

Tekmovanja

57. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje – državno tekmovanje

5. razred

1. Polovica števila znamk v zbirki je za 10 večja od četrte števila znamk v zbirki. Koliko je vseh znamk v zbirki?

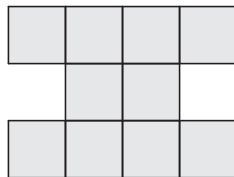
- (A) 32 (B) 36 (C) 40 (D) 48 (E) 60

2. Luka je ob prihodu iz šole odčital uro 12.21. V posteljo se je odpravil ob 21.12 in takoj zaspal. Spal je toliko časa, kolikor ga je preteklo med prihodom iz šole in odpravljanjem v posteljo. Ob kateri uri se je zbudil?

- (A) 6.33 (B) 7.07 (C) 6.03 (D) 6.06 (E) 7.03

3. Obseg lika na sliki, ki je sestavljen iz skladnih kvadratov, je 54 cm. Koliko je ploščina lika na sliki?

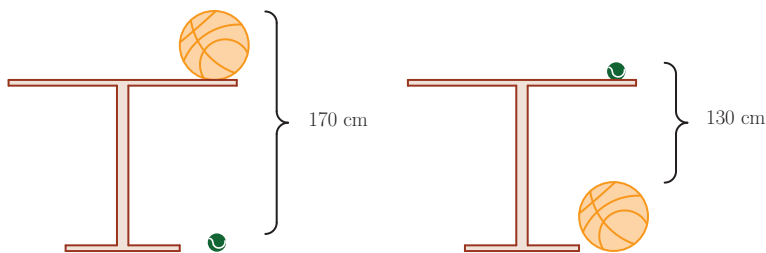
- (A) 10 cm^2 (B) 12 cm^2 (C) 20 cm^2 (D) 72 cm^2 (E) 90 cm^2



4. Jaka ima na listu papirja narisane štiri vzporedne premice. Sam nariše na list še štiri premice tako, da vsaka preseka čim več do tedaj narisanih premic. Največ koliko presečišč lahko s tem dobi?

- (A) 16 (B) 18 (C) 22 (D) 30 (E) 60

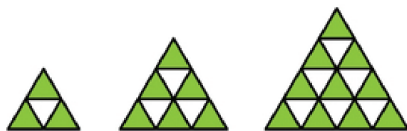
5. Na sliki sta enako visoki mizi, enako veliki žogi za košarko in enako veliki žogi za tenis.



Kako visoka je miza?

- (A) 130 cm (B) 148 cm (C) 150 cm (D) 164 cm (E) 170 cm

6. Narisani so prvi trije trikotniki v zaporedju, vsak je sestavljen iz manjših belih in zelenih trikotnikov. Zaporedje se po istem pravilu nadaljuje naprej. Koliko manjših zelenih trikotnikov je v trikotniku na 10. mestu tega zaporedja?



- (A) 30 (B) 55 (C) 66 (D) 90 (E) 121

7. Na pašniku se pasejo krave, ovce in koze. Če ne štejemo krav, je na pašniku 12 živali. Če ne štejemo ovc, je na pašniku 22 živali. Če ne štejemo koz, je na pašniku 26 živali. Koliko živali se pase na pašniku?

- (A) 16 (B) 30 (C) 34 (D) 48 (E) 60

8. V maju so bili datumi treh četrtkov soda števila. Kateri dan v tednu je bil 29. maj?

- (A) ponedeljek (B) torek (C) sredo (D) sobota
(E) ni mogoče določiti

B1. Izračunaj vrednost izraza:

$$1813 : 37 \cdot 3 + (5 + 5 \cdot 2) \cdot 2^3 - 250 : 5 : 5$$

B2. Gasilsko društvo zbira denar za nakup nove zaščitne opreme. Najprej prebivalci vsake hiše v vasi prispevajo toliko evrov, kolikor je hiš v vasi. Predsednik društva primakne 10 EUR. Ko zavarovalnica prispeva svoj delež, imajo zbranega petkrat toliko denarja, kolikor so ga imeli do tedaj. Mesarstvo Pujsek na koncu na račun društva nakaže 150 EUR in tako imajo zahtevanih 2200 EUR za nakup opreme. Koliko je prispevala zavarovalnica in koliko prebivalci vsake hiše v vasi?

6. razred

1. S katerim od naštetih števil je deljivo število 20200202?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 9 (E) 11

2. Naslednik katerega števila je z rimskimi števili zapisana razlika MCMXL – MCDXCIX ?

- (A) CDLX (B) DCXL (C) DCIL (D) 640 (E) CDXL

3. Dne 18. 4. 2021 je sonce vzšlo ob 6.08 in bo zašlo ob 19.53. Za koliko je bil dan 18. 2. 2021 krajši, če veš, da je tega dne sonce vzšlo ob 6.59 in zašlo ob 17.31?

- (A) 3 h 13 min (B) 2,73 h (C) 551 min (D) 3,1 h (E) 3 h 45 min

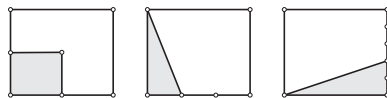
4. V knjigarno pride pošiljka 60 knjig. Med njimi so knjige za odrasle in za otroke. Nekatere imajo trde, druge pa mehke platnice. 22 knjig za odrasle ima trde platnice. Otroških knjig je skupaj 25. Knjig z mehкими platnicami pa je skupaj 20. Koliko otroških knjig ima mehke platnice?

- (A) 2 (B) 7 (C) 10 (D) 12 (E) 17

5. Daljica je razdeljena na 4 dele tako, da je dolžina drugega dela dvakratnik dolžine prvega, dolžina tretjega trikratnik dolžine prvega in dolžina četrtega dvakratnik dolžine drugega. Razdalja med središčem prvega in drugega dela je 3 cm. Kolikšna je dolžina celotne daljice?

- (A) 10 cm (B) 12 cm (C) 16 cm (D) 20 cm (E) 24 cm

6. Anže, Bor in Cene od enakih pravokotnikov odrežejo vsak en pobarvan lik, kot kaže slika. Anže odreže pravokotnik, pred tem pa razdeli stranici prvotnega pravokotnika na pol. Bor odreže trikotnik in pred tem dolžino pravokotnika razdeli na 3 enake dele. Tudi Cene odreže trikotnik, s tem da višino razdeli na 5 enakih delov. Komu ostane del z največjo ploščino?



- (A) Anžetu. (B) Boru.
(C) Cenetu. (D) Vsem trem ostane enako.
(E) Odvisno je od dolžin stranic pravokotnika.

7. Kolikšen kot oklepata urni in minutni kazalec, ko je ura 9.40 (določi manjšega izmed kotov)?

- (A) 30° (B) 50° (C) 40° (D) 240° (E) 120°

8. Kecek je našel obroč. Sedaj bi rad več o svoji najdbi povedal Mojci. Ugotovil je, da se obroč na 13,5 m dolgi poti zavrti 15-krat. Kako dolgo pot bo naredil obroč, ko se bo zavrtel 40-krat?

- (A) 9 m (B) 25 m (C) 36 m (D) 40 m (E) 42 m

B1. Pek Mišmaš postavi na tehtnico 1,8 dag moke, doda 0,342 kg sladkorja in 100 g masla. V škatli ima 0,1 kg kakava. Polovico kakava iz škatle strese na tehtnico. Na koncu nasuje še 3050 čokoladnih mrvic, od katerih vsaka tehta 0,2 g. Koliko dag pokaže tehtnica?

B2. Število je sestavljeno iz nizov števil 134. Število, sestavljeno iz treh nizov, je tako enako 134134134.

- Koliko nizov vsebuje najmanjše tako število, deljivo z 9? Utemelji.
- Najmanj koliko nizov bi morali dodati številu, sestavljenemu iz 2021 nizov, da bo nastalo število, deljivo z 9? Utemelji.
- Poišči 117. števko tako sestavljenega števila.

7. razred

1. Kecek je našel obroč. Sedaj bi rad več o svoji najdbi povedal Mojci. Ugotovil je, da se obroč na $13\frac{1}{2}$ m dolgi poti zavrti 15-krat. Kako dolgo pot bo naredil obroč, ko se bo zavrtel 40-krat?

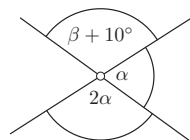
- (A) 9 m (B) 25 m (C) 36 m (D) 40 m (E) 42 m

2. Miha je pojedel $\frac{1}{3}$ čokolade, Tina polovico ostanka in nato je Tomi pojedel še $\frac{2}{5}$ preostanka. Koliko odstotkov čokolade je ostalo?

- (A) 20 % (B) 50 % (C) 60 % (D) 80 % (E) 21 %

3. Koliko je vsota kotov α in β z narisane slike?

- (A) 90° (B) 130° (C) 170° (D) 180° (E) 240°



4. Anže, Aljaž in Andrej se trikrat odpravijo na ribolov. Anže vedno ujame pol manj rib kot Aljaž, Andrej pa vedno ujame 3 ribe več kot Anže. Na prvem ribolovu je Anže ujel 13 rib, na drugem ribolovu je Aljaž ujel 16 rib, na tretjem ribolovu je Andrej ujel 21 rib. Koliko rib je na vseh treh ribolovih skupaj ujel Anže?

- (A) 18 (B) 36 (C) 39 (D) 48 (E) 50

5. Ploščini pravokotnika in kvadrata sta enaki. Dolžina pravokotnika je 4-krat tolikšna kot dolžina kvadrata. Kolikšen del obsega kvadrata predstavlja obseg pravokotnika?



- (A) $\frac{17}{8}$ (B) $\frac{16}{7}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2 (E) $\frac{7}{16}$

6. Koliko 7-mestnih števil, deljivih s 6, lahko sestavimo s števki 0 in 1?

- (A) 10 (B) 11 (C) 16 (D) 21 (E) 33

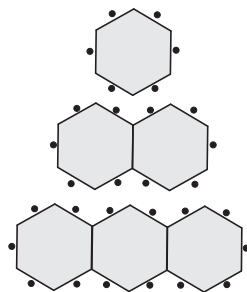
7. Katere število x reši enačbo?

$$\frac{3}{41} \cdot \left(4 - \frac{2}{7} : x\right) + 2\frac{2}{5} = 2\frac{24}{35}$$

- (A) $\frac{1}{7}$ (B) 1 (C) 3 (D) 7 (E) 2021

8. V prostoru v obliki trikotnika postavljamo omizja iz šestkotnih miz, kot kaže slika. Vsako omizje ima eno mizo več od predhodnega. Sedišča so označena s pikami. Najmanj koliko miz moramo postaviti za 126 gostov?

- (A) 30 (B) 29 (C) 28 (D) 26 (E) 23

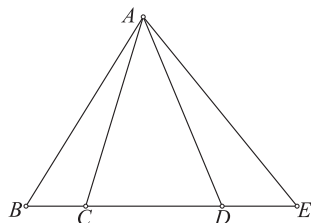


9. Prvi teden v mesecu v šoli manjka 10 % učencev. Drugi teden se vrne v šolo 10 % manjkajočih iz prvega tedna, doma pa ostane 10 % učencev, ki so prvi teden bili v šoli. Kolikšen odstotek vseh učencev je drugi teden prisotnih v šoli?

- (A) 18 % (B) 80 % (C) 82 % (D) 91 % (E) 100 %

10. Obseg trikotnika ABC je 24 cm. Obseg trikotnika ACD je 32 cm in obseg trikotnika ADE je 35 cm. Kolikšen je obseg trikotnika ABE , če je stranica AC dolga 10 cm, stranica AD pa 14 cm?

- (A) 41 cm (B) 42 cm (C) 43 cm (D) 44 cm (E) 45 cm



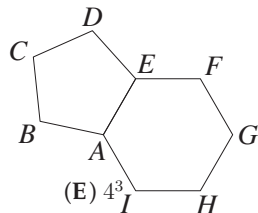
B1. Premici t in u se sekata v točki P pod kotom $20^\circ 20'$. Na premici t izberi točko R , različno od točke P . Prezrcaš točko R čez premico u in jo označi z R' . Točko R' prezrcaš čez točko P in dobljeno točko označi z R'' . Izračunaj velikosti notranjih kotov trikotnika $RR'R''$.

B2. Miha se je od doma odpravil k babici. Ko je prehodil $\frac{2}{5}$ poti, je ugotovil, da je izgubil ključe, zato se je odpravil nazaj proti domu. Ko je v smeri proti domu prehodil 1,4 km, je ključe našel. Če bi se tedaj odpravil v smeri babice, bi moral prehoditi 800 m več kot tri četrtine poti od doma do babice. Izračunaj, koliko je dolga pot od Mihovega doma do babice.

8. razred

1. Lik $ABCDE$ je pravilen petkotnik. Lik $AEFGHI$ je pravilen šestkotnik. Kolikšna je velikost kota CEI ?

- (A) 102° (B) 108° (C) 112° (D) 120° (E) 126°



2. Kolikšna je vrednost izraza $\sqrt{\sqrt{4^2 + 4^4 + 4^5}}$?

- (A) 4 (B) 6 (C) 36 (D) 2^4 (E) 4^3

3. Kolikšna je vrednost izraza $\frac{4^{2021} - 4^{2020}}{2^{2021} + 2^{2020}}$?

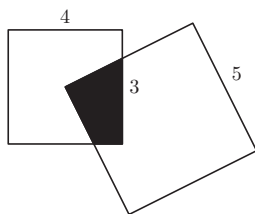
- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 2^{2020} (E) 4^{2020}

4. V množici realnih števil je definirana operacija $x \oplus y = x + y + 1$. kateri izraz je enak $(x \oplus 1) \oplus y$?

- (A) $x + y$ (B) $x + y + 1$ (C) $x + y + 2$ (D) $x + y + 3$ (E) $x + y + 4$

5. Kvadrata, katerih stranici sta dolgi 4 cm in 5 cm, se prekrivata tako, da je eno oglišče večjega kvadrata v težišču manjšega kvadrata. Kolikšna je ploščina osenčenega štirikotnika, če je njegova najdaljša stranica dolga 3 cm?

- (A) $3,6 \text{ cm}^2$ (B) 4 cm^2 (C) $4,2 \text{ cm}^2$ (D) $6,25 \text{ cm}^2$ (E) 12 cm^2



6. Za kateri x ulomek $\frac{5}{5x^3 - 5 - 2}$ nima pomena?

- (A) 5 (B) $-\frac{1}{5}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{5}$ (E) -5

7. Bazen s prostornino 400 m^3 napolnijo 4 enake cevi v petnajstih urah. Prazen bazen so začeli polniti ob 4.00, po treh urah so eno cev zaprli. Kdaj bo bazen poln?

- (A) Ob 18.45. (B) Ob 19.00. (C) Ob 20.00. (D) Ob 22.00. (E) Ob 23.00.

8. Števec drugega ulomka je za 2 % večji od števca prvega ulomka. Imenoalec drugega ulomka je za 40 % manjši od imenovalca prvega ulomka. Za koliko odstotkov je drugi ulomek večji od prvega, če oba predstavljata pozitivni števili?

- (A) 100 % (B) 80 % (C) 70 % (D) 42 % (E) 20 %

B1. Izračunaj vrednost številskega izraza.

$$\frac{14}{\sqrt{3} - 3\sqrt{5}} + \frac{28}{\sqrt{3} + 3\sqrt{5}} - \frac{6}{\sqrt{3}}$$

B2. Dora je opazovala nastop 22-članskega moškega pevskega zbora. Opazila je, da je imel vsak izmed pevcev vsaj eno od značilnosti: bil je plešast, nosil je očala ali je imel brado. Pevcev z brado je bilo toliko kot plešastih. Plešastih z očali in brez brade je bilo toliko kot tistih, ki so imeli samo brado. Pet pevcev je bilo plešastih in je imelo brado. Dva pevca sta imela vse tri lastnosti, samo eden pa je imel brado in očala in ni bil plešast. Preštela je tudi še, da je imelo očala dvakrat toliko pevcev, kot je bilo plešastih.

- Koliko plešastih pevcev je nosilo očala?
- Poišči še število pevcev, ki so imeli očala, niso pa imeli brade in niso bili plešasti.

B3. Velikost kota pri vrhu enakokrakega trikotnika ABC je enaka $\frac{4}{7}$ velikosti kota ob osnovnici. Načrtamo simetralo kota CBA tega trikotnika, ki seka stranico AC v točki D . Načrtamo še pravokotnico na simetralo skozi točko D . Pravokotnica seka nosilko osnovnice v točki F . Nariši sliko. Izračunaj velikost kota med simetralo kota BFD in višino na osnovnico trikotnika ABC .

9. razred

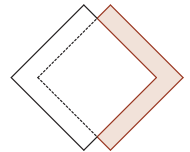
1. Učitelj je na tablo zapisal niz ocen, urejenih po velikosti, pri čemer jih je nekaj izpustil. Zapisal je: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, x , x , x , x , y , y , 5, 5. Kolikšen je modus ocen, če sta x in y različni oceni ter je mediana podatkov enaka modusu, ki je en sam?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
(E) ni mogoče določiti

2. Zlatokop naj bi za 1 leto dela dobil 12 000 EUR in kepo zlata. Delavec je prenehal z delom po 7 mesecih. Dobil je 5 000 EUR in kepo zlata. Kolikšna je vrednost kepe zlata?

- (A) 1 200 EUR (B) 1 400 EUR (C) 2 600 EUR (D) 4 800 EUR (E) 7 000 EUR

3. Nika je imela 2 enako velika kvadrata, belega in sivega. Beli kvadrat je postavila na sivega, da je nastal simetričen lik. Ploščina sivega dela nastalega lika je 48 cm^2 in predstavlja četrtno ploščine nastalega simetričnega lika. Koliko je dolga stranica belega kvadrata?



- (A) 12 cm (B) $6\sqrt{2}$ cm (C) 8 cm (D) $4\sqrt{6}$ cm (E) $4\sqrt{3}$ cm

4. Izmed praštevil, ki so manjša od 15, na slepo izberemo dve in ju zmnožimo. Kolikšna je verjetnost, da je zmnožek teh dveh praštevil sodo število, ki ni deljivo s 3?

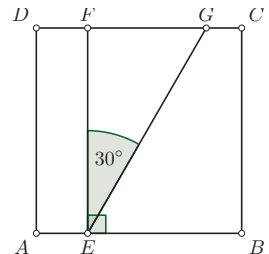
- (A) $\frac{4}{15}$ (B) $\frac{5}{6}$ (C) $\frac{7}{6}$ (D) $\frac{7}{30}$ (E) 0

5. Dan je kvadrat $ABCD$. Na stranici AB je točka E , da velja $|AE| : |EB| = 1 : 3$. Na stranici CD sta točki F in G , kakor je razvidno s slike. Kolikšno je razmerje med dolžinama daljic DF in FG ?

- (A) $\sqrt{3} : 4$ (B) 1 : 1 (C) 1 : 2 (D) $1 : 2\sqrt{2}$ (E) $\sqrt{2} : \sqrt{3}$

6. Kolikšna je vrednost izraza $a^{2021} + \frac{1}{a^{2021}}$, če je $a^2 + 2a + 1 = 0$?

- (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

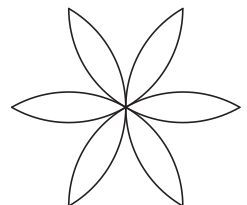


7. $n!$ je število, ki predstavlja zmnožek vseh naravnih števil od 1 do n . Npr. $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Katera je največja možna vsota števil x in y , da bo vrednost ulomka $\frac{20!}{4^x 9^y}$ naravno število?

- (A) 2 (B) 8 (C) 13 (D) 16 (E) 24

8. Koliko je vsota obsegov vseh 6 skladnih lističev na sliki, če je vsota ploščin vseh lističev $p = 16(2\pi - 3\sqrt{3}) \text{ cm}^2$?

- (A) 8π cm (B) 16π cm (C) 24π cm (D) 12π cm (E) 15π cm



B1. Izračunaj vrednost izraza:

$$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^{-2} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{4} \right)^{-1}} + 2^3 \right) + 3 \left(\sqrt{2^2 \cdot 0,1^{-2}} - \sqrt{10 - 10^0} \right) \right) \left(\sqrt[3]{8\sqrt{36}} + 2^3 \right) + 1^0$$

B2. Dolžina stranice AB pravokotnika $ABCD$ je trikrat tolikšna kot dolžina stranice AD . Točka E razpolavlja stranico AD , F pa deli DC v razmerju $|DF| : |FC| = 2 : 1$. Daljici AF in EB se sekata v točki S . Izračunaj dolžini stranic pravokotnika, če je ploščina trikotnika ASE enaka 27 cm^2 . Nariši skico.

B3. Za izvedbo poskusa Izločanje molekul DNK potrebujemo 200 g ohlajenega 60-odstotnega etanola. Učiteljica ima na razpolago 70 g destilirane vode ter 96-odstotni in 48-odstotni etanol. Koliko gramov 96-odstotnega etanola in koliko gramov 48-odstotnega etanola bo učiteljica porabila za izvedbo poskusa, če bo porabila vso destilirano vodo?

59. fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje

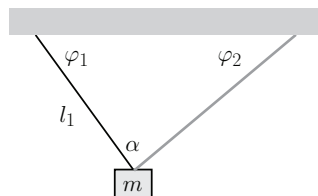
Skupina I

1. Na avtocesti je nekaj 5 km dolgih odsekov, na katerih je hitrost omejena na 100 km/h. Na teh odsekih poteka sekcijsko merjenje hitrosti vozil, kar pomeni, da merilne naprave merijo čas, ki ga potrebuje vozilo, da prevozi celoten odsek.
- a) V kolikšnem času vozilo prevozi tak odsek, če vozi natanko 100 km/h?

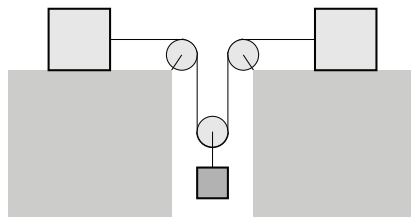
V nadaljevanju zanemari čas, ki ga vozila potrebujejo za zaviranje in pospeševanje.

- b) Zaradi del na cesti je na delu takega odseka hitrost omejena na 60 km/h. Neko vozilo celoten odsek prevozi z največjo dovoljeno hitrostjo na posameznem delu odseka. Celoten odsek prevozi v 3,20 min. Kako dolg je del odseka ceste, kjer potekajo dela na cesti?
- c) Na drugem takem odseku je predor, v katerem zaradi prometne nesreče velja omejitev hitrosti. Prvo vozilo, ki vozi povsod z največjo dovoljeno hitrostjo, prevozi celoten odsek v 3,30 min. Drugo vozilo, ki v predoru vozi za 25 % prehitro in zunaj predora z največjo dovoljeno hitrostjo, prevozi celoten odsek v 3,06 min. Kako dolg je predor in kolikšna je omejitev hitrosti v predoru?
2. Utež z maso 200 g visi na vrvi z dolžino $l_1 = 10 \text{ cm}$ in elastiki s prožnostnim koeficientom 200 N/m, ki sta pritrjeni na strop, kot kaže slika.

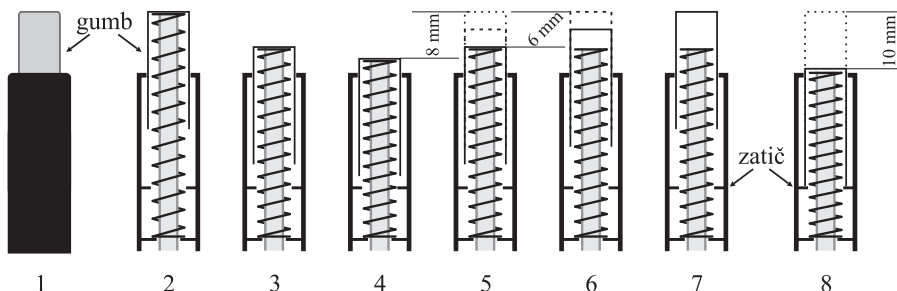
- a) V ravnovesju sta kota, ki ju vrvica in elastika oklepata s stropom, enaka $\varphi_1 = \varphi_2 = 30^\circ$. Kolikšen je raztezek elastike in kolikšna je njena neraztegnjena dolžina?
- b) Kolikšno maso moramo obesiti namesto uteži, da bo kot α med vrvico in elastiko točno 90° ?
Namig: Razdaljo med pritrdiščema izračunaj s podatki iz vprašanja a); pri vprašanju b) si pomagaj s tem, da vrvica, elastika in daljica med pritrdiščema tvorijo pravokotni trikotnik.



3. V vodoravna tla je izvrtan navpični jašek. V jašku je utež z maso $0,5\text{ kg}$, ki je preko sistema lahkih škripcov z lahko neraztegljivo vrstico povezana z dvema enakima kladama z masama po $2,0\text{ kg}$ na tleh zunaj jaška, kot kaže slika. Koeficient trenja med tlemi in kladama je enak za obe kladi.



- Kolikšen je koeficient trenja med tlemi in kladama, če se kladi gibljeta enakomerno z nasprotno enakima hitrostma?
 - S kolikšnim pospeškom se gibljeta kladi, če namesto uteži z maso $0,5\text{ kg}$ na spodnji škripec obesimo utež z maso $1,0\text{ kg}$?
 - Desno klado zaustavimo. Med mirovanjem desne klade se v nekem trenutku leva klada giblje s hitrostjo 1 m/s . S kolikšno hitrostjo se takrat giblje utež?
 - S kolikšnim pospeškom se med mirovanjem desne klade giblje leva klada in s kolikšnim pospeškom utež z maso $1,0\text{ kg}$?
4. Miha se igra s kemičnim svinčnikom z vzmetjo z zatičem. Elastični koeficient vzmeti je 25 N/cm , masa kemičnega svinčnika je 50 g . Da bo opis dogajanja čim bolj nazoren, imenujmo dve značilni stanji kemičnega svinčnika *vklopljeno* in *izklopljeno*. Ko je konica mince zunaj ohišja in lahko pišemo, je kemični svinčnik vklopljen, ko je minca v ohišju, je izklopljen. Med obema stanji preklapljamo z ustreznim pritiskom na gumb na zadnjem delu kemičnega svinčnika (slika 1). Slike od 2 do 7 od leve proti desni kažejo prekop iz izklopljenega v vklopljeno stanje, iste slike od desne proti levi kažejo prekop iz vklopljenega v izklopljeno stanje. Na slikah so označeni značilni skrčki vzmeti med dogajanjem: ko je kemični svinčnik izklopljen in ne pritiskamo na gumb, je vzmet nenapeta oziroma je skrček vzmeti nič (slika 2). Ko je kemični svinčnik vklopljen in ne pritiskamo na gumb, je vzmet stisnjena za $6,0\text{ mm}$ (slike 5, 6, 7). Prekop med stanjema se zgodi, ko se vzmet stisne za najmanj $8,0\text{ mm}$ (slika 4). Največji skrček vzmeti je $10,0\text{ mm}$, ker se takrat gumb nasloni na zatič, ki preprečuje, da bi se vzmet stisnila še bolj (slika 8).



Pomembno: Pri vseh vprašanih govorimo o višini kemičnega svinčnika nad podlago. Pri vseh poskusih v nadaljevanju je kemični svinčnik postavljen navpično z gumbom navzdol in s konico proti stropu (ravno obratno, kot na slikah). Zaradi te orientacije je gumb v obeh stanjih kemičnega svinčnika v skrajni legi (sliki 2 in 7). Dogovorimo se, da višino kemičnega svinčnika **vedno** merimo od podlage do spodnje ploskve gumba.

Vsa prožnostna energija kemičnega svinčnika je le prožnostna energija vzmeti.

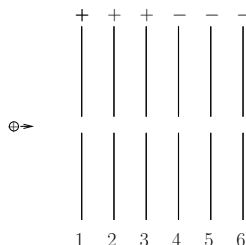
- Do katere višine se odbije izklopljen kemični svinčnik, če ga Miha spusti s take višine H , da med odbojem ostane izklopljen? Najmanj s kolikšne višine je potrebno spustiti izklopljen kemični svinčnik, da se med odbojem vklopi?
- Do kolikšne višine se odbije kemični svinčnik iz vprašanja a), če ga spustimo ravno z mejne višine za prekop?

- c) Miha kemični svinčnik z gumbom postavi na podlago in pritisne ohišje navzdol, da je gumb povsem v ohišju (kot na sliki 8) in je vzmet najbolj skrčena. Do kolikšne višine odskoči kemični svinčnik, če je bil pred pritiskom gumba ob podlago izklopljen? Do kolikšne višine pa odskoči, če je bil vklopljen?

Skupina II

1. Proton z osnovnim nabojem $+e_0$ vstopi z zanemarljivo majhno začetno hitrostjo v serijo šestih enakih vzporednih razsežnih plošč, kot kaže slika. Razdalja med zaporednimi ploščami je 1,0 cm, v sredini plošč so majhne luknjice, ki protonu omogočajo prehod skozi plošče. Smer gibanja protona je ves čas pravokotna na ravnino plošč. Ploščinska gostota naboja na prvih treh ploščah je $1,0 \mu\text{As/m}^2$, ploščinska gostota naboja na zadnjih treh ploščah pa je enako velika, a nasprotnega predznaka, kot kaže slika.

- a) Kolikšna je električna poljska jakost v prostoru med prvo in drugo ploščo?
- b) Izračunaj električno napetost med pari zaporednih plošč; med prvo in drugo, med drugo in tretjo, ... ter med peto in šesto.
- c) Kolikšna je hitrost protona, ko zapusti plošče?



2. Na vir enosmerne napetosti 60 V brez notranjega upora večemo preko stikala porabnik z uporom 5Ω . Zaporedno k porabniku večemo tudi dve različni med seboj vzporedno vezani varovalki. Varovalki vsebujeta bakreni žički z različnima dolžinama, daljša z dolžino 10 mm in krajša z dolžino 5,0 mm. Presek vsake žičke je $0,010 \text{ mm}^2$. Podatki za baker: gostota je 8920 kg/m^3 , specifična toplota je 380 J/kg K , tališče je 1080°C , povprečni specifični upor v temperaturnem intervalu od 20°C do tališča je $5,0 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$. Začetna temperatura žičk je 20°C . Stik v varovalki se prekine takoj, ko se žička začne taliti. Žički v varovalkah sta toplotno izolirani.

Stikalo vklopimo. Ker ima porabnik premajhen upor, varovalki v relativno kratkem času po vklopu pregorita.

- a) Kolikšen je tok skozi porabnik in kolikšna je napetost na varovalkah, preden pregorita?
- b) Katera varovalka pregori prva in po kolikšnem času od vklopa stikala?
- c) Kolikšno temperaturo ima žička druge varovalke v trenutku, ko prva pregori?
- d) Kolikšna je napetost na drugi varovalki, potem ko prva pregori?
3. Iz štirih enakih aluminijastih palic s presekom 10 mm^2 in dolžino 1,0 m zvarimo tog kvadraten okvir. Vkllopimo homogeno magnetno polje z gostoto 1,0 T. Magnetno polje je pravokotno na ravnino okvirja. V okvir večemo vir z gonilno napetostjo 1,0 V, ki poganja tok v takšni smeri, da ima nastalo magnetno polje nasprotno smer kot zunanje polje. Predpostavi, da ima okvir ves čas kvadratno obliko in da je magnetno polje zaradi toka po okvirju zanemarljivo v primerjavi z zunanjim poljem. Okvir je toplotno izoliran in ne izmenjuje toplote z okolico. Aluminij ima gostoto 2700 kg/m^3 , specifično toplotno 900 J/kg K , koeficient linearnega temperaturnega raztezka $2,4 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, elastični modul $E = 70 \text{ GPa}$ in specifični upor $2,7 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$.
- a) Kolikšna je magnetna sila na posamezno stranico okvirja?
- b) Za koliko se eno sekundo po vključitvi okvir segreje zaradi električnega toka?
- c) Kolikšna je tedaj relativna sprememba dolžine ($\Delta l/l$) posamezne stranice?

4. Pokončno kovinsko valjasto posodo, v kateri je zrak, na vrhu zapira premični bat. Skupna masa posode, bata in zraka je 1,0 kg. Posodo potapljamo v jezeru. Ko je posoda tik pod gladino, je prostornina zraka v posodi 1,5 litra, zračni tlak v posodi je 98 kPa in je razdalja od dna jezera do dna posode natančno 10 m. Pri računanju vzgona zanemari prostornino sten posode in bata.

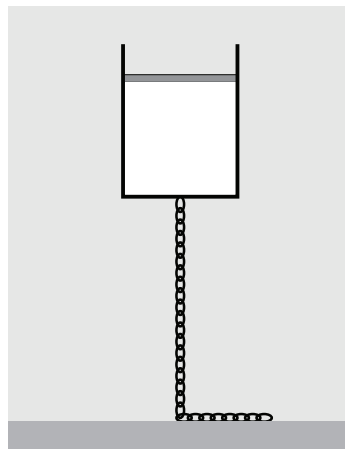
a) Kolikšna je in kam kaže vsota sil na posodo tik pod gladino?

b) Kolikšna je in kam kaže vsota sil na posodo, ko je posoda tik nad dnem jezera? Ali obstaja globina, na kateri je vsota sil enaka nič? Svoj odgovor utemelji s kratko povedjo.

c) Na dno posode pričvrstimo verigo z dolžino 10 m in maso 1,0 kg, tako da veriga sega ravno do dna, ko je posoda tik pod gladino. Tik pod gladino je zdaj v posodi 2,2 litra zraka in tlak 98 kPa. Kolikšna je in kam kaže vsota sil na posodo, ko je tik nad dnem jezera?

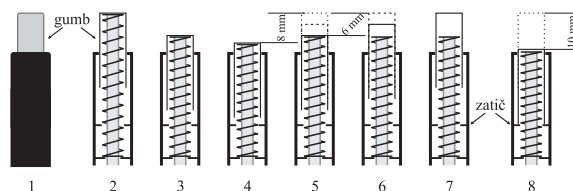
Vzgon na verigo zanemari.

d) V primeru c) poišči globine, v katerih je vsota sil na posodo enaka nič.



Skupina III

1. Miha se igra s kemičnim svinčnikom z vzmetjo z zatičem. Elastični koeficient vzmeti je 25 N/cm, masa kemičnega svinčnika je 50 g. Da bo opis dogajanja čim bolj nazoren, imenujmo dve značilni stanji kemičnega svinčnika *vklopljeno* in *izklopljeno*. Ko je konica mince zunaj ohišja in lahko pišemo, je kemični svinčnik vklopljen, ko je minca v ohišju, je izklopljen. Med obema stanji preklapljam z ustreznim pritiskom na gumb na zadnjem delu kemičnega svinčnika (slika 1). Slike od 2 do 7 od leve proti desni kažejo preklop iz izklopljenega v vklopljeno stanje, iste slike od desne proti levi kažejo preklop iz vklopljenega v izklopljeno stanje. Na slikah so označeni značilni skrčki vzmeti med dogajanjem: ko je kemični svinčnik izklopljen in ne pritiskamo na gumb, je vzmet nenapeta oziroma je skrček vzmeti nič (slika 2). Ko je kemični svinčnik vklopljen in ne pritiskamo na gumb, je vzmet stisnjena za 6,0 mm (slike 5, 6, 7). Preklop med stanjema se zgodi, ko se vzmet stisne za najmanj 8,0 mm (slika 4). Največji skrček vzmeti je 10,0 mm, ker se takrat gumb nasloni na zatič, ki preprečuje, da bi se vzmet stisnila še bolj (slika 8).



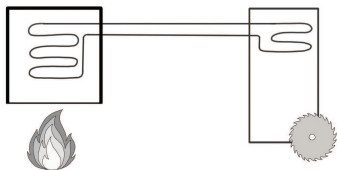
Pomembno: Pri vseh vprašanih govorimo o višini kemičnega svinčnika nad podlago. Pri vseh poskusih v nadaljevanju je kemični svinčnik postavljen navpično z gumbom navzdol in s konico proti stropu (ravno obratno, kot na slikah). Zaradi te orientacije je gumb v obeh stanjih kemičnega svinčnika v skrajni legi (sliki 2 in 7). Dogovorimo se, da višino kemičnega svinčnika **vedno** merimo od podlage do spodnje ploskve gumba.

Vsa prožnostna energija kemičnega svinčnika je le prožnostna energija vzmeti.

- a) Do katere višine se odbije izklopljen kemični svinčnik, če ga Miha spusti s take višine H , da med odbojem ostane izklopljen? Najmanj s kolikšne višine je potrebno spustiti izklopljen kemični svinčnik, da se med odbojem vklopi?

- b) Do kolikšne višine se odbije kemični svinčnik iz vprašanja a), če ga spustimo ravno z mejne višine za preklop?
- c) Kolikšna je maksimalna višina, ki jo lahko doseže kemični svinčnik po odboju? S kolikšne najmanjše višine mora Miha spustiti kemični svinčnik, da po odboju doseže maksimalno višino? Naj bo kemični svinčnik, preden ga spusti, vklopljen ali izklopljen?
2. Na nastavljen vir enosmerne napetosti brez notranjega upora vezemo porabnik z uporom $5\ \Omega$. Zaporedno k porabniku vezemo tudi dve različni med seboj vzporedno vezani varovalki. Varovalki vsebujeta bakreni žički z različnima dolžinama, daljša z dolžino 10 mm in krajša z dolžino $5,0\text{ mm}$, polmer vsake žičke je $0,060\text{ mm}$. Tališče bakra je pri 1080°C . Povprečni specifični upor bakra je $5,0 \cdot 10^{-8}\ \Omega\text{m}$. Privzemni, da specifični upor bakra ni odvisen od temperature. Stik v varovalki se prekine takoj, ko se žička začne taliti.
- Napetost na viru je najprej nič, nato napetost enakomerno večamo dovolj počasi, da ima vsaka žička ves čas ravnovesno temperaturo. Žički v varovalkah oddajata toploto samo s sevanjem, varovalki sta dovolj daleč druga od druge, da temperatura ene ne vpliva na temperaturo druge. Zanimari toplotni tok, ki ga žički s sevanjem prejmeta iz okolice.
- a) Kolikšen je tok skozi porabnik in kolikšna je napetost na varovalkah, ko je napetost na viru $1,5\text{ V}$?
- b) Katera varovalka pregori prva in kolikšna je takrat napetost na viru?
- c) Kolikšno temperaturo ima žička druge varovalke v trenutku, ko prva pregori?
3. Iz štirih enakih aluminijastih palic s presekom 10 mm^2 in dolžino $1,0\text{ m}$ zvarimo tog kvadraten okvir. Nato vklopimo homogeno magnetno polje, ki od začetne vrednosti nič enakomerno narašča s hitrostjo $1,0\text{ T/s}$. Magnetno polje je pravokotno na ravnino okvirja. Predpostavi, da ima okvir ves čas kvadratno obliko in zanemari efekte zaradi lastne indukcije okvirja. Okvir je toplotno izoliran in ne izmenjuje toplote z okolico. Aluminij ima gostoto 2700 kg/m^3 , specifično toploto 900 J/kg K , koeficient linearnega temperaturnega raztezka $2,4 \cdot 10^{-5}\text{ K}^{-1}$, elastični modul $E = 70\text{ GPa}$ in specifični upor $2,7 \cdot 10^{-8}\ \Omega\text{m}$.

- a) Kolikšna je magnetna sila na posamezno stranico okvirja eno sekundo po vklopu polja?
- b) Za koliko se do takrat okvir segreje zaradi električnega toka?
- c) Kolikšna je takrat relativna sprememba dolžine ($\Delta l/l$) posamezne stranice okvirja?
4. Idealni (Carnotov) toplotni stroj deluje med dvema toplotnima rezervoarjema, enega predstavlja bojler, kjer delovno snov segrevamo, drugega predstavlja okolica s stalno temperaturo 27°C . Bojler ima obliko kocke s stranico 20 cm . Notranjost boilerja grejemo skozi spodnjo stranico, skozi katero v boiler teče stalni toplotni tok $5,0\text{ kW}$. Stene ostalih petih mejnih ploskev boilerja (4 stranice in strop) so iz snovi s toplotno prevodnostjo $1,0\text{ W/m K}$ in imajo debelino $1,0\text{ cm}$. Dovedena toplota stroju je razlika med toploto, ki jo dovajamo notranjosti boilerja, in toploto, ki uhaja v okolico skozi mejne ploskve boilerja. Na stroj priključimo žago in z regulacijo ventilov na stroju nastavljamo izhodno mehansko moč, ki jo prejema žaga.



- a) Kolikšen je izkoristek stroja, ko je temperatura v boilerju 100°C ? Kolikšno mehansko moč tedaj prejema žaga?
- b) Kolikšna je lahko temperatura v boilerju, da je mehanska moč, ki jo prejema žaga, 500 W ?
- c) Kolikšno največjo mehansko moč lahko prejema žaga?

Rešitve 57. tekmovanja iz matematike za Vegovo priznanje – državno tekmovanje

5. razred

A1. Polovico sestavljata dve četrtini. To pomeni, da je ena četrtina znamk enaka 10 znamkam. Iz tega sledi, da je vseh znamk 40.

A2. Od takrat, ko je Luka prišel iz šole, do takrat, ko je šel v posteljo, je minilo 8 ur in 51 minut. Če je zaspal ob 21.12 in je spal 8 ur in 51 minut, se je zbudil ob 6.03.

A3. Obseg celotnega lika je sestavljen iz 18 stranic posameznega kvadrata. Če celoten obseg lika, to je 54 cm, delimo z 18, dobimo dolžino stranice enega kvadrata, ki je 3 cm. Ploščina posameznega kvadrata je 9 cm^2 . Celoten lik sestavlja 10 kvadratov, zato je njegova ploščina 90 cm^2 .

A4. Prvo premico Jaka nariše tako, da ni vzporedna danim premicam in dobi 4 presečišča. Drugo premico nariše tako, da ni vzporedna nobeni premici in ne gre skozi nobeno že narisano presečišče. Dobi novih 5 presečišč. Po enakem postopku nariše tretjo premico in pridobi 6 presečišč ter četrto premico, ki mu da novih 7 presečišč. Vseh presečišč skupaj je 22.

A5. Če postavimo eno mizo na drugo, ugotovimo, da je višina obeh miz skupaj $170 + 130 = 300 \text{ cm}$. Torej je višina ene mize enaka 150 cm.

A6. V prvem trikotniku v zaporedju so $1 + 2 = 3$ zeleni kvadrati. V drugem trikotniku je $1 + 2 + 3 = 6$ zelenih kvadratkov. V tretjem trikotniku je $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ zelenih kvadratkov. Sklepamo, da je v desetem trikotniku $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 66$ zelenih kvadratkov.

A7. Če ne štejemo krav, je na pašniku 12 živali, kar pomeni, da je na pašniku skupaj 12 ovc in koz. Podobno velja, da je na pašniku skupaj 22 krav in koz ter 26 krav in ovc. Če vse skupaj seštejemo, dobimo $12 + 22 + 26 = 60$ živali, pri čemer smo vsako žival šteli dvakrat. Zato je skupno število živali na pašniku $60 : 2 = 30$.

A8. Preverimo posamezne možnosti. Recimo, da se je mesec maj začel s četrtkom. Tedaj so četrтки 1., 8., 15., 22. in 29. maj, od tega sta le dva datuma soda. Naslednja možnost so četrтки 2., 9., 16., 23. in 30. maj. V tem primeru so trije datumi sodi. Tretja možnost so četrтки 3., 10., 17., 24. in 31. maj, pri čemer sta le dva datuma soda. Pri vseh ostalih možnostih dobimo le štiri četrťke v mesecu, torej dva soda in dva liha. Edina izmed naštetih je druga možnost. Če je 30. maj četrťek, je 29. maj sredo.

B1.

$$\begin{aligned} 1813 : 37 \cdot 3 + (5 + 5 \cdot 2) \cdot 2^3 - 250 : 5 : 5 &= \\ = 49 \cdot 3 + (5 + 10) \cdot 8 - 50 : 5 &= \\ = 147 + 15 \cdot 8 - 10 &= \\ = 147 + 120 - 10 &= \\ = 257 \end{aligned}$$

B2. Od zbranega zneska 2200 EUR odštejemo prispevek mesarstva 150 EUR, dobimo 2050. Vaščani in predsednik društva so zbrali petino tega zneska, torej $2050 : 5 = 410 \text{ EUR}$. Ostalo je prispevala zavarovalnica: $2050 - 410 = 1640 \text{ EUR}$. Ker je predsednik društva daroval 10 EUR, so vaščani zbrali skupaj 400 EUR, kar je 20 prispevkov po 20 EUR.

6. razred

A1. Število 20200202 ni deljivo s 5, saj zadnja številka ni 0 ali 5. Ni deljivo niti s 3 niti z 9, saj je vsota števk 8. Dano število ni deljivo niti s 4, saj njegov dvomestni konec ni deljiv s 4. Torej je deljivo z 11.

A2. Če razliko MCMXL – MCDXCIX zapišemo z desetiški številki, dobimo $1940 - 1499 = 441$, ki je naslednik števila 440, ki ga z rimsko številko zapišemo CDXL.

A3. Sonce je vzšlo 51 min kasneje in zašlo 2 h in 22 min prej. Torej je dan krajši za 2 h 73 min, kar je 3 h 13 min.

A4. Med 60 knjigami je 25 otroških in 35 knjig za odrasle. Med 35 knjigami za odrasle je 22 takih, ki imajo trde platnice, in 13 knjig z mehki platnicami. Ker je vseh knjig z mehki platnicami 20 in od tega 13 za odrasle, je torej 7 knjig z mehki platnicami za otroke.

A5. Označimo z a dolžino prvega dela. Tedaj je drugi del dolg $2 \cdot a$, tretji $3 \cdot a$ in četrti $2 \cdot 2 \cdot a = 4 \cdot a$. Skupna dolžina daljice je $10 \cdot a$. Razdalja med središčem prvega in središčem drugega dela je $1,5 \cdot a = 3$ cm. Sledi $a = 2$ cm in zato je dolžina daljice 20 cm.

A6. Anže je odrezal četrtno, Bor šestino, Cene pa petino pravokotnika. Bor je odrezal najmanj, zato mu ostane največji del.

A7. Urni kazalec opiše v 1 uri kot $360^\circ : 12 = 30^\circ$. Ker je 40 minut enako $\frac{2}{3}$ ure, pomeni, da urni kazalec v 40 minutah opiše kot $\frac{2}{3}$ od $30^\circ = 20^\circ$. Ob 9.40 kaže minutni kazalec proti številu 8, urni pa v smer, ki s smerjo, ki kaže proti številu 9, oklepa kot 20° . Smeri, ki kažeta proti številoma 8 in 9, oklepata kot 30° , zato kazalca oklepata kot $30^\circ + 20^\circ = 50^\circ$.

A8. Ko se obroč zavrti enkrat, naredi $13,5 : 15 = 0,9$ m dolgo pot. Če se bo zavrtel 40-krat, pa bo naredil $40 \cdot 0,9 = 36$ m dolgo pot.

B1.

$$\begin{aligned} 1,8 \text{ dag} + 0,342 \text{ kg} + 100 \text{ g} + \frac{1}{2} \text{ od } 0,1 \text{ kg} + 3050 \cdot 0,2 \text{ g} &= \\ = 18 \text{ g} + 342 \text{ g} + 100 \text{ g} + \frac{1}{2} \text{ od } 100 \text{ g} + 610 \text{ g} &= \\ = 18 \text{ g} + 342 \text{ g} + 100 \text{ g} + 50 \text{ g} + 610 \text{ g} &= \\ = 1120 \text{ g} &= \\ = 112 \text{ dag} \end{aligned}$$

B2.

- Število je deljivo s številom 9, če je vsota njegovih števk deljiva z 9. Vsota števk enega niza je $1 + 3 + 4 = 8$. Najmanjši večkratnik števila 8, ki je deljiv z 9 je 72. Torej je najmanjše število, ki ga iščemo, sestavljeno iz 9 nizov.
- Število 2021 ni deljivo z 9, saj je vsota števk enaka 5. Iščemo prvo večje število, ki je deljivo z 9. To je 2025. Dodati moramo 4 nize.
- Niz je sestavljen iz treh števk. Ker je število 117 deljivo s 3, je na 117. mestu ravno zadnja številka iz niza, torej 4.

7. razred

A1. Ko se obroč zavrti enkrat, naredi $13\frac{1}{2} : 15 = \frac{9}{10}$ m dolgo pot. Če se bo zavrtel 40-krat, pa bo naredil $40 \cdot \frac{9}{10} = 36$ m dolgo pot.

A2. Ko je Miha pojedel $\frac{1}{3}$ čokolade, sta ostali $\frac{2}{3}$ čokolade. Tina je pojedla polovico ostanka, kar pomeni, da je ostala $\frac{1}{2}$ od $\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ čokolade. Tomi je pojedel še $\frac{2}{5}$ ostanka čokolade, kar pomeni, da so ostale $\frac{3}{5}$ od $\frac{1}{3}$ čokolade, kar je $\frac{1}{5}$ čokolade oziroma 20 %.

A3. Kota α in $2 \cdot \alpha$ sta skupaj velika 180° , kar pomeni, da je kot $\alpha = 60^\circ$. Tudi kota α in $\beta + 10^\circ$ sta skupaj velika 180° . Ker je $\alpha = 60^\circ$, je $\beta + 10^\circ = 2 \cdot \alpha = 120^\circ$, oziroma $\beta = 110^\circ$. Sledi $\alpha + \beta = 60^\circ + 110^\circ = 170^\circ$.

A4. Na prvem ribolovu je Anže ujel 13 rib. Na drugem ribolovu je Aljaž ujel 16 rib, torej jih je Anže 8, saj jih ujame pol manj. Na tretjem ribolovu je Andrej ujel 21 rib, Andrej pa 18, saj ujame 3 manj kot Andrej. Anže je skupaj ujel $13 + 8 + 18 = 39$ rib.

A5. Ker imata kvadrat in pravokotnik enaki ploščini in je dolžina pravokotnika 4-krat tolikšna kot dolžina kvadrata, je širina pravokotnika enaka četrtini dolžine kvadrata. Če dolžino kvadrata označimo z a , je obseg kvadrata $4 \cdot a$. Obseg pravokotnika je tedaj $2 \cdot 4 \cdot a + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot a = \frac{17}{2} \cdot a$. Obseg pravokotnika predstavlja $\frac{17}{2} : 4 = \frac{17}{8}$ obsega kvadrata.

A6. Če je število deljivo s 6, mora biti hkrati deljivo z 2 in s 3. Da je število deljivo z 2, mora biti števka na mestu enic soda. V danem primeru je lahko samo 0. Da bo število deljivo s 3, mora biti vsota števk deljiva s 3. To v danem primeru pomeni, da 1 nastopi v zapisu števila 3-krat ali 6-krat. Število se začne s števko 1. Možnosti so: 1000110, 1001010, 1001100, 1010010, 1010100, 1011000, 1100010, 1100100, 1101000, 1110000, 1111110, torej je 11 takih števil.

A7. Enačbo rešimo z več premisleki. Prvi seštevanec $\frac{3}{41} \cdot (4 - \frac{2}{7} : x)$ dobimo, če od vsote $2\frac{24}{35}$ odštejemo drugi seštevanec $2\frac{2}{5}$, zato je $\frac{3}{41} \cdot (4 - \frac{2}{7} : x) = \frac{2}{7}$. Drugi faktor $4 - \frac{2}{7} : x$ dobimo, če zmnožek $\frac{2}{7}$ delimo s prvim faktorjem $\frac{3}{41}$. Torej je $4 - \frac{2}{7} : x = \frac{82}{21}$. Odštevanec $\frac{2}{7} : x$ dobimo, če od zmanjševanca 4 odštejemo razliko $\frac{82}{21}$, zato je $\frac{2}{7} : x = \frac{2}{21}$. Delitelj x dobimo, če deljenec $\frac{2}{7}$ delimo s količnikom $\frac{2}{21}$. Torej je $x = 3$.

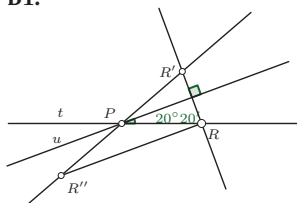
Nalogo lahko rešimo tudi tako, da za dane rešitve naredimo preizkuse.

A8. Opazimo, da v novi vrsti, pri novem omizju sedijo 4 ljudje več kot pri predhodnem. Torej je število gostov za omizji: 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30... Izračunamo, da za 126 ljudi potrebujemo 7 omizij, kar je $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ miz.

A9. Prvi teden je bilo v šoli 90 % vseh učencev. Drugi teden se je v šolo vrnilo 10 % od 10 % vseh učencev, kar je $0,1 \cdot 0,1 = 0,01 = 1$ % vseh učencev. Izmed tistih, ki so bili prvi teden v šoli, jih je doma ostalo 10 % od 90 % vseh učencev, kar pomeni, da jih je v šolo prišlo $0,9 \cdot 0,9 = 0,81 = 81$ % vseh učencev. Drugi teden je v šoli 1 % vseh učencev, ki so bili bolni prejšnji teden, in 81 % vseh učencev, ki so zdravi že oba tedna, kar je skupaj 82 % vseh učencev.

A10. Če seštejemo vse tri obsege, dobimo obseg trikotnika ABE , povečan za dve dolžini stranice AC in dve dolžini stranice AD . Zato je obseg trikotnika ABE enak $24 + 32 + 35 - 2 \cdot 10 - 2 \cdot 14 = 43$ cm.

B1.



Trikotnik $\triangle RR'P$ je enakokrak, premica u pa je simetrala kota ob vrhu. Zato je velikost kota $\angle RPR'$ enaka dvakratniku kota med premicama u in t , torej $40^\circ 40'$. Kot $\angle PR'R$ je kot ob osnovnici in je velik $\frac{180^\circ - 40^\circ 40'}{2} = 69^\circ 40'$. Kota $\angle RPR'$ in $\angle R''PR$ sta sokota, zato je velikost kota $\angle R''PR$ enaka $180^\circ - 40^\circ 40' = 139^\circ 20'$. Trikotnik $\triangle R''RP$ je enakokrak, zato je kot $\angle RR''P$ velik $\frac{180^\circ - 139^\circ 20'}{2} = 20^\circ 20'$. Tretji kot v trikotniku $RR'R''$ meri $\angle R'RR'' = 180^\circ - 69^\circ 40' - 20^\circ 20' = 90^\circ$.

B2.

Rešitev 1:

Po opravljenih $\frac{2}{5}$ poti, ko mu jo ostalo še $\frac{3}{5}$, se Miha vrne za 1400 m nazaj proti domu. Ker mu do babice v tem trenutku preostane 800 m več kot $\frac{3}{4}$ poti, to pomeni, da bi moral po opravljenih 800 m do babice prehoditi še $\frac{3}{4}$ poti. Do točke na $\frac{2}{5}$ poti, kjer se je prvič obrnil, je 600 m. Zato velja enakost: $600 \text{ m} + \frac{3}{5} \text{ poti} = \frac{3}{4} \text{ poti}$. Razširimo ulomka na skupni imenovalc $600 \text{ m} + \frac{12}{20} \text{ poti} = \frac{15}{20} \text{ poti}$. Sklepamo, da velja enakost $600 \text{ m} = \frac{3}{20} \text{ poti}$. Celotna pot je dolga 4 km.

Rešitev 2:

Ko je Miha prehodil $\frac{2}{5}$ poti, mu je ostalo $\frac{3}{5}$ poti. Potem se je vrnil, našel ključe in se odpravil v smeri babice ter prehodil 800 m. Zdaj mu je od babice ostalo še $\frac{3}{5}$ poti in $1400 \text{ m} - 800 \text{ m} = 600 \text{ m}$. Hkrati pa je od nje oddaljen $\frac{3}{4}$ poti. To pa pomeni, da je razlika $\frac{3}{4} - \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$ poti enaka 600 m. Torej je celotna pot dolga 4000 m.

8. razred

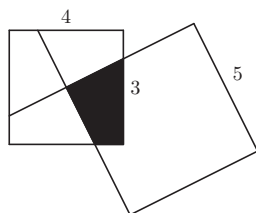
A1. Povežemo točki C in E , da dobimo prvi krak kota ter točki E in I , da dobimo drugi krak kota. Vsak notranji kot pravilnega petkotnika je velik $\frac{(5-2) \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$, vsak notranji kot pravilnega šestkotnika pa $\frac{(6-2) \cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ$. V enakokrakem trikotniku CED je kot pri oglišču E velik $\frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$. Kot pri oglišču E v štirikotniku $BAEC$ je velik $108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$. V enakokrakem trikotniku AIE je kot pri oglišču E velik $\frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$. Velikost kota CEI je tedaj $72^\circ + 30^\circ = 102^\circ$.

A2. V izrazu pod korenem lahko izpostavimo skupni faktor: $\sqrt{\sqrt{4^2 + 4^4 + 4^5}} = \sqrt{\sqrt{4^2 \cdot (1 + 4^2 + 4^3)}} = \sqrt{\sqrt{16 \cdot (1 + 16 + 64)}} = \sqrt{\sqrt{16 \cdot 81}} = \sqrt{4 \cdot 9} = 2 \cdot 3 = 6$.

A3. V števcu in imenovalcu ulomka lahko izpostavimo skupni faktor ter krajšamo ulomek: $\frac{4^{2021} - 4^{2020}}{2^{2021} + 2^{2020}} = \frac{4^{2020} \cdot (4 - 1)}{2^{2020} \cdot (2 + 1)} = \frac{4^{2020} \cdot 3}{2^{2020} \cdot 3} = \frac{4^{2020}}{2^{2020}}$. Nato uporabimo pravilo za potenciranje ulomka in dobimo $\frac{4^{2020}}{2^{2020}} = \left(\frac{4}{2}\right)^{2020} = 2^{2020}$.

A4. Iz zapisa $x \oplus y = x + y + 1$ lahko sklepamo, da operacija $\oplus$ vsoto x in y poveča za 1. Zato sklepamo, da velja $x \oplus 1 = x + 1 + 1 = x + 2$. Tedaj je $(x \oplus 1) \oplus y = (x + 2) \oplus y = x + 2 + y + 1 = x + y + 3$.

A5. Poljubni pravokotnici, ki se sekata v težišču kvadrata, razdelita kvadrat na štiri skladne like. Večji kvadrat prekrije četrtnino manjšega kvadrata. Ker je ploščina manjšega kvadrata 16 cm^2 , je ploščina osenčenega lika 4 cm^2 .



A6. Ulomek nima pomena, če je njegov imenovalac enak 0, torej ko je $5x^3 - 5^{-2} = 0$. Enačbo preuredimo $5x^3 = \frac{1}{25}$ in dobimo $x^3 = \frac{1}{125}$. Rešitev te enačbe je $x = \frac{1}{5}$.

A7. Po treh urah je napolnjena ena petina bazena, kar pomeni, da je potrebno napolniti še 320 m^3 vode. Štiri cevi bi to količino polnile 12 ur, ena cev pa bi jo polnila 48 ur. Tri cevi jo polnijo 16 ur. Ker so bazen začeli polniti ob štirih zjutraj, se je napolnil 19 ur kasneje, torej ob 23.00.

A8. Naj bo $\frac{x}{y}$ prvi ulomek. Tedaj je drugi $\frac{1,02x}{0,6y} = 1,7\frac{x}{y}$, kar pomeni, da je drugi ulomek za 70 % večji od prvega.

B1. Vrednost številskega izraza izračunamo tako, da imenovalce ulomkov racionaliziramo. Pri prvih dveh ulomkih dobimo enaka imenovalca.

$$\frac{14}{\sqrt{3}-3\sqrt{5}} = \frac{14 \cdot (\sqrt{3}+3\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-3\sqrt{5})(\sqrt{3}+3\sqrt{5})} = \frac{14\sqrt{3}+42\sqrt{5}}{3-9 \cdot 5} = \frac{14\sqrt{3}+42\sqrt{5}}{-42},$$

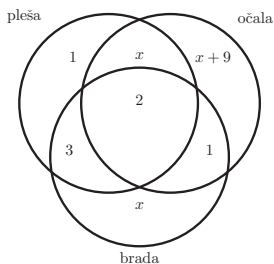
$$\frac{28}{\sqrt{3}-3\sqrt{5}} = \frac{28 \cdot (\sqrt{3}-3\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-3\sqrt{5})(\sqrt{3}+3\sqrt{5})} = \frac{28\sqrt{3}-84\sqrt{5}}{3-9 \cdot 5} = \frac{28\sqrt{3}-84\sqrt{5}}{-42},$$

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

Ko izraze seštejemo in uredimo, dobimo

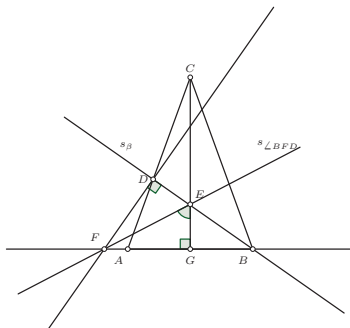
$$\frac{14\sqrt{3}+42\sqrt{5}+28\sqrt{3}-84\sqrt{5}}{-42} - 2\sqrt{3} = \frac{42\sqrt{3}-42\sqrt{5}}{-42} - 2\sqrt{3} = \frac{42(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{-42} - 2\sqrt{3} = -(\sqrt{3}-\sqrt{5}) - 2\sqrt{3} = -\sqrt{3} + \sqrt{5} - 2\sqrt{3} = -3\sqrt{3} + \sqrt{5}.$$

B2.



Število pevcev z danimi značilnostmi predstavimo s pomočjo Venovega diagrama. V preseku vseh množic sta dva pevca, tako ostanejo trije, ki imajo brado in plešo, ne pa očal. Eden ima brado in očala in ni plešast. x označimo število plešastih z očali in brez brade, to število pa se pojavi še med tistimi, ki imajo od značilnosti samo brado. Če hočemo, da bo število bradatih in plešastih pevcev enako, ima eden samo plešo (brez očal in brade). Skupno število vseh plešastih pevcev je $x+6$, torej je takih z očali $2x+12$. Izračunamo še število pevcev z očali, ki nimajo niti brade niti pleše, takih je $x+9$. Vsota vseh števil na diagramu mora biti 22, kar je enako izrazu $3x+16$ in zato vidimo, da je $x=2$. Tako imamo skupaj 4 plešaste pevce z očali in 11 tistih, ki imajo samo očala.

B3.



Vsota kotov v enakokrakem trikotniku $\triangle ABC$ je $\alpha + \alpha + \frac{4}{7}\alpha = 180^\circ$. Torej so velikosti kotov $\alpha = \beta = 70^\circ$ in $\gamma = 40^\circ$. Trikotnik $\triangle FBD$ je pravokoten, zato je velikost kota $\angle BFD = 180^\circ - 90^\circ - \frac{70^\circ}{2} = 55^\circ$. Naj bo E presečišče simetrale kota $\angle BFD$ in višine trikotnika $\triangle ABC$, G pa nožišče višine na osnovnico. Trikotnik $\triangle EFG$ je pravokoten. Torej je kot med simetralo kota $\angle BFD$ in višino na osnovnico velik: $\angle FEG = 180^\circ - 90^\circ - \frac{55^\circ}{2} = 62^\circ 30'$.

9. razred

A1. Ocene so urejene po velikosti, zato je x lahko 2, 3 ali 4. Če bi bil x ocena 3 ali 4, bi bila modusa dva (1 in x). Torej je $x = 2$. Modus tega niza je 2 in tudi mediana je 2.

A2. Vrednost kepe zlata v evrih označimo z x . Če bi delavec delal celo leto, bi dobil za vsak mesec 1000 EUR in $\frac{x}{12}$ EUR. Ker je odnehal po 7 mesecih, dobi $7 \cdot (1000 + \frac{x}{12})$ ali $5000 + x$ evrov. Rešitev enačbe $7 \cdot (1000 + \frac{x}{12}) = 5000 + x$ je $x = 4800$ EUR.

A3. Ploščina belega kvadrata predstavlja tri četrtine celotnega lika in je enaka $3 \cdot 48 = 144 \text{ cm}^2$. Stranica tega kvadrata je dolga 12 cm.

A4. Praštevila, manjša od 15, so: 2, 3, 5, 7, 11, 13. Vseh možnih zmnožkov dveh izmed teh šestih števil je 15. Da je zmnožek sodo število, mora biti en faktor enak 2. Drugi faktor pa ne sme biti 3, saj zmnožek ne sme biti deljiv s 3. Take izbire so 4. Torej je verjetnost $\frac{4}{15}$.

A5. Dolžino stranice kvadrata označimo z a . Daljica FG je polovica stranice enakostraničnega trikotnika, saj je $\angle FGE = 60^\circ$. Dolžino stranice enakostraničnega trikotnika označimo s spremenljivko x . Tedaj velja $\frac{x\sqrt{3}}{2} = a$, zato je $\frac{x}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Sledi $|DF| : |FG| = \frac{a}{4} : \frac{a}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} : 4$.

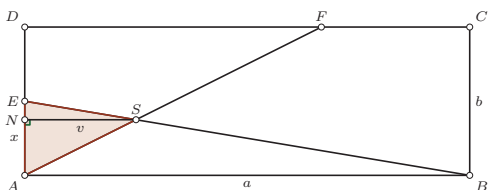
A6. Ker je $a^2 + 2a + 1 = 0$, je $(a + 1)^2 = 0$ in zato $a = -1$. Sledi $(-1)^{2021} + \frac{1}{(-1)^{2021}} = -1 - 1 = -2$.

A7. Zmnožek $20!$ razstavimo na prafaktorje $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 11 \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot 13 \cdot (2 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5) \cdot 2^4 \cdot 17 \cdot (2 \cdot 3^2) \cdot 19 \cdot (2^2 \cdot 5) = 1 \cdot 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$. Vrednost ulomka je naravno število, če je imenovalec delitelj števca, torej $2^{18} \cdot 3^8 = 4^9 \cdot 9^4$. Sledi $x + y = 13$.

A8. Ploščina lističev je sestavljena iz dvanajstih skladnih krožnih odsekov, ki pripadajo središčnemu kotu 60° . Torej je $p = 12 \left(\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2 \sqrt{3}}{4} \right)$. Iz ploščine izračunamo, da je $r = 4$ cm. Obseg lističev je sestavljen iz dvanajstih skladnih krožnih lokov, ki so dolgi šestino obsega z danim polmerom, zato je obseg $o = 12 \cdot \frac{2\pi \cdot 4}{6} = 16\pi$ cm.

B1.

$$\begin{aligned} & \left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^{-2} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{4} \right)^{-1}} + 2^3 \right) + 3 \left(\sqrt{2^2 \cdot 0,1^{-2}} - \sqrt{10 - 10^0} \right) \right) \left(\sqrt[3]{8\sqrt{36} + 2^3} + 1^0 = \right. \\ & = \left(\left(\sqrt{5} \right)^2 \left(\sqrt{4} + 8 \right) + 3 \left(\sqrt{4 \cdot 10^2} - \sqrt{10 - 1} \right) \right) (2 \cdot 6 + 8) + 1 = \\ & = \left(5 \cdot (2 + 8) + 3 \cdot (2 \cdot 10 - \sqrt{9}) \right) (12 + 8) + 1 = \\ & = (5 \cdot 10 + 3 \cdot (20 - 3)) \cdot 20 + 1 = \\ & = (50 + 3 \cdot 17) \cdot 20 + 1 = \\ & = (50 + 51) \cdot 20 + 1 = \\ & = 101 \cdot 20 + 1 = \\ & = 2020 + 1 = \\ & = 2021 \end{aligned}$$



B2.

Označimo z $a = |AB|$ in $b = |AD|$. Potem je $a = 3b$. Stranica AE trikotnika ASE je dolga $\frac{a}{2}$, višino pa označimo z v . Z x zapišimo dolžino daljice AN , kjer je N nožišče višine trikotnika ASE . Trikotnika $\triangle ANS$ in $\triangle ADF$ sta podobna, zato velja $x : v = b : 2b$. Podobna sta si tudi trikotnika $\triangle ENS$ in $\triangle EAB$ in velja $(\frac{b}{2} - x) : v = \frac{b}{2} : 3b$. Iz prve enačbe izrazimo $x = \frac{v}{2}$ in ga vstavimo v drugo. Dobimo $v = \frac{3b}{4}$. Ploščina trikotnika ASE je enaka $\frac{|AE| \cdot v}{2}$ oziroma $\frac{\frac{b}{2} \cdot \frac{3b}{4}}{2} = \frac{3b^2}{16}$. Izenačimo s 27 in dobimo dolžino $b = 12$ cm in $a = 36$ cm.

B3. Označimo z x maso 96-odstotnega etanola in zapišimo maso 48-odstotnega etanola, ki ga potrebuje učiteljica: $200 - 70 - x = 130 - x$ g. V dobljeni mešanici je delež etanola enak

$$\frac{0,96x + 0,48(130 - x)}{200} = \frac{0,96x + 62,4 - 0,48x}{200} = \frac{0,48x + 62,4}{200}.$$

Ker mora biti mešanica 60-odstotni etanol, velja $\frac{0,48x + 62,4}{200} = \frac{60}{100}$, od koder sledi $0,48x + 62,4 = 120$, od tod pa $x = 120$. Učiteljica potrebuje 120 g 96-odstotnega etanola in 10 g 48-odstotnega etanola.

Rešitve 59. fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije - državno tekmovanje

Skupina I

1. $s_0 = 5$ km, $v_0 = 100$ km/h, $v_1 = 60$ km/h, $v_2 = v_0 = 100$ km/h, $t_0 = 5,20$ min, $t_1 = 3,30$ min, $t_2 = 3,06$ min, $\eta = 1,25$.

- a) Gre za enakomerno gibanje, tako da vozilo celotno pot prevozi v času

$$t = \frac{s_0}{v_0} = 3 \text{ min}.$$

- b) Zapišemo čas, ki ga vozilo potrebuje da prevozi celoten 5 km odsek avtoceste:

$$t_0 = \frac{\Delta x}{v_1} + \frac{s_0 - \Delta x}{v_2}$$

in od tod izrazimo Δx :

$$\Delta x = \frac{t_0 - s_0/v_2}{1/v_1 - 1/v_2} = 0,5 \text{ km}.$$

- c) Najprej zapišemo čas, ki ga za celoten 5 km odsek avtoceste potrebuje vozilo, ki vozi natanko po omejitvah

$$t_1 = \frac{s_0 - x}{v_0} + \frac{x}{v}$$

in nato še celoten čas, ki ga za celoten 5 km odsek avtoceste potrebuje vozilo, ki vozi v predoru 25% prehitro:

$$t_2 = \frac{s_0 - x}{v_0} + \frac{x}{\eta v}.$$

Rešimo sistem dveh enačb z dvema neznankama in dobimo rešitev za dolžino predora

$$x = s_0 + v_0 \frac{t_1 - \eta t_2}{\eta - 1} = 1,5 \text{ km}$$

ter za omejitev hitrosti v predoru

$$v = \frac{v_0(t_1 - \eta t_2) + s_0(\eta - 1)}{\eta(t_1 - t_2)} = 75 \text{ km/h}.$$

2. $m = 200 \text{ g}$, $l_1 = 10 \text{ cm}$, $k = 200 \text{ N/m}$

a) $\varphi_1 = \varphi_2 = 30^\circ$ V tem primeru je trikotnik, ki ga tvorita vrstica in elastika enakokrak, in je dolžina raztegnjene elastike $l_2 = l_1$. Ker je $\varphi_1 = 30^\circ$, je kot med silo F_1 in težo enak 60° . Zaradi simetrije sta velikosti sil F_1 in F_2 enaki in sila F_2 s težo tvori prav tako kot 60° . Vse tri sile torej tvorijo enakostranični trikotnik, zato velja

$$F_1 = F_2 = mg.$$

Iz $F_2 = ks$ sledi za raztezek s :

$$s = \frac{F_2}{k} = \frac{mg}{k} = 0,98 \text{ cm} \approx 1,0 \text{ cm}.$$

Dolžina neraztegnjene elastike pa je

$$l_0 = l_2 - s = 9,0 \text{ cm}.$$

Do enakega rezultata seveda pridemo, če delamo s trigonometričnimi funkcijami. Enačbe za ravnovesje uteži zapišemo v vodoravni in navpični smeri:

$$F_1 \cos \varphi_1 - F_2 \cos \varphi_2 = 0, \quad F_1 \sin \varphi_1 + F_2 \sin \varphi_2 = mg. \quad (1)$$

Ker sta kota enaka, sledi $F_1 = F_2$ in, enako kot zgoraj:

$$s = \frac{F_2}{k} = \frac{mg}{2 \sin \varphi_2 k} = \frac{mg}{2 \sin 30^\circ k} = \frac{mg}{k}.$$

b) V primeru a), ko sta kota enaka 30° , lahko izračunamo, da je razmik med obesiščema, l_3 , ravno enak dvojni višini enakostraničnega trikotnika s stranico l_1 , $l_3 = 2 l_1 \sqrt{3}/2 = l_1 \sqrt{3}$. Ker je v primeru b) trikotnik pravokoten, lahko izračunamo drugo kateto (dolžino elastike) iz Pitagorovega izreka:

$$l_2 = \sqrt{l_3^2 - l_1^2} = \sqrt{2l_1^2} = l_1 \sqrt{2}.$$

Vse tri sile tvorijo pravokotni trikotnik, kot je prikazano na sliki. Trikotnik sil je podoben trikotniku, ki ga tvorita vrstica in elastika z vodoravnico. Kot med F_1 in težo je enak φ_2 . Velja:

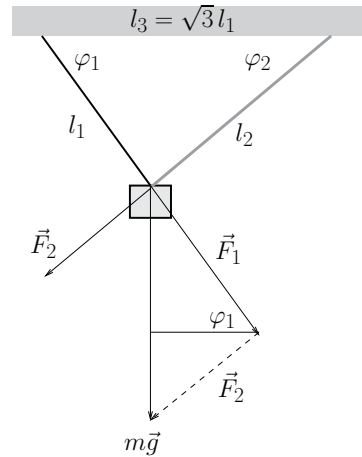
$$mg : F_1 : F_2 = l_3 : l_2 : l_1, \quad mg = F_2 \frac{l_3}{l_1} = \sqrt{3} F_2.$$

Za silo, ki napenja elastiko, velja:

$$F_2 = k(l_2 - l_0) = k(l_1 \sqrt{2} - l_0).$$

Sledi

$$mg = \sqrt{3} F_2 = \sqrt{3} k(l_1 \sqrt{2} - l_0), \quad m = \frac{\sqrt{3} k(l_1 \sqrt{2} - l_0)}{g} = 1,8 \text{ kg}. \quad (2)$$



Če računamo s kotnimi funkcijami, lahko vrednosti kotov izrazimo iz trikotnika, ki ga tvorita vrstica in elastika:

$$\sin \varphi_1 = \frac{l_2}{l_3} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \cos \varphi_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \sin \varphi_2 = \frac{l_1}{l_3} = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \cos \varphi_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

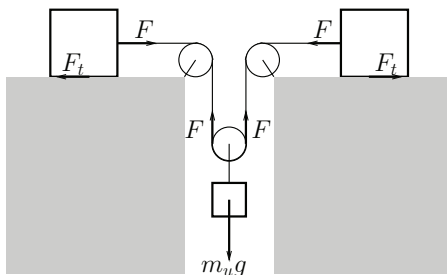
Iz enačb za ravnovesje (1) sledi enako kot v (2):

$$mg = F_1 \sin \varphi_1 + F_2 \sin \varphi_2 = F_2 (\tan \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2) = F_2 \left(\sqrt{2} \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{1}{3}} \right) = F_2 \sqrt{3}.$$

3. $m = 2 \text{ kg}$, $m_u = 0,5 \text{ kg}$, $m'_u = 2m_u = 1 \text{ kg}$, $v = 1 \text{ m/s}$.

a) Teža uteži uravnovesi trenje na levo in desno kladu:

$$m_u g = 2F_t = 2mgk_t, \quad k_t = \frac{m_u}{2m} = 0,125.$$



b) Za vsako od klad velja 2. Newtonov zakon

$$ma = F - F_t = F - mgk_t,$$

če z F označimo silo vrvice. Na utež pa deluje teža in sila dveh vrvic v nasprotni smeri kot teža. Ker je vrstica toga, se utež giblje z enakim pospeškom kot vsaka od klad, torej:

$$m'_u a = m'_u g - 2F = m'_u g - 2ma - 2mgk_t.$$

Preuredimo:

$$(m'_u + 2m)a = m'_u g - 2mgk_t, \quad a = \frac{(m'_u - 2mk_t)g}{m'_u + 2m} = 0,98 \text{ m/s}^2 \approx 1,0 \text{ m/s}^2.$$

c) Ko se leva klada premakne za določeno razdaljo, se utež spusti le za polovico te razdalje, torej je tudi hitrost uteži le polovico hitrosti klade, $v_u = v/2 = 0,5 \text{ m/s}$.

d) Za pospešek leve klado velja enaka enačba kot pri b):

$$ma = F - mgk_t.$$

Z enakim razmislekom kot pri c) ugotovimo, da je pospešek uteži le polovico pospeška leve klade. Ker so škripci lahki, ne vplivajo na silo (napetost) v vrvici, zato del vrvice na desni vleče utež z enako silo kot na levi:

$$m'_u \frac{a}{2} = m'_u g - 2F.$$

Vstavimo silo iz prve enačbe in dobimo

$$\left(\frac{m'_u}{2} + 2m \right) a = m'_u g - 2mgk_t.$$

Pospešek klade je enak

$$a = \frac{(m'_u - 2mk_t)g}{\frac{m'_u}{2} + 2m} = 1,1 \text{ m/s},$$

pospešek uteži pa

$$a_u = \frac{a}{2} = 0,55 \text{ m/s}.$$

4. $k = 25 \text{ N/cm}$, $m = 50 \text{ g}$, $x_0 = 10,0 \text{ mm}$, $x_1 = 8,0 \text{ mm}$, $x_2 = 6,0 \text{ mm}$.

a) Ko je kemični svinčnik izklopljen, je vzmet neobremenjena in je skrček enak nič. Kot pravi besedilo, je takrat spodnja ploskev gumba dvignjena nad podlago za H . Ko je kemični svinčnik v najnižji legi, je vzmet skrčena za x , hitrost kemičnega svinčnika pa je enaka nič. Od začetne točke se je kemični svinčnik spustil za $H + x$. Prožnostna energija vzmeti v najnižji točki je tolikšna, kolikor se je zmanjšala potencialna energija

$$mg(H + x) = \frac{1}{2}kx^2. \quad (1)$$

Če se kemični svinčnik ne preklopi, se bo vzmet med odbojem raztegnila nazaj na svojo neobremenjeno dolžino, torej bo v najvišji točki potencialna energija kemičnega svinčnika enaka začetni potencialni energiji. Kemični svinčnik se torej odbije do višine H , s katere smo ga spustili.

Mejna višina h_1 je dosežena takrat, ko je skrček vzmeti v najnižji točki enak x_1 . Oba podatka nesemo v (1) in dobimo

$$h_1 = \frac{kx_1^2}{2mg} - x_1 = x_1 \left(\frac{x_1}{y_0} - 1 \right) = 155,3 \text{ mm} \approx 155 \text{ mm},$$

kjer smo vpeljali značilno dolžino $y_0 = 2mg/k = 0,392 \text{ mm}$, ker se veliko rezultatov v nadaljevanju lepo izrazi s pomočjo y_0 . Seveda vpeljava y_0 za reševanje ni nujno potrebna.

b) Ko se kemični svinčnik med odbojem preklopi v stanje *vklučen*, se vzmet ne more več raztegniti do neobremenjene dolžine, ampak ostane skrčena za x_2 . Zato ima v najvišji točki po doboju poleg potencialne energije tudi prožnostno. Postavimo potencialno energijo kemičnega svinčnika na nič takrat, ko se med padanjem spodnja ploskev gumba dotakne podlage. Tedaj dobimo iz ohranitve mehanske energije med najnižjo lego med odbojem in najvišjo lego po odboju enačbo

$$\frac{1}{2}kx_1^2 - mgx_1 = \frac{1}{2}kx_2^2 + mgh'_1. \quad (2)$$

Iz (2) dobimo višino odboja h'_1 kot

$$h'_1 = \frac{k}{2mg} (x_1^2 - x_2^2) - x_1 = x_1 \left(\frac{x_1}{y_0} - 1 - \frac{x_2^2}{y_0 x_1} \right) = h_1 - \frac{x_2^2}{y_0} = 63,4 \text{ mm} \approx 63 \text{ mm}.$$

c) Ko je gumb najbolj potisnjen v ohišje, ima kemični svinčnik mehansko energijo

$$W = \frac{1}{2}kx_0^2 - mgx_0. \quad (3)$$

Ko je po odskoku najvišje, ima lahko poleg potencialne energije tudi prožnostno, odvisno od tega, ali je vzmet skrčena ali je raztegnjena na neobremenjeno dolžino in je skrček enak nič.

Možnost 1: pred pritiskom gumba je kemični svinčnik *vklopljen*.

Ker ohišje potisnemo do podlage, presežemo mejni skrček x_1 za preklon in je po odskoku kemični svinčnik izklopljen. To pomeni, da se vzmet raztegne do neobremenjene dolžine in ima v najvišji točki pri višini h_0 kemični svinčnik samo potencialno energijo $W_0 = mgh_0$. Iz ohranitve energije $W_0 = W$ skupaj s (3) dobimo

$$h_0 = \frac{kx_0^2}{2mg} - x_0 = x_0 \left(\frac{x_0}{y_0} - 1 \right) = 245,1 \text{ mm} \approx 245 \text{ mm}.$$

Možnost 2: pred pritiskom gumba je kemični svinčnik *izklopljen*.

Ker ohišje potisnemo do podlage, presežemo mejni skrček x_1 za preklon in je po odskoku kemični svinčnik vklopljen. To pomeni, da vzmet ostane skrčena za x_2 in ima v najvišji točki pri višini h_2 kemični svinčnik poleg potencialne energije tudi prožnostno

$$W_2 = \frac{1}{2} k x_2^2 + m g h_2. \quad (4)$$

Iz ohranitve energije $W_2 = W$ skupaj s (3) in (4) dobimo

$$h_2 = \frac{k}{2mg} (x_0^2 - x_2^2) - x_0 = x_0 \left(\frac{x_0}{y_0} - 1 - \frac{x_2^2}{y_0 x_0} \right) = h_0 - \frac{x_2^2}{y_0} = 153,3 \text{ mm} \approx 153 \text{ mm}.$$

Skupina II

1. $d = 1,0 \text{ cm}$, $\sigma = 1,0 \mu\text{As}/\text{m}^2$, $m = 1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

a) Med prvo in drugo ploščo je jakost električnega polja enaka kot v kondenzatorju, pri katerem je na levi plošči pozitivni naboj z gostoto $+\sigma$, na desni pa skupni naboj drugih petih plošč $-\sigma$:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 1,12 \cdot 10^5 \text{ V/m}.$$

b) Med prvo in drugo ploščo je napetost enaka $U_{12} = Ed = 1,12 \text{ kV}$.

Med drugo in tretjo ploščo je polje takšno kot v kondenzatorju, na katerem je na levi plošči naboj, ki je enak vsoti nabojev na prvi in drugi plošči, na desni pa naboj, enak vsoti nabojev tretje, četrte, pete in šeste plošče. Polje je zato dvakrat večje kot polje med prvo in drugo ploščo, in torej $U_{23} = 2Ed = 2,24 \text{ kV}$.

Podobno sklepamo za naslednje pare plošč $U_{34} = 3Ed = 3,36 \text{ kV}$, $U_{45} = 2Ed = 2,24 \text{ kV}$ in $U_{56} = Ed = 1,12 \text{ kV}$.

c) Proton prejme električno delo, ki je enako vsoti prispevkov vseh plošč:

$$A = e_0 U, \quad U = U_{1,2} + U_{2,3} + U_{3,4} + U_{4,5} + U_{5,6} = 9Ed = 10,08 \text{ kV}.$$

Delo se porabi za povečanje kinetične energije protona

$$\frac{1}{2} m v^2 - 0 = e_0 U, \quad v = \sqrt{\frac{2e_0 U}{m}} = 1,39 \cdot 10^6 \text{ m/s}.$$

2. $U_0 = 60 \text{ V}$, $R = 5,0 \Omega$, $l_1 = 10,0 \text{ mm}$, $l_2 = 5,0 \text{ mm}$, $S = 0,010 \text{ mm}^2$, $\rho = 8920 \text{ kg}/\text{m}^3$, $c = 380 \text{ J}/\text{kg K}$, $T_0 = 1080^\circ\text{C}$, $T_z = 20^\circ\text{C}$, $\zeta = 5,0 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$.

a) Upora žičk sta

$$R_1 = \frac{\zeta l_1}{S} = 0,05 \Omega; \quad R_2 = \frac{\zeta l_2}{S} = R_1 \frac{l_2}{l_1} = 0,025 \Omega.$$

Nadomestni upor obeh varovalk skupaj je

$$R_n = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1 \frac{l_2}{l_1 + l_2} = \frac{1}{3} R_1 = 0,01667 \Omega.$$

Porazdelitve napetosti na zaporedno vezanih upornikih nam da napetost na varovalkah

$$U_n = U_0 \frac{R_n}{R + R_n} = 0,1993 \text{ V} \approx 0,20 \text{ V} \approx 0,2 \text{ V}.$$

Tok skozi porabnik je

$$I = \frac{U_0}{R + R_n} = 11,96 \text{ A} \approx 12 \text{ A}.$$

b) Električno delo segreva posamezno žičko. Prejeto električno delo $P_i t = Q_i(t)$ viša temperaturo žičke $Q_i(t) = m_i c \Delta T(t) = \rho S l_i c \Delta T(t)$, kjer je indeks i enak 1 za daljšo in 2 za krajšo žičko. Ob upoštevanju električne moči $P_i = U_n^2 / R_i$ in razlike temperatur $\Delta T(t) = T(t) - T_z$ dobimo za temperaturo posamezne žičke ob času t

$$T_i(t) = T_z + \frac{U_n^2}{\zeta \rho c l_i^2} t = T_z + \left(\frac{l_1}{l_i} \right)^2 k_1 t,$$

kjer smo s k_1 označili hitrost segrevanja daljše žičke z dolžino l_1 in je

$$k_1 = \frac{U_n^2}{\zeta \rho c l_1^2}.$$

Očitno se hitreje segreva krajša žička z dolžino l_2 , saj manjši upor vodi do večjega toka in posledično večje moči, hkrati se segreva manjša masa bakra, iz katere je žička. Krajša žička se začne taliti po času t_a od vklopa stikala

$$t_a = \frac{(T_0 - T_z)}{k_1} \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 = 0,113 \text{ s} \approx 0,11 \text{ s}.$$

c) Daljša žička se segreva štirikrat ($4 = (l_1/l_2)^2$) počasneje, zato se v času t_a , ko pregori krajša žička, segreje le do

$$T_1(t_a) = T_z + (T_0 - T_z) \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 = T_z + \frac{T_0 - T_z}{4} = 285^\circ \text{C}.$$

d) Ko krajša žička pregori, sta v vezju zaporedno vezana samo upornik in varovalka z daljšo žičko in uporom R_1 . Napetost se deli podobno kot pri vprašanju a), torej dobimo

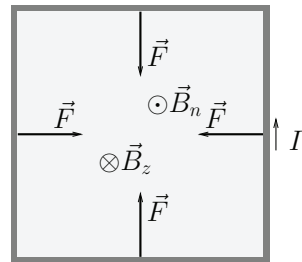
$$U_1 = U_0 \frac{R_1}{R + R_1} = 0,5942 \text{ V} \approx 0,59 \text{ V} \approx 0,6 \text{ V}.$$

3. $S = 10 \text{ mm}^2$, $l = 1,0 \text{ m}$, $B_z = 1,0 \text{ T}$, $U = 1,0 \text{ V}$, $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$, $c = 900 \text{ J/kg K}$, $\alpha = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $E = 70 \text{ GPa}$, $\zeta = 2,7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{m}$.

Ko vključimo vir napetosti, po okviru steče tok

$$I = \frac{U}{R} = \frac{US}{4\zeta l} = 92,6 \text{ A}.$$

Smer magnetne sile na stranico okvira določimo z naslednjim razmislekom. Naj zunanje $\vec{B}_z$ polje kaže pravokotno v list, tako kot kaže slika. Naloga zahteva, da ima tok po vključitvi vira takšno smer, da je smer magnetnega polja $\vec{B}_n$, ki je posledica tega toka, nasprotna zunanjemu polju. Kot kaže slika, teče tok v nasprotni smeri premikanja urinega kazalca, nastalo magnetno polje pa kaže iz lista. Za magnetno silo na stranico velja



$$\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B}_z, \quad F = IlB = 92,6 \text{ N}.$$

Smer sile kaže v notranjost okvira.

Če bi na začetku izbrali smer zunanjega polja iz lista, bi tok tekkel v smeri premikanja urinega kazalca, a sila bi še vedno kazala v notranjost okvira.

b)

Stranice se segrevajo in zaradi tega raztezajo. Okvir se segreje za

$$\Delta T = \frac{Pt}{mc} = \frac{U^2 St}{4\zeta l} \frac{1}{4lS\rho c} = \frac{U^2 t}{16l^2 \rho \zeta c} = 0,95 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

c)

Relativni **raztezek** palice zaradi segrevanja je

$$\left. \frac{\Delta l}{l} \right|_T = \alpha \Delta T = 2,3 \cdot 10^{-5}.$$

Okvir se zaradi magnetnih sil skrči

$$\left. \frac{\Delta l}{l} \right|_F = \frac{1}{E} \frac{F}{2S} = 6,6 \cdot 10^{-5},$$

kar pa je več od raztezka zaradi segrevanja. Celoten relativni **skrčček** je potem

$$\frac{\Delta l}{l} = \left. \frac{\Delta l}{l} \right|_F - \left. \frac{\Delta l}{l} \right|_T = 4,3 \cdot 10^{-5}.$$

4. a) $m = 1,0 \text{ kg}$, $h = 10 \text{ m}$, $V_0 = 1,5 \text{ l}$, $p_0 = 98 \text{ kPa}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.

Teža posode je $9,8 \text{ N}$, vzgon pa je enak $\rho g V_0 = 14,7 \text{ N}$. Rezultanta je enaka $4,9 \text{ N}$ in kaže navzgor.

b) V globini h na bat deluje tlak $p = p_0 + \rho gh$. Iz Boyleve enačbe sledi za prostornino zraka v posodi:

$$pV = p_0 V_0, \quad V = \frac{p_0}{p_0 + \rho gh} V_0 = \frac{1}{2} V_0 = 0,75 \text{ l}.$$

Vzgon se zmanjša in sedaj meri $\rho g V = 7,4 \text{ N}$. Rezultanta je enaka $2,5 \text{ N}$ in kaže navzdol.

Ker rezultanta spremeni predznak in ker se vmes zvezno spreminja, obstaja točka, v kateri je rezultanta enaka 0.

c) $m = 1,0 \text{ kg}$, $h = 10 \text{ m}$, $V_0 = 2,2 \text{ l}$, $m_v = 1,0 \text{ kg}$, $l = 10 \text{ m}$.

Tik pod gladino navzdol delujeta teža posode in teža verige s skupno silo $19,6 \text{ N}$, navzgor pa vzgon $\rho g V_0 = 21,6 \text{ N}$. Rezultanta $2,0 \text{ N}$ kaže navzgor.

Tik nad dnom teža verige več ne prispeva, saj vsa veriga leži na dnu. Prostornina posode se tako kot pri b) zmanjša na polovico začetne, tako da vzgon meri $\rho g V = 10,8 \text{ N}$ in je *večji* od teže posode. Rezultanta meri $1,0 \text{ N}$ in kaže navzgor.

d) Zapišimo sile v globini x , $0 < x < h$, kjer je tlak enak $p = p_0 + \rho gx$, prostornina in vzgon na posodo pa:

$$V(x) = \frac{p_0}{p_0 + \rho gx} V_0, \quad F_v(x) = \rho g V(x) = \frac{m_0 g x}{1 + \frac{x}{a}}, \quad a = \frac{p_0}{\rho g} = 10 \text{ m}, \quad m_0 = 2,2 \text{ kg}.$$

Teža posode in dela verige z dolžino $l - x$, ki prosto visi na posodi, meri

$$F_g(x) = mg + \frac{m_v}{l} g(l - x) = mg + m_v g \left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Iščemo globino, v kateri je rezultanta enaka 0:

$$F(x) = F_v(x) - F_g(x) = \frac{m_0 g x}{1 + \frac{x}{a}} - mg - m_v g \left(1 - \frac{x}{l}\right) = 0.$$

$$m_0 = \left(m + m_v \left(1 - \frac{x}{l}\right)\right) \left(1 + \frac{x}{a}\right).$$

Po množenju z al/m_v in preureditvi dobimo:

$$x^2 - \left(l - a + \frac{m}{m_v} l \right) x + \frac{m_0 - m - m_v}{m_v} al = 0.$$

V našem primeru je $l = a = 10$ m, $m/m_v = 1$ in $(m_0 - m - m_v)/m_v = 0,20$:

$$x_{1,2} = l \frac{1 \pm \sqrt{0,20}}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 7,24 \text{ m} \\ 2,76 \text{ m} \end{array} \right\}.$$

Obe rešitvi sta smiselni.

Skupina III

1. $k = 25$ N/cm, $m = 50$ g, $x_0 = 10,0$ mm, $x_1 = 8,0$ mm, $x_2 = 6,0$ mm.

a) Ko je kemični svinčnik izklopljen, je vzmet neobremenjena in je skrček enak nič. Kot pravi besedilo, je takrat spodnja ploskev gumba dvignjena nad podlago za H . Ko je kemični svinčnik v najnižji legi, je vzmet skrčena za x , hitrost kemičnega svinčnika pa je enaka nič. Od začetne točke se je kemični svinčnik spustil za $H + x$. Prožnostna energija vzmeti v najnižji točki je tolikšna, kolikor se je zmanjšala potencialna energija

$$mg(H + x) = \frac{1}{2} kx^2. \quad (1)$$

Če se kemični svinčnik ne preklopi, se bo vzmet med odbojem raztegnila nazaj na svojo neobremenjeno dolžino, torej bo v najvišji točki potencialna energija kemičnega svinčnika enaka začetni potencialni energiji. Kemični svinčnik se torej odbije do višine H , s katere smo ga spustili.

Mejna višina h_1 je dosežena takrat, ko je skrček vzmeti v najnižji točki enak x_1 . Oba podatka nesemo v (1) in dobimo

$$h_1 = \frac{kx_1^2}{2mg} - x_1 = x_1 \left(\frac{x_1}{y_0} - 1 \right) = 155,3 \text{ mm} \approx 155 \text{ mm},$$

kjer smo vpeljali značilno dolžino $y_0 = 2mg/k = 0,392$ mm, ker se veliko rezultatov v nadaljevanju lepo izrazi s pomočjo y_0 . Seveda vpeljava y_0 za reševanje ni nujno potrebna.

b) Ko se kemični svinčnik med odbojem preklopi v stanje *vklučen*, se vzmet ne more več raztegniti do neobremenjene dolžine, ampak ostane skrčena za x_2 . Zato ima v najvišji točki po doboju poleg potencialne energije tudi prožnostno. Postavimo potencialno energijo kemičnega svinčnika na nič takrat, ko se med padanjem spodnja ploskev gumba dotakne podlage. Tedaj dobimo iz ohranitve mehanske energije med najnižjo lego med odbojem in najvišjo lego po odboju enačbo

$$\frac{1}{2} kx_1^2 - mgx_1 = \frac{1}{2} kx_2^2 + mgh'_1. \quad (2)$$

Iz (2) dobimo višino odboja h'_1 kot

$$h'_1 = \frac{k}{2mg} (x_1^2 - x_2^2) - x_1 = x_1 \left(\frac{x_1}{y_0} - 1 - \frac{x_2^2}{y_0 x_1} \right) = h_1 - \frac{x_2^2}{y_0} = 63,4 \text{ mm} \approx 63 \text{ mm}.$$

c) Maksimalno višino po doboju kemični svinčnik doseže, če je med odbojem vzmet maksimalno skrčena, torej mora biti skrček enak x_0 . Poleg tega se mora po odboju vzmet raztegniti na neobremenjeno dolžino, kar pomeni, da mora biti kemični svinčnik, ko ga spustimo, *vklopljen*. Med odbojem namreč presežemo skrček za preklon ($x_1 < x_0$), po odboju pa mora biti kemični svinčnik izklopljen, da se lahko vzmet raztegne na neobremenjeno dolžino. Ohranitev mehanske energije nam da

$$h_0 = \frac{kx_0^2}{2mg} - x_0 = x_0 \left(\frac{x_0}{y_0} - 1 \right) = 245,1 \text{ mm} \approx 245 \text{ mm}.$$

Da doseže kemični svinčnik po odboju maksimalno višino h_0 , mora biti, ko ga spustimo, *vklopljen*. Spustiti ga moramo z najmanj tolikšne višine h_2 , da bo v najnižji točki skrček vzmeti maksimalen, torej x_0 . Ko ga spustimo, je skrček vzmeti x_2 , ker je *vklopljen*. Ohranitev energija nam da

$$\frac{1}{2}kx_0^2 - mgx_0 = \frac{1}{2}kx_2^2 + mgh_2. \quad (3)$$

Iz (3) dobimo

$$h_2 = \frac{k}{2mg} (x_0^2 - x_2^2) - x_0 = x_0 \left(\frac{x_0}{y_0} - 1 - \frac{x_2^2}{y_0 x_0} \right) = h_0 - \frac{x_2^2}{y_0} = 153,3 \text{ mm} \approx 153 \text{ mm}.$$

2. $U_0 = 1,5 \text{ V}$, $R = 5,0 \Omega$, $l_1 = 10,0 \text{ mm}$, $l_2 = 5,0 \text{ mm}$, $r = 0,060 \text{ mm}$, $T_0 = 1080^\circ\text{C}$, $\zeta = 5,0 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$.

a) Upora žičk sta

$$R_1 = \frac{\zeta l_1}{\pi r^2} = 0,0442 \Omega; \quad R_2 = \frac{\zeta l_2}{\pi r^2} = R_1 \frac{l_2}{l_1} = 0,0221 \Omega.$$

Nadomestni upor obeh varovalk skupaj je

$$R_n = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1 \frac{l_2}{l_1 + l_2} = \frac{1}{3} R_1 = 0,01474 \Omega.$$

Porazdelitve napetosti na zaporedno vezanih upornikih nam da napetost na varovalkah

$$U_n = U_0 \frac{R_n}{R + R_n} = 4,408 \text{ mV} \approx 4,4 \text{ mV}.$$

Tok skozi porabnik je

$$I = \frac{U_0}{R + R_n} = 0,299 \text{ A} \approx 0,30 \text{ A} \approx 0,3 \text{ A}.$$

b) Ker je sistem v temperaturnem ravnovesju, mora vsaka žička oddati s sevanjem enako moč, kot jo generira tok skozi žičko zaradi upora žičke. Električna moč pri dani napetosti U_n na posamezni žički je enaka

$$P_i = \frac{U_n^2}{R_i} = \frac{U_n^2 \pi r^2}{\zeta l_i},$$

kjer je indeks i enak 1 za daljšo in 2 za krajšo žičko. Vsaka žička seva kot črno telo v okolico skozi plašč valja s polmerom r in dolžino l_i pri ravnovesni temperaturi T_i po Stefanovem zakonu z močjo P_i^* , ki je enaka

$$P_i^* = \sigma T_i^4 2\pi r l_i.$$

Moči izenačimo in za ravnovesno temperaturo dobimo zvezo

$$\frac{U_n^2 \pi r^2}{\zeta l_i} = \sigma T_i^4 2\pi r l_i \quad \Rightarrow \quad T_i^4 = \frac{U_n^2 \pi r^2}{2\pi \sigma \zeta r l_i^2} = \frac{U_n^2 r}{2\sigma \zeta l_i^2}.$$

Ker dolžina žičke l_i nastopa v imenovalcu in so vse ostale količine na desni strani enačbe enake za obe žički, je očitno, da ima višjo temperaturo krajša žička, ki zato prva pregori. To se zgodi, ko temperatura krajše žičke doseže temperaturo tališča bakra T_0 . Iz pogojev $i = 2$ in $T_2 = T_0 = 1353 \text{ K}$ dobimo mejno napetost na varovalkah U_m

$$U_m = T_0^2 l_2 \sqrt{\frac{2\sigma \zeta}{r}} = 0,08898 \text{ V} \approx 89 \text{ mV}.$$

Napetost vira je takrat

$$U_2 = U_m \frac{R + R_n}{R_n} = 30,28 \text{ V} \approx 30,3 \text{ V}.$$

c) Do takrat, ko krajša žička pregori, je napetost na obeh žičkah enaka, ker sta vezani vzporedno. Napetost na daljši žički je torej enaka U_m . Uporabimo zvezo med napetostjo na žički in njeno ravnovesno temperaturo T_1 , le da upoštevamo dimenzije daljše žičke, torej l_2 zamenjamo z l_1 . Velja

$$U_m = T_1^2 l_1 \sqrt{\frac{2\sigma\zeta}{r}} = T_1^2 l_1 \frac{U_m}{T_0^2 l_2}, \quad (1)$$

kjer smo $\sqrt{\frac{2\sigma\zeta}{r}}$ izrazili s temperaturo krajše žičke v trenutku, ko pregori

$$\sqrt{\frac{2\sigma\zeta}{r}} = \frac{U_m}{T_0^2 l_2}.$$

Iz (1) dobimo

$$T_1 = T_0 \sqrt{\frac{l_2}{l_1}} = 956,7 \text{ K} \approx 957 \text{ K} = 684 \text{ }^\circ\text{C}.$$

3. $S = 10 \text{ mm}^2$, $l = 1,0 \text{ m}$, $\beta = 1,0 \text{ T/s}$, $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$, $c = 900 \text{ J/kg K}$, $\alpha = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $E = 70 \text{ GPa}$, $\zeta = 2,7 \cdot 10^{-8} \text{ }\Omega\text{m}$.

a) Zaradi spreminjajočega se magnetnega polja skozi okvir, se v okviru inducira napetost

$$U_i = l^2 \frac{dB_z}{dt} = l^2 \beta = 1,0 \text{ V}.$$

Napetost požene po okviru tok

$$I = \frac{U_i}{R} = \frac{U_i S}{4\zeta l} = 92,6 \text{ A}.$$

Po Lenzovem pravilu je smer toka takšna, da magnetno polje, $\vec{B}_n$, ki ga povzroči tok, zavira naraščanje zunanjega polja $\vec{B}_z$. V našem primeru je to v nasprotni smeri premikanja urinega kazalca.

Za magnetno silo na stranico velja

$$\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B}_z, \quad F = IlB = 92,6 \text{ N}.$$

Smer sile kaže v notranjost okvira.

b)

Stranice se segrevajo in zaradi tega raztezajo. Okvir se segreje za

$$\Delta T = \frac{Pt}{mc} = \frac{U^2 St}{4\zeta l} \frac{1}{4lS\rho c} = \frac{U^2 t}{16l^2 \rho \zeta c} = 0,95 \text{ }^\circ\text{C}.$$

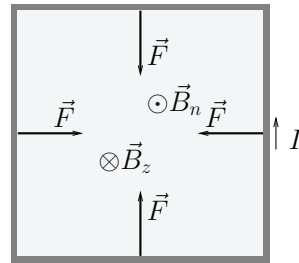
c)

Relativni **raztezek** palice zaradi segrevanja je

$$\left. \frac{\Delta l}{l} \right|_T = \alpha \Delta T = 2,3 \cdot 10^{-5}.$$

Okvir se zaradi magnetnih sil skrči

$$\left. \frac{\Delta l}{l} \right|_F = \frac{1}{E} \frac{F}{2S} = 6,6 \cdot 10^{-5},$$



kar pa je več od raztezka zaradi segrevanja. Celoten relativni **skrč**ek je potem

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta l}{l} \Big|_F - \frac{\Delta l}{l} \Big|_T = 4,3 \cdot 10^{-5}.$$

4. $T_z = 27^\circ\text{C}$, $a = 20\text{ cm}$, $d = 1,0\text{ dm}$, $P_0 = 5,0\text{ kW}$, $\lambda = 1,0\text{ W/m K}$

a) $T_n = 100^\circ\text{C}$.

Izkoristek stroja je Carnotov izkoristek

$$\eta = 1 - \frac{T_z}{T_n} = 1 - \frac{300\text{ K}}{373\text{ K}} = 0,196 \approx 0,20,$$

in je enak razmerju med delom, ki ga stroj oddaja, A , in toploto, ki jo stroju dovajamo, Q_{do} : $A/Q_{\text{do}} = \eta$. Razmerje lahko izrazimo tudi z močjo P_A , ki jo stroj oddaja, in dovedenim toplotnim tokom P_{do} : $P_A/P_{\text{do}} = \eta$.

Dovedeni toplotni tok je enak razliki med toplotnim tokom P_0 , ki ga dovajamo bojlerju, in toplotnim tokom, ki uhaja skozi stene

$$P_i = \frac{\lambda S}{d} (T_n - T_z) \equiv k (T_n - T_z), \quad k = 20\text{ W/K}.$$

$$P_{\text{do}} = P_0 - P_i = 5\text{ kW} - 1,46\text{ kW} = 3,54\text{ kW}.$$

Končno

$$P_A = P_{\text{do}}\eta = 0,694\text{ kW} \approx 690\text{ W}.$$

b) $P_A = 500\text{ W}$. V tem primeru iščemo T_n , ki zadošča enačbi

$$\frac{P_A}{P_0 - k(T_n - T_z)} = 1 - \frac{T_z}{T_n} = \frac{T_n - T_z}{T_n}.$$

Kot neznanko vpeljemo razliko med notranjo in zunanjo temperaturo, $x = T_n - T_z$, $T_n = T_z + x$, in po preureditvi dobimo kvadratno enačbo

$$P_A(T_z + x) = P_0x - kx^2, \quad kx^2 - (P_0 - P_A)x + P_AT_z = 0.$$

z rešitvijo

$$x_{1,2} = \frac{P_0 - P_A \pm \sqrt{(P_0 - P_A)^2 - 4kP_AT_z}}{2k} = \left\{ \begin{array}{l} 184\text{ K} \\ 41\text{ K} \end{array} \right\}, \quad T_n = \left\{ \begin{array}{l} 211^\circ\text{C} \\ 68^\circ\text{C} \end{array} \right\}.$$

Obe temperaturi sta smiselni.

c) Pri ekstremni vrednosti P_A bo rešitev za temperaturo ena sama, kar pomeni, da mora biti v enačbi za $x_{1,2}$ izraz pod korenem enak 0:

$$(P_0 - P_A)^2 - 4kP_AT_z = 0, \quad \text{po preureditvi:} \quad P_A^2 - 2(P_0 + 2kT_z)P_A + P_0^2 = 0.$$

Dobili smo kvadratno enačbo za moč s smiselno rešitvijo

$$P_A = P_0 + 2kT_z - \sqrt{(P_0 + 2kT_z)^2 - P_0^2} = 752\text{ W} \approx 0,75\text{ kW}.$$

Vrednost x pri tej temperaturi je $x = (P_0 - P_A)/2k = 106\text{ K}$ in $T_n = 133^\circ\text{C}$. Rešitev s predznakom $+$ ni smiselna, saj je v tem primeru $P_A > P_0$, temperature pa so negativne.

Nalogo je možno rešiti tudi z iskanjem stacionarne točke v izrazu za moč:

$$P_A = \frac{(P_0 - kx)x}{T_z + x}.$$

Iskanje ničel odvoda P_A po x vodi do enake rešitve za x in enake največje moči.