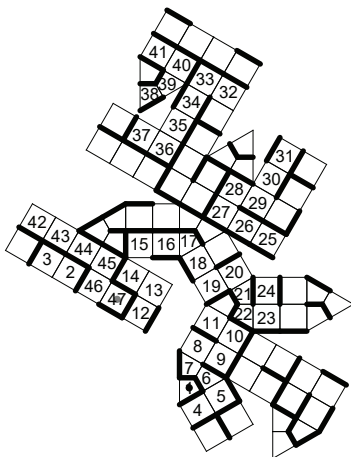
- Izvršimo opciji z izvršilnima cenama K_1 in K_3 , če se splačata,
- prvotnemu lastniku izplačamo vrednost opcij z izvršilno ceno K_2 , če je to potrebno.

Iz naloge a) vemo, da je denarni tok U_T ob zapadlosti nenegativen.

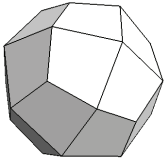
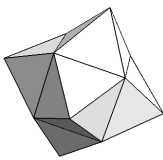
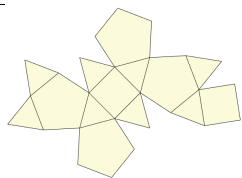
Rešitve 31. tekmovanja iz razvedrile matematike – državno tekmovanje

Rešitve za 6. in 7. razred osnovne šole

1.



2.

Polieder			
Število mejnih ploskev	24	24	14
Število oglišč	26	14	14
Število robov	48	36	26

3.

	vrsta domačina	zdravstveno stanje
A	vitez	bolan
B	vitez	bolan
C	oproda	bolan
D	oproda	bolan

4.

B ⁴	E ¹	A ²	B ³	B ⁵
E ²	E ⁵	C ¹	C ⁴	D ³
E ³	D ²	A ⁵	A ¹	D ⁴
C ⁵	A ³	A ⁴	C ²	B ¹
D ¹	E ⁴	C ³	D ⁵	B ²

5.

$\times 4$ 4	-1 1	2	$+12$ 5	3
1	$+12$ 5	3	4	$+7$ 2
-1 2	4	$\times 30$ 1	3	5
3	2	5	$+7$ 1	$\times 4$ 4
$\times 15$ 5	3	4	2	1

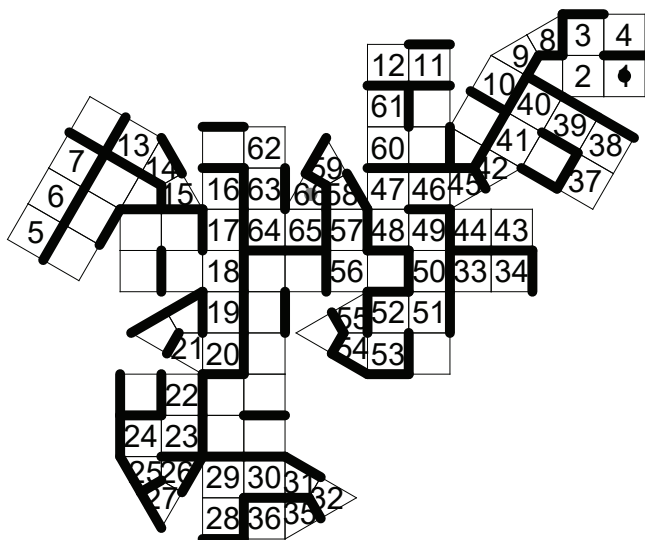
6.

2	9	5	90
6	7	4	168
1	3	8	24
12	189	160	

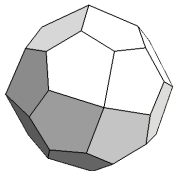
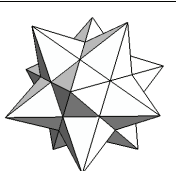
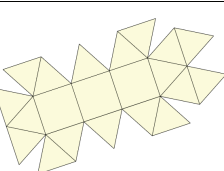
7. Možno je sestaviti račun, katerega rezultat je 80, saj je $(13 \cdot 17 + 19) : 3 = 80$.
 Možno je sestaviti tudi račune z rezultati 71, 73, 74, 75, 76, 78, 79, 83, 84, 87 in 88.

Rešitve nalog za 8. in 9. razred osnovne šole

1.



2.

Polieder			
Število mejnih ploskev	24	60	21
Število oglišč	38	32	14
Število robov	60	90	33

3.

	vrsta domačina	zdravstveno stanje	aplikacija
A	oproda	ozdravel	ne
B	vitez	ozdravel	ne
C	oproda	bolan	da
D	vitez	ozdravel	ne

4.

E ⁴	A ²	C ⁵	C ³	B ¹
A ¹	D ⁴	A ³	E ²	A ⁵
B ³	C ¹	D ²	D ⁵	B ⁴
B ²	E ⁵	E ¹	A ⁴	E ³
B ⁵	D ³	C ⁴	D ¹	C ²

5.

$\times 90$ 6	3	$+8$ 5	-2 2	4	-3 1
5	2	1	-3 3	6	4
$\times 20$ 4	1	-3 2	5	$\times 18$ 3	6
$+4$ 1	5	$+10$ 6	4	-1 2	3
3	$\times 72$ 6	4	$+12$ 1	5	$+8$ 2
$\times 8$ 2	4	3	6	1	5

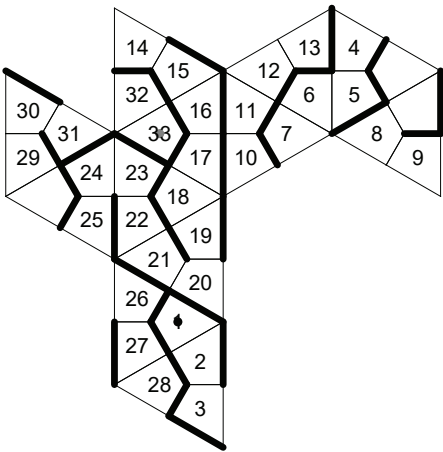
6.

13	11	6	14	12012
8	2	4	16	1024
3	1	15	5	225
7	9	10	12	7560
2184	198	3600	13440	

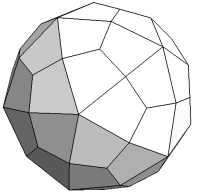
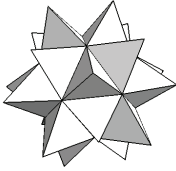
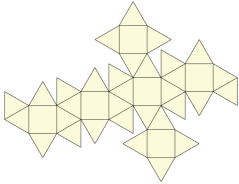
7. Možno je sestaviti račun, katerega rezultat je 35, saj je $170 : 6 + 100 : 15 = 35$.
Možno je sestaviti tudi račune z rezultati 28, 30, 32 in 40.

Rešitve za 1. in 2. letnik srednje šole

1.



2.

Polieder			
Število mejnih ploskev	60	60	38
Število oglišč	62	32	24
Število robov	120	90	60

3.

	vrsta domačina	zdravstveno stanje	aplikacija
A	vitez	bolan	da
B	opropa	ni zbolel	da
C	vitez	bolan	ne
D	vitez	ni zbolel	da

4.

A ⁵	D ¹	B ⁶	F ⁴	D ³	B ²
E ²	A ⁶	C ³	E ⁵	E ¹	C ⁴
F ⁶	F ³	B ¹	F ²	E ⁴	F ⁵
B ³	D ⁵	A ⁴	A ¹	D ²	C ⁶
D ⁴	A ²	B ⁵	A ³	D ⁶	C ¹
F ¹	B ⁴	C ²	E ⁶	C ⁵	E ³

5.

^{×12} 4	1	⁺¹¹ 5	⁻⁴ 6	2	⁻³ 3
3	2	4	⁻⁴ 1	5	6
^{×18} 1	3	⁻⁴ 6	2	^{×20} 4	5
⁺⁷ 5	6	⁺⁶ 2	4	⁻² 3	1
2	^{×15} 5	1	⁺¹⁴ 3	6	⁺⁷ 4
^{×24} 6	4	3	5	1	2

6.

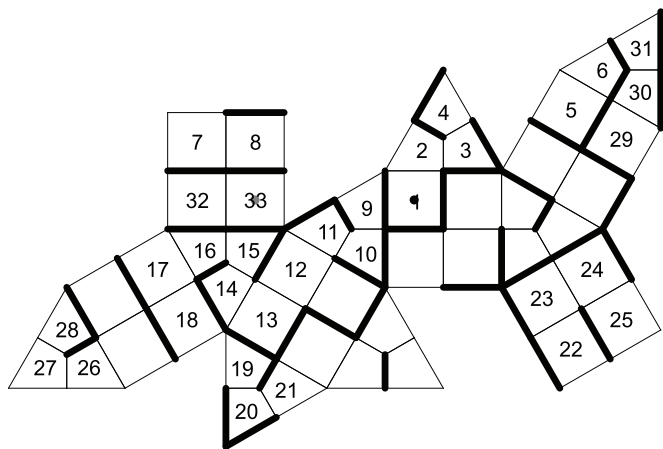
6	10	15	3	2700
16	2	9	12	3456
8	14	5	1	560
13	4	11	7	4004
9984	1120	7425	252	

7. Možno je sestaviti račun, katerega rezultat je 320, saj je $64 : (123 : 15 - 2 \cdot 4) = 320$.

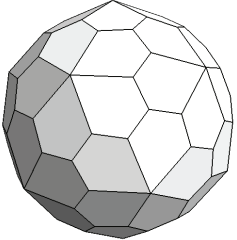
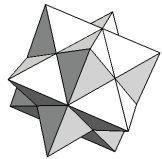
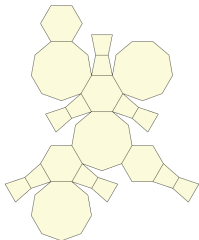
Možno je sestaviti tudi račune z rezultati 311, 314, 316, 317, 318, 319, 321, 324, 325, 327 in 329.

Rešitve za 3. in 4. letnik srednje šole

1.



2.

Polieder			
Število mejnih ploskev	60	48	20
Število oglišč	92	26	36
Število robov	150	72	54

3.

	vrsta domačina	zdravstveno stanje	aplikacija
A	oproda	bolan	ne
B	vitez	bolan	ne
C	vitez	ni zbolel	da
D	oproda	ozdravel	ne

4.

F ³	F ¹	A ⁶	B ⁴	D ²	F ⁵
D ⁵	F ³	E ¹	F ²	B ⁶	E ⁴
D ⁴	B ²	B ⁵	F ⁶	C ¹	B ³
C ²	C ⁶	C ³	C ⁵	F ⁴	D ¹
D ⁶	E ⁵	A ⁴	B ¹	A ³	A ²
A ¹	C ⁴	E ²	D ³	A ⁵	F ⁶

5.

$\times 48$ 4	6	$+9$ 5	-1 2	3	-3 1
2	1	3	-1 5	6	4
$\times 30$ 3	2	-3 4	1	$\times 30$ 5	6
$+7$ 1	5	$+10$ 6	4	-1 2	3
6	$\times 8$ 4	2	$+10$ 3	1	$+11$ 5
$\times 15$ 5	3	1	6	4	2

6.

16	12	7	3	4032
13	14	1	8	1456
2	5	9	10	900
6	15	11	4	3960
2496	12600	693	960	

7. Možno je sestaviti račun, katerega rezultat je 360, saj je $60 : (55 : 33 - 21 : 14) = 360$.
Možno je sestaviti tudi račune z rezultati 352, 354, 357, 358, 363, 364, 365, 366, 367 in 368.