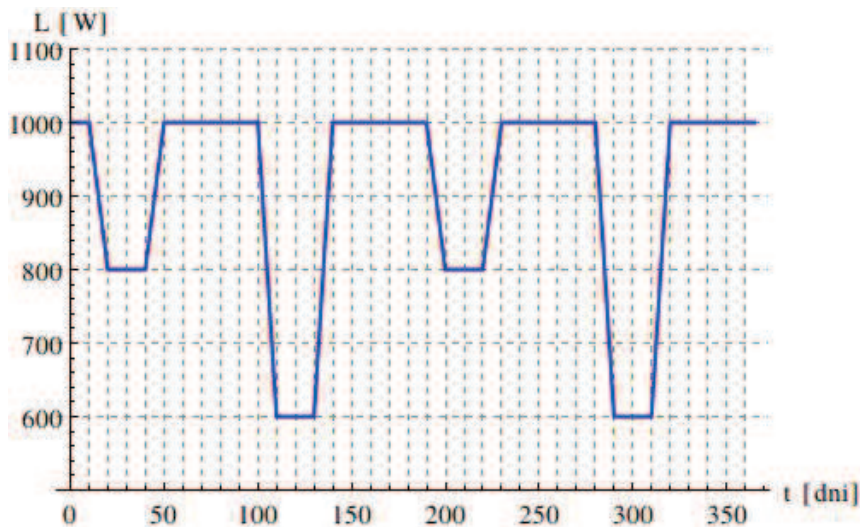


Tekmovanja

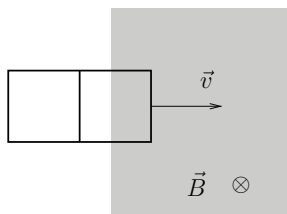
Izbirno tekmovanje za evropsko spletno olimpijado

- Potapljač ima z vso opremo in utežmi maso 80 kg. Na površju močno vdihne, da ima v telesu 8 l zraka. Obtežen je tako, da lebdi na globini 10 m.
 - Kolikšna je njegova navidezna teža (razlika med gravitacijsko silo in vzgonom) na globini 15 m?
 - Skiciraj graf navidezne teže potapljača v odvisnosti od globine.
 - Izračunaj hitrost, s katero se mora potapljač odriniti od tal v globini 15 m, da ravno dospe do površja. Upor vode zanemari.
- Graf prikazuje enoletno meritev svetlobnega toka (moči) L , ki ga seva sistem dveh zvezd, ki krožita okoli skupnega težišča v ravnini, na kateri je Zemlja.

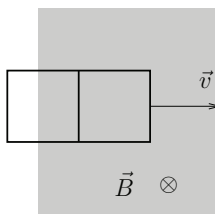


- Iz podatkov na grafu določi obhodni čas kroženja zvezd.
- Iz podatkov na grafu izračunaj razmerje polmerov obeh zvezd. Predpostavi, da je v času prekrivanja medsebojna hitrost zvezd, kot bi jo videli z Zemlje, konstantna.
- Brez dodatnih informacij obstajata dve rešitvi za razmerje moči, ki ju sevata posamezni zvezdi. Izračunaj obe možni razmerji.
- Iz drugih meritev vemo, da je temperatura manjše zvezde 6000 K, temperatura večje pa okrog petino nižja. Izračunaj natančno temperaturo površja večje zvezde.

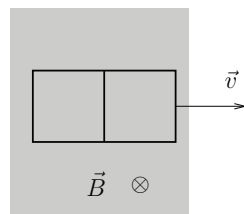
3. Kovinski okvir pravokotne oblike s stranicama 10 cm in 5 cm in sredinsko navpično prečko se s konstantno hitrostjo 1,0 m/s giblje skozi homogeno magnetno polje z gostoto 1,0 T. Smer polja je pravokotna na ravnino okvira in kaže v list (glej sliko). Dolžina področja, kjer je magnetno polje, je v smeri gibanja 15 cm. Prečni presek žice je 1,0 mm², gostota kovine 7,9 g/cm³, specifični upor 0,10 Ωmm²/m, specifična toplota pa 450 J/kgK.



(i)



(ii)



(iii)

- Kolikšna napetost se inducira v posamezni navpični prečki pri gibanju v magnetnem polju?
 - Kolikšni tokovi tečejo skozi srednjo prečko, ko je okvir v legah (i), (ii) in (iii)?
 - Grafično prikaži tok skozi srednjo prečko v odvisnosti od časa za čas od trenutka, ko okvir vstopi v polje, do trenutka, ko ga zapusti. Na grafu naj bo tok pozitiven, ko v srednji prečki teče navzgor.
 - Izračunaj spremembo temperature okvira pri gibanju skozi področje, kjer je magnetno polje, če zanemarimo izgube toplote v okolico.
4. S pomočjo paličastega magneta želimo izmeriti velikost vodoravne komponente zemeljskega magnetnega polja B_h . Magnetne lastnosti paličastega magneta opišemo s količino, ki jo imenujemo magnetni moment $\vec{p}$. Tako, na primer, na magnet z magnetnim momentom $\vec{p}$ v homogenem magnetnem polju $\vec{B}$ deluje navor $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{B}$. Magnet ima obliko valja s polmerom osnovne ploskve 7,5 mm, z višino 45 mm in z maso 35 g. Magnetni moment paličastega magneta $\vec{p}$ je usmerjen vzdolž simetrijske osi valja. Magnet vrtljivo vpnemo, da leži v vodoravni ravnini in se lahko prosto vrti okoli navpične osi skozi težišče. Ko magnet zavrtimo za majhen kot iz ravnovesne lege in ga spustimo, niha z nihajnim časom 2,5 s. Drugo meritev opravimo z istim paličastim magnetom in majhnim kompasom. Ko v bližini ni magneta, kompasova igla kaže v smeri vodoravne komponente zemeljskega magnetnega polja. Nato isti paličasti magnet, ki smo ga uporabili pri prvi meritvi, postavimo v vodoravno ravnino kompasa tako, da je simetrijska os magneta pravokotna na smer vodoravne komponente zemeljskega magnetnega polja in je kompas od magneta oddaljen $r = 35$ cm v smeri simetrijske osi magneta. Magnetna igla kompasa se odkloni za 21°. Magnetno polje $\vec{B}$ paličastega magneta v veliki oddaljenosti glede na dimenzije magneta podaja izraz

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right],$$

kjer je $\vec{r}$ vektor od težišča magneta do opazovane točke.

- Kolikšen je vztrajnostni moment paličastega magneta okoli osi, ki je pravokotna na simetrijsko os magneta in gre skozi težišče?
- Kolikšni sta velikost vodoravne komponente zemeljskega magnetnega polja B_h in magnetni moment paličastega magneta p ?
- Kompas počasi premaknemo v vodoravno ravnino po krožnici s polmerom 35 cm in središčem v težišču magneta iz prvotne lege v drugo lego, tako da pri tem kompas opiše četrtnino kroga. Za kolikšen kot se med premikom zavrti magnetna igla kompasa?

Šolsko tekmovanje v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike za srednje šole

1. skupina: Poslovna matematika

1. naloga

V tovarni piškotov Piškotek je 100 delavcev v 9 mesecih speklo 3320 t piškotov, če so delali po 8 ur na dan?

- Koliko ur na dan bi morale delati 120 delavcev, da bi v 6 mesecih spekli enako količino piškotov, njihova storilnost pa bi bila večja za 8 %?
- Za koliko odstotkov bi se v tem primeru podaljšal delovnik (zanemarimo pravni vidik urejanja delovnih razmerij)?
- Povpraševanje po piškotih se je v naslednjih treh mesecih precej zmanjšalo. Koliko delavcev bodo morali odpustiti, da bi v treh mesecih napekli 870 t piškotov in bi delali po 7 ur na dan? Upoštevajte izhodiščne podatke in rezultat zaokrožite na cele delavce.

2. naloga

Na razpisu pridobljena denarna sredstva v višini 150.000,00 EUR so razdelili med štiri turistične kraje, in sicer:

- $\frac{1}{5}$ sredstev premo sorazmerno številu prebivalcev;
(Podatki: Kraj A ima 15.500 prebivalcev, kraj B 20.300 prebivalcev, kraj C 6.000 prebivalcev in kraj D 18.200 prebivalcev.)
- preostanek pa tako, da dobi kraj A šestkrat več sredstev kot kraj C; kraj B $\frac{1}{4}$ več sredstev kot kraj A; kraj D pa trikrat toliko kot skupaj kraja A in B.
Koliko sredstev je pridobil vsak turistični kraj?

3. naloga

- V tovarni smuči so proizvedli 55.200 parov smuči, in sicer smuči A za alpsko smučanje, tekaške smuči B in smuči C za turno smuko. Tekoških so naredili za 30 % manj kot alpskih, proizvodnja smuči za turno smuko pa je predstavljala le 20 % proizvodnje tekaških smuči. Koliko posameznih vrst smuči so naredili?
- Miha si je želel kupiti smuči za alpsko smučanje, ki so stale 880,00 EUR. Počakal je do razprodaje, kjer so jih najprej znižali za 25 %, nato pa še za dodatnih 12 %. Koliko je Miha plačal za smuči in koliko odstoten je skupni popust? Izračunajte tudi ceno smuči po prvi pocenitvi.
- Miha je navdušen smučar in si je kupil sezonsko smučarsko vozovnico za 489,00 EUR. Ugotovil je, da se je cena smučarske vozovnice v zadnjih dveh letih povečala vsako leto za 3 % v primerjavi s predhodnim letom. Izračunajte ceni sezonske smučarske vozovnice, ki sta veljali v zadnjih dveh letih.

4. naloga

Družina Kos bo prenavljala stanovanje. Po predračunu znašajo stroški adaptacije 30.500,00 EUR.

- Pred pričetkom del vežejo depozit 20.000,00 EUR po 2,5-% letni obrestni meri za 3 leta in navadnem obrestovanju, dve leti pred začetkom del pa še depozit 6.000,00 EUR po nekoliko nižji letni obrestni meri, in sicer 1,8-%. Kolikšna bo skupna vrednost obeh depozitov po izteku obeh vezav in koliko denarja bo zmanjkalo do predvidene višine stroškov po predračunu?
- Kljub vsem varčevalnim naporom ugotovijo, da je potrebno najeti posojilo 4.000,00 EUR, in sicer za 18 mesecev. Enkratno vračilo posojila bi po izteku posojilne pogodbe znašalo 4.352,00 EUR. Izračunaj letno in mesečno obrestno mero ob predpostavki navadnega obrestovanja.

2. skupina: Statistika

1. NALOGA

Dijake, vpisane v srednjo šolo Bistra glava 1. septembra 2019, smo razvrstili po spolu in programu, ki ga obiskujejo. Rezultate smo prikazali v tabeli spodaj.

Tabela 1: **Dijaki srednje šole Bistra glava 1. septembra 2019**

Spol	Izobraževalni program			Skupaj
	Gimnazija	Ekonomski tehnik	Predšolska vzgoja	
Fantje	230	61	36	327
Dekleta	218	85	185	488
Skupaj	448	146	221	815

- Za dijake srednje šole Bistra glava izračunajte strukturo dijakov po izobraževalnih programih.

Tabela 2: **Struktura dijakov srednje šole Bistra glava 1. septembra 2019**

Spol	Izobraževalni program			Skupaj
	Gimnazija	Ekonomski tehnik	Predšolska vzgoja	
Fantje				
Dekleta		*		
Skupaj				

- Razložite podatek v tabeli 2, ki je označen z zvezdico.
- Navedite spremenljivke in vrste spremenljivk, po katerih smo opazovali populacijo dijakov srednje šole Bistra glava.
- Izračunano strukturo pod točko a grafično prikažite s strukturnimi stolpci.

2. NALOGA

Tabela 3: Število dijakov, strokovnih delavcev in srednjih šol v Sloveniji po šolskih letih

Šolsko leto	2016/2017	2017/2018	2018/2019
Število srednjih šol	156	145	143
Število strokovnih delavcev	7.470	7.454	7.250
Število dijakov	74.021	73.776	73.110
a)			
b)			

Vir: SURS, 2019

- Izračunajte število strokovnih delavcev na šolo za posamezno šolsko leto.
- Izračunajte število dijakov na srednjo šolo za posamezno šolsko leto.
- Izračunajte povprečno število strokovnih delavcev na 100 dijakov za celotno obdobje (vsa tri šolska leta).
- Srednjo šolo Bistroum obiskuje 672 dijakov. Prav tako vemo, da je na šoli 12 dijakov na učitelja. Koliko učiteljev je zaposlenih na srednji šoli Bistroum?

3. NALOGA

Tabela 4: Bruto domači proizvod na prebivalca v Sloveniji v letih od 2008 do 2018

Leto	BDP na prebivalca v EUR	a)	c)	
2008	18.757			
2009	17.758			
2010	17.749			
2011	18.052			
2012	17.626			
2013	17.700			
2014	18.253			
2015	18.830			
2016	19.551			
2017	20.809			
2018	22.083			

Vir: SURS, 2019

- Z ustreznimi indeksi izračunajte spremembe v bruto domačem proizvodu na prebivalca iz leta v leto za celotno obdobje. (Rezultate zapišite v tabelo zgoraj pod točko a.)
- V katerih letih je bila stopnja rasti negativna?
- Izračunajte spremembe bruto domačega proizvoda na prebivalca glede na leto 2009. (Rezultate zapišite v tabelo zgoraj pod točko c.)

- d) Ocenite vrednost bruto domačega proizvoda na prebivalca v letu 2021, če se je ta v letu 2019 povečal za 2,5 %, v letu 2020 in 2021 pa je predvidena rast bruto domačega proizvoda vsako leto za 3 %.

4. NALOGA

Tabela 5: **Frekvenčna porazdelitev števila zamud dijakov v mesecu oktobru šolskega leta 2019/2020**

Št. zamud	Št. dijakov			
0–2	3			
3–5	5			
6–8	4			
9–11	6			
12–14	2			
Skupaj	20			

Vir: Izmišljeni podatki

- Določite spodnjo mejo in širino 3. razreda.
- Izračunajte deleže dijakov po razredih. (*Rezultate zaokrožite na 3 decimalna mesta natančno in jih vpišite v zgornjo tabelo.*)
- Kaj nam pove izračunan delež v 2. razredu?
- Koliko odstotkov dijakov je k pouku zamudilo 9- in večkrat?
- Izračunajte povprečno število zamud na dijaka.

3. skupina

- V preglednici so zbrani podatki o številu kandidatov pri splošni maturi v spomladanskem in jesenskem izpitnem roku v letu 2019:

Način opravljanja	Prijava		Odjave		Pristopili		Opravili	
	pom.	jes.	pom.	jes.	pom.	jes.	pom.	jes.
Opravljali prvič ¹	6101	452	492	124	5600	309	5337	135
21-letniki ² prvič in maturitetni tečaj prvič	242	54	51	17	145	30	66	13
Popravljali eno ali dve negativni oceni	377	470	7	13	333	422	173	242
Ponovno v celoti	155	186	6	18	105	114	13	13
Opravljali v dveh delih	143	108	19	3	0	52	0	30
Izboljševali oceno	180	339	17	204	161	133	160	133
Dodatni izpit k poklicni maturi	1863	347	186	47		218		91
Dodatni izpit k splošni maturi	19	4	0	1	17	3	17	2

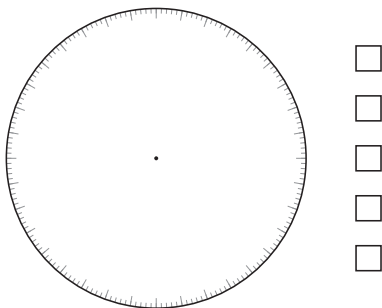
Pomen okrajšav: pom. – spomladanski rok, jes. – jesenski rok

¹ Brez 21-letnikov in kandidatov z maturitetnim tečajem.

² 21-letniki so kandidati, ki so dopolnili vsaj 21 let.

Vir: Državni izpitni center, Splošna matura – Letno poročilo 2019.

- a) Določi število kandidatov, ki so se prijavili k opravljanju splošne mature ponovno v celoti v jesenskem izpitnem roku, vendar se izpitov niso udeležili niti se niso od mature odjavili.
- b) Določi število kandidatov mlajših od 21 let, ki so bili pri svojem prvem opravljanju celotne mature v letu 2019 neuspešni.
- c) Določi število kandidatov, ki so opravili dodatni izpit k poklicni maturi v spomladanskem izpitnem roku, če veš, da k izpitu ni pristopilo 117 prijavljenih kandidatov, od tistih, ki so k izpitu pristopili, pa je bilo 23,974 % neuspešnih.
- d) Določi delež uspešnih kandidatov pri dodatnem izpitu k splošni ali poklicni maturi glede na vse kandidate, ki so k takšnemu izpitu pristopili v jesenskem izpitnem roku. Rezultat v odstotkih zaokroži na tri decimalna mesta.
- e) S krožnim diagramom prikaži strukturo kandidatov, ki so v jesenskem izpitnem roku opravili splošno maturo (brez izboljševanja ocene in dodatnih izpitov). Kote v krožnem diagramu določi na stopinjo natančno.



- f) Med 6022 kandidati, ki so opravili maturo v letu 2019, je bilo 4,351 % zlatih maturantov; ti so dosegli izjemen splošni uspeh, vsaj 30 točk. Koliko je bilo takih, ki so dosegli vseh 34 točk, če predstavljajo 3,817 % zlatih maturantov?
2. Kaja najame stanovanjski kredit v višini 30 000 €. Odplačala ga bo v enakih mesečnih obrokih v naslednjih 10 letih, prvi obrok en mesec po najemu kredita. Banka za kredit uporablja konformno mesečno obrestovanje in 4,8 % letno obrestno mero.
- Rezultate v evrih zaokroži na dve decimalni mesti.
- a) Določi višino obroka.
 - b) Določi višino preostalega dolga dve leti po najemu kredita, to je takoj po plačilu 24. obroka.
 - c) Dve leti po najemu kredita Kaja izgubi službo, zato obrokov ne more več plačevati. Z banko se dogovori za moratorij na odplačilo kredita. Eno leto ji obrokov ne bo treba plačevati, nadaljnji obroki pa bodo zato višji. Prvi višji obrok bo plačala tri leta in en mesec po najemu kredita, zadnji pa kot v prvotni pogodbi, to je 10 let po najemu. Določi višino obroka po moratoriju.

3. Znani sta naslednji netvegani efektivni obrestni meri, določeni na osnovi cen državnih obveznic. Čas t je merjen v letih.

t	1	2
$R(0, t)$	2,00 %	4,00 %

Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) Država je pravkar izdala klasično dveletno kuponsko obveznico z nominalno vrednostjo 100 € in letnimi kuponi po kuponski obrestni meri 3,70 %. Prvi kupon bo izplačan čez natanko eno leto. Določi ceno obveznice ob izdaji.
- b) Država je takoj za tem izdala še dveletno *kuponsko obveznico z zaostalimi kuponi* in nominalno vrednostjo 100 €. Ta obveznica eno leto po izdaji ne izplača kupona, trenutki izplačil ostalih kuponov (v tem primeru en sam) pa so enaki kot pri klasični kuponski obveznici. Določi višino kupona obveznice z zaostalimi kuponi, če je njena cena ob izdaji enaka ceni klasične kuponske obveznice iz naloge a).
- c) Hkrati z obveznico iz naloge b) je država izdala še dveletno *kuponsko obveznico s pospešenimi kuponi* in nominalno vrednostjo 100 €. Ta obveznica ob dosvetju kupona ne izplača, trenutki izplačil ostalih kuponov (v tem primeru en sam) pa so enaki kot pri klasični kuponski obveznici. Določi višino kupona obveznice s pospešenimi kuponi, če je njena cena ob izdaji enaka ceni klasične kuponske obveznice iz a).
- d) Zasebno finančno podjetje v isti državi pri zadolževanju plačuje pribitek x na netvegano obrestno mero; to pomeni, da za obrestno mero podjetja za vse t velja $\bar{R}(0, t) = R(0, t) + x$. Odloči se, da bo še samo izdalo dveletne obveznice z zaostalimi in s pospešenimi kuponi z nominalno vrednostjo 100 €. Z analizo kapitalnega trga ugotovi, da bosta ob izdaji ceni obveznic enaki, če zaostali kupon znaša 12 €, pospešeni kupon pa 11 €. Določi višino pribitka x na netvegano obrestno mero.
4. Podjetje, ki sprejema plačila tudi v kriptovalutah, se želi zavarovati pred močnimi nihanjem vrednosti, ki so značilna za trg kriptovalut. Zato želi na borzi skleniti nekaj trimesčnih terminskih poslov za prodajo bitcoinov. Danes (6. marca 2020) je na voljo terminski posel za prodajo bitcoinov z ročnostjo 6. junija 2020 in izročitveno ceno 7245 \$ za en bitcoin.

Netvegana efektivna obrestna mera je 1 % za vsa dospetja.

Rezultate v ameriških dolarjih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) Predpostavi, da na trgu ni arbitraže. Določi trenutno ceno enega bitcoina v dolarjih?
- b) Standardni terminski posel na borzi se nanaša na nakup ali prodajo 5 bitcoinov. Podjetje ve, da bo čez tri mesece prejelo 100 bitcoinov, ki jih bo moralo nato takoj prodati. Koliko standardnih terminskih poslov mora skleniti, da se popolnoma zavaruje pred tveganjem zaradi negotove prihodnje vrednosti bitcoina?
- c) Podjetje bo 6. junija 2020 na trgu kriptovalut prodalo 100 prejetih bitcoinov in z denarno poravnavo zaprlo terminske posle iz naloge b). Koliko denarja bo prejelo s prodajo bitcoinov in koliko denarja bo prejelo/plačalo ob zaprtju terminskih poslov v naslednjih dveh primerih:
- cena bitcoina bo 8123 \$;
 - cena bitcoina bo 6238 \$?
- d) Privzemi, da danes cena bitcoina ni enaka vrednosti iz naloge a), pač pa znaša 7171 \$. Opiši arbitražno strategijo in določi višino arbitražnega zasluzka.

Rešitve izbirnega tekmovanja za evropsko spletno olimpijado

1. $m = 80 \text{ kg}$, $V_0 = 8 \text{ l}$, $h_1 = 10 \text{ m}$, $h_2 = 15 \text{ m}$, $p_0 = 100 \text{ kPa}$, $\rho_v = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

a) $h_2 = 15 \text{ m}$.

V globini h_1 , kjer je teža uravnotežena z vzgonom, je tlak $p_1 = p_0 + \rho g h_1$ in prostornina zraka v telesu $V_1 = p_0 V_0 / p_1$. Če prostornino potapljača brez vdihnjenega zraka označimo z V_p , enačbo za ravnovesje zapišemo

$$(m + \rho_z V_0)g = (V_p + V_1)\rho_v g.$$

Prostornina potapljača brez zraka je

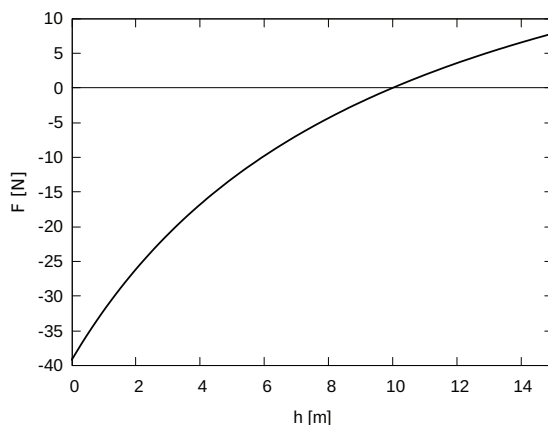
$$V_p = \frac{m + \rho_z V_0}{\rho_v} - V_1 = \frac{m}{\rho_v} - V_1,$$

saj je $\rho_z \ll \rho_v$ in težo zraka lahko zanemarimo.

V globini h_2 je tlak $p_2 = p_0 + \rho_v g h_2$ in prostornina zraka v telesu $V_2 = p_0 V_0 / p_2$. Navidezna teža je enaka

$$F(h_2) = mg - (V_p + V_2)\rho_v g = \rho_v g(V_1 - V_2) = \rho_v g V_0 \left(\frac{p_0}{p_0 + \rho_v g h_1} - \frac{p_0}{p_0 + \rho_v g h_2} \right) = 7,8 \text{ N} \approx 8 \text{ N}.$$

b) Pustimo, da v zgornji enačbi h_2 preteče globine od 0 do 15 m:



c)

Zadostuje, da potapljač doseže globino h_1 , saj ga od tam naprej dviga vzgon, ki je od tam navzgor večji od njegove teže. Da se dvigne do te globine, pa mora opraviti delo proti navidezni teži. Zapišimo izrek o kinetični energiji za ta primer:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \bar{F}(h_2 - h_1) \approx \frac{1}{2}F(h_2)(h_2 - h_1),$$

kjer smo za povprečno silo vzeli kar polovico navidezne teže v globini h_2 . Iz grafa pri b) vidimo, da se v tem intervalu navidezna teža spreminja skoraj linearno, zato je ta ocena smiselna. Za hitrost dobimo

$$v = \sqrt{\frac{F(h_2)(h_2 - h_1)}{m}} = 0,70 \text{ m/s}.$$

Namesto povprečne sile lahko vzamemo navidezno težo pri povprečni globini med h_1 in h_2 , $\bar{h} = (h_1 + h_2)/2$. V tem primeru dobimo nekoliko višjo hitrost, ki je tudi bližje točnemu rezultatu:

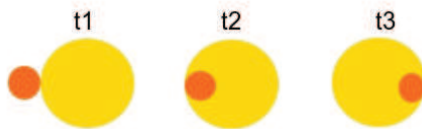
$$v = \sqrt{\frac{F(\bar{h})(h_2 - h_1)}{m}} = 0,73 \text{ m/s}.$$

2. a)

$T = 180 \text{ dni}$.

b)

Ob časih $t_1 = 10$ dni, $t_2 = 20$ dni in $t_3 = 40$ dni sta zvezdi v naslednjih položajih:



Razmerje radijev je torej

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{v_{\text{rel}}(t_2 - t_1)}{v_{\text{rel}}(t_3 - t_1)} = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} = \frac{1}{3}.$$

c)

Če se manjša skriva za večjo v času med 20. in 40. dnevom, potem je

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{200W}{800W} = \frac{1}{4}.$$

Če se v času med 110. in 130. dnevom, pa

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{400W}{600W} = \frac{2}{3}.$$

d)

Moč je od radija in temperature odvisna takole:

$$L = Sj = \pi R^2 \sigma T^4$$

Razmerje temperatur je:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{L_1 R_2^2}{L_2 R_1^2} \right)^{1/4}$$

kar je za zgornja primera 1,22 oziroma 1,57. Pravo razmerje moči je torej $1/4$. Temperatura večje zvezde pa

$$T_2 = T_1/1,22 = 4900 \text{ K}.$$

Vprašanje 2b) ima alternativno rešitev, pri kateri razmerje radijev izračunamo direktno preko moči. Moči izrazimo z gostotami izsevanega toka in polmeri za primer, ko se zvezdi ne prekrivata, ko je manjša skrita za večjo in ko je manjša v celoti pred večjo:

$$\begin{aligned} j_1 \pi r_1^2 + j_2 \pi r_2^2 &= L_0, \\ j_2 \pi r_2^2 &= L_1, \\ j_1 \pi r_1^2 + j_2 \pi (r_2^2 - r_1^2) &= L_2, \end{aligned}$$

pri čemer je r_1 polmer manjše zvezde, $L_0 = 1000 \text{ W}$, $L_1(L_2)$ pa $800 \text{ W}(600 \text{ W})$ ali $600 \text{ W}(800 \text{ W})$. Tretjo enačbo odštejemo od prve in delimo z drugo:

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{L_0 - L_2}{L_1}.$$

Od tod sledita dve možnosti za razmerje polmerov:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ali} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Rešitev pri c) ostane nespremenjena, pri rešitvi d) pa se izkaže, da ustreza podatkom prvo možnost. Dobimo

$$T = 5050 \text{ K}.$$

Kot pravilni upoštevamo obe rešitvi, razlika pride zaradi nekonsistentnosti pri podanem času prekrivanja na grafu.

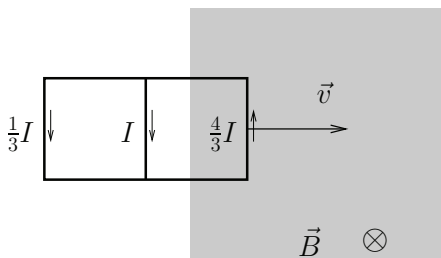
3. $B = 1,0 \text{ T}$, $l = 5 \text{ cm}$, $v = 1,0 \text{ m/s}$, $s = 15 \text{ cm}$, $S = 1,0 \text{ mm}^2$, $\rho = 7,9 \text{ g/cm}^3$, $\zeta = 0,10 \text{ }\Omega\text{mm}^2/\text{m}$, $c_p = 450 \text{ J/kgK}$.

a)

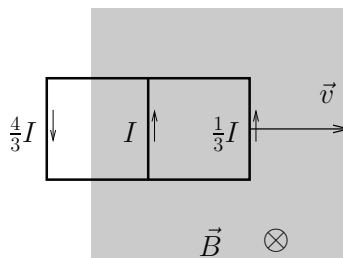
V prečki se inducira napetost

$$U_i = lvB = 0,05 \text{ V}.$$

Po Lenzovem pravilu ima napetost takšno polariteto, da požene v prečki tok navzgor (glej sliko).



(i)



(ii)

b)

Stranica z dolžino l predstavlja upornik z uporom

$$R = \frac{\zeta l}{S} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ }\Omega.$$

V primeru (i) se tok, ki ga požene inducirana napetost v desni prečki, v levem kvadratnem okvirju razdeli v obratnem razmerju uporov. Če tok v srednji prečki označimo z I , teče skozi tri zaporedno vezane upornike na levi tok $\frac{1}{3}I$, skozi tri zaporedno vezane upornike na desni pa vsota obeh tokov $\frac{4}{3}I$. Zapišimo drugi Kirchhoffov izrek za sklenjen krog v desnem kvadratu:

$$U_i = RI + 3R \frac{4I}{3} = 5RI, \quad I = \frac{U_i}{5R} = 2 \text{ A}.$$

Tok v primeru (ii) v srednji prečki označimo z I , v desni I' , v levi je potem tok enak $I + I'$. Vsota gonilnih napetosti v desnem kvadratnem okvirju je enaka 0, in velja

$$0 = RI - 3RI', \quad I' = \frac{1}{3}I, \quad I + I' = \frac{4}{3}I.$$

Zapišimo drugi Kirchhoffov izrek za sklenjen krog še za levi kvadrat:

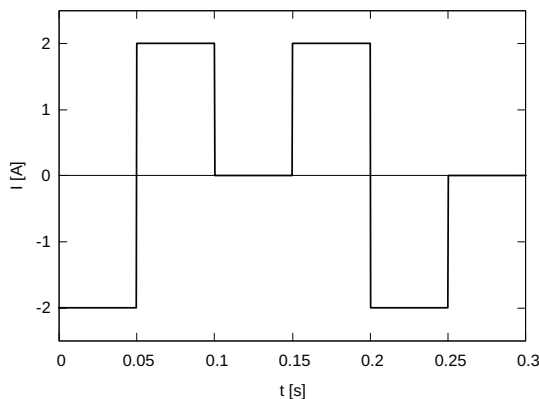
$$U_i = RI + 3R \frac{4I}{3} = 5RI, \quad I = \frac{U_i}{5R} = 2 \text{ A}.$$

Dobimo enak rezultat kot v primeru (ii), le smer toka je sedaj drugačna.

V primeru (iii) so gonilne napetosti enake in za kateri koli zaključen krog velja, da je vsota gonilnih napetosti enaka 0. Zato v okvirju tok ne teče.

c)

Po dogovoru je tok pozitiven v primeru (ii) in negativen v primeru (i). Ko potuje okvir iz magnetnega polja, je slika tokov zrcalna.



d)

Moč, ki se troši v primeru (i), je

$$P = 3 \left(\frac{1}{3} I \right)^2 R + I^2 R + 3 \left(\frac{4}{3} I \right)^2 R = \frac{20}{3} I^2 R = 0,133 \text{ W}.$$

Enako moč dobimo v primeru (ii) in enako tudi pri potovanju okvirja iz polja. V celoti se moč troši v skupnem času $t = 4l/v = 0,2 \text{ s}$ in se pri tem sprosti $Q = Pt = 0,027 \text{ J}$ toplote. Okvir se segreje za

$$\Delta T = \frac{Q}{mc_p}, \quad m = 7\rho l S = 2,8 \text{ g}, \quad \Delta T = 0,02 \text{ K}.$$

4. $R = 7,5 \text{ mm}$, $H = 45 \text{ mm}$, $m = 35 \text{ g}$, $t_0 = 2,5 \text{ s}$, $\varphi_1 = 21^\circ$, $r = 35 \text{ cm}$.

a)

Izraz za vztrajnostni moment valja okoli osi, ki je pravokotna na simetrijsko os in gre skozi težišče, najdemo v "Fizikalnih obrazcih"

$$J = \frac{1}{12} m H^2 + \frac{1}{4} m R^2 = 6,4 \cdot 10^{-6} \text{ kgm}^2.$$

b)

Drugi Newtonov zakon za vrtenje in navor na magnetni dipol daša

$$J\alpha = M \quad \text{oziroma} \quad \ddot{\varphi} + \frac{pB_h}{J} \sin \varphi = 0,$$

kjer smo kotni pospešek izrazili kot drugi časovni odvod zasuka $\alpha \equiv \ddot{\varphi}$. Ko za male kote nadomestimo $\sin \varphi \sim \varphi$, dobimo enačbo nihanja. Krožno frekvenco $\omega = 2\pi/t_0$ izrazimo s predfaktorjem pri φ

$$\omega^2 = \frac{pB_h}{J} \quad \text{oziroma} \quad pB_h = \omega^2 J = \frac{4\pi^2 J}{t_0^2}$$

in tako dobimo dobimo eno zvezo med p in B_h .

Iz podatkov o odklonu kompasove igle, ki kaže vodoravno smer magnetnega polja, dobimo drugo zvezo med p in B_h . Iz postavitve magnetna glede na kompas vidimo, da sta vektorja $\vec{r}$ in $\vec{p}$ vzporedna, torej je na mestu kompasa magnetno polje magnetna $\vec{B}(\vec{r})$ pravokotno na vodoravno komponento magnetnega polja Zemlje B_h . Velja

$$\text{tg} \varphi_1 = \frac{B(r)}{B_h} \quad \text{oziroma} \quad \text{tg} \varphi_1 = \frac{2p\mu_0}{4\pi r^3 B_h},$$

kjer smo $B(r)$ izračunali po enačbi, podani v nalogi. Preoblikujemo in dobimo

$$\frac{p}{B_h} = \frac{2\pi r^3 \text{tg}\varphi_1}{\mu_0}.$$

Enačbi, ki povezujeta p in B_h , zmnožimo in rezultat korenimo, da dobimo

$$p = \frac{2\pi}{t_0} \sqrt{\frac{2\pi r^3 J \text{tg}\varphi_1}{\mu_0}} = 1,834 \text{ Am}^2 \approx 1,8 \text{ Am}^2.$$

Podobno z deljenjem teh dveh enačb in korenjenjem kvocienta dobimo

$$B_h = \frac{2\pi}{t_0} \sqrt{\frac{J\mu_0}{2\pi r^3 \text{tg}\varphi_1}} = 22162 \text{ nT} \approx 22 \cdot 10^{-6} \text{ T}.$$

c)

Ko kompas premaknemo za četrtno kroga, je postavljen tako, da je krajevni vektor $\vec{r}_2$ od magneta do kompasa pravokoten na $\vec{p}$, pri čemer seveda velja, da sta r in r_2 enako velika $r_2 = r$. Iz enačbe za izračun polja vidimo, da je polje magneta $B(\vec{r}_2)$ na mestu, kjer je sedaj kompas, po velikosti polovico $B(\vec{r})$ in ima nasprotno smer. V novi legi je komasova igla odklonjena glede na smer vodoravne komponente zemeljskega polja za kot φ_2 , a v drugo smer kot v prvotni legi zaradi spremembe predznaka polja magneta. Velja

$$\text{tg}\varphi_2 = \frac{B(\vec{r}_2)}{B_h} = \frac{B(\vec{r})}{2B_h} = \frac{1}{2} \text{tg}\varphi_1.$$

Dobimo $\varphi_2 = 10,9^\circ$ in kot zasuka kompasove igle

$$\Delta\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 31,9^\circ \approx 32^\circ.$$

Rešitve šolskega tekmovanja v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike za srednje šole

Rešitve 1. skupine: Poslovna matematika

1a.)

100 delavcev	9 mesecev	3320 t	8 ur/dan	100 %
↓	↓	↑	↑	↓
120 delavcev	6 mesecev	3320 t	x ur	108 %

$$X = \frac{8 \cdot 100 + 9 \cdot 3320 \cdot 100}{120 \cdot 6 + 332 \cdot 108} = \underline{\underline{9,26 \text{ ure}}}$$

Odg.: 120 delavcev bi morale delati 9,26 ure/dan, da bi spekli enako količino v pol leta.

1b.)

8 ur/dan		100 %
↑		↑
1,26 ure/dan		x %

$$X = \frac{1,26 \cdot 100}{8} = \underline{\underline{15,75 \%}}$$

Odg.: Delovnik bi se moral podaljšati za 15,75 %.

1c.)

100 delavcev	9 mesecih	3320 t	8 ur/dan
↑	↓	↑	↓
x delavcev	3 mesecih	870 t	7 ur/dan

$$x = \frac{100 * 9 * 870 * 8}{3 * 3320 * 7} = 89,85 \text{ delavca} \Rightarrow \underline{\underline{90 \text{ delavcev}}}$$

Odg.: Zaradi manjšega povpraševanja bodo morali odpustiti 10 delavcev.

2a.)

Izračun $\frac{1}{5}$ in preostanka

$$m_1 = \frac{1}{5} \text{ od } 150.000,00 = \underline{\underline{30.000,00 \text{ EUR}}}$$

$$m_2 (\text{preostanek}) = 150.000,00 - 30.000,00 = \underline{\underline{120.000,00 \text{ EUR}}}$$

Rešitev k tč. a) $m_1 = 30.000,00 \text{ EUR}$

$$A : B : C : D = 15.500 x + 20.300 x + 6.000 x + 18.200 x$$

$$60.000 x = 30.000,00$$

$$\underline{\underline{x = 0,5}}$$

$$A = 15.500 * 0,5 = \underline{\underline{7.750,00 \text{ EUR}}}$$

$$B = 20.300 * 0,5 = \underline{\underline{10.150,00 \text{ EUR}}}$$

$$C = 6.000 * 0,5 = \underline{\underline{3.000,00 \text{ EUR}}}$$

$$D = 18.200 * 0,5 = \underline{\underline{9.100,00 \text{ EUR}}}$$

2b.)

Rešitev k tč. b) $m_2 = 120.000,00 \text{ EUR}$

		Odgovor
A	6 x	13.090,91
B	$6 x + (\frac{1}{4} * 6 x) = 6 x + 1,5 x = 7,5 x$	16.363,64
C	x	2.181,82
D	$3 * (6 x + 7,5 x) = 3 * 13,5 x = 40,5 x$	88.363,64

$$A + B + C + D = 120.000,00$$

$$55 x = 120.000,00$$

$$\underline{\underline{x = 2.181,818181}}$$

Odgovor: Koliko sredstev je pridobil vsak turistični kraj?			
A	$7.750,00 + 13.090,91 =$	20.840,91	1 T
B	$10.150,00 + 16.363,64 =$	26.513,64	
C	$3.000,00 + 2.181,82 =$	5.181,82	
D	$9.100,00 + 88.363,64 =$	97.463,64	

3a.)

Smuči		Odgovor
A	x	30.000 smuči za alpsko smučanje
B	0,7 x	21.000 tekaških smuči
C	20 % od B = 0,2 * 0,7 x = 0,14 x	4.200 smuči za turno smuko

$$A + B + C = 55.200$$

$$1,84 \ x = 55.200$$

$$\underline{x = 30.000,00}$$

3b.)

$$\text{Končna cena smuči: } x = 880,00 * 0,75 * 0,88 = \underline{580,80}$$

$$\text{Cena smuči po prvi pocenitvi: } 880 * 0,75 = \underline{660,00 \text{ EUR}}$$

$$\Sigma \text{ popust} = \frac{(880,00 - 580,80) * 100}{880,00} = \underline{34 \%}$$

3c.)

Cena vozovnice pred 1 letom

$$489,00 \text{ EUR} \quad 103 \%$$



$$X \text{ EUR} \quad 100 \%$$

$$x = \frac{489 * 100}{103} = \underline{474,76 \text{ EUR}}$$

Cena vozovnice pred 2 letoma

$$474,76 \text{ EUR} \quad 103 \%$$



$$X \text{ EUR} \quad 100 \%$$

$$x = \frac{474,76 * 100}{103} = \underline{460,93 \text{ EUR}}$$

4a.)

$$G_1 = 20.000,00 \text{ EUR}$$

$$p_1 = 2,5 \%$$

$$l_1 = 3 \text{ leta}$$

$$G_1^+ = x \text{ EUR}$$

$$G_2 = 6.000,00 \text{ EUR}$$

$$p_2 = 1,8 \%$$

$$l_2 = 2 \text{ leti}$$

$$G_2^+ = x \text{ EUR}$$

$$o_1 = \frac{G \times p \times l}{100} = \frac{20.000,00 \times 2,5 \times 3}{100} = \underline{1.500,00 \text{ EUR}}$$

$$o_2 = \frac{6.000,00 \times 1,8 \times 2}{100} = \underline{216,00 \text{ EUR}}$$

$$G_1^+ = G_1 + o_1 = 20.000,00 + 1.500,00 = \underline{21.500,00 \text{ EUR}} \quad G_2^+ = \underline{6.216,00 \text{ EUR}}$$

$$\Sigma G^+ = (G_1^+ + G_2^+) = \underline{27.716,00 \text{ EUR}}$$

$$\text{Manjkajoči znesek: } 30.500,00 - 27.716,00 = \underline{2.784,00 \text{ EUR}}$$

4b.)

$$G^+ = 4.352,00 \text{ EUR}$$

$$G = 4.000,00 \text{ EUR}$$

$$o = 352,00 \text{ EUR}$$

$$m = 18 \text{ mesecev}$$

$$p = x \% \text{ (letna obrestna mera)}$$

$$p' = x \% \text{ (mesečna obrestna mera)}$$

$$o = \frac{G \times p \times m}{1200}$$

$$p = \frac{o \times 1200}{G \times m} = \frac{352,00 \times 1200}{4000,00 \times 18} = \underline{5,87 \%}$$

$$p' = \frac{p}{12} = \frac{5,87}{12} = \underline{0,49 \%}$$

Rešitve 2. skupine: Statistika

1a.)

Tabela 1: Dijaki srednje šole Bistra glava 1. septembra 2019

Spol	Izobraževalni program			Skupaj
	Gimnazija	Ekonomski tehnik	Predšolska vzgoja	
Fantje	230	61	36	327
Dekleta	218	85	185	488
Skupaj	448	146	221	815

1b.)

Tabela 2: Struktura dijakov srednje šole Bistra glava 1. septembra 2019

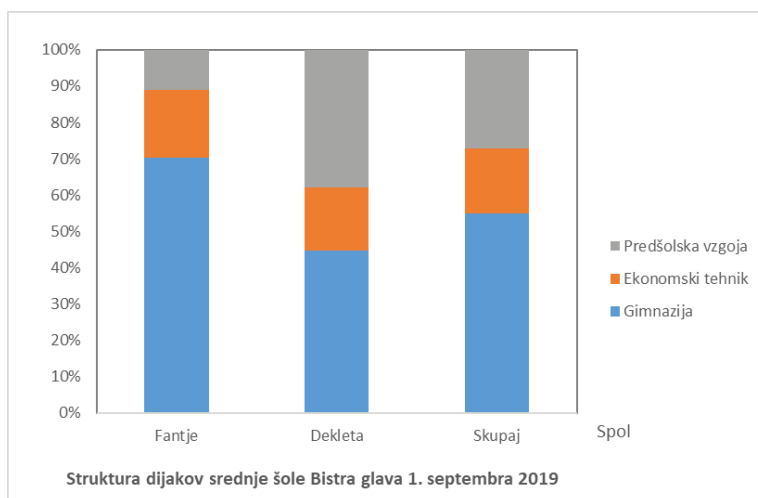
Spol	Izobraževalni program			Skupaj
	Gimnazija	Ekonomski tehnik	Predšolska vzgoja	
Fantje	70,3	18,7	11,0	100,0
Dekleta	44,7	17,4*	37,9	100,0
Skupaj	55,0	17,9	27,1	100,0

Program ekonomski tehnik je obiskovalo 17,4 % deklet.

1c.)

Spremenljivka	Vrsta spremenljivke
Spol	opisna spremenljivka
Izobraževalni program	opisna spremenljivka

1d.)



2a.)

Tabela 3: Število dijakov, strokovnih delavcev in srednjih šol v Sloveniji po šolskih letih

Šolsko leto	2016/2017	2017/2018	2018/2019
Število srednjih šol	156	145	143
Število strokovnih delavcev	7.470	7.454	7.250
Število dijakov	74.021	73.776	73.110
a)	48	51	51
b)	474	509	511

Vir: SURS, 2019

$$\text{Število strokovnih delavcev na šolo} = \frac{\text{število strokovnih delavcev}}{\text{število srednjih šol}}$$

2b.)

$$\text{Število dijakov na srednjo šolo} = \frac{\text{število dijakov}}{\text{število srednjih šol}}$$

2c.)

$$K = \frac{\text{povprečno število strokovnih delavcev}}{\text{povprečno število dijakov}} \cdot 100$$

$$\frac{7.391,33}{73.635,67} \cdot 100 = 10 \text{ strokovnih delavcev na 100 dijakov}$$

$$\begin{aligned} \text{Povprečno število strokovnih delavcev} &= \frac{7470 + 7454 + 7250}{3} = \frac{22.174}{3} \\ &= 7.391,33 \text{ strokovnega delavca} \end{aligned}$$

$$\text{Povprečno število dijakov} = \frac{774021 + 73776 + 73110}{3} = \frac{220.907}{3} = 73.635,67 \text{ dijaka}$$

2d.)

$$12 = \frac{y}{x} = \frac{672}{x} = 56 \text{ učiteljev}$$

3a.)

Tabela 4: **Bruto domači proizvod na prebivalca v Sloveniji v letih od 2008 do 2018**

Leto	BDP na prebivalca v EUR	a) V_j	c) $I_{j/2009}$	S_j v %
2008	18.757	-	105,63	-
2009	17.758	94,67	100,00	-5,33
2010	17.749	99,95	99,95	-0,05
2011	18.052	101,71	101,66	1,71
2012	17.626	97,64	99,26	-2,36
2013	17.700	100,42	99,67	0,42
2014	18.253	103,12	102,79	3,12
2015	18.830	103,16	106,04	3,16
2016	19.551	103,83	110,10	3,83
2017	20.809	106,43	117,18	6,43
2018	22.083	106,12	124,36	6,12

Vir: SURS, 2019

3b.)

Stopnja rasti je bila negativna v letih 2009, 2010 in 2012.

3d.)

$$BDP_{2021} = 22.083 \cdot 1,025 \cdot 1,03 \cdot 1,03 = 24.013,55 \text{ EUR na preb.}$$

4a.)

$$y_{3,min} = 6 - 0,5 = 5,5$$

$$d_3 = 8,5 - 5,5 = 3$$

4b.)

Tabela 5: **Frekvenčna porazdelitev števila zamud dijakov v mesecu oktobru šolskega leta 2019/2020**

Št. zamud	Št. dijakov	f_j	y_j	$y_j * f_j$
0–2	3	0,150	1	3
3–5	5	0,250	4	20
6–8	4	0,200	7	28
9–11	6	0,300	10	60
12–14	2	0,100	13	26
Skupaj	20	1,000		137

Vir: Izmišljeni podatki

4c.)

25 % dijakov je zamudilo k pouku od 3- do 5-krat.

4d.)

K pouku je 9- in večkrat zamudilo 40 % dijakov.

4e.)

$$M = \frac{137}{20} = 6,85 \text{ zamude na dijaka}$$

Rešitve 3. skupine

1a.)

$$186 - 18 - 114 = 54 \text{ kandidatov.}$$

1b.)

$$(5600 + 309) - (5337 + 135) = 437 \text{ kandidatov.}$$

1c.)

Število kandidatov, ki so pristopili:

$$1863 - 186 - 117 = 1560 \text{ kandidatov.}$$

Delež uspešnih kandidatov:

$$100 \% - 23,974 \% = 76,026 \%.$$

Število uspešnih kandidatov:

$$1560 \cdot 0,76026 = 1186 \text{ kandidatov.}$$

1d.)

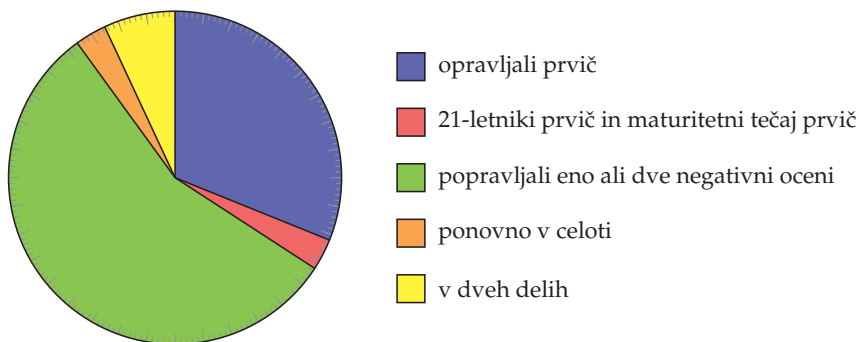
Pristopilo je $218 + 3 = 221$ kandidatov, uspešnih je bilo $91 + 2 = 93$ kandidatov.

Delež uspešnih je bil $\frac{93}{221} = 0,42081 = 42,081 \%$.

1e.)

Maturo je opravilo $135 + 13 + 242 + 13 + 30 = 433$ kandidatov, med njimi:

- opravljali prvič: $360^\circ \cdot \frac{135}{433} = 112,24^\circ \approx 112^\circ$,
- 21-letniki prvič in maturitetni tečaj prvič: $360^\circ \cdot \frac{13}{433} = 10,81^\circ \approx 11^\circ$,
- popravljali eno ali dve negativni oceni: $360^\circ \cdot \frac{242}{6875} = 201,20^\circ \approx 201^\circ$,
- ponovno v celoti: $360^\circ \cdot \frac{13}{433} = 10,81^\circ \approx 11^\circ$,
- v dveh delih: $360^\circ \cdot \frac{30}{433} = 24,94^\circ \approx 25^\circ$.



1f.)

Število maturantov, ki so dosegli 34 točk:

$$6022 \cdot 0,043507 \cdot 0,03817 = 10 \text{ kandidatov.}$$

2a.)

Glavnica kredita je $G = 30\,000 \text{ €}$, višino obroka označimo z a .

Obrestna mera je $p\% = 4,8\%$, mesečni obrestni faktor je $r = \sqrt[12]{1 + \frac{p}{100}} = \sqrt[12]{1,048}$.

Denarne tokove prikazuje spodnja shema.



Redukcijski termin postavimo na konec 10. leta.

Z načelom ekvivalence glavnice dobimo

$$Gr^{120} = ar^{119} + ar^{118} + \dots + ar + a$$

$$Gr^{120} = a(r^{119} + r^{118} + \dots + r + 1)$$

$$Gr^{120} = a \cdot \frac{r^{120} - 1}{r - 1}$$

$$a = Gr^{120} \cdot \frac{r - 1}{r^{120} - 1}$$

$$a = 30\,000 \cdot \sqrt[12]{1,048}^{-120} \cdot \frac{\sqrt[12]{1,048} - 1}{\sqrt[12]{1,048}^{120} - 1} = 313,78 \text{ €}.$$

Mesečni obrok znaša 313,78 €.

2b.)

1. način:

Začetno glavnico in prvih 24 obrokov naobrestimo na dve leti po najemu kredita.

$$\begin{aligned} G_1 &= Gr^{24} - ar^{23} - ar^{22} - \dots - ar - a \\ &= Gr^{24} - a(r^{23} + r^{22} + \dots + r + 1) \\ &= Gr^{24} - a \cdot \frac{r^{24} - 1}{r - 1} \\ &= 30\,000 \cdot \sqrt[12]{1,048}^{24} - 313,78 \cdot \frac{\sqrt[12]{1,048}^{24} - 1}{\sqrt[12]{1,048} - 1} = 25\,069,45 \text{ €}. \end{aligned}$$

Preostali dolg znaša 25 069,45 €.

2. način:

Preostalih 96 obrokov razobrestimo na dve leti po najemu kredita.

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \dots + \frac{a}{r^{95}} + \frac{a}{r^{96}} \\ &= \frac{a}{r^{96}}(r^{95} + r^{94} + \dots + r + 1) \\ &= \frac{a}{r^{96}} \cdot \frac{r^{96} - 1}{r - 1} \\ &= \frac{313,78}{\sqrt[12]{1,048}^{96}} \cdot \frac{\sqrt[12]{1,048}^{96} - 1}{\sqrt[12]{1,048} - 1} = 25\,069,45 \text{ €}. \end{aligned}$$

2c.)

Dve leti po najemu kredita Kajin dolg znaša $G_1 = 25\,069,45 \text{ €}$

Višino obroka po moratoriju označimo z b .

Nove denarne tokove prikazuje spodnja shema.



Z načelom ekvivalence glavnici dobimo

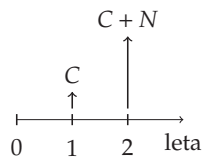
$$\begin{aligned} G_1 r^{96} &= br^{83} + br^{82} + \dots + br + b \\ G_1 r^{96} &= b(r^{83} + r^{82} + \dots + r + 1) \\ G_1 r^{96} &= b \cdot \frac{r^{84} - 1}{r - 1} \\ b &= G_1 r^{96} \cdot \frac{r - 1}{r^{84} - 1} \\ b &= 25\,069,45 \cdot \sqrt[12]{1,048}^{96} \cdot \frac{\sqrt[12]{1,048} - 1}{\sqrt[12]{1,048}^{84} - 1} = 367,61 \text{ €}. \end{aligned}$$

Mesečni obrok po moratoriju znaša 367,61 €.

3a.)

Ceno obveznice dobimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov.

Kuponska obveznica izplača kupon $C = 3,70 \text{ €}$ čez eno leto ter kupon C skupaj z nominalno vrednostjo $N = 100 \text{ €}$ čez dve leti.

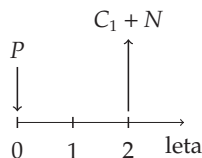


$$\begin{aligned} P &= C \cdot D(0, 1) + (C + N) \cdot D(0, 2) = \\ &= \frac{C}{1 + R(0, 1)} + \frac{C + N}{(1 + R(0, 2))^2} = \\ &= \frac{3,7}{1 + 0,02} + \frac{103,7}{(1 + 0,04)^2} = 99,50 \text{ €} \end{aligned}$$

3b.)

Obveznica izplača kupon C_1 skupaj z nominalno vrednostjo $N = 100 \text{ €}$ čez dve leti.

Cena obveznice je $P = 99,50 \text{ €}$.



S formulo za vrednotenje obveznice dobimo

$$P = (C_1 + N) \cdot D(0, 2) = \frac{C_1 + N}{(1 + R(0, 2))^2}$$

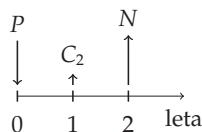
in

$$C_1 = P(1 + R(0, 2)) - N = 99,5 \cdot (1 + 0,04)^2 - 100 = 7,62 \text{ €}.$$

3c.)

Obveznica izplača kupon C_2 čez eno leto in nominalno vrednost $N = 100 \text{ €}$ čez dve leti.

Cena obveznice je $P = 99,50 \text{ €}$.



S formulo za vrednotenje obveznice dobimo

$$P = C_2 \cdot D(0, 1) + N \cdot D(0, 2) = \frac{C_2}{1 + R(0, 1)} + \frac{N}{(1 + R(0, 2))^2}$$

in

$$C_2 = (1 + R(0, 1)) \left(P - \frac{N}{(1 + R(0, 2))^2} \right) = (1 + 0,02) \cdot \left(99,5 - \frac{100}{(1 + 0,04)^2} \right) = 7,19 \text{ €}.$$

3d.)

Obveznica z zaostalim kuponom izplača kupon $C_3 = 12 \text{ €}$ skupaj z nominalno vrednostjo $N = 100 \text{ €}$ čez dve leti.

Z upoštevanjem obrestnega pribitka njena cena znaša

$$P_1 = (C_3 + N) \cdot \bar{D}(0, 2) = \frac{C_3 + N}{(1 + R(0, 2) + x)^2} = \frac{112}{(1,04 + x)^2}.$$

Obveznica s pospešenim kuponom izplača kupon $C_4 = 11 \text{ €}$ čez eno leto in nominalno vrednost $N = 100 \text{ €}$ čez dve leti.

Njena cena znaša

$$\begin{aligned} P_1 &= C_4 \cdot \bar{D}(0, 1) + N \cdot \bar{D}(0, 2) = \frac{C_4}{1 + R(0, 1) + x} + \frac{N}{(1 + R(0, 2) + x)^2} = \\ &= \frac{11}{1,02 + x} + \frac{100}{(1,04 + x)^2}. \end{aligned}$$

Z enačenjem dobimo

$$\begin{aligned} \frac{112}{(1,04 + x)^2} &= \frac{11}{1,02 + x} + \frac{100}{(1,04 + x)^2} \\ \frac{12}{(1,04 + x)^2} &= \frac{11}{1,02 + x} \\ 12(1,02 + x) &= 11(1,04 + x)^2 \\ 11x^2 + 10,88x - 0,3424 &= 0 \end{aligned}$$

Kvadratna enačba ima diskriminanto $D = 133,44$ in rešitvi $x_1 = 0,0305$ in $x_2 = -1,0196$.

Druga rešitev je nesmiselna, prva nam da pribitek $x = 3,05 \%$.

4a.)

Obrestna mera je $R = 1 \%$.

Ročnost terminskega posla je 3 mesece, to je $T = \frac{1}{4}$ leta.

Izročitvena cena bitcoina je $K = 7245 \text{ \$}$.

Za izročitveno ceno v terminskem poslu mora veljati

$$K = S_0(1 + R)^T,$$

kjer je S_0 trenutna cena bitcoina. Dobimo

$$S_0 = \frac{K}{(1 + R)^T} = \frac{7245}{1,01^{1/4}} = 7227 \text{ \$}.$$

4b.)

Skleniti mora $\frac{100}{5} = 20$ terminskih poslov.

4c.)

Vrednost posameznega termenskega posla ob ročnosti za podjetje (kratka pozicija) znaša

$$5 \cdot (K - S_T),$$

kjer je $K = 7245$ \$ izročitvena cena bitcoina v terminskem poslu, S_T pa cena bitcoina na trgu na dan ročnosti posla.

Če bo $K > S_T$, je vrednost termenskega posla pozitivna in podjetje znesek prejme.

Če vo $K < S_T$, je vrednost termenskega posla negativna in podjetje znesek plača.

i. Če bo cena bitcoina enaka $S_T = 8123$ \$, bo s prodajo bitcoinov podjetje zaslužio

$$100 \cdot S_T = 812\,300 \$.$$

Za zaprtje terminskih poslov bo morale plačati

$$20 \cdot 5 \cdot (8123 - 7245) = 87\,800 \$.$$

ii. Če bo cena bitcoina enaka $S_T = 6238$ \$, bo s prodajo bitcoinov podjetje zaslužio

$$100 \cdot S_T = 623\,800 \$.$$

Ob zaprtju terminskih poslov bo prejelo

$$20 \cdot 5 \cdot (7245 - 6238) = 100\,700 \$.$$

Opomba: V obeh primerih podjetje dobi 724 500 \$ za 100 bitcoinov. Z nakupom terminskih poslov si že danes zagotovi prihodnjo prodajno ceno bitcoina.

4d.)

Ker je cena bitcoina na trgu nižja od 7227 \$, je arbitražna strategija naslednja:

Danes (6. marca 2020, $t = 0$):

- Podjetje si na banki za 3 mesece sposodi 717 100 \$,
- na trgu kriptovalut kupi 100 bitcoinov,
- na borzi sklene 20 terminskih poslov za prodajo bitcoinov čez 3 mesece po izročitveni ceni 7245 \$.

Netiran denarni tok je enak 0.

Čez 3 mesece (6. junija 2020, $t = T = \frac{1}{4}$):

- Podjetje proda 100 bitcoinov po izročitveni ceni, kot mu omogočajo terminski posli (ekvivalentno: proda bitcoine na trgu kriptovalut in z denarno poravnavo zapre terminske posle),
- banki vrne sposojeno glavnico z obrestmi.

Netiran denarni tok je

$$100 \cdot 7245 - 717\,100 \cdot 1,01^{1/4} = 5613,93 \$.$$

Arbitražni zaslužek znaša 5613,93 \$ in je ustvarjen ob ročnosti terminskih poslov.