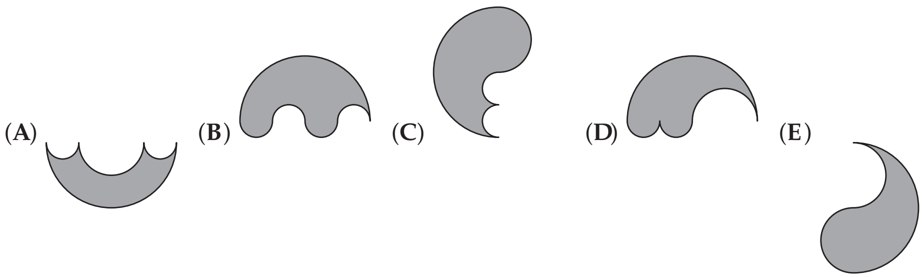
Tekmovanja

65. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje

1. letnik

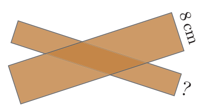
A1. Vsi liki na slikah so omejeni s polkrožnimi loki, pri čemer je največji polkrožni lok pri vseh likih enak. Kateri izmed likov z najmanjšim obsegom ima največjo ploščino?



A2. Vsota števk petmestnega števila je 44. Koliko je produkt števk tega petmestnega števila?

(**A**) $2^3 \cdot 3^8$ (**B**) $2^3 \cdot 9^3$ (**C**) $8 \cdot 4^9$ (**D**) $8 \cdot 3^4$
(**E**) Nič od predhodno naštetega.

A3. Peter je prekril rano z 2 pravokotnima obližema (glej sliko). Ploščina območja, prekritega z obema obližema hkrati, je 40 cm^2, obseg območja, prekritega z obema obližema hkrati, pa je 30 cm. Zgornji obliž je širok 8 cm. Koliko centimetrov je širok spodnji obliž?

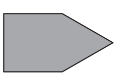


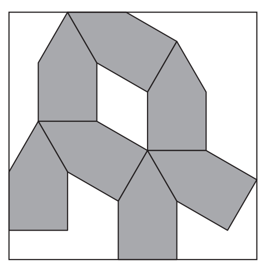
(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 16

B1. Dokaži, da ne obstajata naravni števili a in b, za kateri velja $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2021}$.

B2. Poišči vsa realna števila x, y in z, ki rešijo sistem enačb

$$\frac{3xy}{x-y} = 2, \quad \frac{2yz}{y+2z} = 3, \quad \frac{xz}{z-4x} = 3.$$

B3. Nataša je zlepila kvadrat in enakostranični trikotnik v petkotnik . Iz 7 takih petkotnikov je oblikovala lik (glej sliko).



a) Dokaži, da lahko Natašin lik včrtamo v velik kvadrat tako, kot to prikazuje slika.

b) Ali Natašin lik pokrije več kot $\frac{2}{3}$ površine velikega kvadrata?

2. letnik

A1. Na državno tekmovanje v računanju se lahko uvrsti največ 30 tekmovalcev. Na letošnjem državnem tekmovanju so tekmovalci reševali 4 naloge, pri čemer je $\frac{1}{3}$ tekmovalcev rešila natanko 3 naloge, $\frac{1}{4}$ tekmovalcev je rešila natanko 2 nalogi, $\frac{1}{6}$ tekmovalcev je rešila natanko 1 nalogo, $\frac{1}{8}$ tekmovalcev pa ni rešila nobene naloge. Koliko tekmovalcev je rešilo vse 4 naloge?

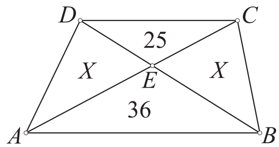
(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

A2. Lucijana je iz množice števil $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ izbrala 3 različna števila. Z njimi je zapisala največje možno trimestno število in najmanjše možno trimestno število. Dobljeni števili je seštela in dobila število 545. Koliko je vsota 3 števil, ki jih je izbrala Lucijana?

(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 9 (**D**) 11 (**E**) 13

A3. Diagonali AC in BD trapeza $ABCD$ se sekata v točki E in razdelita trapez na 4 trikotnike s ploščinami 25 cm^2, 36 cm^2, X cm^2 in X cm^2 (glej sliko). Kolikšna je vrednost X?

(**A**) 25 (**B**) 30 (**C**) 32 (**D**) 36 (**E**) 61



B1. Poišči vsa realna števila x, za katera velja $(x^2 - 7x + 11)^{x^2-13x+42} = 1$.

B2. Naj bo ABC ostrokotni trikotnik. Krožnica s središčem v A, ki se dotika stranice BC, seka stranico AB v točki B_1 in stranico CA v točki C_2. Krožnica s središčem v B, ki se dotika stranice CA, seka stranico BC v točki C_1 in stranico AB v točki A_2. Krožnica s središčem v C, ki se dotika stranice AB, seka stranico CA v točki A_1 in stranico BC v točki B_2. Dokaži, da je trikotnik, ki ga določajo premice A_1A_2, B_1B_2 in C_1C_2, podoben trikotniku ABC.

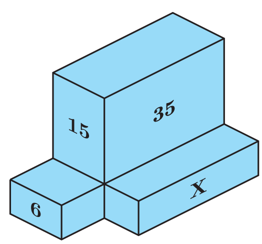
B3. Veronika ima list karirastega papirja z 78×78 kvadratki. List želi razrezati na manjše kose, od katerih bo vsak imel bodisi 14 bodisi 15 kvadratkov, pri čemer z vsakim rezom prereže enega od kosov papirja na dva dela vzdolž ene od črt na papirju. Najmanj kolikokrat mora Veronika prerezati papir?

---

3. letnik

A1. Nik je postavil nekaj kvadrov drug poleg drugega, tako da so se njihove mejne ploskve prilegale druga na drugo, in na 3 mejne ploskve napisal njihove ploščine (glej sliko). Koliko je ploščina mejne ploskve označene z X?

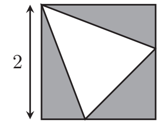
(**A**) 12 (**B**) 14 (**C**) 15 (**D**) 26
(**E**) Nič od predhodnega.



A2. Ana in Meta sta se hkrati odpeljali iz vasi Zabukovje v vas Zahrastje, Ana s kolesom in Meta z avtom. Ana je vozila s konstantno hitrostjo 30 km/h, Meta pa s konstantno hitrostjo 70 km/h. Ko je Meta prišla v Zahrastje, je bila tam 1 h, nato pa se je z enako hitrostjo 70 km/h odpeljala nazaj v Zabukovje. Na poti nazaj je srečala Ano 105 km od Zahrastja. Koliko kilometrov je razdalja med vasema Zabukovje in Zahrastje?

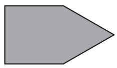
(**A**) 262,5 (**B**) 300 (**C**) 315 (**D**) 345 (**E**) 375

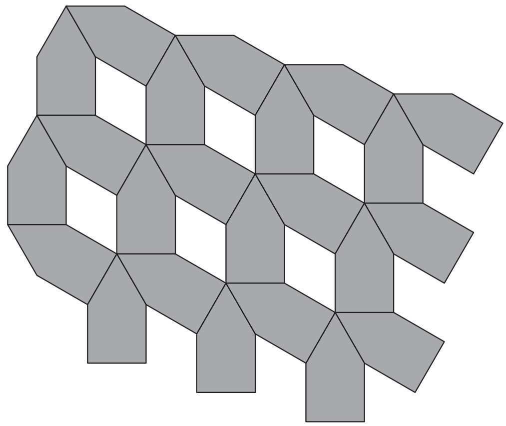
A3. Kvadrat s stranico dolžine 2 je razdeljen na 4 trikotnike (glej sliko). Vsi 3 osenčeni trikotniki imajo enako ploščino. Koliko je ploščina belega trikotnika?



(**A**) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (**B**) $\frac{8}{5}$ (**C**) 2 (**D**) $3\sqrt{5}-5$ (**E**) $6-2\sqrt{5}$

B1. Poišči vsa cela števila a, za katera je tudi $\log_2(a^2-4a-1)$ celo število.

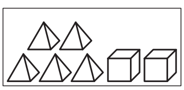
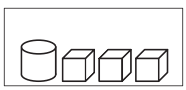
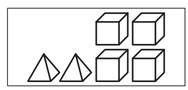
B2. Nataša je zlepila kvadrat in enakostranični trikotnik v petkotnik  . Opazila je, da lahko z njimi oblikuje neskončen vzorec, ki ravnine ne pokrije v celoti. Ali Natašin vzorec pokrije več kot 75% površine ravnine?

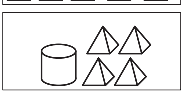
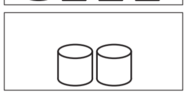


B3. Dan je trapez $ABCD$, v katerem je krak BC enako dolg kot osnovnica AB, velikosti kotov $\sphericalangle CBD$, $\sphericalangle DBA$ in $\sphericalangle ADB$ pa so v tem vrstnem redu v razmerju $1:3:5$. Izračunaj velikosti notranjih kotov trapeza $ABCD$.

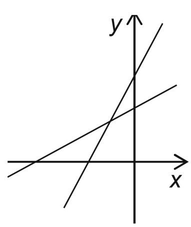
4. letnik

A1. Vsa enaka telesa tehtajo enako, skupna masa teles na vseh, razen na 1 spodnji sliki, je enaka. Na kateri izmed spodnjih slik se skupna masa teles razlikuje od skupne mase teles na preostalih slikah?

(**A**)  (**B**)  (**C**) 

(**D**)  (**E**) 

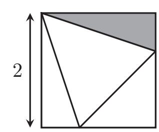
A2. Od dveh narisanih premic v kordinatnem sistemu ima ena od premic enačbo $y=ax+b$ za neki različni realni števili a in b (glej sliko). Katera izmed spodnjih enačb je lahko enačba druge premice?



(**A**) $y=ax-b$ (**B**) $y=bx+a$ (**C**) $y=\frac{b}{a}x+b$

(**D**) $y=-bx+a$ (**E**) $y=\frac{a}{b}x+a$

A3. Kvadrat s stranico dolžine 2 je razdeljen na 4 trikotnike, od teh sta 2 trikotnika enakokraka (glej sliko). Ploščina enega od enakokrakih trikotnikov je dvakrat tolikšna, kot je ploščina drugega enakokrakega trikotnika. Koliko je ploščina osenčenega trikotnika?



(**A**) $\frac{2}{3}$ (**B**) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (**C**) $\frac{8}{13}$ (**D**) $2-\sqrt{2}$ (**E**) $\frac{3-\sqrt{2}}{2}$

B1. Zaporedje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je podano s prvim členom $a_1 = 3$ in rekurzivno zvezo $(3-a_{n+1})(6+a_n) = 18$ za vse $n \geq 1$. Dokaži, da za vsako naravno število n velja

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{2^{n+1}}{3} - \frac{n+2}{3}.$$

B2. Dan je enakokrak trikotnik ABC z vrhom pri C, v katerem je $\sphericalangle ACB < 90°$. Naj bo X od C različna točka na stranici AC in Y od C različna točka na stranici BC. Naj bo D taka točka, da je premica DX vzporedna premici AB, premica AC pa je notranja simetrala kota $\sphericalangle BAD$. Podobno naj bo E taka točka, da je premica EY vzporedna premici AB, premica BC pa je notranja simetrala kota $\sphericalangle EBA$. Denimo, da obstaja taka točka T na stranici AB, da velja $|XT| = |XD|$ in $|YT| = |YE|$. Izrazi vrednost izraza $|AX| + |BY|$ z dolžinami stranic trikotnika ABC.

B3. Selena ima list karirastega papirja s 7×7 kvadratki, na katerem so kvadratki pobarvani črno in belo v vzorcu šahovnice, pri čemer so vogalni kvadratki črni. Iz papirja želi izrezati nekaj enakih koščkov, pri čemer bo rezala le po stranicah kvadratkov.

(a) Največ koliko koščkov oblike  bi lahko Selena izrezala iz svojega lista papirja?

(b) Največ koliko koščkov oblike  bi lahko Selena izrezala is svojega lista papirja?

21. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol – državno tekmovanje

1. letnik

A1. Naj za števili x in y velja zveza $(x + 2y)^2 - 3y(y - 1) = (2x + y)^2 - 3x(x + 1)$. Kolikšna je njuna vsota $x + y$?

(**A**) -100 (**B**) -1 (**C**) 0 (**D**) 1
(**E**) se ne da enolično določiti

A2. Podana imamo tri števila $A = 26^{351}$, $B = 5^{702}$ in $C = 3^{1053}$. Števila uredi po velikosti. Kateri spodnji zapis je pravilen?

(**A**) $A < B < C$ (**B**) $A < C < B$ (**C**) $B < C < A$ (**D**) $B < A < C$ (**E**) $C < A < B$

A3. Naj bo $x \in \mathbb{R}$ in $x > 0$, $x \neq 4$, $x \neq 9$. Kateri izraz je ekvivalenten izrazu $((2 + \sqrt{x})^{-1} + 1)^{-1}$?

(**A**) $\frac{x+\sqrt{x}-6}{x-9}$ (**B**) $\frac{x-\sqrt{x}-6}{x-9}$ (**C**) $\frac{x-\sqrt{x}+6}{x-9}$ (**D**) $\frac{x-\sqrt{x}-6}{x-4}$ (**E**) $\frac{x-\sqrt{x}+6}{x-4}$

B1. Naj bo točka $C(5, -2)$ razpolovišče daljice AB. Krajišči daljice sta točki $A(2a - b, a + b + 1)$ in $B(3a + 2b, 3a + 2b - 2)$, kjer sta a in b realni števili. Izračunaj dolžino daljice AB. Rezultat delno koreni.

B2. V nekem domu za ostarele so pred enim tednom ugotovili prve okužene s covid-19. Od takrat se je njihovo število popeterilo, torej jih je sedaj petkrat toliko kot pred enim tednom. 21 od teh okuženih so zjutraj odpeljali v bolnišnico, tako je med oskrbovanci, ki so ostali v domu, $9.\overline{09}\,\%$ okuženih. Zvečer bodo v bolnišnico odpeljali še 9 okuženih, tako da bo med oskrbovanci, ki bodo ostali v domu, le $5\,\%$ okuženih. Koliko je bilo prvotno število okuženih pred enim tednom in koliko je bilo takrat vseh oskrbovancev v domu?

B3. Štirikratni količnik razlike in vsote realnega števila a in njegove obratne vrednosti zmanjšaj za dvakratnik razlike števila a in njegove obratne vrednosti. Zapiši iskani izraz, ga poenostavi in izračunaj, za katere vrednosti števila a je vrednost danega izraza enaka 0.

2. letnik

A1. Kolikšno vrednost mora imeti število $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 4$ in $a \neq 2$, da se bosta premici z enačbama $ax-(a-2)y-2=0$ in $(a-1)x+(4-a)y+2=0$ sekali na ordinatni osi?

(**A**) -5 (**B**) 5 (**C**) -1 (**D**) -3 (**E**) 3

A2. Kolikšna je vrednost izraza $\dfrac{\left(\sqrt[5]{(a^{-\frac{4}{3}})^{-\frac{5}{8}}}\right)^{-3}}{\left(\sqrt[8]{(\sqrt[3]{a^4})^5}\right)^{-\frac{3}{5}}} \cdot \dfrac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}$, kjer je $a \in \mathbb{R}$ in $a > 0$?

(**A**) $\frac{12a}{29}$ (**B**) $\frac{12}{29}$ (**C**) $\frac{12}{29a}$ (**D**) $\frac{29a}{12}$ (**E**) $\frac{29}{12}$

A3. V pravokotnem trikotniku ABC s pravim kotom pri C, višina iz oglišča C seka stranico AB v točki D. Kolikšna je velikost kota $\sphericalangle BAC$, če velja $|CD| = \sqrt{12}$ cm in $|AD| = 4$ cm?

(**A**) $\alpha \doteq 49,06^\circ$ (**B**) $\alpha \doteq 40,89^\circ$ (**C**) $\alpha \doteq 40,54^\circ$ (**D**) $\alpha \doteq 49,11^\circ$ (**E**) $\alpha \doteq 40,45^\circ$

B1. V trikotniku ABC sta dolžini stranic $|AB|$ in $|AC|$ v sorazmerju $|AB| : |AC| = 4 : 3$. Na stranici AB leži točka D, tako da imata kota $\sphericalangle ACB$ in $\sphericalangle CDA$ enako velikost. Razdalja med točkama D in C meri $7,5$ cm.

a) Izračunaj dolžino stranice BC.

b) Koliko merita dolžini stranic AC in AD, če obseg trikotnika ACD meri 18 cm?

B2. V eksplicitni, implicitni in odsekovni obliki zapiši enačbo premice s pozitivnim smernim koeficientom, ki s koordinatnima osema oblikuje pravokotni trikotnik s ploščino 9 kvadratnih enot in abscisno os seka pri $x=-3$.

B3. Dan je izraz $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$.

a) Racionaliziraj imenovalec in izraz poenostavi.

b) Izračunaj vrednost izraza za $x = \frac{5}{4}$.

3. letnik

A1. Pravilna, pokončna, štiristrana prizma ima površino 128 m^2 in višino 6 m. Koliko meri njena telesna diagonala?

(**A**) $D \doteq 8,23$ m (**B**) $D \doteq 8,24$ m (**C**) $D \doteq 7,22$ m (**D**) $D \doteq 8,25$ m (**E**) $D \doteq 7,21$ m

A2. Za katere vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ je funkcija $f(x) = \log\left(x^2+(a+4)x+9\right)$ definirana na množici vseh realnih števil?

(**A**) $a < 2$ (**B**) $a > -10$ (**C**) $-2 < a < 10$ (**D**) $-10 < a < 2$ (**E**) $a = -4$

A3. Dolžina akvarija je 50 cm, širina 20 cm in višina 25 cm. Koliko cm od zgornjega roba akvarija bo nivo vode, če vanj vlijemo 19 litrov vode?

(**A**) 19 cm (**B**) $1,9$ cm (**C**) $10,9$ cm (**D**) 6 cm (**E**) $0,6$ cm

B1. Dan je paralelogram z dolžino stranice $a = 13$ m in notranjim kotom $\alpha = 60°$. Obseg paralelograma meri 58 m. Paralelogram je osnovna ploskev pokončne prizme. Višina prizme je enaka dolžini diagonale f danega paralelograma. Natančno izračunaj površino in prostornino prizme.

B2. Dana je družina funkcij $f(x) = 3^{x-b} - \frac{1}{3}$, $b \in \mathbb{R}$.

a) Za $b = -1$ nariši graf funkcije f in zapiši njeno zalogo vrednosti.

b) Izračunaj vrednost parametra b za katerega bo $x = \frac{1}{2}$ ničla funkcije f.

c) Za $b = 2$ izračunaj na dve mesti natančno absciso presečišča grafa funkcije f s premico $y - 6 = 0$.

B3. Reši enačbo: $1 + \log(2^x + 1) = \log 2 + \log(4^x + 9)$.

4. letnik

A1. V katerih točkah na krivulji, podani z enačbo $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$, tangenta z abscisno osjo oklepa kot $135°$?

(**A**) $T_1(1,-4)$ in $T_2(-2,0)$. (**B**) $T_1(1,-4)$ in $T_2(2,0)$. (**C**) $T_1(1,0)$ in $T_2(-1,4)$.
(**D**) $T_1(1,2)$ in$T_2(\frac{1}{3},\frac{28}{9})$ (**E**) $T_1(1,2)$ in $T_2(\frac{1}{3},\frac{76}{27})$.

A2. Za neko celo število x je končno zaporedje $\sqrt{x}+2, 3\sqrt{x+1}, 2\sqrt{x}+4$ geometrijsko. Kolikšen je količnik tega zaporedja?

(**A**) 2 (**B**) $\sqrt{3}$ (**C**) $\sqrt{2}$ (**D**) 3 (**E**) $3\sqrt{2}$

A3. Kateri izraz je ekvivalenten izrazu $\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^{-1} x + \cos^{-1} x} \cdot \frac{\tan x}{\cos x - \sin x}$?

(**A**) $-\cos x$ (**B**) $-\sin x$ (**C**) $-\sin^2 x$ (**D**) $-\cos^2 x$ (**E**) $\cos x$

B1. Reši enačbo: $4x^4+2x^3-4x^2-x=-1$. Izračunaj razliko kvadratov vsote racionalnih rešitev in vsote iracionalnih rešitev enačbe.

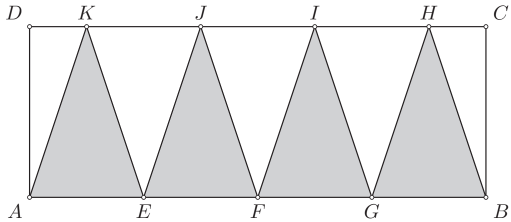
B2. Naj bo x takšno realno število, za katerega velja $\cos(60° - x) \neq 0$ in $\sin(120° - x) \neq 0$. Brez uporabe žepnega računala izračunaj natančno vrednost izraza: $\frac{\sqrt{3}+4\sin x\cos x}{\cos(60°-x)\cdot\sin(120°-x)}$.

B3. Opazujemo telesi A in B, ki sta med seboj oddaljeni za 450 m. Istočasno se začneta premikati eno proti drugemu (po premici). Telo A se v prvi minuti premakne za 5 m, nato pa v vsaki minuti za 15 m več kot v prejšnji minuti. Telo B se v prvi minuti premakne za 100 m, nato pa v vsaki minuti za 10 m manj kot v prejšnji. Po kolikšnem času in na kolikšni oddaljenosti od začetne pozicije telesa A se telesi srečata?

21. tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol – državno tekmovanje

1. in 2. letnik

A1. Lik $ABCD$ je pravokotnik. Trikotniki $\triangle AEK$, $\triangle EFJ$, $\triangle FGI$ in $\triangle GBH$ so med seboj skladni. Kolikšen del pravokotnika $ABCD$ na sliki je pobarvan?



(**A**) $\frac{1}{2}$ (**B**) $\frac{1}{3}$ (**C**) $\frac{1}{4}$ (**D**) $\frac{3}{4}$ (**E**) $\frac{3}{5}$

A2. Katero od števil je deljivo s 3?

(**A**) $10^{2018}+1$ (**B**) $10^{2019}+2$ (**C**) $10^{2020}+3$ (**D**) $10^{2021}+4$ (**E**) 10^{2022}

A3. Matic je ves prejšnji teden vadil sklece. Vsak dan je naredil 5 sklec več kot prejšnji dan. Skupaj je v prejšnjem tednu naredil 175 sklec. Koliko sklec je naredil zadnji dan?

(**A**) 35 (**B**) 40 (**C**) 45 (**D**) 50 (**E**) 55

A4. Cena izdelka se najprej zniža za $30\ \%$, nato pa se zviša za $40\ \%$. Ali je nova cena po zvišanju večja ali manjša od začetne cene pred znižanjem?

(**A**) Nemogoče je določiti. (**B**) Nova cena je višja od začetne cene.
(**C**) Nova cena je nižja od začetne cene. (**D**) Nova cena je enaka začetni ceni.
(**E**) Odvisno od začetne cene.

A5. V delavnici na temo zdravega prehranjevanja se je zbralo 11 ljudi. Pogovarjali so se o sadju in zelenjavi. Trije od njih nimajo radi niti sadja niti zelenjave. Štirje imajo radi sadje pa ne zelenjavo. Pet jih ima rado sadje. Koliko jih ima rado sadje in zelenjavo?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

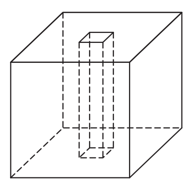
A6. Kateri večkotnik ima dvakrat toliko diagonal kot stranic ?

(**A**) 5-kotnik (**B**) 6-kotnik (**C**) 7-kotnik (**D**) 8-kotnik (**E**) 10-kotnik

A7. Iztegnjeni kot razdelimo s tremi poltraki na kote, katerih velikosti so v razmerju $1:2:5:1$. Koliko meri največji kot?

(**A**) $20°$ (**B**) $50°$ (**C**) $100°$ (**D**) $200°$ (**E**) $270°$

A8. Skozi kocko z robom 5 cm izrežemo pravilno štiristrano prizmo z osnovnim robom 1 cm, kot kaže slika. Nastalo telo potopimo v barvo, tako da obarva vse ploskve. Skupna površina obarvanih ploskev je



(**A**) $130\ \text{cm}^2$ (**B**) $144\ \text{cm}^2$ (**C**) $156\ \text{cm}^2$ (**D**) $168\ \text{cm}^2$ (**E**) $170\ \text{cm}^2$

B1. Petra je v turističnem katalogu našla ugodno ponudbo za dopust. Akcijska ponudba se je glasila: "Pri nakupu sedem ali večdnevnega aranžmaja vam dva dneva počitnic podarimo."Petra je izbrala nastanitev po katalogu za 50 € na dan.

(a) Koliko bi plačala za pet dnevni aranžma?

(b) Koliko dnevni aranžma je Petra izbrala, če je, upoštevajoč akcijsko ponudbo, plačala le 40 € na dan? Koliko je plačala za aranžma?

(c) Pri večerji je imela Petra za sladico na razpolago sladoled, štiri vrste tortic in dve vrsti sadnih solat. Na koliko načinov je lahko izbrala sladico, če je bila le-ta sestavljena iz sladoleda, tortice in sadne solate?

(d) Tretji dan počitnic si je izposodila sup. Na voljo sta bili dve ponudbi. Prva možnost je bila, da za dnevno izposojo plača 14 €. Druga možnost je bila, da za vsako izposojeno uro plača $3{,}5$ €. Najmanj po koliko urah izposoje se cenovno bolj izplača prva ponudba kot druga?

(e) Petra je počitnice preživela v apartmajskem naselju, ki je nudilo dvoposteljne in triposteljne apartmaje. Vseh apartmajev je bilo 60 s skupno 152 ležišči. Koliko je bilo dvoposteljnih in koliko triposteljnih apartmajev v tem naselju?

B2. Dani sta enačbi $3x - 2 = -x + 10$ in $\frac{y}{2} - \frac{y}{3} = \frac{1}{3}$.

(a) Rešite enačbi.

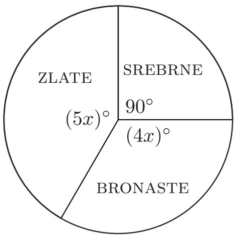
(b) Rešitvi x in y sta koordinati točke S, ki predstavlja središče kroga, ki se dotika y osi. Narišite in označite središče ter narišite krožnico v koordinatnem sistemu.

(c) Poimenujte del kroga, ki se nahaja pod x osjo.

(d) Narišite tangento, ki je vzporedna x osi in zapišite njeno enačbo.

(e) Izračunajte koordinati enega izmed presečišč krožnice z x osjo na dve decimalni mesti natančno.

B3. Diagram prikazuje porazdelitev bronastih, srebrnih in zlatih medalj na tekmovanju.



(a) Kolikšna je vrednost x? (glej sliko)

(b) Zapišite razmerje med zlatimi, srebrnimi in bronastimi medaljami z najmanjšimi možnimi naravnimi števili.

(c) Na tekmovanju je bilo podeljenih 84 medalj. Koliko je bilo podeljenih bronastih, koliko srebrnih in koliko zlatih medalj?

(d) Koliko gramov tehta bronasta medalja, če ima obliko valja s premerom 7 cm in višino 3 mm? Gostota brona je $8700\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

3. letnik

A1. Iztegnjeni kot razdelimo s tremi poltraki na kote, katerih velikosti so v razmerju $1 : 2 : 5 : 1$. Koliko meri največji kot?

(**A**) $20°$ (**B**) $50°$ (**C**) $100°$ (**D**) $200°$ (**E**) $270°$

A2. Matic je ves prejšnji teden vadil sklece. Vsak dan je naredil 5 sklec več kot prejšnji dan. Skupaj je v prejšnjem tednu naredil 175 sklec. Koliko sklec je naredil zadnji dan?

(**A**) 35 (**B**) 40 (**C**) 45 (**D**) 50 (**E**) 55

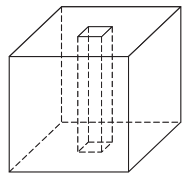
A3. Katere izmed naštetih premic imajo enak smerni koeficient:
a) $y = 2x - 3$ b) $2y - 4x + 6 = 0$ c) $y - 4x = 6$ d) $-\frac{y}{3} + \frac{x}{\frac{3}{2}} = 1$?

(**A**) a, c (**B**) a, b, d (**C**) b, c, d (**D**) a, b, c, d (**E**) b, c, d

A4. Graf kvadratne funkcije ima teme v točki $T(2,-3)$, y os pa seka v točki $N(0,3)$. Na paraboli leži tudi točka

(**A**) $A(4,3)$ (**B**) $B(4,2)$ (**C**) $C(3,4)$ (**D**) $D(3,2)$ (**E**) $E(2,3)$

A5. Skozi kocko z robom 5 cm izrežemo pravilno štiristrano prizmo z osnovnim robom 1 cm, kot kaže slika. Nastalo telo potopimo v barvo, tako da obarva vse ploskve. Skupna površina obarvanih ploskev je



(**A**) 130 cm^2 (**B**) 144 cm^2 (**C**) 156 cm^2 (**D**) 168 cm^2 (**E**) 170 cm^2

A6. Katero od števil je deljivo s 3?

(**A**) $10^{2018} + 1$ (**B**) $10^{2019} + 2$ (**C**) $10^{2020} + 3$ (**D**) $10^{2021} + 4$ (**E**) 10^{2022}

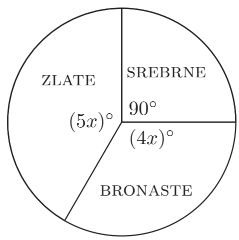
A7. Katera trditev ni pravilna?

(**A**) $\sin(45°45') < \sin(45°55')$ (**B**) $\cos(35°35') < \cos(45°45')$
(**C**) $\tan 45° \neq 0$ (**D**) $\sin 90° = \cos 0°$
(**E**) $\cos 0° > 0$

A8. Dana je funkcija $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 5x - 3$. Vrednost izraza $f(-4) - 3f(0) + 2f(-2)$ je enaka:

(**A**) -8 (**B**) -6 (**C**) -4 (**D**) 0 (**E**) 3

B1. Diagram prikazuje porazdelitev bronastih, srebrnih in zlatih medalj na tekmovanju.



(a) Kolikšna je vrednost x? (glej sliko)

(b) Zapišite razmerje med zlatimi, srebrnimi in bronastimi medaljami z najmanjšimi možnimi naravnimi števili.

(c) Na tekmovanju je bilo podeljenih 84 medalj. Koliko je bilo podeljenih bronastih, koliko srebrnih in koliko zlatih medalj?

(d) Koliko gramov tehta bronasta medalja, če ima obliko valja s premerom 7 cm in višino 3 mm? Gostota brona je $8700\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

B2. Petra je v turističnem katalogu našla ugodno ponudbo za dopust. Akcijska ponudba se je glasila: "Pri nakupu sedem ali večdnevnega aranžmaja vam dva dneva počitnic podarimo."Petra je izbrala nastanitev po katalogu za 50 € na dan.

(a) Koliko bi plačala za pet dnevni aranžma?

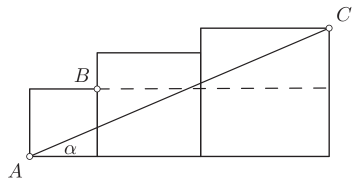
(b) Koliko dnevni aranžma je Petra izbrala, če je, upoštevajoč akcijsko ponudbo, plačala le 40 € na dan? Koliko je plačala za aranžma?

(c) Pri večerji je imela Petra za sladico na razpolago sladoled, štiri vrste tortic in dve vrsti sadnih solat. Na koliko načinov je lahko izbrala sladico, če je bila le-ta sestavljena iz sladoleda, tortice in sadne solate?

(d) Tretji dan počitnic si je izposodila sup. Na voljo sta bili dve ponudbi. Prva možnost je bila, da za dnevno izposojo plača 14 €. Druga možnost je bila, da za vsako izposojeno uro plača $3{,}5$ €. Najmanj po koliko urah izposoje se cenovno bolj izplača prva ponudba kot druga?

(e) Petra je počitnice preživela v apartmajskem naselju, ki je nudilo dvoposteljne in triposteljne apartmaje. Vseh apartmajev je bilo 60 s skupno 152 ležišči. Koliko je bilo dvoposteljnih in koliko triposteljnih apartmajev v tem naselju?

B3. Stranica prvega kvadrata meri 8 cm, stranica drugega kvadrata meri 12 cm, obseg tretjega kvadrata pa je za četrtino manjši od vsote obsegov prvih dveh kvadratov. Kvadrate položimo enega poleg drugega kot prikazuje slika.



(a) Koliko cm meri obseg prvega in koliko obseg drugega kvadrata?

(b) Koliko cm meri dolžina stranice tretjega kvadrata?

(c) Za koliko centimetrov glede na vodoravnico je točka C višje od točke B?

(d) Koliko $^\circ$ meri kot α?

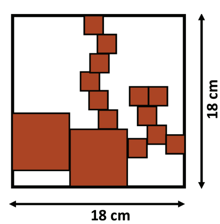
(e) Največji kvadrat razrežemo na skladne manjše kvadratke s celoštevilskimi dolžinami stranic tako, da ni nobenega odpada. Koliko kvadratkov dobimo in kolikšna je dolžina njihove stranice? Predstavite vse rešitve.

Tekmovanje študentov v znanju matematike za Vegova priznanja – državno tekmovanje

1. Označimo $[n] = n!^n$. Koliko je vrednost izraza $[[2]]$?

(A) 2^8 **(B)** $2^{12}3^4$ **(C)** $2^3 3^1$ **(D)** $2^8 3^2$ **(E)** 2^{12}

2. V kvadratni škatli velikosti 18 cm × 18 cm so čokolade 2 velikosti, vse čokolade imajo obliko kvadrata. Lenart je pojedel nekaj čokolad, ostale pa razporedil po škatli (glej sliko). Koliko centimetrov je dolžina stranice manjše čokolade?

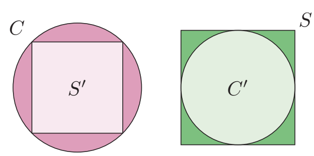


(A) 1.7 **(B)** 1.9 **(C)** 2.1 **(D)** 2.2
(E) Nobena od predhodnih dolžin.

3. Katera od spodnjih vrednosti za neznanko x je rešitev enačbe $2^{2021}x^2 - (x+1)^{1012} = 2^{2021}$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3
(E) Nobena od predhodnih.

4. Krog C in kvadrat S imata enako ploščino. Kvadrat S' je včrtan v krog C, krog C' pa je včrtan v kvadrat S. Kolikšno je razmerje med ploščinama kvadrata S' in kroga C'?



(A) $1:1$ **(B)** $4:\pi$ **(C)** $8:\pi^2$ **(D)** $1:2$ **(E)** $2\sqrt{2}:\pi$

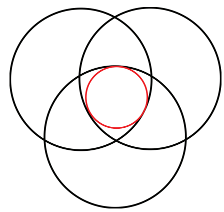
5. Označimo $A = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ in $B = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$. Katera od spodnjih enakosti je pravilna?

(**A**) $2^B = A^2$ (**B**) $AB = 2^{\sqrt{2}}$ (**C**) $B = A^2$ (**D**) $B^2 = 2^A$ (**E**) $A + B = 3\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

6. Matej, Matija in Mitja so prijatelji. Njihove starosti v naraščajočem vrstnem redu so 12, 14 in 16 let. Vsak od njih ima 1 sestro, imena njihovih sester po abecednem vrstnem redu pa so Lana, Lea in Lina. Mitja in njegova sestra sta vsak zase stara več kot 15 let. 8-letna Lina ima brata, ki je 4 leta starejši od nje. Lana ni Mitjeva sestra. Katera od spodnjih izjav zagotovo ni pravilna?

(**A**) Matej je star 12 let. (**B**) Matija je star 14 let. (**C**) Lanin brat je star 14 let.
(**D**) Lea je Matijeva sestra. (**E**) Linin brat je star 12 let.

7. Nik je narisal 3 enake krožnice s polmerom 1, vsaka od teh krožnice gre skozi središče preostalih 2 krožnic. Nato je narisal še 1 manjšo krožnico, ki se dotika vseh 3 krožnic (glej sliko). Koliko je polmer manjše krožnice, ki jo je narisal Nik?



(**A**) $\frac{1}{2}$ (**B**) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (**C**) $\frac{1}{4}$ (**D**) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (**E**) $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$

8. Svit je prečkal most, ko je za sabo zagledal Zarjo, ki je bila ravno na začetku mosta in je tekla za njim. Če bi se Svit obrnil in bi nadaljeval z isto hitrostjo v smeri proti Zarji, bi se srečala ravno na sredini mosta. Ker pa se Svit ni želel vrniti 150 m, je nadaljeval z isto hitrostjo v prvotni smeri, Zarja, ki je ves čas tekla z isto hitrostjo, pa ga je ujela ravno na koncu mosta. Koliko metrov je dolg most, ki sta ga prečkala Svit in Zarja?

(**A**) 225 (**B**) 300 (**C**) 450 (**D**) 600 (**E**) 900

9. Darinka je napisala število 2021 kot vsoto 5 naravnih števil, katerih števke so bile samo 5 ali 9. Koliko števk skupaj v teh 5 številih je bilo enakih 9?

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

10. Perzefona je premešala kupček 9 kart, označenih s števili od 1 do 9. Nato je vrhnjih 5 kart s kupčka položila v vrsto od najmanjše do največje. Kolikšna je verjetnost, da je na srednji karti v vrsti število 5?

(**A**) $\dfrac{1}{9}$ (**B**) $\dfrac{2}{9}$ (**C**) $\dfrac{1}{4}$ (**D**) $\dfrac{2}{7}$ (**E**) $\dfrac{1}{3}$

11. Naj bo T dani trikotnik. Pri vsaki stranici trikotnika T narišemo kvadrat, ki ima to stranico za svojo diagonalo. Označimo z U unijo teh 3 kvadratov. Ali je možno, da trikotnik T ni vsebovan v uniji U?

(**A**) Da, na primer, če so koti trikotnika T enaki 89, 47 in 44 stopinj.
(**B**) Da, na primer, če so koti trikotnika T enaki 95, 44 in 41 stopinj.
(**C**) Da, na primer, če so koti trikotnika T enaki 95, 47 in 38 stopinj.
(**D**) Da, na primer, če so koti trikotnika T enaki 171, 5 in 4 stopinje.
(**E**) Ne, T je vsebovan v U za vsak trikotnik T.

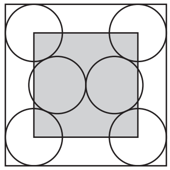
12. V jahalnem klubu Črna griva je skupno število konjev in jezdecev med 100 in 140. V nekem trenutku je imelo $\frac{2}{5}$ konjev jezdeca in $\frac{3}{7}$ jezdecev je jahalo konja, na 1 konju je bil največ 1 jezdec. Koliko je skupno število konjev in jezdecev v jahalnem klubu Črna griva?

(**A**) 105 (**B**) 116 (**C**) 135 (**D**) 140
(**E**) Nobeno od predhodnih števil.

13. Jure je pri vseh naravnih številih od 10 do 9999 za 1. števko na levi napisal decimalno vejico in nato vsa dobljena števila napisal v naraščajočem vrstnem redu. Na katero mesto v tem naraščajočem zaporedju števil je Jure napisal število $2,021$?

(**A**) 1133. (**B**) 1134. (**C**) 1135. (**D**) 1136. (**E**) 1137.

14. V kvadrat je včrtanih 6 krožnic s polmerom 1, vsaka od teh krožnic se dotika 1 ali 3 krožnic, središča 4 zunanjih krožnic so oglišča osenčenega kvadrata (glej sliko). Koliko je ploščina osenčenega kvadrata?

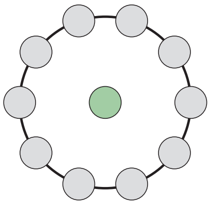


(**A**) $2+8\sqrt{2}$ (**B**) $4+5\sqrt{3}$ (**C**) $5+4\sqrt{5}$
(**D**) $6+3\sqrt{6}$ (**E**) $8+2\sqrt{7}$

15. Ana želi razporediti vsa naravna števila od 1 do 20 v pare, tako da bo razlika med številoma v paru pri vseh parih enaka. Ana obravnava vse pare kot neurejene pare, tako da (3,4) in (4,3) predstavljata isti par, torej je, na primer, razlika pri obeh parih (3, 4) in (8, 7) enaka 1, razlika pri obeh parih (3, 7) in (4, 8) pa je 4. Na koliko načinov lahko Ana razporedi omenjena števila v pare na želeni način?

(**A**) 0 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5 (**E**) Več kot 5.

16. Meta želi napisati vsa cela števila od 0 do 10 v 11 krogov, od teh je 10 krogov na krožnici in 1 krog v središču krožnice (glej sliko), tako da bo v vsakem krogu zapisano 1 število, za vsak par števil v sosednjih krogih na krožnici pa bo eno od števil v paru delitelj ali večkratnik drugega števila v paru. Katero število mora Meta napisati v krog v središču krožnice?

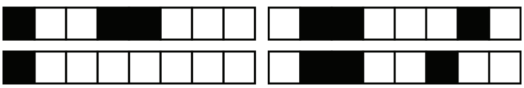


(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 5 (**E**) 7

17. Pravimo, da je trikotnik *skoraj enakostraničen*, če se velikost največjega notranjega kota trikotnika razlikuje od velikosti najmanjšega notranjega kota trikotnika za manj kot $6°$. Za vsako nenegativno celo število n in dani trikotnik $A_nB_nC_n$ definiramo nov trikotnik $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$, katerega oglišča A_{n+1}, B_{n+1} in C_{n+1} so točke, v katerih se včrtana krožnica trikotnika $A_nB_nC_n$ dotika stranic trikotnika $A_nB_nC_n$. Katero je najmanjše naravno število k, za katero je trikotnik $A_kB_kC_k$ skoraj enakostraničen za poljuben začetni trikotnik $A_0B_0C_0$?

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

18. Pravokotni trak je razdeljen na 8 enakih kvadratov, ki so na začetku vsi beli. Na vsakem koraku izberemo 4 zaporedne kvadrate in spremenimo barvo vseh teh 4 kvadratov: iz bele v črno ali iz črne v belo.



Koliko od 4 trakov na spodnji sliki lahko po nekaj korakih dobimo na opisani način?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

19. Giorgio želi imeti na obleki 6 rdečih, 3 zelene in 3 rumene gumbe, tako da bodo vsi gumbi prišiti drug poleg drugega na ravni črti in nobena sosednja 2 gumba ne bosta iste barve. Na koliko načinov lahko Giorgio razporedi gumbe na želeni način?

(**A**) 20 (**B**) 60 (**C**) 100 (**D**) 120 (**E**) 720

20. Kvadratno mrežo, sestavljeno iz enotskih kvadratov, prekrivamo s pravokotniki velikosti 5×7, tako da vsak pravokotnik prekrije natanko 35 enotskih kvadratov. Pravokotnike lahko položimo poljubno zasukane, pravokotniki se lahko tudi prekrivajo. Katero je največje naravno število N, za katero ni možno na opisani način prekriti natanko N enotskih kvadratov kvadratne mreže?

(A) 43 **(B)** 44 **(C)** 45 **(D)** 46 **(E)** 48

21. Tea je hkrati vrgla 7 običajnih igralnih kock in seštela dobljene pike. Kolikšna je verjetnost, da je dobljena vsota pik večkratnik števila 6?

(A) 0 **(B)** $\dfrac{6^6-1}{7\cdot 6^6}$ **(C)** $\dfrac{1}{7}$ **(D)** $\dfrac{1}{6}$ **(E)** 1

22. Pravimo, da je *dolžina* naravnega števila n enaka največjemu številu členov v vsoti samih različnih števil, ki je enaka n. Na primer, dolžina števila 9 je 3, saj je $9 = 1 + 2 + 6$. Koliko je takih lihih števil, ki imajo dolžino 20?

(A) 8 **(B)** 10 **(C)** 15 **(D)** 18 **(E)** 20

23. Luka ima 2 kocki, dolžina stranice ene od kock je enaka obratni vrednosti dolžine stranice druge kocke. Vsota površin obeh Lukovih kock je 138. Koliko je vsota prostornin Lukovih kock?

(A) 100 **(B)** 110 **(C)** 121.5 **(D)** 125 **(E)** 140

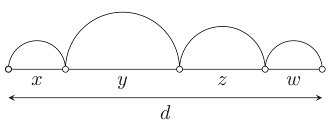
24. Zazidljivo zemljišče ima obliko trikotnika ABC, pri čemer je $AB = 38$ m, $AC = 36$ m in $BC = 60$ m. Mama Neža je z daljico ED, pri čemer točka E leži na daljici AC in točka D leži na daljici BC, razdelila zemljišče na 2 dela, tako da sta njena sinova Jakob in Jurij dobila zemljišči $AEDB$ in ECD, ki imata enako ploščino in enak obseg. Koliko je vrednost $\frac{|BD|}{|CD|}$?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{5}$ **(E)** $\frac{2}{5}$

Rešitve 65. matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje

1. letnik

A1. Skupna dolžina polkrožnih lokov nad daljico dolžine d je enaka $\frac{\pi d}{2}$ neglede na to, koliko je teh polkrožnih lokov in kako veliki so (glej primer na sliki).

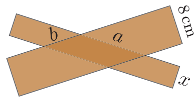


$$\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2} + \frac{\pi z}{2} + \frac{\pi w}{2} = \frac{\pi(x+y+z+w)}{2} = \frac{\pi d}{2}$$

Torej je obseg vseh 5 likov enak, saj je enak $2 \cdot \frac{\pi d}{2}$, kjer je d premer največjega krožnega loka. Največjo ploščino izmed vseh likov ima lik (C), saj je ta edini, ki ima ploščino večjo od ploščine polkroga omejenega z največjim krožnim lokom.

A2. Vsota 5 enomestnih števil je enaka 44 samo, če je eno od teh števil enako 8 in so ostala štiri števila enaka 9, torej $8 + 9 + 9 + 9 + 9 = 44$. Produkt je zato enak $8 \cdot 9^4 = 2^3 \cdot 3^8$.

A3. Območje, ki je prekrito z obema obližema, ima obliko paralelograma. Označimo stranici paralelograma z a in b, z x pa stranico spodnjega obliža, katere dolžino iščemo (glej sliko).



Potem je $a \cdot x = b \cdot 8 = 40\ \mathrm{cm}^2$ in $2a + 2b = 30$ cm. Sledi, da je $b = \frac{1}{8} \cdot 40 = 5$ cm, $a = \frac{1}{2}(30 - 2 \cdot 5) = 10$ cm in $x = \frac{1}{10} \cdot 40 = 4$ cm.

B1. Denimo, da taki naravni števili obstajata. Tedaj iz dane enakosti očitno sledi $a, b < 2021$. Enakost preoblikujemo v $\sqrt{a} = \sqrt{2021} - \sqrt{b}$ in jo kvadriramo, da dobimo $a = 2021 - 2\sqrt{2021b} + b$. Ker sta a in b naravni števili, je $2\sqrt{2021b}$ celo število in zato je $\sqrt{2021b}$ racionalno število. Spomnimo se, da je za naravno število n število $\sqrt{n}$ racionalno natanko takrat, ko je število n popoln kvadrat. Od tod sledi, da je $2021b$ popoln kvadrat. Ker pa je $2021 = 43 \cdot 47$ in sta 43 in 47 praštevili, mora biti $b = 43 \cdot 47 \cdot k^2 = 2021k^2$ za neko naravno število k. Sledi $b \geq 2021$, kar pa je protislovje. Taki naravni števili a in b torej ne obstajata.

2. način. Ker sta a in b naravni števili, iz dane enakosti sledi $a, b < 2021$. Enakost kvadriramo, da dobimo $a + 2\sqrt{ab} + b = 2021$. Nato jo preoblikujemo v $2\sqrt{ab} = 2021 - a - b$ in ponovno kvadriramo, da dobimo $4ab = (2021 - a - b)^2$. Leva stran enakosti je deljiva s 4, torej mora biti tudi desna stran deljiva s 4. To pomeni, da je $2021 - a - b$ sodo število in zato je $\sqrt{ab} = \frac{2021-a-b}{2}$ naravno število. Začetno enakost sedaj pomnožimo s $\sqrt{b}$, da dobimo $\sqrt{ab} + b = \sqrt{2021b}$. Ker je po pravkar dokazanem leva stran enakosti naravno število, mora biti tudi $\sqrt{2021b}$ naravno število in zato je $2021b$ popoln kvadrat. Od tod na enak način kot v prvi rešitvi pridemo do protislovja.

3. način. Ker sta a in b naravni števili, je $a, b < 2021$. Prvotno enačbo kvadriramo in dobimo $a + 2\sqrt{ab} + b = 2021$. To enačbo preoblikujemo v $2\sqrt{ab} = 2021 - a - b$ in jo ponovno kvadriramo. Dobljeno enačbo preoblikujemo v $(a - b)^2 = 2021(2a + 2b - 2021) = 43 \cdot 47 \cdot (2a + 2b - 2021)$. Ker sta 43 in 47 praštevili sledi, da $43 \cdot 47 | a - b$.
Če je $a - b = 0$, je $a = b$ in sledi $4a - 2021 = 0$, kar pa ni mogoče, saj je $4a$ sodo število, 2021 pa liho.
Sledi $a - b \neq 0$. Ampak potem iz $2021 | a - b$ sledi, da je $|a - b| \geq 2021$. Ker pa sta $a, b \in \mathbb{N}$ sledi, da je vsaj eno izmed števil a in b večje od 2021. To pa je v protislovju s sklepom, da sta $a, b < 2021$.
Torej ne obstajata naravni števili a in b, ki bi rešili prvotno enačbo.

B2. V enačbah najprej odpravimo ulomke in dobimo

$$\begin{aligned} 3xy &= 2x - 2y, \\ 2yz &= 3y + 6z, \\ xz &= 3z - 12x. \end{aligned}$$

Prvo enačbo preoblikujemo v $(3y - 2)x = -2y$. Če je $3y - 2 = 0$ oziroma $y = \frac{2}{3}$, tedaj sledi $y = 0$, kar pa je protislovje. Torej enačbo lahko delimo z $3y - 2$ in izrazimo $x = \frac{-2y}{3y-2}$. Drugo enačbo preoblikujemo v $(2y - 6)z = 3y$ in s podobnim sklepom izrazimo $z = \frac{3y}{2y-6}$. Oboje sedaj vstavimo v zadnjo enačbo, da dobimo

$$\frac{-2y}{3y-2} \cdot \frac{3y}{2y-6} = \frac{9y}{2y-6} + \frac{24y}{3y-2}.$$

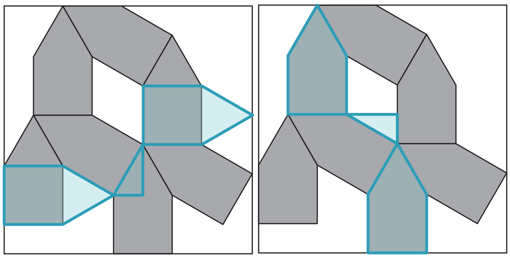
Enačbo pomnožimo z $(3y-2)(2y-6)$, da dobimo

$$-6y^2 = 9y(3y-2) + 24y(2y-6),$$

kar lahko poenostavimo do $81y^2 - 162y = 0$. Levo stran razstavimo in dobimo $81y(y-2) = 0$. Če je $y = 0$, iz zgornjih zvez sledi še $x = 0$ in $z = 0$. Toda to ni rešitev sistema enačb, saj ulomki v enačbah v tem primeru niso definirani. Zato mora biti $y = 2$ in posledično $x = \frac{-4}{4} = -1$ ter $z = \frac{6}{-2} = -3$. Edina rešitev sistema je torej $x = -1$, $y = 2$ in $z = -3$.

B3. Označimo z a dolžino stranice Natašinega petkotnika. Največji notranji kot petkotnika je enak $90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$. Luknja v Natašinem liku je torej romb z manjšim notranjim kotom enakim $360^\circ - 2 \cdot 150^\circ = 60^\circ$. Ta romb je torej sestavljen iz dveh enakokrakih trikotnikov s stranico dolžine a.

a) Z leve slike razberemo, da je širina Natašinega lika enaka $a + \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2} + a + \frac{a\sqrt{3}}{2} = a(\frac{5}{2} + \sqrt{3})$, z desne slike pa razberemo, da je višina Natašinega lika prav tako enaka $a + \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2} + a + \frac{a\sqrt{3}}{2} = a(\frac{5}{2} + \sqrt{3})$. Torej Natašin lik lahko včrtamo v kvadrat.



b) Ploščina Natašinega petkotnika je $a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2(1 + \frac{\sqrt{3}}{4})$, ploščina njenega lika pa je $7a^2(1 + \frac{\sqrt{3}}{4})$. Po točki a) je ploščina velikega kvadrata enaka $a^2(\frac{5}{2} + \sqrt{3})^2 = a^2(\frac{37}{4} + 5\sqrt{3})$. Delež površine velikega kvadrata, ki ga pokrije Natašin lik je zato enak

$$\frac{7a^2(1 + \frac{\sqrt{3}}{4})}{a^2(\frac{37}{4} + 5\sqrt{3})} = \frac{7(4 + \sqrt{3})}{(37 + 20\sqrt{3})}.$$

Neenakost $\frac{7(4+\sqrt{3})}{(37+20\sqrt{3})} > \frac{2}{3}$ je ekvivalentna neenakosti $21(4 + \sqrt{3}) > 2(37 + 20\sqrt{3})$, ki jo lahko preuredimo do $10 > 19\sqrt{3}$. Ker slednja neenakost očitno ni izpolnjena, Natašin lik ne prekrije več kot $\frac{2}{3}$ velikega kvadrata.

2. letnik

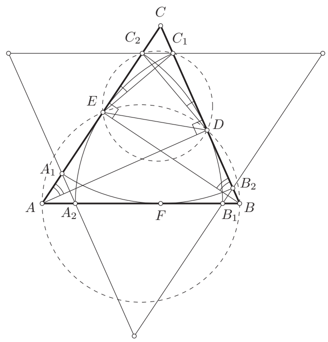
A1. Najmanjši skupni večkratnik števil $3, 4, 6$ in 8 je 24. Število tekmovalcev na tekmovanju mora biti torej deljivo s 24. Ker pa so vsi večkratniki števila 24, razen števila 24, večji od 30, je bilo na tekmovanju 24 tekmovalcev, od katerih so vse 4 naloge rešili $(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) \cdot 24 = \frac{3}{24} \cdot 24 = 3$ tekmovalci.

A2. Naj bodo a, b in c števila, ki jih je izbrala Lucijana, pri čemer je $a > b > c$. Največje možno število, ki ga z njimi lahko zapiše, je tedaj $\overline{abc}$, najmanjše možno število pa $\overline{cba}$. Za njuno vsoto velja, da je $100a + 10b + c + 100c + 10b + a = 101(a+c) + 20b = 545$. Če primerjamo enice na obeh straneh enačbe, vidimo, da je $a + c = 5$ ali $a + c = 15$, če pa primerjamo še stotice na obeh straneh enačbe, vidimo, da je $a + c = 5$. Torej je $b = 2$, $a = 4$ in $c = 1$ ter $a + b + c = 7$.

A3. Ker imata trikotnika AED in ABE enaki višini iz točke A, velja $X : 36 = |DE| : |EB|$. Podobno imata trikotnika CDE in CEB enaki višini iz točke C, zato velja $25 : X = |DE| : |EB|$. Sledi $X : 36 = 25 : X$, od koder izračunamo $X = \sqrt{25 \cdot 36} = 30$.

B1. Vredost potence a^b je enaka 1 le v primeru, ko je $a = 1$, $a = -1$ in b sodo celo število ali $b = 0$ in $a \neq 0$. Če je $x^2 - 7x + 11 = 1$, sledi $x^2 - 7x + 10 = 0$ oziroma $(x-2)(x-5) = 0$. Od tod dobimo rešitvi $x = 2$ in $x = 5$. Če je $x^2 - 7x + 11 = -1$ oziroma $x^2 - 7x + 12 = 0$, sledi $(x-3)(x-4) = 0$ in zato $x = 3$ ali $x = 4$. V obeh primerih je $x^2 - 13x + 42$ sodo število, zato sta tudi to rešitvi. Če pa je $x^2 - 13x + 42 = 0$ oziroma $(x-6)(x-7) = 0$, sledi $x = 6$ ali $x = 7$ in v obeh primerih je $x^2 - 7x + 11 \neq 0$. Rešitev so torej števila $2, 3, 4, 5, 6$ in 7.

B2.



Dokažimo, da sta premici AB in C_1C_2 vzporedni. Naj bodo D, E in F zaporedoma nožišča višin iz A, B in C trikotnika ABC. Kot med tangento in tetivo je enak obodnemu kotu nad tetivo, ta pa je enak polovici središčenega kota nad tetivo. Ker je stranica AC tangenta na krožnico s središčem v B, zato velja $\angle C_1EC_2 = \frac{1}{2}\angle C_1BE = \frac{1}{2}\angle CBE$. Podobno zaradi tangentnosti velja tudi $\angle C_1DC_2 = \frac{1}{2}\angle DAC_2 = \frac{1}{2}\angle DAC$. Ker se trikotnika ADC in BEC ujemata v dveh kotih, sta podobna in se ujemata tudi v tretjem kotu. Zato je $\angle CBE = \angle DAC$ in iz zgoraj dokazanega sledi še $\angle C_1EC_2 = \angle C_1DC_2$. Od tod sklepamo, da so točke C_1, C_2, D in E koneciklične. Ker velja $\angle AEB = 90° = \angle ADB$, so tudi točke A, B, D in E koneciklične. Iz obeh konecikličnosti sledi

$$\angle BAC = \angle BAE = 180° - \angle EDB = \angle C_1DE = 180° - \angle EC_2C_1 = \angle C_1C_2C,$$

torej sta premici AB in C_1C_2 vzporedni. Na podoben način dokažemo vzporednost premic BC in A_1A_2 ter premic CA in B_1B_2. Ker imata trikotnik, ki ga določajo premice A_1A_2, B_1B_2 in C_1C_2 ter trikotnik ABC paroma vzporedne stranice, sta torej podobna.

2. način. Dokažimo vzporednost AB in C_1C_2 še na drugačen način. Iz navodil naloge razberemo, da velja $|AC_2| = |AD|$ ter $|BC_1| = |BE|$. Ker sta trikotnika ADC in BEC podobna, od tod sledi

$$\frac{|AC_2|}{|BC_1|} = \frac{|AD|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|BC|},$$

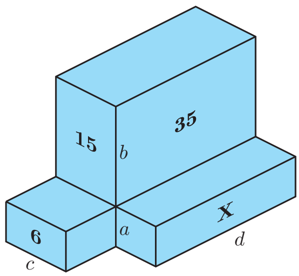
kar pomeni, da sta premici AB in C_1C_2 vzporedni. Na podoben način dokažemo še ostali dve vzporednosti in dokaz zaključimo kot v prvi rešitvi.

B3. Z vsakim rezom se število kosov papirja poveča za 1. Na koncu bo torej število kosov papirja za 1 večje od števila rezov, ki jih je Veronika izvedla. Da bo izvedla čim manj rezov, mora imeti na koncu čim manj kosov papirja. Denimo, da ima na koncu k kosov s 14 kvadratki in n kosov s 15 kvadratki, torej skupaj $n + k$ kosov papirja. Tedaj mora veljati $14k + 15n = 78^2$. Enakost zapišemo v obliki $15(n+k) = 78^2 + k$ in izrazimo $n + k = \frac{78^2+k}{15}$. Od tod sledi, da mora biti število $78^2 + k$ deljivo s 15. Da bo $n + k$ čim manjše, mora biti k čim manjši. Ker ima število $78^2 = 6084$ pri deljenju s 15 ostanek 9, mora biti $k \geq 6$. Ko je $k = 6$, je $n + k = 406$, torej mora Veronika papir prerezati vsaj 405-krat.

Preverimo še, da lahko Veronika s 405 rezi papir res razreže na kose, ki imajo bodisi 14 bodisi 15 kvadratkov. Veronika najprej od lista s 5 rezi odreže 5 trakov velikosti 15×78, vsakega od teh trakov pa s 77 rezi razreže na kose velikosti 15×1. Ostane ji še kos velikosti 3×78. Z 10 rezi od tega kosa odreže 10 kosov velikosti 3×5, da ji ostane kos velikosti 3×28. Z 1 rezom ta kos prereže na 2 kosa velikosti 3×14, nazadnje pa vsakega od teh kosov z 2 rezoma razreže na kose velikosti 1×14. Tako imajo vsi dobljeni kosi 14 ali 15 kvadratov, za kar je bilo potrebnih $5 + 5 \cdot 77 + 10 + 1 + 2 \cdot 2 = 405$ rezov.

3. letnik

A1. Označimo nekatere od stranic kvadrov z a, b, c in d (glej sliko).



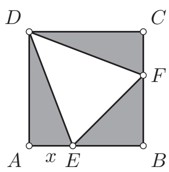
Potem je $ac = 6$, $bc = 15$, $bd = 35$ in $ad = X$. Sledi, da je $ac \cdot bd = 6 \cdot 35$ in hkrati $bc \cdot ad = 15X$, torej je $6 \cdot 35 = 15X$ in zato $X = 14$.

A2. Označimo z x razdaljo, ki jo je prevozila Ana do srečanja z Meto. Potem je Meta do srečanja z Ano prevozila $x+2\cdot 105$ km. Če čas, ki je pretekel do srečanja, zapišemo z Aninega in Metinega stališča v urah, dobimo

$$\frac{x}{30} = \frac{x + 2 \cdot 105}{70} + 1,$$

od koder sledi, da je $x = 210$ km. Razdalja med vasema Zabukovje in Zahrastje je $210 + 105 = 315$ km.

A3. Označimo z A, B, C in D oglišča kvadrata in dodatno z E in F oglišči belega trikotnika (glej sliko).



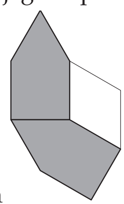
Označimo $x = |AE|$. Ker imata pravokotna trikotnika AED in FCD eno od stranic enako stranici kvadrata in imata enaki ploščini, je $|CF| = |AE| = x$. Če upoštevamo, da imata tudi trikotnika AED in EBF enaki ploščini, dobimo $\frac{2 \cdot x}{2} = \frac{(2-x)\cdot(2-x)}{2}$. Enačbo preoblikujemo v $x^2 - 6x + 4 = 0$ in jo rešimo kot kvadratno enačbo, da dobimo $x = 3 \pm \sqrt{5}$. Ker mora biti $x < 2$, je prava rešitev $x = 3 - \sqrt{5}$. Ploščina belega trikotnika je zato enaka

$$p = 2^2 - 3 \cdot \frac{2 \cdot (3 - \sqrt{5})}{2} = 3\sqrt{5} - 5.$$

B1. Označimo $\log_2(a^2-4a-1)=n$, kjer je n celo število. Potem je $a^2-4a-1=2^n$ oziroma $a^2-4a-(1+2^n)=0$. To je kvadratna enačba za a, ki ima rešitvi $a_1=2+\sqrt{5+2^n}$ in $a_2=2-\sqrt{5+2^n}$. Enačba ima celoštevilsko rešitev le v primeru, ko je $\sqrt{5+2^n}$ celo število. Naj bo $\sqrt{5+2^n}=k$ oziroma $5+2^n=k^2$ in ločimo tri primere glede na predznak števila n. Če je $n<0$, enakost preuredimo v $2^n=k^2-5$ in opazimo, da je na desni strani celo število, na levi pa ne. Zato v tem primeru nimamo rešitev. Če je $n=0$, sledi $k^2=6$, kar pa ni mogoče, saj 6 ni kvadrat celega števila. Če je $n>0$, je število $5+2^n$ liho, zato mora biti tudi k liho število. Pišimo $k=2m-1$, kjer je m celo število. Enačbo $5+2^n=(2m-1)^2$ lahko preuredimo do $m(m-1)=2^{n-2}+1$. Opazimo, da je $m(m-1)$ sodo celo število, zato mora biti tako tudi število $2^{n-2}+1$. Pri $n=1$ število $2^{n-2}+1$ ni celo, pri $n>2$ pa ni sodo. Ostanem nam torej le možnost $n=2$. V tem primeru je $a_1=5$ in $a_2=-1$. Edini rešitvi naloge sta torej $a=-1$ in $a=5$. V obeh primerih je $\log_2(a^2-4a-1)=2$.

2. način. Označimo $\log_2(a^2-4a-1)=n$, kjer je n celo število. Potem je $a^2-4a-1=2^n$. Ker je leva stran enakosti celo število, mora biti tudi na desna stran celo število, torej je $n\geq 0$. Če je $n=0$, sledi $a^2-4a-2=0$. Ta enačba nima celoštevilskih rešitev, saj njena diskriminanta $D=16+8=24$ ni popoln kvadrat. Torej je $n\geq 1$, kar pomeni, da je 2^n sodo število. Iz enakost $a^2-4a-1=2^n$ zato sledi, da mora biti a liho število. Pišimo $a=2k+1$, kjer je k celo število. Če to vstavimo v zadnjo enakost in enakost poenostavimo, dobimo $k^2-k-1=2^{n-2}$. Ker je $k^2-k=k(k-1)$ sodo število, je leva stran enakosti liho število, zato mora biti tudi desna stran liho število. To pomeni, da je $n=2$ in zato $k^2-k-2=0$. Slednja enačba ima rešitvi $k=2$ in $k=-1$. V prvem primeru je $a=5$, v drugem pa $a=-1$.

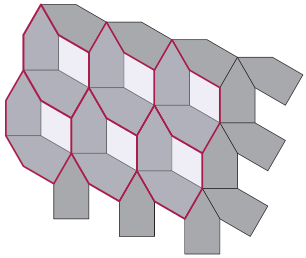
B2. Označimo z a dolžino stranice Natašinega petkotnika. Potem je njegova ploščina enaka $a^2(1+\frac{\sqrt{3}}{4})$. Največji notranji kot petkotnika je enak $90^\circ+60^\circ=150^\circ$. Luknja v Natašinem vzorcu je torej romb z manjšim notranjim kotom enakim $360^\circ-2\cdot 150^\circ=60^\circ$. Ta romb je torej sestavljen iz dveh enakokrakih trikotnikov s stranico dolžine a, zato je njegova ploščina enaka $2\cdot a^2\frac{\sqrt{3}}{4}=a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$. Opazimo, da lahko ravnino prekrijemo z osemkotnikom



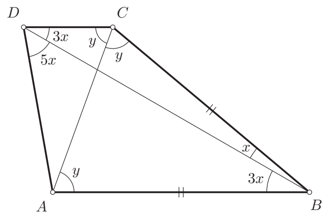
, kot prikazuje spodnja slika. Ploščina tega osemkotnika je enaka $2\cdot a^2(1+\frac{\sqrt{3}}{4})+a^2\frac{\sqrt{3}}{2}=a^2(2+\sqrt{3})$. Delež ravnine, ki ga pokriva Natašin vzorec je zato enak deležu osemkotnika, ki ga prekrivata petkotnika, tj.

$$\frac{2a^2(1+\frac{\sqrt{3}}{4})}{a^2(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2+\sqrt{3}}=\frac{4+\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}.$$

Neenakost $\frac{4+\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}>\frac{3}{4}$ je ekvivalentna neenakosti $4(4+\sqrt{3})>3(4+2\sqrt{3})$, ki jo lahko preuredimo v $4>2\sqrt{3}$. Slednja neenakos je izpolnjena, saj je $\sqrt{3}<2$. Natašin vzorec torej pokrije več kot 75% površine ravnine.



B3. Označimo $\angle CBD = x$. Tedaj je $\angle DBA = 3x$ in $\angle ADB = 5x$. Ker je $ABCD$ trapez, sta premici AB in CD vzporedni, zato je $\angle BDC = \angle DBA = 3x$. Ker je $|BC| = |AB|$, je trikotnik ABC enakokrak z vrhom pri B. Označimo $\angle BAC = \angle ACB = y$. Zaradi vzporednosti premic AB in CD je tudi $\angle DCA = y$.



Po sinusnem izreku za trikotnik ACD velja $\frac{\sin 8x}{\sin y} = \frac{|AC|}{|AD|}$, po sinusnem izreku za trikotnik ABC pa $\frac{\sin y}{\sin 4x} = \frac{|BC|}{|AC|}$. Obe enakosti zmnožimo, da dobimo $\frac{\sin 8x}{\sin 4x} = \frac{|BC|}{|AD|}$. Sedaj uporabimo sinusni izrek še za trikotnik ABD in dobimo $\frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|AD|}$. Iz obeh izpeljanih enakosti sledi $\frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \frac{\sin 8x}{\sin 4x}$. Po obrazcu za dvojne kote sledi $\frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \frac{2\sin 4x \cos 4x}{\sin 4x} = 2\cos 4x$ in zato je $2\sin 3x \cos 4x = \sin 5x$. Levo stran defaktoriziramo $\sin 7x + \sin(-x) = \sin 5x$, in z upoštevanjem lihosti funkcije $\sin$ enakost preoblikujemo v $\sin 7x + \sin(-5x) = \sin x$. Sedaj levo stran ponovno faktoriziramo, da dobimo $2\sin x \cos 6x = \sin x$. Ker $\sin x \neq 0$, lahko enakost pokrajšamo s $\sin x$ in dobimo $\cos 6x = \frac{1}{2}$. Ker je $0^\circ < 6x < 8x < 180^\circ$, od tod sledi $6x = 60^\circ$ oziroma $x = 10^\circ$. Velikosti notranjih kotov trapeza so torej $\beta = 4x = 40^\circ$, $\gamma = 180^\circ - \beta = 140^\circ$, $\delta = 8x = 80^\circ$ in $\alpha = 180^\circ - \delta = 100^\circ$.

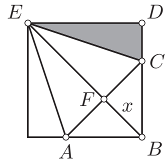
2. način. Po sinusnem izreku za trikotnik ABD dobimo $\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{\sin 3x}{\sin(180^\circ - 8x)} = \frac{\sin 5x}{\sin 8x}$, po sinusnem izreku za trikotnik BCD pa $\frac{|BC|}{|BD|} = \frac{\sin 3x}{\sin(180^\circ - 4x)} = \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$. Ker je $|AB| = |BC|$, sta oba izraza enaka, torej je $\frac{\sin 5x}{\sin 8x} = \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$. Od tod kot v prvi rešitvi izpeljemo $2\sin 3x \cos 4x = \sin 5x$. Enakost sedaj množimo s $\cos 3x$ in na levi strani uporabimo formulo za dvojne kote, da dobimo $\sin 6x \cos 4x = \sin 5x \cos 3x$. Obe strani defaktoriziramo $\sin 10x + \sin 2x = \sin 8x + \sin 2x$ in enakost poenostavimo do $\sin 10x = \sin 8x$. Ker je $0^\circ < 8x < 180^\circ$, sta kota $8x$ in $10x$ različna in manjša od 360°, zato sledi $10x = 180^\circ - 8x$ oziroma $x = 10^\circ$. Od tod kot v prvi rešitvi poračunamo notranje kote trapeza $\beta = 40^\circ$, $\gamma = 140^\circ$, $\delta = 80^\circ$ in $\alpha = 100^\circ$.

4. letnik

A1. Če enačimo skupno maso na slikah (A) in (D) ter na slikah (C) in (E), obakrat dobimo, da je masa 1 valja enaka masi 2 kock in 1 piramide. Torej je skupna masa teles na slikah (A), (D), (C) in (E) enaka. Če primerjamo še maso teles na slikah (A) in (C) vidimo, da masa kocke ni enaka masi piramide, torej se skupna masa teles na sliki (B) razlikuje od skupne mase teles na preostalih slikah.

A2. Za obe narisani premici velja, da imata smerni koeficient večji od nič in začetno vrednost večjo od nič. Torej je $a > 0$ in $b > 0$, enačba druge premice pa ne more biti niti $y = ax - b$ niti $y = -bx + a$. Ker sta začetni vrednosti za narisani premici različni, enačba druge premice ne more biti enaka $y = \frac{b}{a}x + b$. Torej preostaneta samo še enačbi $y = bx + a$ in $y = \frac{a}{b}x + a$. Če je $b > a$, potem je začetna vrednost druge premice manjša od začetne vrednosti prve premice, torej mora biti tudi smerni koeficient druge premice manjši od smernega koeficienta prve premice, ki je a. V tem primeru je torej možna enačba druge premice samo $y = \frac{a}{b}x + a$. Če pa je $b < a$, je začetna vrednost druge premice večja od začetne vrednosti prve premice in mora biti tudi smerni koeficient druge premice večji od smernega koeficienta prve premice, ki je a. Torej je tudi v tem primeru možna enačba druge premice samo $y = \frac{a}{b}x + a$.

A3. Narišemo diagonalo kvadrata in označimo z A, B, C, D, E in F nekatere točke na kvadratu (glej sliko).



Označimo z $x = |BF|$. Ker je ploščina trikotnika ACE dvakrat tolikšna kot ploščina trikotnika ABC, je $|EF| = 2|BF| = 2x$. Trikotnik BFC je pravokoten in enakokrak, zato je $|BF| = |FC| = |FA| = x$. Torej je ploščina trikotnika ABC enaka $\frac{2x\cdot x}{2} = x^2$, ploščina trikotnika ACE pa je enaka $\frac{2x\cdot 2x}{2} = 2x^2$. Ker je $3x = |BE| = 2\sqrt{2}$, je $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, ploščina osenčenega trikotnika pa je enaka

$$p = \frac{1}{2}(2^2 - x^2 - 2x^2) = \frac{1}{2}(4 - \frac{8}{9} - \frac{16}{9}) = \frac{2}{3}.$$

B1. Za vsak $n \geq 1$ iz rekurzivne zveze izrazimo $a_{n+1} = 3 - \frac{18}{6+a_n} = \frac{3a_n}{6+a_n}$. Od tod sledi

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 6}{3a_n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{a_n}.$$

To zvezo uporabimo večkrat zapored, da izpeljemo

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_{n+1}} &= \frac{1}{3} + \frac{2}{a_n} = \frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{a_{n-1}}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 4\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{a_{n-2}}\right) = \ldots \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{8}{3} + \ldots + 2^{n-1}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{a_1}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{8}{3} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{3} + \frac{2^n}{a_1}.\end{aligned}$$

Z upoštevanjem vrednosti $a_1 = 3$ ter formule za vsoto členov geometrijskega zaporedja dobimo

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{3}(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n) = \frac{1}{3}(2^{n+1} - 1),$$

od koder sledi $\frac{1}{a_k} = \frac{1}{3}(2^k - 1)$ za vse $k \geq 2$, ta formula pa očitno velja tudi za $k = 1$. Torej je

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}(2^k - 1) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} 2^k - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} - \frac{1}{3} \cdot n = \frac{2^{n+1}}{3} - \frac{n+2}{3},$$

pri čemer smo ponovno uporabili formulo za vsoto členov geometrijskega zaporedja.

2. način. Trditev bomo pokazali z matematično indukcijo. Če je $n = 1$, je leva stran enakosti enaka $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{3}$, desna stran pa $\frac{4}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Ker sta obe vrednoti enaki, je baza indukcije izpolnjena. Denimo sedaj, da dana enakost velja za neko naravno n. Iz rekurzivne zveze zaporedja izrazimo $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{a_n}$. S pomočjo te zveze izpeljemo in vrednosti $a_1 = 3$ izpeljemo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a_k} &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{a_1}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{a_2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{a_n}\right) = \\ &= (n+1) \cdot \frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) = \frac{n+1}{3} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}.\end{aligned}$$

Po indukcijski predpostavki je torej

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a_k} = \frac{n+1}{3} + 2\left(\frac{2^{n+1}}{3} - \frac{n+2}{3}\right) = \frac{2^{n+2}}{3} - \frac{n+3}{3}.$$

Torej dana enakost velja tudi za število $n+1$. S tem smo dokazali indukcijksi korak. Po principu matematične indukcije, je enakost izpolnjena za vsa naravna števila n.

3. način. Iz rekurzivne zveze izrazimo $a_{n+1} = \frac{3a_n}{6+a_n}$ za vse $n \geq 1$. Izračunajmo prvih nekaj členov zaporedja:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 3, \\
a_2 &= \frac{3 \cdot 3}{3+6} = 1, \\
a_3 &= \frac{3 \cdot 1}{1+6} = \frac{3}{7} = \frac{3}{8-1}, \\
a_4 &= \frac{3 \cdot \frac{3}{7}}{\frac{3}{7}+6} = \frac{9}{45} = \frac{3}{15} = \frac{3}{16-1}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Uganemo, da je $a_n = \frac{3}{2^n-1}$ in to dokažemo z indukcijo. Za $n = 1$ je $a_1 = 3$ in $\frac{3}{2^1-1} = 3$, torej zveza velja. Predpostavimo, da je $a_n = \frac{3}{2^n-1}$ in izračunajmo

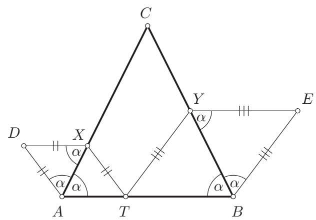
$$a_{n+1} = \frac{3a_n}{6+a_n} = \frac{3\frac{3}{2^n-1}}{6+\frac{3}{2^n-1}} = \frac{\frac{3}{2^n-1}}{\frac{2(2^n-1)+1}{2^n-1}} = \frac{3}{2^{n+1}-1}.$$

Vidimo, da zveza velja tudi za $n+1$, če velja za n, in s tem je indukcija zaključena. Če $a_k = \frac{3}{2^k-1}$ vstavimo v iskano vsoto, dobimo

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}(2^k-1) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} 2^k - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{2^n-1}{2-1} - \frac{1}{3} \cdot n = \frac{2^{n+1}}{3} - \frac{n+2}{3},$$

pri čemer smo uporabili formulo za vsoto členov geometrijskega zaporedja.

B2.



Označimo $\angle BAC = \angle CBA = \alpha$. Ker je premica AC simetrala kota $\angle BAD$, je $\angle XAD = \alpha$. Zaradi vzporednosti premic XD in AB pa je tudi $\angle DXA = \alpha$. Trikotnik AXD je torej enakokrak z vrhom pri D, zato velja $|XD| = |AD| = |TX|$. Ker sta premici AB in DX vzporedni, od tod sledi, da je štirikotnik $ATXD$ bodisi romb bodisi enakokrak trapez. Podobno sklepamo, da je tudi štirikotnik $TBEY$ bodisi romb bodisi enakokrak trapez. Pokažimo, da sta ta dva štirikotnika oba romba.

Po predpostavki je kot $\angle ACB = 180° - 2\alpha < 90°$, zato je $\alpha > 45°$. Če je štirikotnik $ATXD$ romb, je $\angle XTA = 180° - \angle TAD = 180° - 2\alpha$, če pa je enakokrak trapez, je $\angle XTA = \angle TAD = 2\alpha$. Podobno je tudi $\angle BTY = 180° - 2\alpha$, če je $TBEY$ romb, in $\angle BTY = 2\alpha$, če je $TBEY$ enakokrak trapez. Ker sta točki X in Y različni od C in ležita na ustreznih stranicah trikotnika, je $\angle BTY + \angle XTA < 180°$. Ker pa kombinacije $2\alpha + 2\alpha = 4\alpha > 4 \cdot 45° = 180°$, $(180° - 2\alpha) + 2\alpha = 180°$ in $2\alpha + (180° - 2\alpha) = 180°$ ne ustrezajo temu pogoju, je po zgornjem možna le kombinacija $\angle BTY = \angle XTA = 180° - 2\alpha$, torej sta štirikotnika $ATXD$ in $TBEY$ romba.

Od tod sledi, da sta trikotnika ATX in YTB enakokraka z vrhom pri T in zato podobna trikotniku BCA, saj je z njim ujemata v kotu ob osnovnici. Torej je

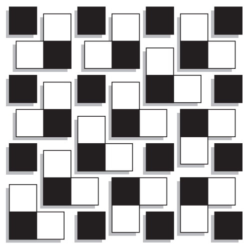
$$\frac{|AX|}{|AB|} = \frac{|AT|}{|BC|} \quad \text{in} \quad \frac{|BY|}{|AB|} = \frac{|BT|}{|AC|} = \frac{|BT|}{|BC|}.$$

S pomočjo teh enakosti izrazimo

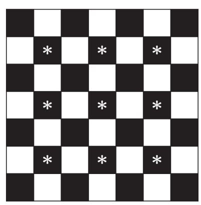
$$|AX| + |BY| = \frac{|AB| \cdot |AT|}{|BC|} + \frac{|AB| \cdot |BT|}{|BC|} = \frac{|AB| \cdot (|AT| + |BT|)}{|BC|} = \frac{|AB|^2}{|BC|}.$$

B3.

(a) Ker ima Selenin list papirja 24 belih kvadratkov, vsak košček pa ima 2 bela kvadratka, lahko Selena izreže največ $24 : 2 = 12$ takih koščkov. Kako lahko to stori, prikazuje slika.



(b) Oglejmo si 9 črnih kvadratkov Seleninega papirja, ki so na levi sliki označeni z $*$. Vsak košček predpisane oblike, ki ga Selena lahko izreže, mora zagotovo vsebovati enega od teh 9 kvadratkov. Torej lahko Selena izreže največ 9 takih koščkov. Kako lahko to stori, prikazuje desna slika.



Rešitve 21. tekmovanja v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol – državno tekmovanje

1. letnik

A1. Po kvadriranju in odpravi oklepajev dobimo $x^2 + 4xy + 4y^2 - 3y^2 + 3y = 4x^2 + 4xy + y^2 - 3x^2 - 3x$. Enačba se preoblikuje v enačbo $3y = -3x$, oziroma $x + y = 0$. Pravilen je odgovor C.

A2. $B = 5^{702} = (5^2)^{351} = 25^{351}$, $C = (3^3)^{351} = 27^{351}$. Ker je $25^{351} < 26^{351} < 27^{351}$, dobimo $B < A < C$. Pravilen je odgovor D.

A3. Izraz $(2 + \sqrt{x})^{-1} + 1)^{-1}$ preoblikujemo v $(\frac{1}{2+\sqrt{x}} + 1)^{-1} = (\frac{3+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}})^{-1} = \frac{2+\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}$, $x \neq 9$, $x \neq 4$. Izraz še racionaliziramo in dobimo $\frac{x-\sqrt{x}-6}{x-9}$. Pravilen je odgovor B.

B1. Točka $S(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ je središče daljice med $A(x_1, y_1)$ in $B(x_2, y_2)$. Tako dobimo enačbi $\frac{5a+b}{2} = 5$ in $\frac{4a+3b-1}{2} = -2$. Rešitev sistema je $a = 3$ in $b = -5$. Za točko A dobimo koordinati $A(11, -1)$ in za B dobimo $B(-1, -3)$. Upoštevamo $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ in dobimo $d(A, B) = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$.

B2. Naj bo prvotno x okuženih in v domu skupno y oskrbovancev. Od vseh okuženih $5x$ so jih 21 odpeljali, okuženih je ostalo $5x - 21$. Oskrbovancev je ostalo $y - 21$. Delež okuženih je $\frac{5x-21}{y-21} = 9.\overline{09}\,\%$. Če periodično število $9.\overline{09}$ spremenimo v ulomek, dobimo $\frac{100}{11}$ in $9.\overline{09}\,\% = \frac{1}{11}$. Zato delež okuženih lahko pišemo kot $\frac{5x-21}{y-21} = \frac{1}{11}$, kar lahko preoblikujemo v $y = 55x - 210$. Če odpeljejo še 9 okuženih, jih bodo skupno odpeljali 30 in dobimo delež okuženih $\frac{5x-30}{y-30} = 5\,\%$. Upoštevamo, da je $5\,\% = \frac{1}{20}$ in delež preoblikujemo v enačbo $y = 100x - 570$. Z enačenjem obeh enačb dobimo $x = 8$ in $y = 230$, kar pomeni, da je bilo vseh oskrbovancev 230, od tega 8 okuženih.

B3. Zapišemo izraz $4 \cdot \frac{a-a^{-1}}{a+a^{-1}} - 2 \cdot (a - a^{-1})$. Izraz poenostavimo $4 \cdot \frac{a-\frac{1}{a}}{a+\frac{1}{a}} - 2 \cdot (a - \frac{1}{a}) = 4 \cdot \frac{a^2-1}{a^2+1} - 2 \cdot \frac{a^2-1}{a} = \frac{4a(a^2-1)-2(a^2+1)(a^2-1)}{(a^2+1)a} = \frac{2(a^2-1)(2a-a^2-1)}{(a^2+1)a} = \frac{-2(a^2-1)(a^2-2a+1)}{(a^2+1)a} = \frac{-2(a-1)^3(a+1)}{(a^2+1)a}$, $a \neq 0$. Vrednost danega izraza je enaka 0 za $a = -1$ in $a = 1$.

2. letnik

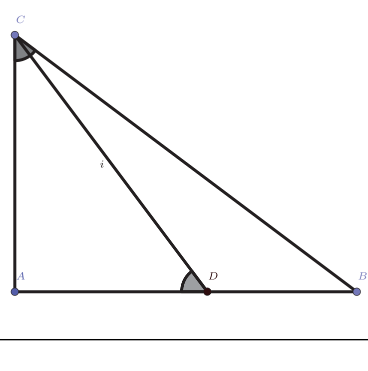
A1. Če se premici sekata na ordinatni osi, je x koordinata presečišča enaka 0. V obe enačbi premice vstavimo za $x = 0$ ter ju poenostavimo do npr. $-ay + 2y - 2 = 0$ in $4y - ay + 2 = 0$. Dobimo sistem dveh enačb z dvema neznankama, ki ga rešimo na katerikoli način. Rešitvi sta $y = -2$ in $a = 3$. Pravilen odgovor je E.

A2. Poenostavimo prvi ulomek $\frac{(\sqrt[5]{(a^{-\frac{4}{3}})^{-\frac{5}{8}}})^{-3}}{(\sqrt[8]{(\sqrt[3]{a^4})^5})^{-\frac{3}{5}}} = 1$ in izračunamo vrednost drugega ulomka $\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}} = \frac{12}{29}$. Rezultat množenja teh dveh ulomkov je $\frac{12}{29}$. Pravilen je odgovor B.

A3. Uporabimo kotne funkcije v pravokotnem trikotniku $\tan\alpha = \frac{v_c}{b_1} = \frac{\sqrt{12}}{4} =$ in izračunamo kot $\alpha \doteq 40,89°$. Pravilen je odgovor B.

B1. Trikotnik ABC je podoben trikotniku ACD.

a) Zapišemo sorazmerje $|AB| : |AC| = |BC| : |CD|$. Upoštevamo, da je $|AB| : |AC| = 4 : 3$ in dolžina daljice CD meri $7,5\ cm$ in dobimo enačbo $4 : 3 = |BC| : 7,5$. Z rešitvijo enačbe izračunamo dolžino daljice BC, ki je $10\ cm$.



b) Ker je $|AB| : |AC| = 4 : 3$ lahko $|AB|$ in $|AC|$ zapišemo kot $|AB| = 4x$ in $|AC| = 3x$. Zaradi podobnosti trikotnikov ABC in ACD lahko zapišemo sorazmerje $|AC| : |AB| = |AD| : |AC|$ vanj vstavimo $|AB| = 4x$ in $|AC| = 3x$ in dobimo $3x : 4x = |AD| : 3x$ izrazimo $|AD| = \frac{9x}{4}$. Obseg trikotnika ACD je $18\ cm$ torej je $3x + \frac{9x}{4} + 7,5 = 18$ in $x = 2$. Dolžini stranic sta $|AC| = 3x = 6\ cm$ in $|AD| = \frac{9x}{4} = \frac{9}{2}$.

B2. Premica s koordinatnima osema oblikuje pravokotni trikotnik, katerega ploščino izračunamo kot polovični produkt med katetama $p = \frac{k_1 \cdot k_2}{2}$. Iz naloge je razvidno, da je dolžina ene katete 3, dolžino druge katete pa izračunamo s pomočjo ploščine in dobimo rezultat 6. Ker je smerni koeficient premice pozitiven, premica seka koordinatni osi v točkah $(-3, 0)$ in $(0, 6)$, s pomočjo teh dveh točk lahko zapišemo vse tri oblike enačbe premice. Odsekovna oblika $\frac{x}{-3} + \frac{y}{6} = 1$, implicitna oblika $-2x + y - 6 = 0$ in eksplicitna oblika $y = 2x + 6$.

B3.

a) Dani izraz $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ v števcu in imenovalcu pomnožimo z $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$ ter poenostavimo $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x-1})^2} = \frac{x+1+2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}+x-1}{x+1-(x-1)} = \frac{2x+2\sqrt{(x+1)(x-1)}}{2} = x + \sqrt{x^2-1}$.

b) Vstavimo $x = \frac{5}{4}$ v racionaliziran izraz $\frac{5}{4} + \sqrt{(\frac{5}{4})^2 - 1} = \frac{5}{4} + \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{16}{16}} = \frac{5}{4} + \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} = 2$. Lahko pa vstavimo $x = \frac{5}{4}$ v dani izraz $\frac{\sqrt{\frac{5}{4}+1}+\sqrt{\frac{5}{4}-1}}{\sqrt{\frac{5}{4}+1}-\sqrt{\frac{5}{4}-1}} = \frac{\sqrt{\frac{9}{4}}+\sqrt{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\frac{9}{4}}-\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{4}{2}}{\frac{2}{2}} = 2$.

3. letnik

A1. S pomočjo obrazca za izračun površine pravilne štiristrane prizme $P = 2a^2 + 4av$, dobimo kvadratno enačbo $128 = 2a^2 + 24a$. Rešitvi kvadratne enačbe sta $a = 4$ in $a = -16$. Ugotovimo, da je pravilna rešitev $a = 4$. Osnovni rob prizme meri $a = 4\ m$. Z obrazcem $D = \sqrt{2a^2 + v^2}$ izračunamo dolžino telesne diagonale $D \doteq 8,25\ m$. Pravilen je odgovor D.

A2. Ugotovimo, da bo definicijsko območje dane funkcije f množica vseh realnih števil ob pogoju $x^2 + (a+4)x + 9 > 0$. To pa bo izpolnjeno, če bo $D < 0$. Poenostavimo levo stran neenačbe:

$$D = b^2 - 4ac = (a+4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = a^2 + 8a - 20 = (a+10)(a-2)$$

Rešimo kvadratno neenačbo $(a+10)(a-2) < 0$. Rešitvi kvadratne enačbe $(a+10)(a-2) = 0$ sta $a_1 = -10$ in $a_2 = 2$. Rešitev kvadratne neenačbe pa usterza intervalu $-10 < a < 2$. Pravilen je odgovor D.

A3. Ugotovimo, da je prostornina vode $19\ dm^3$. Zapišemo podatke v obrazec za prostornino vode (x je višina vode v akvariju) in dobimo enačbo $V = 5 \cdot 2 \cdot x = 19$. Izračunamo $x = 1,9\ dm$ $= 19\ cm$. Nivo vode bo torej $6\ cm$ nižje od zgornjega roba akvarija. Pravilen je odgovor D.

B1. Iz obsega paralelograma izračunamo dolžino stranice $b = 16\ m$. S kotno funkcijo sinus izračunamo višino na osnovnico a, $v_a = b \sin 60° = 8\sqrt{3}\ m$. Izračunamo ploščino osnovne ploskve $O = av_a = 104\sqrt{3}\ m^2$. S kosinusnim izrekom $f^2 = a^2+b^2-2ab\cos\alpha$ izračunamo dolžino diagonale, ki je enaka višini prizme $v = \sqrt{217}\ m$. Izračunamo ploščino plašča $S = ov = 58\sqrt{217}$ m^2. Natančno zapišemo izračun površine $P = 2O + S = (208\sqrt{3} + 58\sqrt{217})\ m^2$. Zapišemo še izračun prostornine $V = Ov = 104\sqrt{651}\ m^3$.

B2.

a) Vstavimo $b=-1$ v predpis funkcije f in narišemo njen graf: graf lahko rišemo s premiki vzdolž abscisne in ordinatne osi ali z izračunom ničle, presečišča z ordinatno osjo ter vodoravno asimptoto. Zapišemo še njeno zalogo vrednosti $(-\frac{1}{3},\infty)$.

b) Vstavimo $x=\frac{1}{2}$ v predpis funkcije f in dobimo enačbo $3^{\frac{1}{2}-b}-\frac{1}{3}=0$. Rešimo enačbo in dobimo rešitev $b=\frac{3}{2}$.

c) Vstavimo $b=2$ v predpis funkcije f in le tega izenačimo s 6, enačbo preoblikujemo do oblike $3^{x-2}=\frac{19}{3}$, jo rešimo z logaritmiranjem in na ta način izračunamo absciso presečišča na dve mesti natančno $x\doteq 3,7$.

B3. Z upoštevanjem pravila za vsoto logaritmov preoblikujemo dano enačbo v $\log 10(2^x+1)=\log 2(4^x+9)$. Enačbo antilogaritmiramo do oblike $10(2^x+1)=2(4^x+9)$ in jo z uvedbo nove neznanke $2^x=t$ preoblikujemo v enačbo $t^2-5t+4=0$. Rešitvi enačbe sta $t_1=1$ in $t_2=4$. Izračunamo še vrednosti prvotnih neznank enačbe $x_1=0$ in $x_2=2$.

4. letnik

A1. Vrednost odvoda funkcije f v iskanih točkah mora biti enaka tangensu naklonskega kota tangente v teh točkah $f'(x)=\tan 135^\circ=-1$. Rešimo enačbo $3x^2-4x=-1$. Enačbo uredimo in izračunamo abscisi iskanih točk $x_1=1$ in $x_2=\frac{1}{3}$. Izračunamo funkcijski vrednosti $f(x_1)=f(1)=2$ in $f(x_2)=f(\frac{1}{3})=\frac{76}{27}$. Zapišemo točki $T_1(1,2)$ in $T_2(\frac{1}{3},\frac{76}{27})$. Pravilen je odgovor E.

A2. Upoštevamo zvezo med zaporednimi členi geometrijskega zaporedja. Rešimo iracionalno enačbo in dobimo rešitvi $x_1=1$ in $x_2=\frac{1}{49}$. Edina celoštevilska rešitev je 1. Nato izračunamo člene zaporedja $a_1=3, a_2=3\sqrt{2}, a_3=6$. Izračunamo količnik $q=\sqrt{2}$. Pravilen je odgovor C.

A3. Števec prvega ulomka razstavimo kot razliko kvadratov $\sin^2 x-\cos^2 x=(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)$, imenovalec pa zapišemo kot vsoto obratnih vrednosti $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$ in dobljena ulomka seštejemo. Števec drugega ulomka zapišemo $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$, v imenovalcu drugega ulomka pa izpostavimo $\cos x-\sin x=-(\sin x-\cos x)$. Sledi krajšanje ulomkov in dobimo rezultat $-\sin^2 x$. Pravilen je odgovor C.

B1. Enačbo lahko rešimo s pomočjo uporabe Hornerjevega algoritma in dobimo rešitve $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_4=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ugotovimo, da sta prvi dve rešitvi racionalni, drugi dve pa iracionalni. Izračunamo kvadrat vsote prvih dveh rešitev in dobimo $\frac{1}{4}$ ter kvadrat vsote drugih dveh rešitev in dobimo 0. Nazadnje izračunamo še razliko kvadratov vsote racionalnih rešitev in vsote iracionalnih rešitev enačbe ter dobimo rešitev $\frac{1}{4}$.

B2. Najprej dvakrat uporabimo adicijska izreka in izraza kar se da poenostavimo $\cos(60^\circ-x)=\cos 60^\circ\cdot\cos x+\sin 60^\circ\cdot\sin x=\frac{1}{2}\cdot\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x$ in $\sin(120^\circ-x)=\sin 120^\circ\cdot\cos x-\sin x\cdot\cos 120^\circ=\frac{1}{2}\cdot\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos x$. Produkt dobljenih poenostavljenih izrazov je potem $\frac{\sqrt{3}+4\sin x\cos x}{4}$. Količnik $\frac{\sqrt{3}+4\sin x\cos x}{\cos(60^\circ-x)\cdot\sin(120^\circ-x)}$ je po razrešitvi dvojnih ulomkov enak 4.

B3. Ugotovimo, da je skupna pot obeh teles enaka 450 m. Pot, ki jo opravi telo A do srečanja, je vsota aritmetičnega zaporedja z začetnim členom $a_1 = 5$ m in diferenco $d_1 = 15$ m. Pot, ki jo opravi telo B do srečanja, je vsota aritmetičnega zaporedja z začetnim členom $b_1 = 100$ m in diferenco $d_2 = -10$ m. Naj bo n čas v minutah, ki preteče od začetka poti do srečanja. Vstavimo podatke v obrazec za vsoto prvih n členov aritmetičnega zaporedja in zapišimo poti obeh teles.

Telo A opravi pot

$$S_A = \frac{n}{2}(2 \cdot 5 + (n-1) \cdot 15),$$

telo B pa pot

$$S_B = \frac{n}{2}(2 \cdot 100 + (n-1) \cdot (-10)).$$

Upoštevamo, da skupna pot obeh teles $S_A + S_B$ meri $450\ m$. Dobimo enačbo

$$\frac{n}{2}(2 \cdot 5 + (n-1) \cdot 15) + \frac{n}{2}(2 \cdot 100 + (n-1) \cdot (-10)) = 450.$$

Enačbo preuredimo in dobimo kvadratno enačbo

$$n^2 + 41n - 180 = 0.$$

Enačbo rešimo in dobimo $n_1 = 4, n_2 = -45$. Negativna rešitev nima pomena, torej sta telesi porabili za pot do srečanja 4 minute. Izračunamo še pot, ki jo v tem času opravi telo A.

$$S_A = \frac{n}{2}(2 \cdot 5 + (n-1) \cdot 15)$$

$$S_A = \frac{4}{2}(2 \cdot 5 + (4-1) \cdot 15) = 2(10 + 45) = 110.$$

Telesi se srečata po 4 minutah. Telo A opravi pot $110\ m$.

Rešitve 21. tekmovanja v znanju matematike za dijake poklicnih šol – državno tekmovanje

1. in 2. letnik

A1. Ker so trikotniki $\triangle AEK$, $\triangle EJF$, $\triangle FIG$ in $\triangle GHB$ ploščinsko enaki trikotnikom $\triangle ADK$, $\triangle KEJ$, $\triangle JFI$, $\triangle IGH$ in $\triangle HBC$, je pobarvana $\frac{1}{2}$ pravokotnika $ABCD$.

A2. Število je deljivo s 3, če je vsota njegovih števk deljiva s 3. To velja za število $10^{2019} + 2$.

A3. Označimo število sklec, ki jih je Matic naredil zadnji dan, z x. V prejšnjem tednu je Matic naredil $(x-30) + (x-25) + (x-20) + (x-15) + (x-10) + (x-5) + x = 175$ sklec. Rešitev enačbe $x = 40$.

A4. Označimo začetno ceno izdelka z x. Cena izdelka po $30\ \%$ znižanju je $0{,}7x$, po $40\ \%$ zvišanju pa $0{,}7x + 0{,}4 \cdot 0{,}7x = 0{,}98x$. Nova cena je za $2\ \%$ nižja od začetne cene.

A5. Naj bo S množica ljudi, ki imajo radi sadje in Z množica ljudi, ki imajo radi zeljenjavo. Vemo: $|S| = 5$ in $|S - Z| = 4$ iz tega sledi, da je $|S \cap Z| = 1$.

A6. Število diagonal v n-kotniku izračunamo po enačbi $d_n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$. Sedemkotnik ima $d_7 = \frac{7 \cdot (7-3)}{2} = 14$ diagonal in 7 stranic, torej dvakrat več diagonal kot stranic.

A7. Velikosti kotov, ki glede na delitev v razmerju $1 : 2 : 5 : 1$ tvorijo iztegnjeni kot, so $1x$, $2x$, $5x$, in $1x$. Velja: $1x + 2x + 5x + 1x = 180°$ oz. $x = 20°$. Največji kot meri $5x = 100°$.

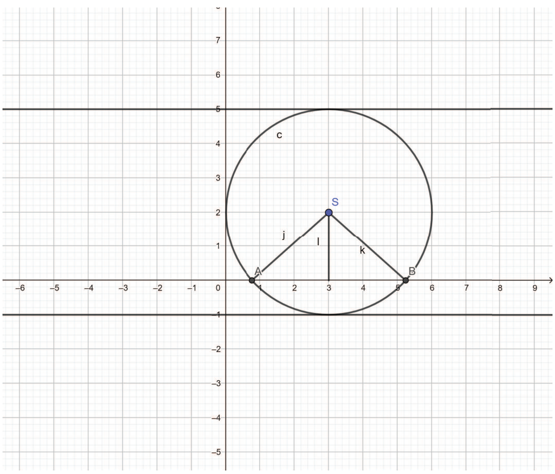
A8. Skupna površina obarvanih ploskev je $P = 6 \cdot (5)^2 - 2 \cdot (1)^2 + 4 \cdot (1 \cdot 5) = 168$ cm^2.

B1. Petra bi za 5-dnevni aranžma plačala $5 \cdot 50 = 250$ €.
Označimo iskano število dni aranžmaja z n. Zapišemo enačbo $n \cdot 50 - 2 \cdot 50 = n \cdot 40$. Rešitev enačbe je $n = 10$. Petra je za 10-dnevni aranžma plačala $10 \cdot 40 = 400$.
Petra si je lahko sladico sestavila na $1 \cdot 4 \cdot 2 = 8$ načinov.
Označimo iskano število ur z n. Iskani rešitvi ustreza neenačba $14 < 3{,}5 \cdot n$. Rešitev $n > 4$.
Naj bo število dvoposteljnih apartmajev d, število troposteljnih apartmajev pa t. Nastavimo sistem dveh enačb z dvema neznankama:

$$2d + 3t = 152,$$
$$d + t = 60.$$

Rešitvi sistema sta $t = 32$ in $d = 28$.

B2. Enačba $3x - 2 = -x + 10$ ima rešitev $x = 3$, enačba $\frac{y}{2} - \frac{y}{3} = \frac{1}{3}$ pa $y = 2$.
Pod y osjo se nahaja krožni izsek.
Z x osjo sta vzporedni dve tangenti: $y = -1$ in $y = 5$.
Med središčem kroga, presečiščem kroga z x osjo in točko $(3, 0)$ nastane pravokotni trikotnik, za katerega lahko zapišemo Pitagorov izrek $x^2 + 2^2 = 3^2$, pri čemer je x razdalja med presečiščem kroga z x osjo in točko $(3, 0)$. Rešimo enačbo in dobimo rešitev $x = 2{,}24$. Upoštevajoč to razdaljo $x = 2{,}24$ določimo koordinati presečišč krožnice z x osjo: $x_1 = 3 - 2{,}24 = 0{,}76$ in $x_2 = 3 + 2{,}24 = 5{,}24$.



B3. Vrednost x izračunamo upoštevajoč enačbo $(5x)° + (4x)° + 90° = 360°$. Rešitev enačbe $x = 30°$.
Razmerje med zlatimi, srebrnimi in bronastimi medaljami je Z:S:B $= 5 : 3 : 4$.
Upoštevaje razmerje med zlatimi, srebrnimi in bronastimi medaljami in število podeljenih medalj zapišemo enačbo $5t + 3t + 4t = 84$. S pomočjo rešitve enačbe $t = 7$ izračunamo število zlatih medalj: $5 \cdot 7 = 35$, srebrnih medalj: $3 \cdot 7 = 21$ in bronastih medalj: $4 \cdot 7 = 28$.

Bronasta medalja ima prostornino $V = \pi \cdot 3{,}5^2 \cdot 0{,}3 = 11{,}55$ cm$^3 = 1{,}155 \cdot 10^{-5}$ m^3. Masa medalje je $m = 1{,}155 \cdot 10^{-5} \cdot 8700 = 0,1004$ kg $= 100{,}4$ g.

3. letnik

A1. Velikosti kotov, ki glede na delitev v razmerju $1:2:5:1$ tvorijo iztegnjeni kot, so $1x$, $2x$, $5x$, in $1x$. Velja: $1x+2x+5x+1x=180°$ oz. $x=20°$. Največji kot meri $5x=100°$.

A2. Označimo število sklec, ki jih je Matic naredil zadnji dan, z x. V prejšnjem tednu je Matic naredil $(x-30)+(x-25)+(x-20)+(x-15)+(x-10)+(x-5)+x=175$ sklec. Rešitev enačbe $x=40$.

A3. Premica $y=2x-3$ ima smerni koeficient 2, premica $2y-4x+6=0$ ima smerni koeficient 2, premica $y-4x=6$ ima smerni koeficient 4, premica $-\frac{y}{3}+\frac{x}{\frac{3}{2}}=1$ pa smerni koeficient 2.

A4. Funkcijski predpis kvadratne funkcije s temenom v točki $T(2,-3)$, ki seka y os v točki $N(0,3)$, je $f(x)=\frac{3}{2}x^2-3x+3$. Na grafu te kvadratne funkcije leži točka $A(4,3)$.

A5. Skupna površina obarvanih ploskev je $P=6\cdot(5)^2-2\cdot(1)^2+4\cdot(1\cdot5)=168$ cm^2.

A6. Število je deljivo s 3, če je vsota njegovih števk deljiva s 3. To velja za število $10^{2019}+2$.

A7. Nepravilna je trditev $\cos(35°35')<\cos(45°45')$, saj je $\cos(35°35')=0{,}813$, $\cos(45°45')$ pa $0{,}698$.

A8. Vrednost $f(-4)=1$, $f(0)=-3$ in $f(-2)=-7$. Vrednost izraza $f(-4)-3f(0)+2f(-2)=1-3\cdot(-3)+2\cdot(-7)=-4$.

B1. Vrednost x izračunamo upoštevajoč enačbo $(5x)°+(4x)°+90°=360°$. Rešitev enačbe $x=30°$.
Razmerje med zlatimi, srebrnimi in bronastimi medaljami je Z:S:B $=5:3:4$.
Upoštevaje razmerje med zlatimi, srebrnimi in bronastimi medaljami in število podeljenih medalj zapišemo enačbo $5t+3t+4t=84$. S pomočjo rešitve enačbe $t=7$ izračunamo število zlatih medalj: $5\cdot7=35$, srebrnih medalj: $3\cdot7=21$ in bronastih medalj: $4\cdot7=28$.
Bronasta medalja ima prostornino $V=\pi\cdot3{,}5^2\cdot0{,}3=11{,}55$ cm$^3=1{,}155\cdot10^{-5}$ m^3. Masa medalje je $m=1{,}155\cdot10^{-5}\cdot8700=0,1004$ kg $=100{,}4$ g.

B2. Petra bi za 5-dnevni aranžma plačala $5\cdot50=250$ €.
Označimo iskano število dni aranžmaja z n. Zapišemo enačbo $n\cdot50-2\cdot50=n\cdot40$. Rešitev enačbe je $n=10$. Petra je za 10-dnevni aranžma plačala $10\cdot40=400$ €.
Petra si je lahko sladico sestavila na $1\cdot4\cdot2=8$ načinov.
Označimo iskano število ur z n. Iskani rešitvi ustreza neenačba $14<3{,}5\cdot n$. Rešitev $n>4$.
Naj bo število dvoposteljnih apartmajev d, število troposteljnih apartmajev pa t. Nastavimo sistem dveh enačb z dvema neznankama:

$$2d+3t=152,$$
$$d+t=60.$$

Rešitvi sistema sta $t=32$ in $d=28$.

B3. Obseg prvega kvadrata meri $o_1=4\cdot8=32$ cm, obseg drugega kvadrata pa $o_2=4\cdot12=48$ cm.
Obseg tretjega kvadrata meri $o_3=\frac{3}{4}\cdot(32+48)=60$ cm. Stranica tretjega kvadrata meri $a_3=\frac{60}{4}=15$ cm.
Točka C je za $15-8=7$ cm višje od točke B.
Kot α izračunamo s pomočjo kotne funkcije $tan\alpha=\frac{15}{35}=0{,}429$. Od tod dobimo $\alpha=23°11'$.
Možne so tri rešitve. Dobimo: (i) 225 kvadratkov z dolžino stranice 1 cm, (ii) 25 kvadratkov z dolžino stranice 3 cm, (iii) 9 kvadratkov z dolžino stranice 5 cm.