

Tekmovanja

17. tekmovanje v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike – državno tekmovanje

1. skupina: Poslovna matematika

1. NALOGA

V smučarskem središču so pripravili 3 smučarske proge, vsako dolžine 1,5 kilometra in debeline snega 50 centimetrov. Delo je 6 ur opravljalo 15 delavcev, pomagali so si s 3 stroji.

- a) Zaradi bližajočih se praznikov in 30 centimetrov na novo zapadlega snega so se odločili, da obstoječe proge podaljšajo za 40 % ter dodatno uredijo še dve smučarski progi nove dolžine in na delo pokličejo še 3 delavce, ki so delo opravljali 7 ur na dan. Koliko dodatnih strojev še potrebujejo?
- b) V kolikšnem času bi uredili 4 proge dolžine 2 kilometra in debeline snega 70 cm, če bi zapadlo 15 % manj snega od napovedanega, delo pa bi opravljalo 12 delavcev; pomagali bi si s 7 stroji, ki so 20 % zmogljivejši?

2. NALOGA

Štirje fantje so za sedem dni odšli na morje. Dogovorili so se, da bodo zbrali 1.000,00 EUR za kritje stroškov potovanja.

Ključ razdelitve je:

- A. 42 % znaša cena najema apartmaja,
- B. $\frac{1}{5}$ znaša vožnja s trajektom,
- C. $\frac{1}{10}$ je cena goriva,
- D. ostanek za sprotne stroške.

Koliko denarja še mora prispevati posamezni fant, če so se dogovorili, da četrti fant plača rezervacijo apartmaja 120,00 EUR, preostanek si ostali trije razdelijo na enake dele, ceno prevoza s trajektom delijo na enake dele, gorivo napolnita v avtomobil prvi in drugi fant vsak po 25,00 EUR, razliko si razdelita preostala fanta tako, da tretji, ki je lastnik avtomobila, plača 20,00 EUR manj od četrtega?

Dogovorili so se, da za sprotne stroške največ prispeva prvi fant (ker ima najvišjo štipendijo), ostali pa vsak naslednji za 10,00 EUR manj od prejšnjega.

3. NALOGA

Bruto domači proizvod (BDP) neke države se je spreminjal takole:

letna rast BDP za leto 2015 je bila 1,5 %, za leto 2016 2,5 %, v letu 2017 se je BDP zmanjšal za 1,2 %, v letu 2018 pa se je zopet povečal za 972,29 EUR na prebivalca in je 31.dec. 2018 znašal 20.815,00 EUR na prebivalca.

- Izračunajte, koliko je znašal bruto domači proizvod na prebivalca (BDP/prebivalca) na dan 31. decembra 2014, 31. decembra 2016 in 31. decembra 2017.
Izračunajte tudi, kolikšna je bila letna rast BDP/preb. v letu 2018 v odstotkih.
- Vlada te države napoveduje za leto 2019 še večjo rast BDP na prebivalca kot v letu 2018. Kolikšna bi morala biti letna odstotna rast BDP na prebivalca, da bi na dan 31. dec. 2019 ta znašal 22.000,00 EUR?
Kakšen bo BDP na prebivalca v letu 2021, če predvidevamo, da bo stopnja rasti v letih 2020 in 2021 enaka kot v letu 2019?
- Za koliko odstotnih točk bo letna rast BDP/preb. v letu 2019 večja / manjša v primerjavi z rastjo BDP/preb. v letu 2018? Izračunajte in zapišite odgovor.

4. NALOGA

- Začetna glavnica 520,00 EUR je v 11 mesecih narasla na 542,64 EUR. Izračunajte letno in mesečno obrestno mero, če banka uporablja navadni obrestni račun.
- Danes vložimo v banko 2.500,00 EUR, čez tri leta bomo vložili še 3.000,00 EUR, nato pa čez pet let dvignili 2.500,00 EUR. Kakšno bo stanje na našem računu na koncu 15. leta, če pri celoletni kapitalizaciji in obrestnem obrestovanju banka prvih pet let obrestuje po 2,55 % letno, nato štiri leta po 3,25 %, naprej pa po 4,25 %?
- Po kakšni letni obrestni meri se je obrestovala glavnica 1.500,00 EUR, če je pri obrestnem obrestovanju in letni kapitalizaciji v desetih letih dala sama sebi enake obresti?

2. skupina: Statistika

1. NALOGA

Tabela 1: **Dijaki Srednje šole Brihta po oddelkih in spolu 1. 9. 2018**

Letnik izobraževanja	Spol		Skupaj
	Moški	Ženske	
1.	24	32	
2.		29	50
3.			47
4.	19	27	46
Skupaj	83		199

Vir: Izmišljeni podatki

- V tabeli 1 smo po pomoti izbrisali nekaj podatkov. Dopolnite tabelo 1 tako, da izračunate manjkajoče vrednosti.

- b) Izračunajte strukturo dijakov Srednje šole Brihta po spolu. (Strukturne odstotke zaokrožite na dve decimalni mesti natančno in jih vpišite v tabelo 2.)

Tabela 2: **Struktura dijakov Srednje šole Brihta po spolu 1. 9. 2018**

Letnik izobraževanja	Spol		Skupaj
	Moški	Ženske	
1.			
2.			
3.	40,43		
4.			
Skupaj			

- c) Razložite izračunana kazalca za 2. letnik v tabeli 2.
- d) S strukturnima krogoma grafično prikažite strukturo dijakov po spolu za 1. in 4. letnik Srednje šole Brihta. Upoštevajte, da je polmer kroga za 1. letnik enak 4 cm.

2. NALOGA

Za podjetje ABC, d. o. o. poznamo podatke o številu zaposlenih in številu dni bolniških odsotnosti z dela.

Tabela 3: **Zaposleni in število dni bolniških odsotnosti z dela v podjetju ABC, d. o. o.**

Mesec	Število zaposlenih konec meseca	Število dni bolniških odsotnosti z dela
December 2018	67	-
Januar 2019	70	44
Februar 2019	73	29
Marec 2019	69	32

Vir: izmišljeni podatki

- a) Izračunajte povprečno mesečno število dni bolniške odsotnosti na 10 zaposlenih v tem podjetju za 1. četrtoletje leta 2019. (Rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti natančno.)
- b) Koliko dni bolniške odsotnosti na 10 zaposlenih lahko v tem podjetju pričakujejo na letni ravni v letu 2019, če predvidevajo, da bo enaka kot v prvem trimesečju. (Število dni bolniške odsotnosti zaokrožite na celo število.)
- c) V letu 2019 predvidevamo v zadnjem trimesečju upokojitev šestih zaposlenih (2 zaposlena se bosta upokojila v mesecu oktobru, 4 zaposleni pa v mesecu decembru). Izračunajte povprečno mesečno število dni bolniške odsotnosti za leto 2019, če se povprečno mesečno število dni bolniške odsotnosti na zaposlenega do konca leta ne bo spremenilo, razen upokojitev. (Število dni bolniške odsotnosti zaokrožite na celo število.)
- d) V mesecu marcu 2019 je bil vsak 34. zaposleni udeležen v nesreči pri delu. Koliko nesreč pri delu se je zgodilo v tem podjetju v mesecu marcu 2019? (Število nesreč pri delu zaokrožite na celo število.)

3. NALOGA

Na Statističnem uradu Republike Slovenije smo pridobili podatke o hitrorastočih podjetjih in številu zaposlenih v teh podjetjih za obdobje od leta 2011 do 2016.

Tabela 4: **Število hitrorastočih podjetij in število zaposlenih v hitrorastočih podjetjih v Sloveniji v letih od 2011 do 2016**

Leto	Število hitrorastočih podjetij	Število zaposlenih	V _j za število zaposlenih	b)
2011	4		-	
2012	8		149,8	
2013	8		156,0	
2014	4	333	67,5	
2015	10		173,6	
2016	10		158,6	

Vir: Statistični urad RS

- a) Izračunajte število zaposlenih po posameznih letih, če je bilo leta 2014 v hitrorastočih podjetjih zaposlenih 333 ljudi. (*Število zaposlenih zaokrožite na celo število.*)
- b) Izračunajte spremembe v številu hitrorastočih podjetij glede na leto 2013. Rezultate vpišite v prazni stolpec tabele 4.
- c) Razložite izračunana kazalca pod točko b za leti 2011 in 2016.
- d) Koliko hitrorastočih podjetij je bilo v letu 2017, če se je število le-teh v primerjavi s prejšnjim letom zmanjšalo za 11,3 %? (*Število hitrorastočih podjetij zaokrožite na celo število.*)
- e) Koliko hitrorastočih podjetij lahko predvidevamo leta 2020, če se bo njihovo število od leta 2016 do 2020 letno povečevalo za 2 %? (*Število hitrorastočih podjetij zaokrožite na celo število.*)

4. NALOGA

Revija Manager vsako leto sestavi lestvico najbogatejših Slovencev. Podatki o najbogatejših Slovencih in njihovem premoženju so prikazani v tabeli 5.

Tabela 5: Najbogatejši Slovenci po ocenjeni vrednosti premoženja v letu 2018

Mesto na lestvici najbogatejših	Ime in priimek	Ocenjena vrednost premoženja zaokrožena na milijon EUR
1.	Iza in Samo Login	več kot 200
2.	Sandi Češko	
3.	Marko Pistotnik	
4.	Joc Pečečnik	194
5.	Tatjana in Albin Doberšek	183
6.	Lah, družina	152
7.	Igor Akrapović	129
8.	Damian Merlak	124
9.	Gabriel in Petra Rejc	118
10.	Bogomir Strašek	105

- a) Koliko znaša mediana ocenjenega premoženja desetih najbogatejših Slovencev? Rezultat razložite. (Rezultat zaokrožite na dve decimalni mesti natančno.)
- b) Za podatke o ocenjeni vrednosti premoženja najbogatejših Slovencev v tabeli 5 sestavite frekvenčno porazdelitev, ki bo vsebovala 4 razrede. Spodnja meja prvega razreda bo 101 milijon evrov, širine prvih treh razredov pa naj bodo 30.

Tabela 6: Frekvenčna porazdelitev ocenjene vrednosti premoženja najbogatejših Slovencev v letu 2018

- c) Skupno premoženje 100 najbogatejših Slovencev je v letu 2018 doseglo 5,7 milijarde evrov. Delež treh najbogatejših Slovencev je znašal 21,63 %. Koliko je znašala povprečna ocenjena vrednost premoženja desetih najbogatejših Slovencev?
- d) Ali katere izmed srednjih vrednosti ne moremo določiti iz danih podatkov? Odgovor utemeljite.

3. skupina

1. V tabelah sta predstavljeni sestavi delniških indeksov Alfa in Beta na dan 31. 12. 2018. Indeks Alfa sestavlja šest delnic, indeks Beta pa tri delnice različnih podjetij.

Tržna kapitalizacija podjetja je produkt števila njegovih delnic na trgu in trenutne cene delnice. *Vrednost delniškega indeksa* je tehtano povprečje cen delnic glede na deleže tržnih kapitalizacij posameznih podjetij v skupni tržni kapitalizaciji podjetij, katerih delnice sestavljajo indeks.

Indeks Alfa

Podjetje	Cena delnice	Število delnic	Tržna kapitalizacija	Delež v skupni tržni kapitalizaciji
Ananas	9,63 €	3950		34,24 %
Banana	13,42 €		36 234 €	
Citrus				
Datelj	11,90 €		35 343 €	19,04 %
Figa			11 583 €	
Grenivka				8,32 %

Indeks Beta

Podjetje	Cena delnice	Število delnic	Tržna kapitalizacija	Delež v skupni tržni kapitalizaciji
Hruška	5,10 €	1800	9180 €	31,25 %
Jagoda		510		
Kivi	0,90 €	4080	3672 €	

V nalogi število delnic zaokroži na celo število, ostale vrednosti pa na dve decimalni mesti.

- a) Dopolni tabelo za **indeks Beta** in izračunaj njegovo vrednost na dan 31. 12. 2018. [4 točke]
- b) Najvišji dovoljen delež posameznega podjetja v skupni tržni kapitalizaciji indeksa Alfa je 40 %. Za koliko odstotkov bi lahko zrasla cena tiste delnice v indeksu Alfa, ki je temu deležu trenutno najbližje, da bi dosegla najvišji dovoljeni delež? Pri tem predpostavi, da bi cene ostalih delnic ostale nespremenjene.
- c) Koliko delnic imata na trgu podjetji Figa in Grenivka, če vemo da je cena delnice podjetja Figa za 39 € višja od cene delnice podjetja Grenivka, hkrati pa ima podjetje Grenivka na trgu dvakrat toliko delnic kot podjetje Figa?
- d) Podjetje Hruška se umakne z borze z vsemi svojimi delnicami. Kolikšna bo nova vrednost indeksa Beta, če ceni in števili delnic ostalih podjetij ostanejo nespremenjene?
2. Za nakup novega stanovanja pri banki najamemo stanovanjski kredit v višini 60 000 €. Kredit bomo povrnili v 10 letih v enakih mesečnih obrokih. Prvi obrok bo plačan en mesec, zadnji pa 10 let po najemu kredita. Banka uporablja konformno mesečno obrestovanje in 4 % letno obrestno mero.
- a) Kolikšna je višina posameznega obroka?

- b) Koliko dolgujemo banki eno leto po najemu kredita, takoj po plačilu 12. obroka?
- c) Kdaj prvič banki dolgujemo manj kot polovico začetnega dolga?
3. Na trgu obstajajo tri obveznice, vse imajo nominalno vrednost 100 €. Ena obveznica je brezkuponska, dve pa sta kuponski in sta pravkar izplačali letne kupone. Brezkuponska obveznica ima dospelje čez eno leto in donosnost do dospelja 1,75 %. Druga obveznica ima dospelje čez dve leti, izplačuje kupone po 5 % kuponski obrestni meri in ima donosnost do dospelja 2,69 %. Tretja obveznica ima dospelje čez tri leta, izplačuje kupone po 10 % kuponski obrestni meri in ima donosnost do dospelja 3,15 %.

Donosnost do dospelja obveznice je konstantna efektivna obrestna mera, pri kateri je sedanja vrednost prihodnjih denarnih tokov obveznice enaka trenutni ceni obveznice.

- a) Določi trenutne cene obveznic. Rezultate v evrih zaokroži na dve decimalni mesti.
- b) Vlagateljica želi na obvezniškem trgu vložiti 80 000 €. Polovico zneska vloži v brezkuponske obveznice, polovico pa v kuponske obveznice z dospeljem čez 2 leti. Določi njen portfelj in izplačili, ki ju vlagateljica prejme čez eno in dve leti. Število posameznih obveznic zaokroži na celo število, izplačili v evrih pa na dve decimalni mesti.
- c) Določi donosnost do dospelja vlagateljčinega portfelja obveznic. Rezultat v odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.
- d) Vlagatelj želi vložiti 164 000 € v vse tri obveznice tako, da bo čez eno, dve in tri leta prejel enak znesek. Določi portfelj obveznic in prejeti znesek. Število posameznih obveznic zaokroži na celo število, znesek v evrih pa na dve decimalni mesti.
4. Delnica podjetja Banana je danes vredna 13,42 €. Vemo, da bo podjetje čez šest mesecev izplačalo dividendo v višini 0,55 € na delnico. Netvegana efektivna obrestna mera pri zveznem obrestovanju znaša 2,50 % za vsa dospelja.

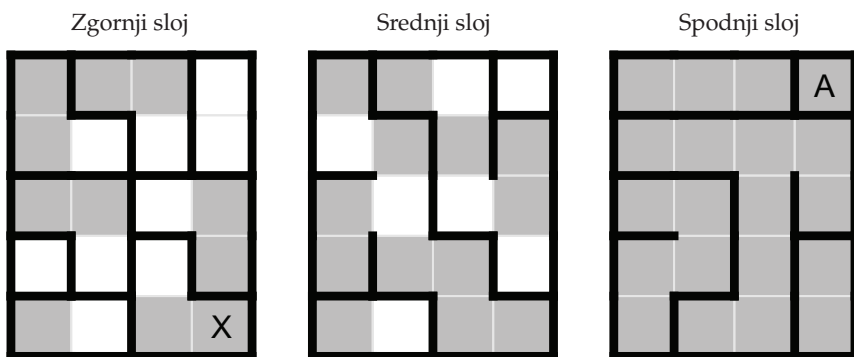
Finančno podjetje želi izdati evropsko nakupno in evropsko prodajno opcijo na delnico podjetja Banana z zapadlostjo čez 9 mesecev in izvršilno ceno 14,50 €.

- a) Kakšnim pogojem mora ustrezati premija evropske prodajne opcije?
- b) Kakšnim pogojem mora ustrezati premija evropske nakupne opcije?
- c) Takoj po izdaji se je na trgu za prodajno opcijo izoblikovala premija 1,75 €. Koliko bi morala znašati premija nakupne opcije, da na trgu ne bi bilo arbitražne priložnosti?
- d) Takoj po izdaji opcij sta se na trgu oblikovali ceni 1,75 € za prodajno opcijo in 0,25 € za nakupno opcijo, zato je možna arbitraža. Poišči arbitražno strategijo, ki jo lahko izvede finančno podjetje, ki lahko kupi, izda ali kratko proda katerikoli finančni instrument.
- Kratka prodaja* pomeni, da (začasno) prodamo delnico, ki je v resnici sami nimamo, temveč smo si jo sposodili. Če delnica v času kratke prodaje izplača dividendo, prvotnemu lastniku delnice dividendo izplačamo mi.

29. tekmovanje iz razvedrilne matematike – državno tekmovanje

6. in 7. razred osnovne šole

1. Labirint v kvadru

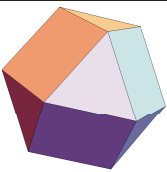
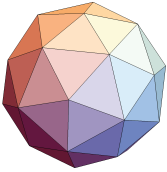
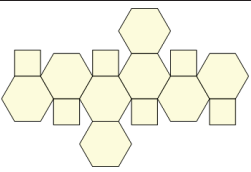


Kvader sestoji iz vodoravnih slojev kockastih oddelkov. Odebeljene črte preprečujejo prehajanje med sosednjima oddelkoma istega sloja. Med oddelkom in oddelkom neposredno pod njim lahko prehajamo (v obe smeri), če in samo če je zgornji pobarvan belo.

Poišči najkrajšo pot med oddelkoma, označenima s črkama A in X. Pot označi z zaporednimi naravnimi števili tako, da oddelek s črko A ali X označiš z 1, vsak naslednji sosednji oddelek (kocko) pa z 1 večjim številom.

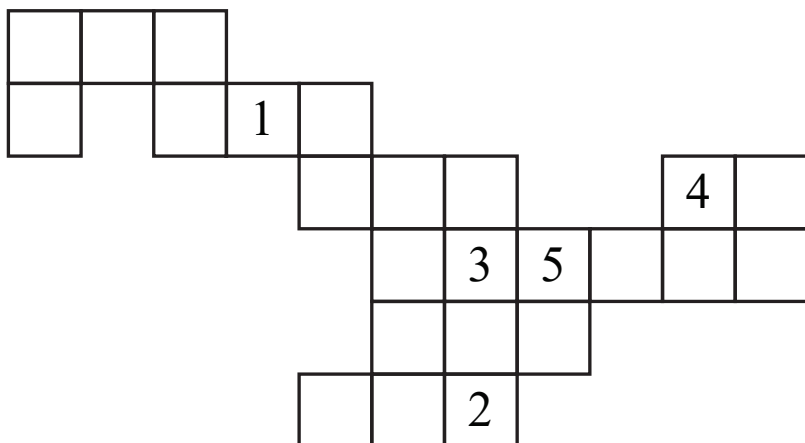
2. Poliedri

Dani so trije poliedri. Izpolni spodnjo preglednico! Upoštevaj, da imajo poliedri čim večjo simetrijo in da se na prvih dveh slikah vidi približno polovica poliedra.

Polieder			
Število mejnih ploskev			
Število oglišč			
Število robov			

3. Razrezana kocka

Vsako ploskev kocke, sestavljene iz papirja, razdelimo na 4 enake kvadratke. Nato papir prerežemo vzdolž nekaterih stranic kvadratkov (ne nujno po robovih kocke), tako da dobimo mrežo kocke in da mreža ostane v enem kosu. Mrežo položimo na mizo. V kvadratke vpiši naravna števila od 1 do 6, tako da bodo enako označeni kvadratki ležali na isti ploskvi kocke, različno označeni pa na različnih ploskvah.



4. Načrt naselja

Spodnji kvadrat predstavlja naselje, v katerem so hiše visoke 1, 2, 3, 4, 5 ali 6 nadstropij. Pri tem so v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu zastopane vse višine. Števila ob kvadratu povejo, koliko različnih hiš vidimo v ustrezni vrstici oziroma stolpcu, če to vrstico oziroma stolpec pogledamo od zelo daleč. Na primer: Oseba A vidi v prvi vrstici natanko 4 hiše, oseba B pa v zadnji vrstici natanko 3 hiše. V vsak kvadrateg vpiši število nadstropij, ki jih ima hiša, ki stoji tam.

		4	3	2	4	1	3	
A	4							2
	2							2
	2							1
	3							2
	1							3
	2							3
		2	1	2	2	3	2	B

5. Kriptaritem

V spodnjem računu različne črke predstavljajo različne številke. Nobeno število se ne začne s številko 0. S katerimi številkami moramo zamenjati črke, tako da bo račun pravilen?

$$\begin{array}{cccc}
 & A & B & C & D \\
 + & A & B & C & D \\
 + & A & B & C & D \\
 + & A & B & C & D \\
 \hline
 & D & C & B & A
 \end{array}$$

A:_____

B:_____

C:_____

D:_____.

6. Magični kvadrat

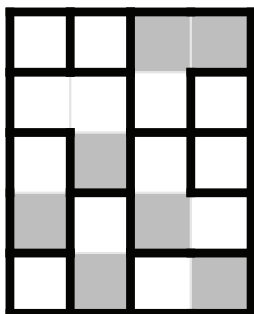
V vsak prazen kvadraterk vpiši po eno od naravnih števil od 1 do 16, tako da bo v kvadratu napisanih vseh 16 števil in bo vsota števil v vsaki vrstici, vsakem stolpcu in po obeh diagonalah kvadrata enaka 34.

	16	5	
1		8	
15			

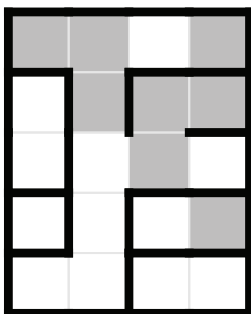
8. in 9. razred osnovne šole

1. Labirint v kvadru

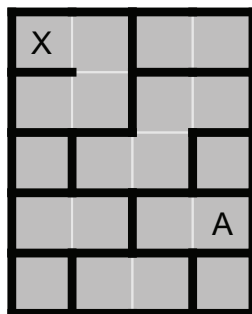
Zgornji sloj



Srednji sloj



Spodnji sloj

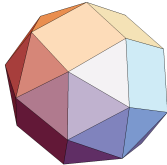
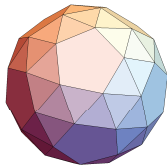
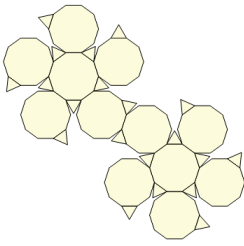


Kvader sestoji iz vodoravnih slojev kockastih oddelkov. Odebeljene črte preprečujejo prehajanje med sosednjima oddelkoma istega sloja. Med oddelkom in oddelkom neposredno pod njim lahko prehajamo (v obe smeri), če in samo če je zgornji pobarvan belo.

Poišči najkrajšo pot med oddelkoma, označenima s črkama A in X. Pot označi z zaporednimi naravnimi števili tako, da oddelek s črko A ali X označiš z 1, vsak naslednji sosednji oddelek (kocko) pa z 1 večjim številom.

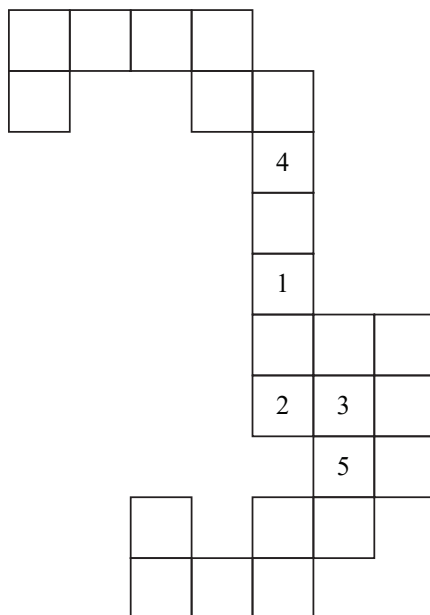
2. Poliedri

Dani so trije poliedri. Izpolni spodnjo preglednico! Upoštevaj, da imajo poliedri čim večjo simetrijo in da se na prvih dveh slikah vidi približno polovica poliedra.

			
Polieder			
Število mejnih ploskev			
Število oglišč			
Število robov			

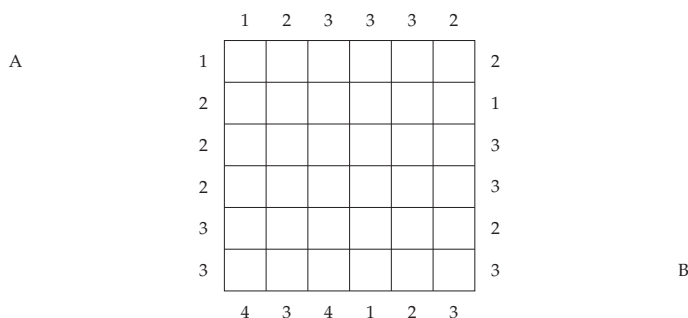
3. Razrezana kocka

Vsako ploskev kocke, sestavljene iz papirja, razdelimo na 4 enake kvadratke. Nato papir prerežemo vzdolž nekaterih stranic kvadratkov (ne nujno po robovih kocke), tako da dobimo mrežo kocke in da mreža ostane v enem kosu. Mrežo položimo na mizo. V kvadratke vpiši naravna števila od 1 do 6, tako da bodo enako označeni kvadrati ležali na isti ploskvi kocke, različno označeni pa na različnih ploskvah.



4. Načrt naselja

Spodnji kvadrat predstavlja naselje, v katerem so hiše visoke 1, 2, 3, 4, 5 ali 6 nadstropij. Pri tem so v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu zastopane vse višine. Števila ob kvadratu povejo, koliko različnih hiš vidimo v ustrezni vrstici oziroma stolpcu, če to vrstico oziroma stolpec pogledamo od zelo daleč. Na primer: Oseba A vidi v prvi vrstici natanko 1 hišo, oseba B pa v zadnji vrstici natanko 3 hiše. V vsak kvadrateg vpiši število nadstropij, ki jih ima hiša, ki stoji tam.



5. Kriptaritem

V spodnjem računu različne črke predstavljajo različne števke. Nobeno število se ne začne s števk 0. S katerimi števki moramo zamenjati črke, tako da bo račun pravilen?

$$\begin{array}{rcccc} & A & B & C & D \\ + & E & F & G & B \\ \hline E & F & C & B & H \end{array}$$

A:_____

B:_____

C:_____

D:_____

E:_____

F:_____

G:_____

H:_____.

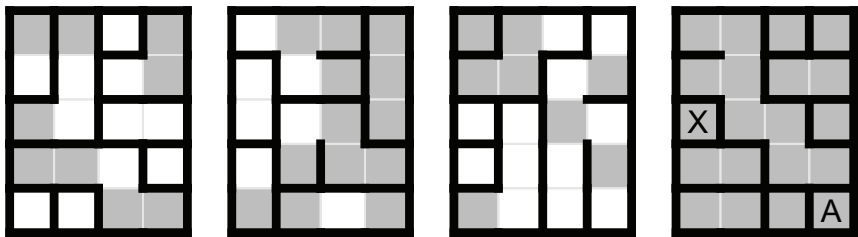
6. Magični kvadrat

V vsak prazen kvadrateg vpiši po eno od naravnih števil od 1 do 16, tako da bo v kvadratu napisanih vseh 16 števil in bo vsota števil v vsaki vrstici, vsakem stolpcu in po obeh diagonalah kvadrata enaka 34.

1	14		
	9	6	
10			

1. in 2. letnik srednje šole

1. Labirint v kvadru



Kvader sestoji iz vodoravnih slojev kockastih oddelkov. Na zgornji sliki so sloji od zgornjega proti spodnjemu predstavljeni od leve proti desni. Odebeljene črte preprečujejo prehajanje med sosednjima oddelkoma istega sloja. Med oddelkom in oddelkom neposredno pod njim lahko prehajamo (v obe smeri), če in samo če je zgornji pobarvan belo. Poišči najkrajšo pot med oddelkoma, označenima s črkama A in X. Pot označi z zaporednimi naravnimi števili tako, da oddelek s črko A ali X označiš z 1, vsak naslednji sosednji oddelek (kocko) pa z 1 večjim številom.

2. Poliedri

Dani so trije poliedri. Izpolni spodnjo preglednico! Upoštevaj, da imajo poliedri čim večjo simetrijo in da se na prvih dveh slikah vidi približno polovica poliedra.

Polieder			
Število mejnih ploskev			
Število oglišč			
Število robov			

3. Kriptaritem

V spodnjem računu različne črke predstavljajo različne številke. Nobeno število se ne začne s številko 0. S katerimi številkami moramo zamenjati črke, tako da bo račun pravilen?

$$\begin{array}{rcccccc} & A & B & C & D & E & F \\ + & A & B & C & D & E & F \\ \hline G & H & B & D & E & F & I \end{array}$$

- A:_____
- B:_____
- C:_____
- D:_____
- E:_____
- F:_____
- G:_____
- H:_____
- I:_____

4. Načrt naselja

Spodnji kvadrat predstavlja naselje, v katerem so hiše visoke 1, 2, 3, 4, 5 ali 6 nadstropij. Pri tem so v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu zastopane vse višine. Števila ob kvadratu povejo, koliko različnih hiš vidimo v ustrezni vrstici oziroma stolpcu, če to vrstico oziroma stolpec pogledamo od zelo daleč. Na primer: Oseba A vidi v prvi vrstici natanko 4 hiše, oseba B pa v zadnji vrstici natanko 3 hiše. V vsak kvadrateg vpiši število nadstropij, ki jih ima hiša, ki stoji tam.

		4	3	2	3	1	3	
A	4							2
	2							2
	2							1
	3							2
	1							3
	2							3
		2	1	2	3	2	4	B

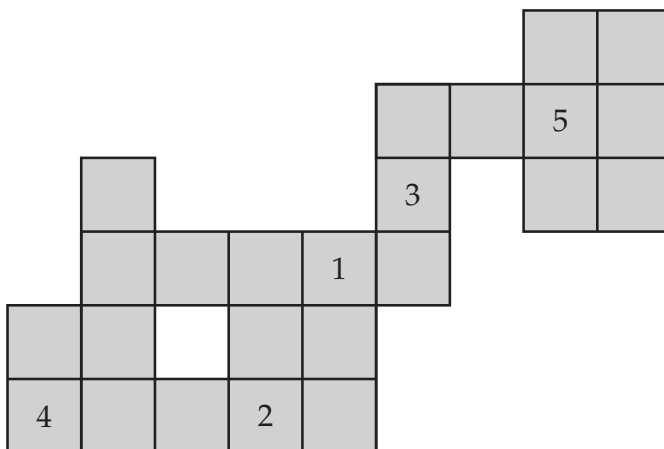
5. Magični kvadrat

V vsak prazen kvadrateg vpiši po eno od naravnih števil od 1 do 16, tako da bo v kvadratu napisanih vseh 16 števil in bo vsota števil v vsaki vrstici, vsakem stolpcu in po obeh diagonalah kvadrata enaka 34.

16	10		
11	2		

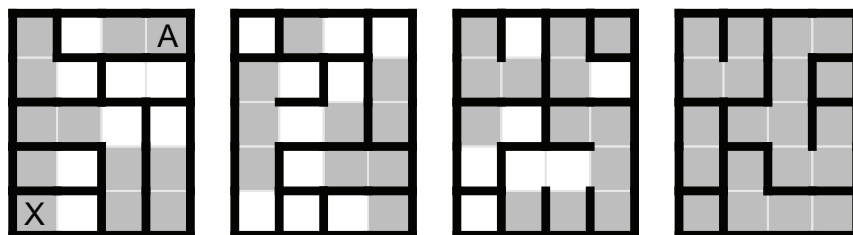
6. Razrezana kocka

Vsako ploskev kocke, sestavljene iz papirja, razdelimo na 4 enake kvadratke. Nato papir prerežemo vzdolž nekaterih stranic kvadratkov (ne nujno po robovih kocke), tako da dobimo mrežo kocke in da mreža ostane v enem kosu. Mrežo položimo na mizo. V kvadratke vpiši naravna števila od 1 do 6, tako da bodo enako označeni kvadratki ležali na isti ploskvi kocke, različno označeni pa na različnih ploskvah.



3. in 4. letnik srednje šole

1. Labirint v kvadru

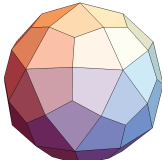
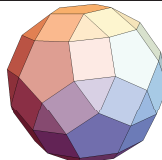
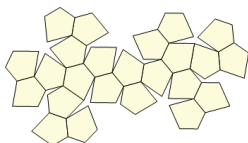


Kvader sestoji iz vodoravnih slojev kockastih oddelkov. Na zgornji sliki so sloji od zgornjega proti spodnjemu predstavljeni od leve proti desni. Odebeljene črte preprečujejo prehajanje med sosednjima oddelkoma istega sloja. Med oddelkom in oddelkom neposredno pod njim lahko prehajamo (v obe smeri), če in samo če je zgornji pobarvan belo.

Poišči najkrajšo pot med oddelkoma, označenima s črkama A in X. Pot označi z zaporednimi naravnimi števili tako, da oddelek s črko A ali X označiš z 1, vsak naslednji sosednji oddelek (kocko) pa z 1 večjim številom.

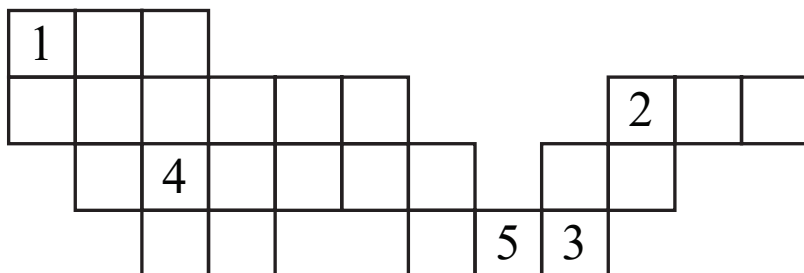
2. Poliedri

Dani so trije poliedri. Izpolni spodnjo preglednico! Upoštevaj, da imajo poliedri čim večjo simetrijo in da se na prvih dveh slikah vidi približno polovica poliedra.

Polieder			
Število mejnih ploskev			
Število oglišč			
Število robov			

3. Razrezana kocka

Vsako ploskev kocke, sestavljene iz papirja, razdelimo na 4 enake kvadratke. Nato papir prerežemo vzdolž nekaterih stranic kvadratkov (ne nujno po robovih kocke), tako da dobimo mrežo kocke in da mreža ostane v enem kosu. Mrežo položimo na mizo. V kvadratke vpiši naravna števila od 1 do 6, tako da bodo enako označeni kvadratki ležali na isti ploskvi kocke, različno označeni pa na različnih ploskvah. Eden od kvadratkov bo ostal neoznačen, saj ne leži na mreži kocke, ampak je del mize, na katero postavimo mrežo. Ta kvadrateg je iz vseh štirih strani obdan z mrežo kocke.



4. Načrt naselja

Spodnji kvadrat predstavlja naselje, v katerem so hiše visoke 1, 2, 3, 4, 5 ali 6 nadstropij. Pri tem so v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu zastopane vse višine. Števila ob kvadratu povejo, koliko različnih hiš vidimo v ustrezni vrstici oziroma stolpcu, če to vrstico oziroma stolpec pogledamo od zelo daleč. Na primer: Oseba A vidi v prvi vrstici natanko 1 hišo, oseba B pa v zadnji vrstici natanko 1 hišo. V vsak kvadrateg vpiši število nadstropij, ki jih ima hiša, ki stoji tam.

		1	3	3	2	2	4	
A	1							3
	2							3
	2							2
	3							3
	3							2
	3							1
		4	2	3	3	2	1	
								B

5. Magični kvadrat

V vsak prazen kvadraterk vpiši po eno od naravnih števil od 1 do 16, tako da bo v kvadratu napisanih vseh 16 števil in bo vsota števil v vsaki vrstici, vsakem stolpcu in po obeh diagonalah kvadrata enaka 34.

	3	5	
15	6		

6. Kriptaritem

V spodnjem računu različne črke predstavljajo različne številke. Nobeno število se ne začne s števk 0. S katerimi števki moramo zamenjati črke, tako da bo račun pravilen?

$$\begin{array}{rcccccc}
 & & A & B & C & D & D \\
 + & & & E & F & G & D \\
 + & & & E & F & G & D \\
 + & H & D & G & D & I & \\
 + & & & & A & D & I \\
 \hline
 A & B & F & C & A & J &
 \end{array}$$

- A: _____
- B: _____
- C: _____
- D: _____
- E: _____
- F: _____
- G: _____
- H: _____
- I: _____
- J: _____.

Rešitve 17. tekmovanja v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike – državno tekmovanje

Rešitve 1. skupine: Poslovna matematika

1. a. naloga

Izračun dolžine proge = $1,5 \times 1,40 = \underline{2,1 \text{ km}}$

3 proge	1,5 km (d)	50 cm (debeline)	6 ur	15 delavcev	3 stroji
↑	↑	↑	↓	↓	↑
5 prog	2,1 km (d)	80 cm (debeline)	7 ur	18 delavcev	x strojev

$$X = \frac{3 \times 5 \times 2,1 \times 80 \times 6 \times 15}{3 \times 1,5 \times 50 \times 7 \times 18} = \underline{8 \text{ strojev}}$$

Odg.: Potrebujejo še 5 strojev.

1. b. naloga

3 proge	1,5 km (d)	50 cm (debeline)	6 ur	15 delavcev	3 stroji	100 % (q snega)	100 % (zmogljivost)
↑	↑	↑	↑	↓	↓	↑	↓
4 proge	2 km (d)	70 cm	x ur	12 delavcev	7 strojev	85 %	120 %

$$X = \frac{6 \times 4 \times 2 \times 70 \times 15 \times 3 \times 85 \times 100}{3 \times 1,5 \times 50 \times 12 \times 7 \times 100 \times 120} = \underline{5,67 \text{ ure}}$$

2. naloga

A	$1000,00 \times 0,42$	420,00 EUR	(cena apartmaja)
B	$1/5$ od 1000,00	200,00 EUR	(vožnja s trajektom)
C	$1/10$ od 1000,00	100,00 EUR	(gorivo)
D	ostanek	$1000 - 420 - 200 - 100 = 280,00 \text{ EUR}$	(sprotni stroški)

	Cena apartmaja		Stroški trajekta		Cena goriva		Sprotni stroški	
Fantje	A		B		C		D	
1	x	100,00 EUR	50,00 EUR		25,00 EUR	x	85,00 EUR	260,00 EUR
2	x	100,00 EUR	50,00 EUR		25,00 EUR	x - 10	75,00 EUR	250,00 EUR
3	x	100,00 EUR	50,00 EUR	x - 20	15,00 EUR	x - 20	65,00 EUR	230,00 EUR
4		120,00 EUR	50,00 EUR	x	35,00 EUR	x - 30	55,00 EUR	260,00 EUR
	$420 - 120 = 300$ $3x = 300$ $x = \underline{100}$		$4x = 200$ $x = \underline{50}$		$100 - 50 = 50$ $2x - 20 = 50$ $x = \underline{35}$		$4x - 60 = 280$ $x = 340 / 4$ $x = \underline{85}$	
	1 T		1 T		1 T		1 T	

Odg.: Prvi fant prispeva še: $260,00 - 25,00 = \underline{235,00 \text{ EUR}}$
 Drugi fant prispeva še: $250,00 - 25,00 = \underline{225,00 \text{ EUR}}$
 Tretji fant prispeva še: $230,00 - 0,00 = \underline{230,00 \text{ EUR}}$
 Četrti fant prispeva še: $140,00 - 0,00 = \underline{140,00 \text{ EUR}}$

3. a. naloga

- 31. dec. 2014	(19.842,71 : 0,988 : 1,025 : 1,015)	$C_{(31.12.2014)} = ?$	$C_{(2014)} = \underline{19.304,30}$
- 31. dec. 2015	$p = 1,5 \% ; \text{faktor} = 1,015$		
- 31. dec. 2016	$p = 2,5 \% ; \text{faktor} = 1,025$	$C_{(31.12.2016)} = ?$	$C_{(2016)} = \underline{20.083,71}$
- 31. dec. 2017	$p = 1,2 \% ; \text{faktor} = 0,988$		
Izračun: 2017	(20.815,00 : 1,049 ali 20.815,00 - 972,29)		$C_{(2017)} = \underline{19.842,71}$
- 31. dec. 2018	$p = ? \% \quad p = \underline{4,90 \%}$		$+ 972,29$
- 31. dec. 2018			$C_{(2018)} = \underline{20.815,00}$

19.842,71 EUR 100 %
 972,31 EUR x %

$$x = \frac{100 \cdot 972,31}{19842,71} = \underline{4,90 \%}$$

3. b. naloga

20.815,00 EUR 100 %
 1.185,00 EUR x %

$$x = \frac{100 \cdot 1185}{20815} = \underline{5,69 \%}$$

$$\text{BDP/preb.}_{(2021)} = 22.000,00 \times 1,0569^2 = \underline{24.574,83 \text{ EUR}}$$

3. c. naloga

Stopnja rasti $_{(2019)} = 5,69 \%$
Stopnja rasti $_{(2018)} = -4,90 \%$
 0,79 odstotne točke

Odg.: Planirana letna rast BDP/preb. v letu 2019 bo večja za 0,79 odstotne točke v primerjavi z rastjo BDP/preb. v letu 2018.

4. a. naloga

$G = 520,00 \text{ EUR}$
 $m = 11$
 $G^+ = 542,64 \text{ EUR}$
 $o = G^+ - G = 542,64 - 520,00 = \underline{22,64 \text{ EUR}}$
 $p = x \%$
 $p' = x \%$

$$o = \frac{G \times p \times m}{1200}$$

$$p = \frac{1200 \times o}{G \times m} = \frac{1200 \times 22,64}{520 \times 11} = \underline{4,75 \%}$$

$$p' = \frac{p}{12} = \frac{4,75}{12} = \underline{0,40 \%}$$

4. b. naloga

$$G_0 = 2500,00 \text{ EUR}$$

$$p_1 = 2,55 \% \quad r_1 = 1,0255$$

$$p_2 = 3,25 \% \quad r_2 = 1,0325$$

$$p_3 = 4,25 \% \quad r_3 = 1,0325$$

$$m = 1$$

$$G_n = ((2500,00 \times r_1^3 + 3000,00) \times r_1^2 \times r_2^3 - 2500,00) \times r_2 \times r_3^6$$

$$G_n = ((2500,00 \times 1,0255^3 + 3000,00) \times 1,0255^2 \times 1,0325^3 - 2500,00) \times 1,0325 \times 1,0425^6$$

$$G_n = \underline{\underline{5.425,69 \text{ EUR}}}$$

ODG.: Ob koncu 15. leta bomo imeli 5.425,69 EUR.

4. c. naloga

$$G_0 = 1500,00 \text{ EUR}$$

$$G_n = 3000,00 \text{ EUR}$$

$$m = 1$$

$$n = 10 \text{ let}$$

$$p = x \%$$

$$G_n = G_0 \times r^n$$

$$r^n = \frac{G_n}{G_0}$$

$$r = \sqrt[n]{G_n/G_0} = \sqrt[10]{3000/1500} = 1,071773463 \dots$$

$$p = (r - 1) \times 100$$

$$p = (1,071773463 - 1) \times 100 = \underline{\underline{7,18 \%}}$$

Rešitve 2. skupine: Statistika

1. a. naloga

Tabela 1: **Dijaki Srednje šole Brihta po oddelkih in spolu 1. 9. 2018**

Letnik izobraževanja	Spol		Skupaj
	Moški	Ženske	
1.	24	32	56
2.	21	29	50
3.	19	28	47
4.	19	27	46
Skupaj	83	116	199

Vir: Izmišljeni podatki

1. b. naloga

Tabela 2: **Struktura dijakov Srednje šole Brihta po spolu 1. 9. 2018**

Letnik izobraževanja	Spol		Skupaj
	Moški	Ženske	
1.	42,86	57,14	100,00
2.	42,00	58,00	100,00
3.	40,43	59,57	100,00
4.	41,30	58,70	100,00
Skupaj	41,71	58,29	100,00

1. c. naloga

Od vseh dijakov 2. letnika Srednje šole Brihta je bilo 42 odstotkov fantov in 58 odstotkov deklet.

1. d. naloga

Izračun polmera kroga za 4. letnik:

$$r_{4.\text{letnik}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{46}{56}} = 3,6 \text{ cm}$$

Izračunane ločne stopinje za 1. in 4. letnik:

Letnik izobraževanja	Spol		Skupaj
	Moški	Ženske	
1.	154	206	360
4.	149	211	360

2. a. naloga

$$\bar{K} = \frac{\text{povprečno število dni bolniške odsotnosti}}{\text{povprečno število zaposlenih}} \cdot 10 = \frac{35}{70,33} = 4,98 \text{ dneva mesečne bolniške odsotnosti na 10 zaposlenih}$$

$$\bar{Y} = \frac{44 + 29 + 32}{3} = 35 \text{ dni}$$

$$\bar{X} = \frac{\frac{67}{2} + 70 + 73 + \frac{69}{2}}{3} = 70,33 \text{ zaposlenega}$$

2. b. naloga

$$K = (4,98 \cdot 3) \cdot 4 = 60 \text{ dni letne bolniške odsotnosti na 10 zaposlenih}$$

2. c. naloga

$$\bar{x} = \frac{\frac{67}{2} + 70 + 73 + 69 + 69 + 69 + 69 + 69 + 69 + 69 + 67 + 67 + \frac{63}{2}}{12} = 68,75 \text{ zaposlenega}$$

Izračun povprečnega mesečnega števila dni bolniške odsotnosti za leto 2019:

$$\text{povprečno št. dni bolniške odsotnosti} = K \cdot \text{povprečno št. zaposlenih} = \frac{(4,98 \cdot 68,75)}{10} = 34 \text{ dni}$$

Komentar: **V povprečju so v tem podjetju delavci mesečno izostali z dela zaradi bolniške odsotnosti 34 dni.**

2. d. naloga

34 = št. delavcev / št. nesreč pri delu

$$34 = 69 / x$$

$$\text{Št. nesreč pri delu} = 69 / 34 = 2,03 = 2 \text{ nesreči pri delu}$$

Komentar: **Marca sta se v tem podjetju zgodili dve nesreči pri delu.**

3. ab. naloga

Tabela 4: Število hitrorastočih podjetij in število zaposlenih v hitrorastočih podjetjih v Sloveniji v letih od 2011 do 2016

Leto	Število hitrorastočih podjetij	Število zaposlenih	V _j za število zaposlenih	I _{j/2013}
2011	4	211	-	42,8
2012	8	316	149,8	64,1
2013	8	493	156,0	100,0
2014	4	333	67,5	67,5
2015	10	578	173,6	117,2
2016	10	917	158,6	186,0

Vir: Statistični urad RS

3. c. naloga

$$D_{2011} \% = 42,8 - 100 = -57,2 \%$$

$$D_{2016} \% = 186,0 - 100 = 86,0 \%$$

Komentar za leto 2011: **V letu 2011 je bilo 57,2 % manj hitrorastočih podjetij v primerjavi z letom 2013.**

Komentar za leto 2016: **V letu 2016 se je v primerjavi z letom 2013 število hitrorastočih podjetij povečalo za 86 %.**

3. d. naloga

$$K_{2017} = \frac{-11,3 + 100}{100} = 0,887$$

$$\text{Število podjetij}_{2017} = 10 \cdot 0,887 = 8,87 \text{ oz. 9 podjetij}$$

3. e. naloga

$$\bar{K} = \frac{2 + 100}{100} = 1,020$$

$$\text{Št. podjetij}_{2020} = 10 \cdot 1,020^4 = 11 \text{ podjetij}$$

4. a. naloga

R_i	1	2	3	4	5	6	7	8 - 10
Vrednost premoženja v mio EUR	105	118	124	129	152	183	194	Več kot 200

$$R = \frac{N + 1}{2} = \frac{11}{2} = 5,5$$

$$Me = \frac{152 + 183}{2} = 167,5 \text{ milijona EUR}$$

Komentar: Od desetih najbogatejših Slovencev jih ima polovica vrednost premoženja ocenjeno na več kot 167,5 milijona evrov, polovica pa na manj kot 167,5 milijona evrov.

4. b. naloga

Tabela 6: Frekvenčna porazdelitev ocenjene vrednosti premoženja najbogatejših Slovencev v letu 2018

Ocenjena vrednost premoženja v mio EUR	Število oseb
101–130	4
131–160	1
161–190	1
191 in več	4
Skupaj	10

4. c. naloga

$$\begin{aligned} \text{Vrednost premoženja treh najbogatejših Slovencev} &= 5.700 \text{ mio EUR} \cdot 0,2163 \\ &= 1.232,91 \text{ milijona EUR} \end{aligned}$$

$$M = \frac{1.232,91 + 194 + 183 + 152 + 129 + 124 + 118 + 105}{10} = 223,79 \text{ milijona EUR}$$

4. d. naloga

Iz danih podatkov ne moremo določiti najpogostejše vrednosti premoženja oz. modusa.

Modusa ne moremo določiti, ker ne vemo, kolikokrat se morebiti ponovi ista vrednost premoženja treh najbogatejših Slovencev.

Rešitve 3. skupine

1. a. naloga

Indeks Beta

Podjetje	Cena delnice	Število delnic	Tržna kapitalizacija	Delež v skupni tržni kapitalizaciji
Hruška	5,10 €	1800	9180 €	31,25 %
Jagoda	32,40 €	510	16 524 €	56,25 %
Kivi	0,90 €	4080	3672 €	12,50 %

Iz podatkov za podjetje Hruška izračunamo skupno tržno kapitalizacijo

$$\frac{9180}{0,3125} = 29\,376 \text{ €}.$$

Delež tržne kapitalizacije podjetja Kivi je

$$\frac{3672}{29\,376} = 0,1250 = 12,50 \text{ \%}.$$

Delež tržne kapitalizacije podjetja Jagoda je

$$1 - 0,3125 - 0,1250 = 0,5625 = 56,25 \text{ \%}.$$

Tržna kapitalizacija podjetja Jagoda je

$$0,5625 \cdot 29\,376 = 16\,524 \text{ €},$$

cena njegove delnice pa

$$\frac{16\,524}{510} = 32,40 \text{ €}.$$

Na koncu izračunamo vrednost indeksa Beta:

$$0,3125 \cdot 5,10 + 0,5625 \cdot 32,40 + 0,1250 \cdot 0,90 = 19,93.$$

Vrednost indeksa je v tem primeru merjena v evrih, a smo rezultat zapisali brez denarnih enot.

1. b. naloga

Najprej poiščemo podjetje z največjim deležem tržne kapitalizacije.

Iz podatkov za podjetje Datelj izračunamo skupno tržno kapitalizacijo

$$\frac{35\,343}{0,1904} = 185\,625 \text{ €}.$$

Izračunamo manjkajoče deleže tržnih kapitalizacij:

Za podjetje Banana dobimo

$$\frac{36\,234}{185\,625} = 0,1952 = 19,52 \text{ \%}.$$

Za podjetje Figa dobimo

$$\frac{11\,583}{185\,625} = 0,0624 = 6,24 \text{ \%}.$$

Za podjetje Citrus dobimo

$$1 - 0,3424 - 0,1952 - 0,1904 - 0,0624 - 0,0832 = 0,1264 = 12,64 \text{ \%}.$$

Podjetje z najvišjo tržno kapitalizacijo je podjetje Ananas.

Njegova tržna kapitalizacija znaša

$$0,3424 \cdot 185\,625 = 63\,558 \text{ €}.$$

Označimo z x povišanje tržne kapitalizacije podjetja Ananas zaradi povišanja cene njegove delnice. Ob tem se poviša tudi skupna kapitalizacija.

Veljati mora

$$\frac{63\,558 + x}{185\,625 + x} = 0,4.$$

Dobimo

$$\begin{aligned} 63\,558 + x &= 0,4 \cdot (185\,625 + x) \\ 0,6x &= 10\,692 \\ x &= 17\,820 \text{ €} \end{aligned}$$

Nova tržna kapitalizacija podjetja Ananas je

$$63\,558 + 17\,820 = 81\,378 \text{ €}.$$

Nova cena delnice podjetja Ananas je

$$\frac{81\,378}{6600} = 12,33 \text{ €}.$$

Cena delnice podjetja Ananas lahko zraste za

$$\frac{12,33 - 9,63}{9,63} = 0,2804 = 28,04 \text{ \%}.$$

1. c. naloga

Najprej izračunamo tržno kapitalizacijo podjetja Grenivka:

$$0,0832 \cdot 185\,625 = 15\,444 \text{ €}$$

Označimo s p ceno delnice podjetja Figa, z n pa število delnic podjetja Figa.

Veljati morata enakosti

$$\begin{aligned} p \cdot n &= 11\,583 \\ (p - 39) \cdot (2n) &= 15\,444 \end{aligned}$$

Rešiti moramo sistem dveh enačb z dvema neznankama.

Preoblikujemo drugo enačbo v

$$2p \cdot n - 78n = 15\,444$$

in vstavimo $p \cdot n$ iz prve enačbe. Dobimo enačbo

$$-78n = -7722$$

z rešitvijo $n = 99$.

Podjetje Figa ima na trgu 99 delnic, podjetje Grenivka pa $2 \cdot 99 = 198$ delnic.

1. d. naloga

Nova skupna tržna kapitalizacija podjetij v indeksu Beta je

$$29\,376 - 9180 = 20\,196 \text{ €}.$$

Nov delež podjetja Jagoda je

$$\frac{16\,524}{20\,196} = 0,8182 = 81,82 \text{ \%}.$$

Nov delež podjetja Kivi je

$$\frac{3672}{20\,196} = 0,1818 = 18,18 \text{ \%}.$$

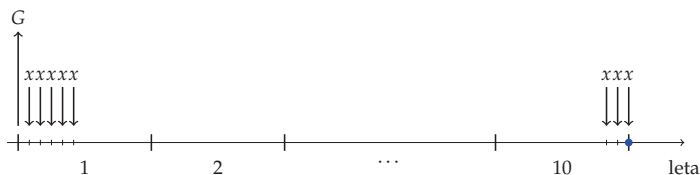
Nova vrednost indeksa Beta je

$$0,8182 \cdot 32,40 + 0,1818 \cdot 0,90 = 26,67.$$

2. a. naloga

Glavnica kredita je $G = 60\,000 \text{ €}$, višino obroka označimo z x .

Denarne tokove prikazuje spodnja shema.



Mesečni obrestni faktor je $r = \sqrt[12]{1 + \frac{p}{100}} = \sqrt[12]{1,04}$.

Redukcijski termin postavimo na trenutek zadnjega obroka.

Z načelom ekvivalence glavnice dobimo

$$Gr^{120} = xr^{119} + xr^{118} + \dots + xr + x$$

$$Gr^{120} = x(r^{119} + r^{118} + \dots + r + 1)$$

$$Gr^{120} = x \cdot \frac{r^{120} - 1}{r - 1}$$

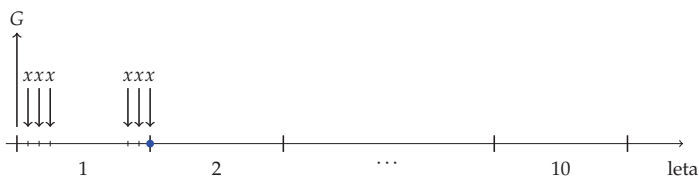
$$x = Gr^{120} \cdot \frac{r - 1}{r^{120} - 1}$$

$$x = 60\,000 \cdot 1,04^{10} \cdot \frac{\sqrt[12]{1,04} - 1}{1,04^{10} - 1} = 605,43 \text{ €}$$

Mesečni obrok znaša 605,43 €.

2. b. naloga

1. način: Naobrestimo začetni dolg in že plačane anuitete do konca prvega leta.



Čez eno leto banki dolgujemo

$$\begin{aligned} G_1 &= Gr^{12} - xr^{11} - xr^{10} - \dots - xr - x \\ &= Gr^{12} - x(r^{12} + r^{11} + \dots + r + 1) \\ &= Gr^{12} - x \cdot \frac{r^{12} - 1}{r - 1} \\ &= 60\,000 \cdot 1,04 - 605,43 \cdot \frac{1,04 - 1}{\sqrt[12]{1,04} - 1} \\ &= 55\,002,54 \text{ €} \end{aligned}$$

2. način: Razobrestimo vse neplačane anuitete do konca prvega leta.



Čez eno leto banki dolgujemo

$$\begin{aligned}
 G_1 &= \frac{x}{r} + \frac{x}{r^2} + \dots + \frac{x}{r^{107}} + \frac{x}{r^{108}} \\
 &= \frac{x}{r^{108}} \cdot (r^{107} + r^{106} + \dots + r + 1) \\
 &= \frac{x}{r^{108}} \cdot \frac{r^{108} - 1}{r - 1} \\
 &= \frac{605,43}{1,04^9} \cdot \frac{1,04^9 - 1}{\sqrt[12]{1,04} - 1} \\
 &= 55\,002,54 \text{ €}
 \end{aligned}$$

2. c. naloga

1. način: Takoj po plačilu n -tega obroka, $n \in \{1, 2, \dots, 120\}$, banki dolgujemo

$$\begin{aligned}
 G_2 &= Gr^n - xr^{n-1} - xr^{n-2} - \dots - xr - x \\
 &= Gr^n - x(r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + r + 1) \\
 &= Gr^n - x \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}
 \end{aligned}$$

Ker želimo, da je preostanek dolga G_2 manjši od $G/2$, dobimo neenačbo

$$Gr^n - x \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} < \frac{G}{2}$$

z neznanko n . Najprej izrazimo r^n :

$$\begin{aligned}
 Gr^n(r - 1) - x(r^n - 1) &< \frac{G}{2}(r - 1) \\
 r^n(G(r - 1) - x) &< \frac{G}{2}(r - 1) - x \\
 r^n(x - G(r - 1)) &> x - \frac{G}{2}(r - 1) \\
 r^n &> \frac{x - \frac{G}{2}(r - 1)}{x - G(r - 1)}
 \end{aligned}$$

Neenačbo logaritmiramo:

$$\begin{aligned}
 n \ln r &> \ln \frac{x - \frac{G}{2}(r - 1)}{x - G(r - 1)} \\
 n &> \frac{\ln(x - \frac{G}{2}(r - 1)) - \ln(x - G(r - 1))}{\ln r} \\
 n &> 65,85
 \end{aligned}$$

Banki dolgujemo manj kot polovico začetnega dolga takoj po plačilu 66. obroka, to je 5 let in 6 mesecev po najemu kredita.

2. način: Takoj po plačilu n -tega obroka, $n \in \{1, 2, \dots, 120\}$, banki dolgujemo

$$\begin{aligned} G_2 &= \frac{x}{r} + \frac{x}{r^2} + \dots + \frac{x}{r^{120-n}} \\ &= \frac{x}{r^{120-n}} \cdot (r^{119-n} + r^{118-n} + \dots + r + 1) \\ &= \frac{x}{r^{120-n}} \cdot \frac{r^{120-n} - 1}{r - 1} \end{aligned}$$

Rešujemo neenačbo

$$\frac{x}{r^{120-n}} \cdot \frac{r^{120-n} - 1}{r - 1} < \frac{G}{2},$$

kar preoblikujemo v

$$\begin{aligned} \frac{x}{r - 1} \cdot \frac{r^{120-n} - 1}{r^{120-n}} &< \frac{G}{2} \\ \frac{x}{r - 1} \cdot \left(1 - \frac{1}{r^{120-n}}\right) &< \frac{G}{2} \\ \frac{x}{r - 1} \cdot (1 - r^{n-120}) &< \frac{G}{2} \\ 1 - r^{n-120} &< \frac{G(r - 1)}{2x} \\ r^{n-120} &> 1 - \frac{G(r - 1)}{2x} \\ r^{n-120} &> \frac{2x - G(r - 1)}{2x} \end{aligned}$$

Z logaritmiranjem dobimo

$$\begin{aligned} (n - 120) \ln r &> \ln \frac{2x - G(r - 1)}{2x} \\ n &> \frac{\ln(2x - G(r - 1)) - \ln(2x)}{\ln r} + 120 \\ n &> 65,85 \end{aligned}$$

Banki dolgujemo manj kot polovico začetnega dolga takoj po plačilu 66. obroka, to je 5 let in 6 mesecev po najemu kredita.

3. a. naloga

Cene obveznic dobimo z diskontiranjem njihovih prihodnjih denarnih tokov.

Vse denarne tokove posamezne obveznice diskontiramo po isti obrestni meri, ki je donosnost do dospelja obveznice.

Prva obveznica čez eno leto izplača nominalno vrednost 100 €. Njena cena je

$$P_1 = \frac{100}{1 + 0,0175} = 98,28 \text{ €}.$$

Druga obveznica čez eno leto izplača kupon $C_2 = 0,05 \cdot 100 = 5 \text{ €}$, čez dve leti pa kupon C_2 skupaj z nominalno vrednostjo 100 €. Njena cena je

$$P_2 = \frac{5}{1 + 0,0269} + \frac{100 + 5}{(1 + 0,0269)^2} = 104,44 \text{ €}.$$

Tretja obveznica čez eno in dve leti izplača kupon $C_3 = 0,1 \cdot 100 = 10 \text{ €}$, čez tri leta pa kupon C_3 skupaj z nominalno vrednostjo 100 €. Njena cena je

$$P_3 = \frac{10}{1 + 0,0315} + \frac{10}{(1 + 0,0315)^2} + \frac{100 + 10}{(1 + 0,0315)^3} = 119,32 \text{ €}.$$

3. b. naloga

Vlagateljica v vsako od omenjenih obveznic vloži 40 000 €. Zato kupi

$$\frac{40\,000}{98,28} = 407$$

brezkuponskih obveznic in

$$\frac{40\,000}{104,44} = 383$$

kuponskih obveznic z dospetjem čez 2 leti.

Čez eno leto prejme

$$407 \cdot 100 + 383 \cdot 5 = 42\,615 \text{ €},$$

čez dve leti pa

$$383 \cdot 105 = 40\,215 \text{ €}.$$

3. c. naloga

Vlagateljica danes vloži 80 000 €, čez eno leto prejme 42 615 €, čez dve leti pa 40 215 €.

Označimo iskano donosnost do dospetja z R . Veljati mora

$$\frac{42\,615}{1 + R} + \frac{40\,215}{(1 + R)^2} = 80\,000.$$

Vpeljemo novo neznanko $x = \frac{1}{1 + R}$ in dobimo kvadratno enačbo

$$42\,615x + 40\,215x^2 = 80\,000,$$

kar preuredimo v

$$40\,215x^2 + 42\,615x - 80\,000 = 0.$$

Rešitvi sta $x_1 = 0,9768$ in $x_2 = -2,0365$.

Druga rešitev je finančno nesmiselna, iz prve pa dobimo

$$R = \frac{1}{x_1} - 1 = 0,0237 = 2,37 \text{ \%}.$$

Enak rezultat dobimo, če natančneje upoštevamo, da za portfelj ob nakupu plača

$$407 \cdot 98,28 + 383 \cdot 104,44 = 80\,000,48 \text{ €}.$$

3. d. naloga

Pripravimo preglednico izplačil portfelja

Portfelj obveznic	Izplačilo		
	čez 1 leto	čez 2 leti	čez 3 leta
x enoletnih	$100x$		
y dveletnih	$5y$	$105y$	
z triletnih	$10z$	$10z$	$110z$

Če portfelj izplača enak znesek A ob koncu vsakega leta, velja

$$100x + 5y + 10z = A$$

$$105y + 10z = A$$

$$110z = A$$

Dobimo rešitev $z = \frac{A}{110}$ in $x = y = \frac{2A}{231}$.

Trenutna cena takšnega portfelja je

$$\frac{2A}{231} \cdot 98,28 + \frac{2A}{231} \cdot 104,44 + \frac{A}{110} \cdot 119,32 = 2,8399A.$$

Iz enačbe

$$2,8399A = 164\,000$$

dobimo iskano izplačilo

$$A = 57\,748,94 \text{ €}$$

in portfelj $x = 500$ brezkuponskih, $y = 500$ dveletnih kuponskih in $z = 525$ triletnih kuponskih obveznic.

Izplačila takega portfelja natančneje znašajo

$$100 \cdot 500 + 5 \cdot 500 + 10 \cdot 525 = 57\,750 \text{ €}$$

$$105 \cdot 500 + 10 \cdot 525 = 57\,750 \text{ €}$$

$$110 \cdot 525 = 57\,750 \text{ €}$$

Cena portfelja je $500 \cdot 98,28 + 500 \cdot 104,44 + 525 \cdot 119,32 = 164\,003 \text{ €}$.

4. a. naloga

Za premijo p_0 evropske prodajne opcije na delnico, ki izplačuje dividende, morata v času $t = 0$ veljati neenakosti

$$\max \{K(1+R)^{-T} - S_0 + I(0, T), 0\} \leq p_0 \leq K(1+R)^{-T}.$$

Trenutna cena delnice je $S_0 = 13,42 \text{ €}$.

Izplačala bo dividendo v višini $d = 0,55 \text{ €}$ čez 6 mesecev, to je čez $t' = \frac{1}{2}$ leta.

Opcija ima do zapadlosti še 9 mesecev, to je $T = \frac{3}{4}$ leta, in izvršilno ceno $K = 14,50 \text{ €}$.

Obrestna mera je $R = 0,025$.

Sedanja vrednost izplačane dividende je

$$I(0, T) = \frac{d}{(1 + R)^{t'}} = \frac{0,55}{1,025^{1/2}} = 0,5433 \text{ €}.$$

Dobimo oceni

$$\begin{aligned} \max\{14,50 \cdot 1,025^{-3/4} - 13,42 + 0,5433; 0\} &\leq p_0 \leq 14,50 \cdot 1,025^{-3/4}, \\ \max\{1,36; 0\} &\leq p_0 \leq 14,23. \end{aligned}$$

Za premijo mora veljati

$$1,36 \text{ €} \leq p_0 \leq 14,23 \text{ €}.$$

4. b. naloga

Za premijo c_0 evropske nakupne opcije na delnico, ki izplačuje dividende, morata v času $t = 0$ veljati neenakosti

$$\max\{S_0 - K(1 + R)^{-T} - I(0, T), 0\} \leq c_0 \leq S_0 - I(0, T).$$

Dobimo oceni

$$\begin{aligned} \max\{13,42 - 14,50 \cdot 1,025^{-3/4} - 0,5433; 0\} &\leq p_0 \leq 13,42 - 0,5433, \\ \max\{-1,36; 0\} &\leq p_0 \leq 12,88. \end{aligned}$$

Za premijo mora veljati

$$0 \text{ €} \leq c_0 \leq 12,88 \text{ €}.$$

4. c. naloga

Če delnica izplačuje dividende, premiji evropske nakupne in evropske prodajne opcije povezuje paritetna enakost

$$p_0 + S_0 - I(0, T) = c_0 + K(1 + R)^{-T}.$$

V našem primeru iz paritete dobimo

$$\begin{aligned} c_0 &= p_0 + S_0 - I(0, T) - K(1 + R)^{-T} \\ &= 1,75 + 13,42 - 0,5433 - 14,50 \cdot 1,025^{-3/4} \\ &= 0,39 \text{ €}. \end{aligned}$$

Premija nakupne opcije bi morala znašati 0,39 €.

4. d. naloga

Opazimo, da se je na trgu za evropsko nakupno opcijo izoblikovala nižja cena od tiste, ki smo jo določili pri vprašanju c). Zato je pariteta kršena in velja

$$p_0 + S_0 - I(0, T) > c_0 + K(1 + R)^{-T}$$

oziroma

$$p_0 - c_0 + S_0 - K(1 + R)^{-T} - I(0, T) > 0.$$

Neenakost nam pomaga sestaviti arbitražno strategijo:

- Čas $t = 0$ (danes).
 - Izdamo prodajno opcijo,
 - kupimo nakupno opcijo,
 - kratko prodamo delnico,
 - investiramo $K(1 + R)^{-T} = 14,50 \cdot 1,025^{-3/4} = 14,2339 \text{ €}$ za 9 mesecev.
 - investiramo $I(0, T) = 0,5433 \text{ €}$ za pol leta.

Neto denarni tok teh transakcij je

$$p_0 - c_0 + S_0 - K(1 + R)^{-T} - I(0, T) = 1,75 - 0,25 + 13,42 - 14,2339 - 0,5433 = 0,14 \text{ €} > 0.$$

- Čas $t' = \frac{1}{2}$ (izplačilo dividend).
 - Prejmemo $0,5433 \text{ €}$ z obrestmi, kar znese $0,5433 \cdot 1,025^{1/2} = 0,55 = d$,
 - izplačamo dividendo prvotnemu lastniku delnice.

Neto denarni tok teh transakcij je

$$d - d = 0 \text{ €}.$$

- Čas $T = \frac{3}{4}$ (zapadlost opcij).
 - Izplačamo prodajno opcijo, če je potrebno,
 - izvršimo nakupno opcijo, če se izplača,

- kupimo delnico in zapremo kratko prodajo,
- prejmemo $14,2339 \text{ €}$ z obrestmi, kar znese $14,2339 \cdot 1,025^{3/4} = 14,50 = K$.

Ob zapadlosti opcij je neto denarni tok

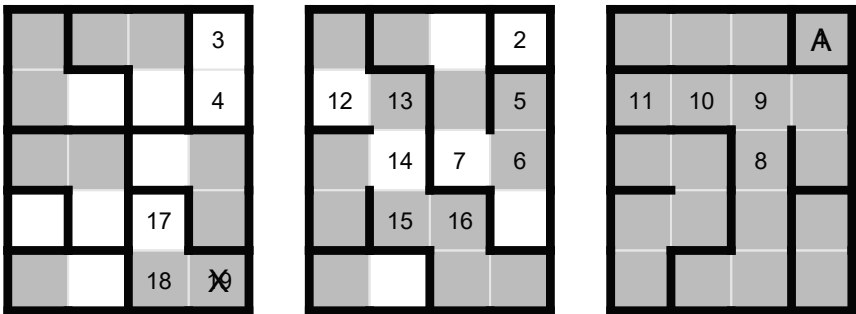
$$\begin{aligned} -P_{3/4} + C_{3/4} - S_{3/4} + K &= -\max\{K - S_{3/4}, 0\} + \max\{S_{3/4} - K, 0\} - S_{3/4} + K = \\ &= -(\max\{K - S_{3/4}, 0\} + S_{3/4}) + \max\{S_{3/4} - K, 0\} + K = \\ &= -\max\{K, S_{3/4}\} + \max\{S_{3/4}, K\} = 0. \end{aligned}$$

Arbitražni zaslužek je ustvarjen v času $t = 0$ in znaša $0,14 \text{ €}$.

Rešitve 29. tekmovanja iz razvedrilne matematike – državno tekmovanje

Rešitve za 6. in 7. razreda osnovne šole

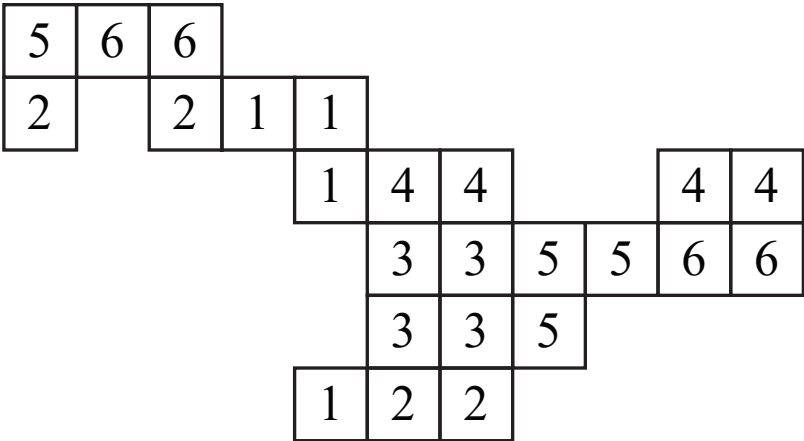
1. naloga



2. naloga

Število mejnih ploskev	14	60	14
Število oglišč	12	32	24
Število robov	24	90	36

3. naloga



4. naloga

	4	3	2	4	1	3	
4	2	3	5	1	6	4	2
2	3	1	6	2	4	5	2
2	5	2	1	4	3	6	1
3	4	5	3	6	1	2	2
1	6	4	2	3	5	1	3
2	1	6	4	5	2	3	3
	2	1	2	2	3	2	

5. A: 2
B: 1
C: 7
D: 8.

6. naloga

4	16	5	9
1	13	8	12
15	3	10	6
14	2	11	7

Rešitve za 8. in 9. razreda osnovne šole

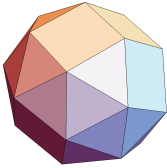
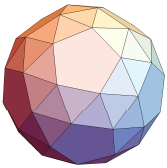
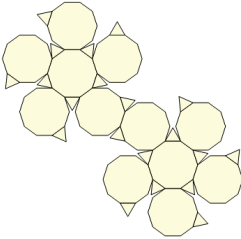
1. naloga

12	11		
		7	
		6	5

13	10		
	9	8	
		3	4

16			
14	15		
		2	A

2. naloga

			
Število mejnih ploskev	34	92	32
Število oglišč	24	60	60
Število robov	56	150	90

3. naloga

1	6	6	5						
4			4	4					
				4					
				1					
				1					
				2	3	3			
				2	3	3			
					5	5			
		2		2	5				
	1	6	6						

4. naloga

	1	2	3	3	3	2	
1	6	3	2	4	1	5	2
2	5	2	3	1	4	6	1
2	4	1	6	5	2	3	3
2	1	6	5	2	3	4	3
3	2	5	4	3	6	1	2
3	3	4	1	6	5	2	3
	4	3	4	1	2	3	

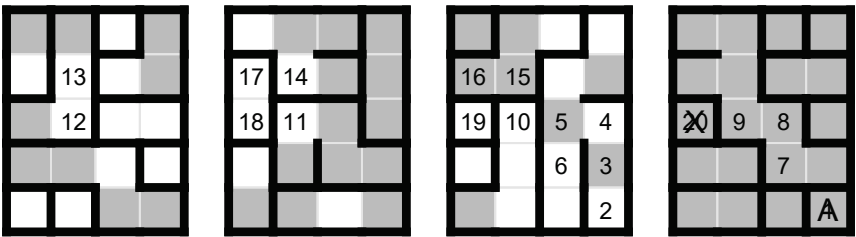
5. A: 9
B: 5
C: 6
D: 7
E: 1
F: 0
G: 8
H: 2.

6. naloga

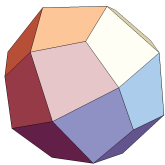
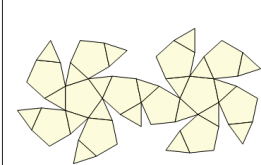
1	14	15	4
7	9	6	12
10	8	11	5
16	3	2	13

Rešitve za 1. in 2. letnik srednje šole

1. naloga



2. naloga

			
Število mejnih ploskev	24	38	32
Število oglišč	26	24	30
Število robov	48	60	60

3. A: 6
B: 0
C: 3
D: 7
E: 4
F: 9
G: 1
H: 2
I: 8.

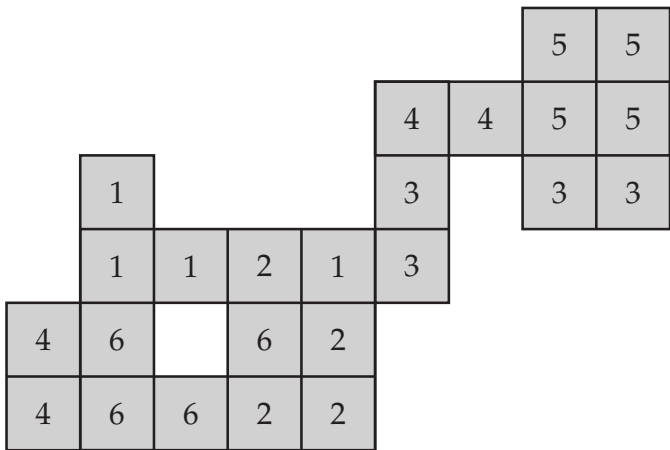
4. naloga

	4	3	2	3	1	3	
4	1	3	5	2	6	4	2
2	3	2	6	1	4	5	2
2	5	1	2	4	3	6	1
3	4	5	1	6	2	3	2
1	6	4	3	5	1	2	3
2	2	6	4	3	5	1	3
	2	1	2	3	2	4	

5. naloga

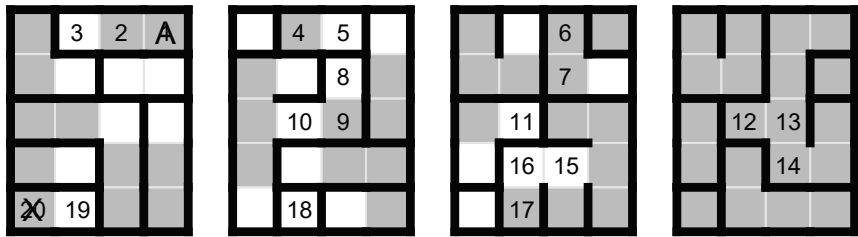
16	10	3	5
11	2	13	8
6	15	4	9
1	7	14	12

6. naloga

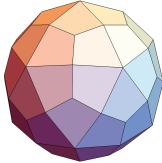
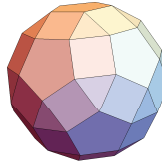
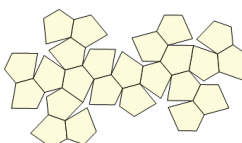


Rešitve za 3. in 4. letnik srednje šole

1. naloga



2. naloga

			
Število mejnih ploskev	60	62	24
Število oglišč	62	60	38
Število robov	120	120	60

3. naloga

[illegible]

4.

	1	3	3	2	2	4	
1	6	2	3	4	5	1	3
2	5	4	1	6	3	2	3
2	3	6	4	1	2	5	2
3	2	3	6	5	1	4	3
3	4	1	5	2	6	3	2
3	1	5	2	3	4	6	1
	4	2	3	3	2	1	

5. naloga

10	3	5	16
15	6	4	9
8	13	11	2
1	12	14	7

6. A: 1
B: 2
C: 5
D: 8
E: 6
F: 4
G: 7
H: 9
I: 3
J: 0.