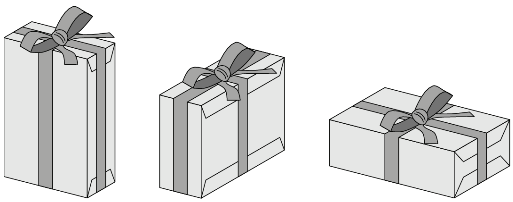
Tekmovanja

63. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje

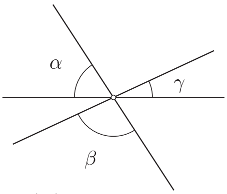
Naloge za 1. letnik

A1. Vsa tri darila prikazana na sliki imajo obliko kvadra z dolžinami robov 10 cm, 20 cm in 30 cm. Dolžine trakov, s katerimi so darila zavita, so od leve proti desni enake x cm, y cm in z cm, pri čemer je pentlja na vseh treh darilih enaka. Katera od naslednjih trditev je pravilna?



(**A**) $x = y = z$ (**B**) $x > y > z$ (**C**) $x = y > z$ (**D**) $x < y < z$ (**E**) $x > y = z$

A2. Polona želi narisati tri premice, ki se sekajo v isti točki (glej sliko), tako da bo za kote med njimi veljalo $\beta = 2\alpha$ in $\alpha = 3\gamma$. Koliko stopinj mora biti velik kot α?



(**A**) 18 (**B**) 36 (**C**) 50 (**D**) 54 (**E**) 60

A3. Koliko je vrednost izraza $2019^3 - 3 \cdot 2019 \cdot 2018 - 2018^3$?

(**A**) -1 (**B**) 0 (**C**) 1 (**D**) 2018 (**E**) 2019

B1. Poišči vsa naravna števila n, katerih kub je enak vsoti kvadratov treh ne nujno različnih deliteljev števila n.

B2. Dan je trikotnik ABC. Naj bosta D in E taki točki, ki ležita zaporedoma na poltrakih CA in CB, a ne na stranicah trikotnika ABC, da velja $|AD| = |BE| = |AB|$. Presečišče premic AE in BD označimo z G, središče trikotniku ABC včrtane krožnice pa z I. Dokaži, da premica GI poteka skozi razpolovišče stranice AB.

B2. Poišči vse pare realnih števil x in y, ki rešijo sistem enačb

$$\frac{y^3 + 15x^2}{y^4 - x^3} = \frac{y^2 + 15x}{y^3 - x^2},$$

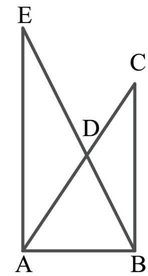
$$\frac{1500y^3 + 4x^2}{9y^4 - 4} = \frac{1500y^2 + 4x}{9y^3 - 4}.$$

Naloge za 2. letnik

A1. Maja je v dva enaka kozarca nalila limonin sok, tako da je bil prvi kozarec napolnjen do $\frac{1}{3}$, drugi pa do $\frac{2}{5}$. Nato je v oba kozarca dolivala vodo, dokler nista bila polna. Nazadnje je oba kozarca izpraznila v večjo skledo, pri čemer se tekočina ni prelila čez rob sklede. Kolikšen del tekočine v skledi je limonin sok?

(A) $\frac{1}{8}$ **(B)** $\frac{3}{16}$ **(C)** $\frac{11}{30}$ **(D)** $\frac{11}{19}$ **(E)** $\frac{11}{15}$

A2. Daljici AE in BC na sliki sta vzporedni in pravokotni na daljico AB. Hkrati velja $|AB| = 4$, $|BC| = 6$ in $|AE| = 8$. Koliko je razlika med ploščinama trikotnikov ADE in BCD?



(A) 2 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 8 **(E)** 9

A3. David si je izmislil trimestno naravno število s tremi različnimi števkami. Vsako števko tega števila je nadomestil s črko, da je dobil besedo ENA, ki predstavlja njegovo število. Opazil je, da za njegovo število velja $c \cdot ENA = 2331$, kjer je c neko naravno število. Koliko je vrednost števila c?

(A) 3 **(B)** 7 **(C)** 9 **(D)** 21 **(E)** 37

B1. Krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ s središčema O_1 in O_2 se od zunaj dotikata. Naj bo p skupna tangenta krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$, ki ne poteka skozi njuno dotikališče. Dokaži, da je p tangenta tudi krožnice s premerom O_1O_2.

B2. Ali obstaja tako praštevilo p, da velja $p^2 + p + 1 = n^3$ za neko naravno število n?

B3. Naj bo K končna podmnožica celih števil s $k \geq 3$ elementi. Pravimo, da sta števili $a, b \in K$ *povezani*, če in samo če obstajajo števila $x_1, x_2, \ldots, x_k$, za katera velja:

- $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} = K$,
- $x_1 = a$, $x_k = b$,
- $|x_i - x_{i+1}|$ je liho število za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$.

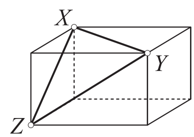
Dokaži, da v množici K obstajata dve števili, ki nista povezani.

Naloge za 3. letnik

A1. Tadej je na tablo zapisal ulomek, različen od 0. Sara je števec Tadejevega ulomka povečala za 40 %, da je dobila nov ulomek. Za koliko odstotkov mora Katja zmanjšati imenovalec Sarinega novega ulomka, da bo dobila ulomek, katerega vrednost bo dvakrat tolikšna, kot je bila vrednost Tadejevega ulomka?

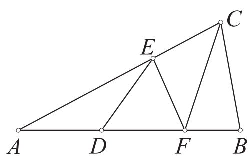
(A) 25 **(B)** 30 **(C)** 40 **(D)** 45 **(E)** 50

A2. Dolžine diagonal mejnih ploskev kvadra so enake $|XY| = 8$ cm, $|YZ| = 9$ cm in $|ZX| = \sqrt{55}$ cm (glej sliko). Koliko centimetrov je dolga telesna diagonala tega kvadra?



(A) $\sqrt{90}$ **(B)** 10 **(C)** $\sqrt{120}$ **(D)** $\sqrt{200}$ **(E)** 20

A3. Trikotnik ABC je razdeljen na 4 manjše trikotnike ADE, DFE, EFC in FBC z enakimi ploščinami (glej sliko). Koliko je razmerje dolžin $|AF| : |DB|$?



(A) $1:1$ **(B)** $9:8$ **(C)** $8:7$ **(D)** $7:6$ **(E)** $6:5$

B1. Poišči vsa realna števila x, ki rešijo enačbo

$$6^{\log_{10} x} + x^{\log_{10} 6} = 72.$$

B2. Poišči vse polinome stopnje $n \geq 1$, ki imajo vse ničle racionalne, vsak izmed njihovih $n+1$ koeficientov pa je enak 1 ali -1.

B3. Dan je trikotnik ABC. Naj bosta D in E taki točki, ki ležita zaporedoma na poltrakih CA in CB, a ne na stranicah trikotnika ABC, da velja $|AD| = |BE| = |AB|$. Naj bo F presečišče vzporednice k AC skozi točko E in vzporednice k BC skozi točko D. Presečišče premic AE in BD označimo z G. Dokaži, da je premica FG simetrala kota $\sphericalangle EFD$.

Naloge za 4. letnik

A1. Naj bo $a = 256$, b pa zmnožek vseh pozitivnih deliteljev števila a. Katera od naslednjih enakosti je pravilna?

(**A**) $b = a^4$ (**B**) $b = a^9$ (**C**) $b^2 = a^7$ (**D**) $b^2 = a^9$ (**E**) $b^3 = a^{10}$

A2. Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ poljubna soda funkcija in $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ poljubna liha funkcija. Definirajmo funkcijo $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom $\varphi(x) = f(g(x)) + g(f(x))$ za vse $x \in \mathbb{R}$. Katera od naslednjih enakosti je zagotovo izpolnjena za vsa realna števila x?

(**A**) $\varphi(x) = f(f(x))$ (**B**) $\varphi(x) = g(g(x))$ (**C**) $\varphi(x) = \varphi(-x)$
(**D**) $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ (**E**) $\varphi(x) = 2f(g(x))$

A3. Klara ima 6 enakih kock. Na mejne ploskve vsake kocke je zapisala črke B, A, B, I, C in A, na vsako mejno ploskev po črko. Nato je hkrati vrgla vseh 6 kock. Kolikšna je verjetnost, da lahko iz črk, ki so po metu na zgornih ploskvah kock, sestavi besedo $BABICA$?

(**A**) $\frac{6!}{(2!)^2}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^2$ (**B**) $\frac{6!}{(2!)^2}\left(\frac{1}{6}\right)^6$ (**C**) $\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^2$ (**D**) $\left(\frac{1}{6}\right)^6$ (**E**) 1

B1. Največ koliko je lahko največji skupni delitelj števil $a-2b+3$, $2a-3b-1$ in $3a+b-2$, če sta a in b naravni števili?

B2. V trikotniku ABC velja $|AC| \neq |BC|$. Naj bo S razpolovišče stranice AB, D presečišče stranice AB in simetrale kota $\sphericalangle ACB$ ter E zrcalna slika točke D pri zrcaljenju čez točko S. Trikotniku ABC očrtana krožnica seka premico CD v točkah C in F, premico CS pa v točkah C in G. Dokaži, da točke E, G, F in S ležijo na isti krožnici.

B3. Dano je naravno število m. Zaporedje a_n je definirano s pogojema $a_1 = m$ in $a_{n+1} = \left[\frac{a_n^2+10a_n}{2a_n+4}\right]$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Dokaži, da je zaporedje a_n od nekega člena dalje konstantno.

Opomba. Za poljubno realno število x oznaka $[x]$ označuje največje celo število, ki ni večje od x.

19. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol – državno tekmovanje

Naloge za 1. letnik

A1. Kateri od spodaj navedenih izrazov je enakovreden izrazu $(y-2)^3-y(y+5)(y-5)-29+6y^2$?

(**A**) $12y^2+37y-37$ (**B**) $-13y+37$ (**C**) $37y-21$
(**D**) $37(y-1)$ (**E**) $12y^2-37y-37$

A2. Mama je na vprašanje, koliko je star sin, odgovorila z uganko: Ce od sedanje dvakratne sinove starosti odštejemo trikrat toliko let, kot jih je imel pred šestimi leti, dobimo, koliko je star danes. Koliko let je sin star danes?

(**A**) 3 leta (**B**) 18 let (**C**) 9 let (**D**) 6 let (**E**) 27 let

A3. Kateri od spodaj navedenih izrazov je enakovreden izrazu $\frac{16a^{-2}b^{-1}c^{-4}}{2^{-1}a^{-3}b^{-2}c^{-3}} \cdot (a^0+(ab)^0)^{-1}$?

(**A**) $64abc^{-1}$ (**B**) $16abc^{-1}$ (**C**) $\frac{32}{abc}$ (**D**) $32abc^{-1}$ (**E**) $16abc^{-7}$

B1. Trije prijatelji so se odločili, da si bodo namesto malice v isti trgovini kupili zdrave izdelke. Prvi je kupil v trgovini 0,5 kg grozdja, 30 dag banan in 25 dag jabolk in plačal 2,20 evra. Drugi je kupil 45 dag banan, 300 g jabolk in 25 dag grozdja in plačal 1,98 evra. Tretji je kupil 350 g banan, 20 dag jabolk in 30 dag grozdja in plačal 1,74 evra. Izračunaj, koliko stane en kilogram jabolk, en kilogram grozdja in en kilogram banan.

B2. Naj bosta x in y celi števili. Če prvo število delimo z drugim številom, dobimo količnik 2 in ostanek 2. Če delimo vsoto števil x in y z njuno razliko, pa dobimo količnik 2 in ostanek 8. Določi $D(x,y)$ in $v(x,y)$.

B3. Dan je izraz $A=|x+3|+|x-5|$.

a) Izračunaj vrednost izraza za $x=\sqrt{2}$.

b) Poišči vse možne vrednosti x, za katere velja $A=4$.

Naloge za 2. letnik

A1. V konveksnem štirikotniku so zunanji koti v razmerju $7:4:6:1$. V kakšnem razmerju so notranji koti tega štirikotnika pri istih ogliščih?

(**A**) $2:5:3:8$ (**B**) $8:3:5:2$ (**C**) $1:6:4:7$ (**D**) $7:4:6:1$ (**E**) $11:14:12:17$

A2. V nekem večkotniku je vsota notranjih kotov enaka $4140°$. Kolikšno je število diagonal tega večkotnika?

(**A**) 250 (**B**) 275 (**C**) 205 (**D**) 725 (**E**) 257

A3. Naj bo $b=\sqrt[2019]{\sqrt[2018]{\ldots\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[2]{a}}}}}$, $a>0$. Kateri izraz je enakovreden $\sqrt[2020]{\sqrt[2019]{\sqrt[2018]{\ldots\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{404}}}}}}$?

(**A**) $\sqrt[2020]{b}$ (**B**) $\sqrt[5]{b}$ (**C**) $\sqrt[5]{b^2}$ (**D**) b^{404} (**E**) b^{202}

B1. V implicitni, eksplicitni in odsekovni obliki zapiši enačbo vzporednice k premici, podani z enačbo $\frac{x}{4}+\frac{y}{-2}=1$, ki gre skozi presečišče premic z enačbama $3x+5y=-3$ in $5x+4y=8$.

B2. Dani sta krožnici s središčema S_1 in S_2. Središči teh dveh krožnic sta oddaljeni 21 cm, njuna skupna tetiva je dolga 24 cm. Polmer prve krožnice je 13 cm. Nariši skico. Izračunaj polmer druge krožnice in obseg lika, ki ga predstavlja unija dveh krogov.

B3. Dan je izraz $Z = 5a^{-x}(1-a^{-x})^{-1} - 3a^{-x}(1+a^{-x})^{-1} - 2a^{x}(a^{2x}-1)^{-1}$, kjer je $a^x \neq 0, 1, -1$.

a) Poenostavi izraz Z.

b) Izračunaj vrednost izraza Z za $a = 9^{b+c} \cdot 3^{2b+c} : 27^{\frac{4}{3}b+c+\frac{1}{3}}$ in $x = 1$.

Naloge za 3. letnik

A1. Kolikšna je velikost središčnega kota, ki pripada krožnemu loku, ki ima enako dolžino kot polmer krožnice?

(A) $\frac{45^\circ}{\pi}$ **(B)** $\frac{90^\circ}{\pi}$ **(C)** $\frac{135^\circ}{\pi}$ **(D)** $\frac{180^\circ}{\pi}$ **(E)** $\frac{270^\circ}{\pi}$

A2. Kateri izraz je enakovreden izrazu $\log_{ab}(a^{-1} \cdot \sqrt[2]{a^3b^{-1}} : \sqrt[3]{b^{-1}a^2})$?

(A) ab **(B)** $\frac{a}{b}$ **(C)** 1 **(D)** $-\frac{1}{6}$ **(E)** $-\frac{1}{2}$

A3. Kroglo prerežemo na dve polkrogli. Za koliko $\%$ je vsota površin obeh polkrogel večja od površine krogle?

(A) 25 **(B)** 50 **(C)** 75 **(D)** $22,5$ **(E)** 40

B1. Naj bo $ABCD$ trapez z osnovnicama AB in CD. Naj velja $|AB| = 6,5$ cm, $|BC| = 4,3$ cm, $|AD| = 3,8$ cm ter $|AC| = 5,3$ cm. Izračunaj velikost kota $\sphericalangle CBA$, dolžino višine trapeza $ABCD$ in njegovo ploščino.

B2. Dana je družina parabol $y = (k-3)x^2 - 2(k-1)x + 2k + 1; k \neq 3$.

a) Poišči tisto parabolo, katere os simetrije je premica $x = -2$.

b) Poišči vse vrednosti k, za katere bo imela parabola dve različni realni ničli.

B3. Reši eksponentno enačbo $\frac{2^x + 2^{-x}}{2} = 2(2^x - 2^{-x})$. Rešitev naj bo točna.

Naloge za 4. letnik

A1. Kolikšen je prvi člen rekurzivno podanega zaporedja s formulo $a_n = 2a_{n-1} + 1$, če je peti člen enak 7?

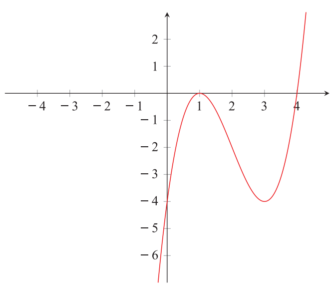
(A) 2 **(B)** 15 **(C)** $-\frac{7}{2}$ **(D)** $-\frac{1}{2}$ **(E)** -5

A2. Kateri interval je zaloga vrednosti funkcije $f(x) = \cos x + 1 - \pi$?

(A) $[-1+\pi,\ 2]$ **(B)** $[0,\ \pi+2]$ **(C)** $[-\pi,\ 2-\pi]$ **(D)** $[-\pi,\ 1+\pi]$ **(E)** $[1-\pi,\ 2-\pi]$

A3. Na sliki je graf polinoma p, ki seka os y v -4, se dotika abscisne osi v 1 in seka os x v 4. Kolikšna je vrednost izraza $p'(1) - 2 \cdot p(0) - 4 \cdot p(4)$?

(A) 2 **(B)** 4 **(C)** 8 **(D)** 0 **(E)** -1



B1. Realni rešitvi enačbe $x^4 - x^3 - 2x - 4 = 0$ sta prva dva člena padajočega aritmetičnega zaporedja s 40 členi.

a) Izračunaj prva dva člena in diferenco zaporedja.

b) Izračunaj zadnji člen in zapiši splošni člen a_n zaporedja.

c) Izračunaj vsoto vseh členov zaporedja z lihimi indeksi.

B2. V neki osnovni glasbeni šoli je v razredu 20 pianistov. Enemu pianistu je ime Mihael. Učitelj bo naključno izbral 9 pianistov, ki bodo samostojno igrali na šolskem nastopu, in njihov vrstni red.

a) Kolikšna je verjetnost, da bo med nastopajočimi tudi Mihael?

b) Koliko je vseh možnih različnih vrstnih redov pianistov za šolski nastop?

c) Kolikšna je verjetnost, da bo Mihael igral četrti po vrsti?

B3. Dani sta realni funkciji $f(x) = x + 1$ in $g(x) = x^2 + 3$.

a) Funkcija h je podana s predpisom $h(x) = \frac{f(x)+g(x)}{g(x)}$. Izračunaj stacionarne točke funkcije h. Zapiši enačbo vodoravne asimptote grafa funkcije h in izračunaj presečišče grafa z vodoravno asimptoto.

b) Izračunaj, za katere $a \in \mathbb{R}$ bo imela funkcija $j(x) = g(x) + af(x) - a$ vsaj eno realno ničlo.

19. tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol – državno tekmovanje

Naloge za 1. in 2. letnik

A1. Kateri izmed številskih izrazov ima vrednost 2019?

(A) 2019^{-1} **(B)** $3 \cdot (3^2 \cdot 5 \cdot 13 + 2^3 \cdot 11)$ **(C)** $(-1)^{2019}$
(D) $3 \cdot (2^2 \cdot 5 \cdot 13 + 2^3 \cdot 11)$ **(E)** 2019^{2019}

A2. Pri kateri pretvorbi se je Julija zmotila?

(A) $24\ \text{dm} = 2{,}4\ \text{m}$ **(B)** $12°50' = 12{,}5°$ **(C)** $0{,}4\ l = 4\ dl$
(D) $3{,}6\ \text{m}^2 = 36 \cdot 10^3\ \text{cm}^2$ **(E)** $130\ \text{cm} = 1{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{km}$

A3. Kateri od spodnjih izrazov ima za $x = 5$ nenegativno vrednost?

(A) $-x^3 + x$ **(B)** $x^3 - x$ **(C)** $-x^2 + x + 12$ **(D)** $-x^2 + 17$ **(E)** $2x - 20$

A4. Aritmetična sredina števil $2, 4, 5, 8, x, 15, 20$ je x. Vrednost x je:

(A) -9 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 12 **(E)** 13

A5. V drevoredu imamo nasajenih 80 dreves. Gozdar Matic označi vsako tretje drevo, gozdar Jure pa vsako peto drevo. Podrli bodo tista drevesa, ki so označena od obeh gozdarjev. Koliko dreves bodo podrli?

(A) 5 **(B)** 10 **(C)** 15 **(D)** 26 **(E)** 30

A6. Delce plastike velikosti 300 mikrometrov do 5 milimetrov imenujemo mikroplastika. Katera zapisana velikost ni v tem intervalu?

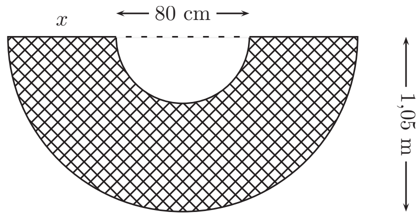
(A) $4 \cdot 10^{-4}\ \text{m}$ **(B)** $4 \cdot 10^{-6}\ \text{m}$ **(C)** $4 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$
(D) $4\ \text{mm}$ **(E)** $4 \cdot 10^{-2}\ \text{cm}$

A7. Tri cela števila a, b, c zadoščajo enačbi $4^a \cdot 7^b \cdot 12^c = 14^{11} \cdot 16^4 \cdot 18^5$. Poišči števila a, b in c.

(**A**) $a = 6, b = 3, c = 8$ (**B**) $a = 6, b = 3, c = 9$ (**C**) $a = 6, b = 10, c = 11$
(**D**) $a = 6, b = 11, c = 10$ (**E**) $a = 11, b = 6, c = 10$

A8. Koliko je dolg rob cvetlične gredice, ki je na sliki označen z x?

(**A**) 15 cm (**B**) 25 cm (**C**) 35 cm
(**D**) 45 cm (**E**) 65 cm



B1. Najem apartmaja stane dnevno 234 evrov. Na sedemdnevno smučanje se je v ta apartma najprej odpravljalo 9 prijateljev. Znesek bi razdelili na enake dele.

A. Koliko bi plačal vsak od devetih prijateljev za tedenski najem apartmaja?

B. Trije prijatelji so zaradi bolezni ostali doma. Koliko odstotkov več denarja je zato moral plačati vsak izmed prijateljev, ki je bil v apartmaju?

C. Prijatelji so kuhali krompir v loncu s premerom 28 cm. Ko je nekaj vode izparelo, so dolili toliko vode, da se je gladina le-te dvignila za 2 cm. Koliko decilitrov vode so dolili?

D. Na koliko različnih načinov so lahko pripravili pogrinjek s krožnikom, kozarcem in servieto, če so imeli na voljo 3 različne komplete krožnikov, 5 različnih paketov serviet in 2 različna kompleta kozarcev?

B2. Dan je izraz $2 - \frac{x-2}{5} + \frac{1+x}{4}$.

A. Izračunaj vrednost izraza za $x = 5$.

B. Določi tak x, da bo vrednost izraza enaka 4.

C. Določi tak x, da bo vrednost izraza vsaj 2.

D. Poišči tako najmanjše naravno število x, da bo vrednost izraza celo število.

B3. V viličarjevem rezervoarju je v začetku 62 litrov goriva. Viličar porabi vsako uro 15 litrov goriva.

A. Z viličarjem so 3 ure in 20 minut prelagali palete. Koliko goriva je po tem ostalo v rezervoarju?

B. Rezervoar ima obliko kvadra z merami $0{,}7$ m, 30 cm in 400 mm. Izračunajte njegovo prostornino v dm^3.

C. Zjutraj imajo v skladišču 635 palet izdelkov. Z viličarjem vsakih štiriindvajset minut na tovornjak naložijo in odpeljejo osemnajst palet. Koliko palet izdelkov ostane v skladišču ob koncu osemurnega delovnika?

Naloge za 3. letnik

A1. Kateri od številskih izrazov ima vrednost 2019?

(**A**) 2019^{-1} (**B**) $3 \cdot (3^2 \cdot 5 \cdot 13 + 2^3 \cdot 11)$ (**C**) $(-1)^{2019}$
(**D**) $3 \cdot (2^2 \cdot 5 \cdot 13 + 2^3 \cdot 11)$ (**E**) 2019^{2019}

A2. Katera trditev je napačna?

(**A**) $2x^2 - 32 = 2(x-4)(x+4)$

(**B**) Premica $y = x + 1$ seka abscisno os v točki $A(-1, 0)$.

(**C**) Premici z enačbama $y = 2x + 2$ in $2x - y + 4 = 0$ sta vzporedni.

(**D**) $\sqrt{17^2 - 15^2} = 2^3$

(**E**) $2^0 + (-1)^0 = 0$

A3. Aritmetična sredina števil $2, 4, 5, 8, x, 15, 20$ je x. Vrednost x je:

(**A**) -9 (**B**) 9 (**C**) 10 (**D**) 12 (**E**) 13

A4. V drevoredu imamo nasajenih 80 dreves. Gozdar Matic označi vsako tretje drevo, gozdar Jure pa vsako peto drevo. Podrli bodo tista drevesa, ki so označena od obeh gozdarjev. Koliko jih bodo podrli?

(**A**) 5 (**B**) 10 (**C**) 15 (**D**) 26 (**E**) 30

A5. Delce plastike velikosti 300 mikrometrov do 5 milimetrov imenujemo mikroplastika. Katera zapisana velikost ni v tem intervalu?

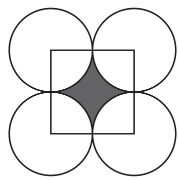
(**A**) $4 \cdot 10^{-4}$ m (**B**) $4 \cdot 10^{-6}$ m (**C**) $4 \cdot 10^{-3}$ m (**D**) 4 mm (**E**) $4 \cdot 10^{-2}$ cm

A6. Tri cela števila a, b, c zadoščajo enačbi $4^a \cdot 7^b \cdot 12^c = 14^{11} \cdot 16^4 \cdot 18^5$. Poišči števila a, b in c.

(**A**) $a = 6, b = 3, c = 8$ (**B**) $a = 6, b = 3, c = 9$ (**C**) $a = 6, b = 10, c = 11$

(**D**) $a = 6, b = 11, c = 10$ (**E**) $a = 11, b = 6, c = 10$

A7. Stranica kvadrata je dolga 6 cm. V vsakem oglišču kvadrata narišemo krožnico s polmerom 3 cm (glej sliko). Ploščina osenčenega lika znaša $x \cdot (4 - \pi)$ cm^2. Vrednost x je:



(**A**) 3 (**B**) 6 (**C**) 9 (**D**) 36 (**E**) 40

A8. Katera izmed navedenih kvadratnih enačb ima dve pozitivni rešitvi?

(**A**) $x^2 + 2x - 8 = 0$ (**B**) $x^2 + 5x + 6 = 0$ (**C**) $x^2 + x - 2 = 0$

(**D**) $x^2 - 5x + 6 = 0$ (**E**) $x^2 + 2x + 1 = 0$

B1. Najem apartmaja stane dnevno 234 evrov. Na sedemdnevno smučanje se je v ta apartma najprej odpravljalo 9 prijateljev. Znesek bi razdelili na enake dele.

A. Koliko bi plačal vsak od devetih prijateljev za tedenski najem apartmaja?

B. Trije prijatelji so zaradi bolezni ostali doma. Koliko odstotkov več denarja je zato moral plačati vsak izmed prijateljev, ki je bil v apartmaju?

C. Prijatelji so kuhali krompir v loncu s premerom 28 cm. Ko je nekaj vode izparelo, so dolili toliko vode, da se je gladina le-te dvignila za 2 cm. Koliko decilitrov vode so dolili?

D. Na koliko različnih načinov so lahko pripravili pogrinjek s krožnikom, kozarcem in servieto, če so imeli na voljo 3 različne komplete krožnikov, 5 različnih paketov serviet in 2 različna kompleta kozarcev?

B2. Dan je izraz $2 - \frac{x-2}{5} + \frac{1+x}{4}$.

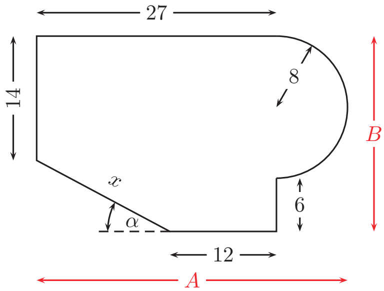
A. Izračunaj vrednost izraza za $x = 5$.

B. Določi tak x, da bo vrednost izraza enaka 4.

C. Določi tak x, da bo vrednost izraza vsaj 2.

D. Poišči tako najmanjše naravno število x, da bo vrednost izraza celo število.

B3. Slika prikazuje obliko in mere kovinske ploščice v milimetrih.



A. V sliko ploščice vrišite eno daljico s krajiščem v enem izmed oglišč ploščice tako, da nastane trapez. Poiščite vse rešitve.

B. Koliko mm je dolga zunanja mera A?

C. Koliko mm je dolga zunanja mera B?

D. Izračunajte dolžino poševnega roba x.

E. Pod kolikšnim kotom α odrežemo poševni rob? Rezultat zapišite v stopinjah na dve decimalki natančno.

Tekmovanje iz fizike za srebrno Stefanovo priznanje – področno tekmovanje

Naloge za 8. razred

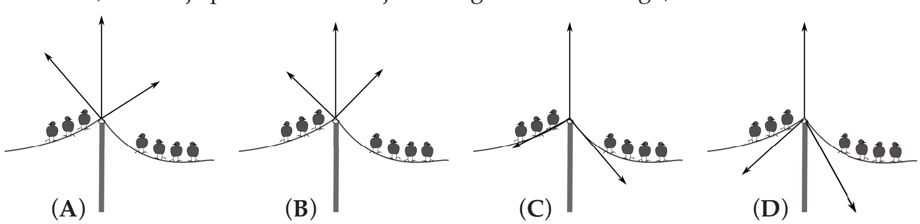
A1 Miha sedi v avtobusu, ki ima pri sprednjem vetrobranskem oknu zaslon, na katerem je prikazana ura tako, da jo lahko vidijo potniki v avtobusu. Ko je ura 02.15, vidi Miha v stranskem oknu avtobusa (ki je polprepustno zrcalo) sliko prikaza ure na zaslonu. Katero sliko vidi?

(A) **(B)** **(C)** **(D)**

A2 V kuharskih receptih včasih nastopa enota *čajna žlička*. Ameriška ustreznica *teaspoon* ustreza $\frac{1}{6}$ tekočega unča, ta $\frac{1}{16}$ US pinta, pint pa $\frac{1}{8}$ US galone, ki meri $3{,}785$ litra. Koliko mililitrov približno meri čajna žlička?

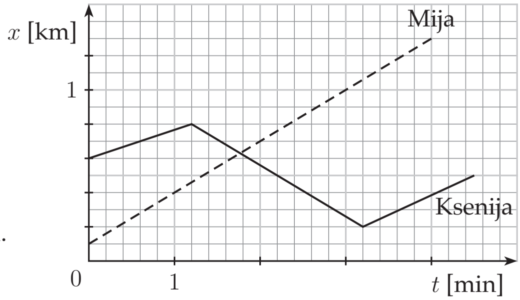
(A) 5 **(B)** 30 **(C)** 40 **(D)** 80

A3 Drog podpira žico daljnovoda, ki je speljana preko keramičnega izolatorja z zanemarljivo maso. Na žici ob drogu sedi jata vran. Katera slika pravilno prikazuje sile na keramični izolator (na skici je prikazan kot majhen krogec na vrhu droga)?



(A) **(B)** **(C)** **(D)**

A4 Grafa na sliki prikazujeta, kako sta se legi dveh tekačic spreminjali s časom. Ali se je katera od njiju v 3. minuti teka gibala tako, da je v 1 s opravila pot 5 m?



(**A**) Mija. (**B**) Ksenija.

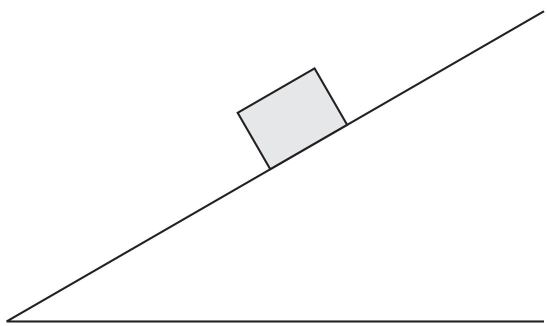
(**C**) Obe. (**D**) Nobena od njiju.

A5 Katera hitrost je največja?

(**A**) $2 \cdot 10^5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (**B**) $2 \cdot 10^7\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ (**C**) $2 \cdot 10^8\ \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ (**D**) $2 \cdot 10^4\ \frac{\text{km}}{\text{min}}$

B1 Zaboj z maso 5 kg vlečemo navzgor po klancu z naklonom $30°$. Vlečna sila $F = 55$ N je vzporedna s klancem. Zaboj se giblje počasi in enakomerno.

(a) Na sliko doriši vse sile, ki delujejo na zaboj med njegovim gibanjem po klancu, v merilu, kjer 1 cm pomeni silo 10 N. Sile poimenuj in označi.



(b) Izkaže se, da je sila trenja F_t premo sorazmerna pravokotni komponenti sile podlage (pravokotni sili podlage) $F_{p,\perp}$,

$$F_t = k \cdot F_{p,\perp}\,.$$

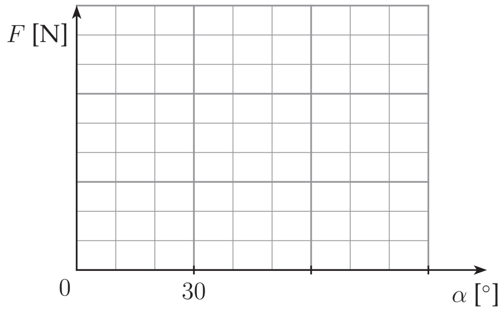
Koeficient premega sorazmerja k imenujemo *koeficient trenja*. Izračunaj koeficient trenja med zabojem in podlago ter ga zaokroži na eno decimalno mesto.

(c) S kolikšno silo vlečemo vzporedno s podlago isti zaboj po **vodoravni** podlagi, če je koeficient trenja enak kot na klancu in se zaboj giblje enakomerno?

(d) S kolikšno silo vlečemo vzporedno s podlago isti zaboj po klancu z naklonom $60°$, če se zaboj giblje enakomerno in je koeficient trenja enak kot na prvem klancu?

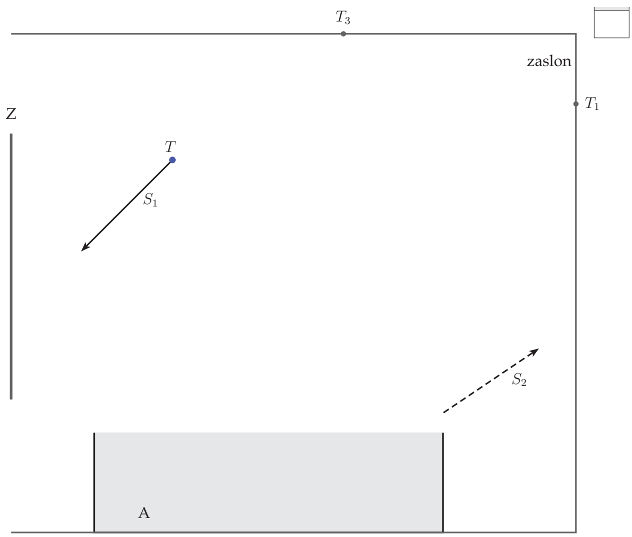
(e) S kolikšno silo vlečemo isti zaboj po klancu z naklonom $89{,}999^\circ$, če se zaboj giblje enakomerno in je koeficient trenja enak kot na prvem klancu?

(f) Nariši graf, ki prikazuje, kako je pri enakomernem gibanju zaboja po klancu navzgor velikost s klancem vzporedne **vlečne sile** F odvisna od naklona klanca α, za $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.



B2 Jaka še naprej eksperimentira z laserskim kazalnikom, ravnim zrcalom in akvarijem z vodo. Uporabi navpično ravno zrcalo (Z), do vrha napolnjen akvarij z vodo (A), ki stoji na vodoravnih tleh, ter zaslon. Dno akvarija deluje kot ravno zrcalo. Svetloba potuje v snopu S_1 od kazalnika v točki T do zrcala, dna akvarija in naposled do zaslona, ki ga osvetli v točki T_1.

(a) Čim natančneje skiciraj opisano pot svetlobe, ki se začne, kot označuje puščica S_1.

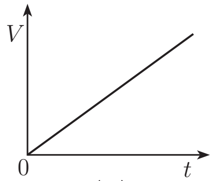


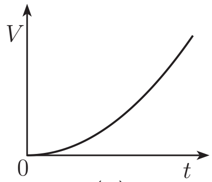
(b) Jaka bi rad s snopom svetlobe, ki se začne v smeri S_1, v točki T_3 na stropu naredil *zajčka* (svetlo liso). Svetlobi v snopu bo na pot postavil še eno ravno zrcalo. Nariši, kam in kako bi lahko Jaka namestil zrcalo, da bo zajček pristal v T_3. Nariši tudi snop, ki se odbije od tega zrcala.

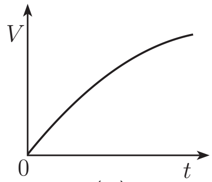
(c) Ko Jaka kazalnik v točki T nekoliko zasuče, svetloba do zrcala, dna akvarija in zaslona potuje po drugi poti. Del te poti prikazuje puščica S_2. S črtkano črto čim natančneje skiciraj pot svetlobe od kazalnika do zaslona v tem primeru.

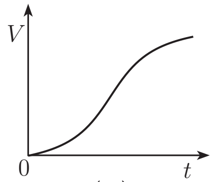
Naloge za 9. razred

A1 Valjasta posoda, polna vode, ima v dnu luknjico, ki je zamašena. Ob času $t = 0$ luknjico odmašimo, voda prične skozi luknjico iztekati. Kateri graf pravilno prikazuje prostornino iztekle vode v odvisnosti od časa?


(A)


(B)


(C)


(D)

A2 Katero enoto ima gravitacijska konstanta G, ki nastopa v izrazu za gravitacijsko silo med dvema telesoma

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

kjer sta m_1 in m_2 masi teles in je r razdalja med telesi?

(A) $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{kg}}$ **(B)** $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s} \cdot \mathrm{kg}}$ **(C)** $\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{kg}^2}$ **(D)** $\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s} \cdot \mathrm{kg}^2}$

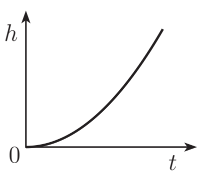
A3 Sposodili smo si nalogo iz stare Močnikove računice: *"Skupina 15* ***srednje učinkovitih*** *delavcev izvrši neko delo v 10 dneh, ako delajo na dan po 12 ur. Koliko* ***visoko učinkovitih*** *delavcev je treba najeti, da zagotovijo isto delo v 6 dneh, ako delajo le po 10 ur na dan?"* Moči, s katerima srednje in visoko učinkovit delavec opravljata delo, sta v razmeru 2 : 3.

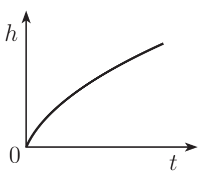
(A) 10 **(B)** 15 **(C)** 20 **(D)** 30

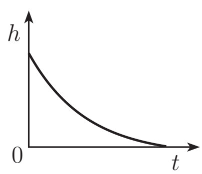
A4 Na čolnu, ki ima skupaj z motorjem maso 120 kg, sedita Tina in Tone. Tone ima 65 kg, Tina pa 55 kg. Čoln pospešuje. V nekem trenutku se giblje s pospeškom 1 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Takrat deluje na čoln sila upora, ki je po velikosti enaka 500 N. S kolikšno silo propeler motorja odriva vodo?

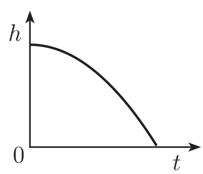
(A)120 N **(B)** 240 N **(C)** 500 N **(D)** 740 N

A5 Vrana v trenutku $t = 0$ spusti iz kljuna oreh, da prosto pade na asfaltirano cesto. Kateri graf pravilno kaže, kako se s časom spreminja višina, na kateri je oreh?


(A)


(B)


(C)


(D)

B1 Dušan si v zamrzovalniku pripravi led. Led zdrobi in strese v toplotno izolirano posodo. Masa ledu v posodi je 3 kg, temperatura pa $-16\,^\circ$C. Predpostavi, da je mešanje snovi v posodi tako učinkovito, da je v vsakem trenutku temperatura na vseh mestih v posodi enaka.

specifična toplota vode $c_\mathrm{v} = 4200\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}$

specifična toplota ledu $c_\mathrm{l} = 2100\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}$

specifična talilna toplota vode $q_t = 336\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$

specifična izparilna toplota vode $q_i = 2{,}26\ \frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{kg}}$

proces	trajanje Δt [min]	začetek t_z [min]	konec t_k [min]
(a) segrevanje ledu	$\Delta t_{(a)} =$	$t_0 = 0$	$t_1 =$
(b) taljenje s prvim grelcem	$\Delta t_{(b)} =$	$t_1 =$	$t_2 =$
(c) taljenje z drugim grelcem			
(d) segrevanje vode do vrenja			
(e) uparevanje			

(a) Dušan v posodo ob času $t = 0$ potopi grelec, ki vsako sekundo odda 120 J toplote. Ob katerem času (t_1) je led ogret na temperaturo $0\,°\mathrm{C}$ in se ni še nič ledu stalilo?

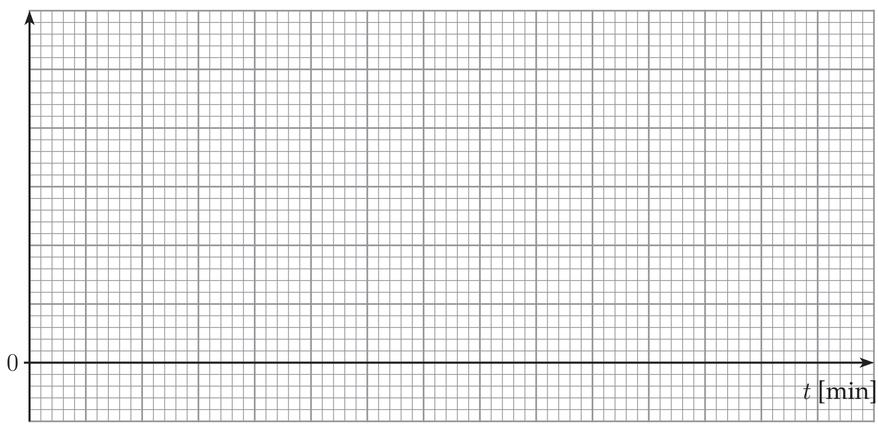
(b) Dušan opazi, da poskus poteka nekoliko prepočasi, zato poišče močnejši grelec. Ob času t_2, ko je v posodi mešanica $0{,}75$ kg tekoče vode in $2{,}25$ kg ledu, zamenja prvi grelec z drugim. Koliko časa je talil led s prvim grelcem ($\Delta t_{(b)}$) in ob katerem času (t_2) prvi grelec zamenja z drugim?

(c) Drugi grelec odda vsako sekundo 7-krat več toplote kot prvi. Čez koliko časa (od zamenjave grelcev) se stali ves preostali led ($\Delta t_{(c)}$) in koliko časa je tedaj minilo od začetka poskusa (t_3)?

(d) Segrevanje poteka še naprej z drugim grelcem. Ob katerem času (t_4) voda zavre?

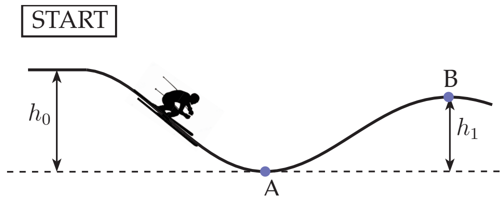
(e) Voda vre, para uhaja iz posode. Ob katerem času (t_5) je v posodi le še $2{,}5$ kg vode?

(f) Nariši graf, ki prikazuje, kako se je s časom spreminjala temperatura v posodi od $t = 0$ do t_5.



(g) Koliko toplote je med poskusom (od $t = 0$ do t_5) prejela snov v posodi?

B2 Filip tekmuje v smučarskem krosu. Njegova skupna masa, ko je v popolni smučarski opravi, je 104 kg. Na startu, ki je $h_0 = 9$ m nad točko A, ki je najnižja točka prve doline, se Filip požene po klancu. V točki A mu izmerijo hitrost $13{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



(a) Kolikšna je sprememba Filipove potencialne energije na prvem klancu od starta do točke A?

(b) Kolikšno kinetično energijo ima Filip v točki A?

(c) Na 18 m dolgem klancu od starta do točke A deluje na Filipa povprečna zaviralna sila $F_u = 35$ N. Kolikšno delo opravi (na Filipu) zaviralna sila?

(d) S kolikšno hitrostjo se je Filip na startu pognal v dolino?

(e) Dolini sledi grbina. Razmerje med dolžino klanca med točkama A in B ter višinsko razliko h_1 je enako razmerju med dolžino klanca med startom in točko A ter višinsko razliko h_0. Predpostavi, da na Filipa na grbini deluje enaka povprečna zaviralna sila kot na prvem klancu. Kako visoko nad točko A naj bo vrh grbine B, da ga Filip presmuča z enako hitrostjo, kot jo je imel na startu?

Rešitve 63. matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje

Rešitve za 1. letnik

A1. Na vsakem darilu je trak sestavljen iz 8 odsekov in pentlje. 4 odseki potekajo po stranskih ploskvah, 2 po zgornji in 2 po spodnji ploskvi. Na levem darilu so 4 odseki dolgi 30 cm, 2 odseka 20 cm in 2 odseka 10 cm. Na srednjem darilu sta 2 odseka dolga 30 cm, 4 odseki 20 cm in 2 odseka 10 cm. Na desnem darilu sta 2 odseka dolga 30 cm, 2 odseka 20 cm in 4 odseki 10 cm. Torej velja $x > y > z$.

A2. Če sliko dopolnimo tako, da označimo še sovršne kote kotov α, β in γ, opazimo, da velja $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360°$. Ker je $\alpha = 3\gamma$ in $\beta = 6\gamma$, iz prejšnje enakosti sledi $20\gamma = 360°$ oziroma $\gamma = 18°$. Torej je $\alpha = 54°$.

A3. Velja $2019^3 - 3 \cdot 2019 \cdot 2018 - 2018^3 = 2019^3 - 3 \cdot 2019 \cdot 2018 \cdot (2019 - 2018) - 2018^3 = 2019^3 - 3 \cdot 2019^2 \cdot 2018 + 3 \cdot 2019 \cdot 2018^2 - 2018^3 = (2019 - 2018)^3 = 1$.

B1. Naj bodo a, b in c delitelji števila n, za katere je $n^3 = a^2 + b^2 + c^2$. Tedaj velja $a, b, c \leq n$, zato je $n^3 = a^2 + b^2 + c^2 \leq 3n^2$ oziroma $n \leq 3$. Primer $n = 1$ odpade, ker 1 ni vsota treh naravnih števil. Če je $n = 2$, sta edina delitelja 1 in 2. Toda nobena od vsot $1^2 + 1^2 + 1^2$, $1^2 + 1^2 + 2^2$, $1^2 + 2^2 + 2^2$ in $2^2 + 2^2 + 2^2$ ni enaka 2^3, zato tudi primer $n = 2$ odpade. Edina rešitev je $n = 3$, saj velja $3^3 = 3^2 + 3^2 + 3^2$.

2. način. Naj bodo $a \leq b \leq c$ delitelji števila n, za katere je $n^3 = a^2 + b^2 + c^2$. Ker c^2 deli n^3, mora deliti tudi $a^2 + b^2$. Toda po naši predpostavki je $a^2 + b^2 \leq 2c^2$, zato imamo dve možnosti, $a^2 + b^2 = c^2$ ali $a^2 + b^2 = 2c^2$. V prvem primeru je $n^3 = 2c^2$ oziroma $\left(\frac{n}{c}\right)^2 n = 2$, kar pomeni, da n deli 2. V drugem primeru je $n^3 = 3c^2$ oziroma $\left(\frac{n}{c}\right)^2 n = 3$, kar pomeni, da n deli 3. Sledi, da je n enak 1, 2 ali 3. Na enak način kot v prvi rešitvi pokažemo, da je rešitev le $n = 3$.

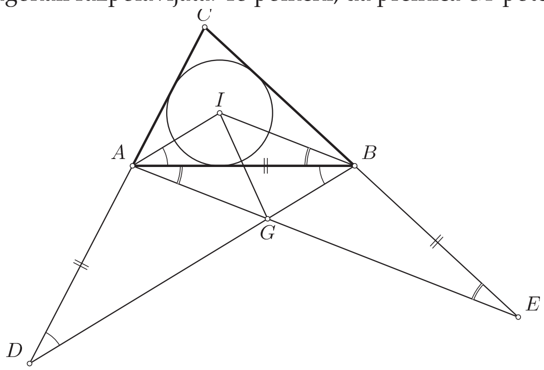
B2. Ker je trikotnik ABE enakokrak z vrhom pri B, velja

$$\sphericalangle EAB = \frac{1}{2}(\pi - \sphericalangle ABE) = \frac{1}{2}\sphericalangle CBA.$$

Premica BI je simetrala kota $\sphericalangle CBA$, zato je $\frac{1}{2}\sphericalangle CBA = \sphericalangle IBA$. Od tod sledi $\sphericalangle EAB = \sphericalangle IBA$, torej sta premici AE in BI vzporedni. Na podoben način sklepamo, da je

$$\sphericalangle ABD = \frac{1}{2}(\pi - \sphericalangle DAB) = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAI,$$

torej sta tudi premici BD in AI vzporedni. Sledi da je $AGBI$ paralelogram, zato se njegovi diagonali razpolavljata. To pomeni, da premica GI poteka skozi razpolovišče stranice AB.



B3. V obeh enačbah odpravimo ulomke in ju poenostavimo, da dobimo

$$-x^2y^3 + 15x^2y^3 = -x^3y^2 + 15xy^4,$$

$$-6000y^3 + 36x^2y^3 - 16x^2 = -6000y^2 + 36xy^4 - 16x.$$

Prvo enačbo preoblikujemo v $x^2y^2(x-y) = -15xy^3(x-y)$ in nato v

$$xy^2(x-y)(x+15y) = 0.$$

Števili x in y torej zadoščata eni od naslednjih štirih možnosti:

1. možnost: $x = 0$. Ko to vstavimo v drugo od zgornjih dveh enačb, dobimo $y^3 = y^2$ oziroma $y^2(y-1) = 0$. Torej je $y = 0$ ali $y = 1$. Prva možnost odpade, saj pri $x = y = 0$ nekateri ulomki v začetnih enačbah niso dobro definirani. Ostane torej le možnost $y = 1$.

2. možnost: $y = 0$. Iz druge od zgornjih enačb tedaj dobimo $x^2 = x$, torej je $x = 0$ ali $x = 1$. Možnost $x = 0$ kot v prejšnjem primeru odpade, torej dobimo le rešitev $x = 1$.

3. možnost: $y = x$. To spet vstavimo v drugo enačbo in dobimo $-6000x^3 - 16x^2 = -6000x^2 - 16x$, kar lahko preoblikujemo v $6000x^2(1-x) = 16x(x-1)$, slednje pa v $16x(x-1)(375x+1) = 0$. Možnost $x = 0$ odpade, saj je v tem primeru tudi $y = 0$ in nekateri ulomki v začetnih enačbah niso dobro definirani. Iz enakega razloga odpade tudi možnost $x = 1$. Sledi $375x + 1 = 0$ oziroma $x = y = -\frac{1}{375}$.

4. možnost: $x = -15y$. Ko to vstavimo v drugo enačbo in enačbo poenostavimo, dobimo

$$8640y^5 - 6000y^3 - 2400y^2 - 240y = 0.$$

Kot v prejšnjem primeru možnost $y = 0$ odpade, saj je tedaj tudi $x = 0$. Zato lahko zadnjo enačbo delimo z $240y$, da dobimo

$$36y^4 - 25y^2 + 10y - 1 = 0.$$

Opazimo, da zadnji trije členi tvorijo popolni kvadrat, zato enačbo preoblikujemo v $36y^4-(5y-1)^2=0$, nato pa levo stran razstavimo po formuli za razliko kvadratov in dobimo

$$(6y^2-5y+1)(6y^2+5y-1)=0.$$

Oba faktorja na levi strani enačbe razstavimo in dobimo

$$(3y-1)(2y-1)(6y-1)(y+1)=0.$$

Rešitve so torej $y=\frac{1}{3}$ in $x=-5$, $y=\frac{1}{2}$ in $x=-\frac{15}{2}$, $y=\frac{1}{6}$ in $x=-\frac{5}{2}$ ter $y=-1$ in $x=15$. V vseh primerih so vsi ulomki v začetnih enačbah dobro definirani.

Vsi pari (x,y), ki rešijo naloge so torej $(0,1)$, $(1,0)$, $(-\frac{1}{375},-\frac{1}{375})$, $(-5,\frac{1}{3})$, $(-\frac{15}{2},\frac{1}{2})$, $(-\frac{5}{2},\frac{1}{6})$ in $(15,-1)$.

Rešitve za 2. letnik

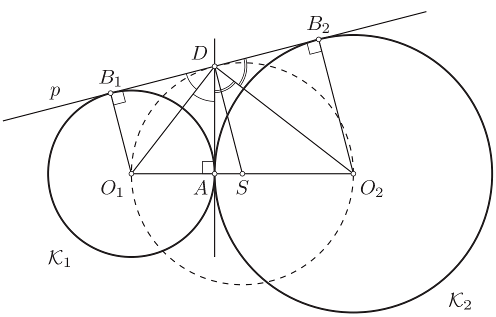
A1. Označimo količino tekočine, ki jo drži en kozarec z e. Tedaj je v skledi $\frac{1}{3}e+\frac{2}{5}e=\frac{11}{15}e$ limoninega soka od skupno $2e$ tekočine. Limonin sok torej predstavlja $\frac{\frac{11}{15}e}{2e}=\frac{11}{30}$ tekočine v skledi.

A2. Razlika med ploščinama trikotnikov ADE in BCD je enaka razliki med ploščinama trikotnikov ABE in ABC, to je $\frac{|AB|\cdot|AE|}{2}-\frac{|AB|\cdot|BC|}{2}=\frac{4\cdot 8}{2}-\frac{4\cdot 6}{2}=4$.

A3. Pozitivni delitelji števila $2331=3^2\cdot 7\cdot 37$ so $1,3,7,9,21,37,63,111,259,333,777$ in 2331. Med njimi je le 259 trimestno naravno število s tremi različnimi števkami. Torej je $ENA=259$ in zato $c=2331:259=9$.

B1. Naj bo S razpolovišče daljice O_1O_2 ter A dotikališče krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$. Dotikališči premice p s krožnicama $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ označimo zaporedoma z B_1 in B_2, presečišče premice p s tangento na krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ skozi točko A pa označimo z D. Trikotnika O_1AD in O_1B_1D sta skladna, saj imata dve enako dolgi stranici in enak kot $\frac{\pi}{2}$ nasproti daljše stranice, zato velja $\sphericalangle B_1DO_1=\sphericalangle O_1DA$. Podobno sklepamo, da velja tudi $\sphericalangle ADO_2=\sphericalangle O_2DB_2$, in od tod izpeljemo $\sphericalangle O_1DO_2=\sphericalangle O_1DA+\sphericalangle ADO_2=\frac{\sphericalangle B_1DA}{2}+\frac{\sphericalangle ADB_2}{2}=\frac{\pi}{2}$. Po Talesovem izreku torej točka D leži na krožnici s premerom O_1O_2, zato je dovolj dokazati, da je premica SD pravokotna na premico p.

Ker točka D leži na krožnici s premerom O_1O_2, je $|SD|=|SO_1|$, torej je trikotnik O_1SD enakokrak z vrhom pri S. Sledi $\sphericalangle SO_1D=\sphericalangle O_1DS$ in zato je $\sphericalangle B_1DS=\sphericalangle B_1DO_1+\sphericalangle O_1DS=\frac{\pi}{2}-\sphericalangle DO_1B_1+\sphericalangle SO_1D=\frac{\pi}{2}$, kar je bilo treba dokazati.



2. način. Primer, ko je premica p vzporedna premici O_1O_2 je očiten, zato lahko predpostavimo, da se omenjeni premici sekata in njuno presečišče označimo s T. Naj bo S razpolovišče daljice O_1O_2, D' pa pravokotna projekcija točke S na premico p. Dotikališči premice p s krožnicama $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ označimo z B_1 in B_2, polmera krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ pa z r_1 in r_2. Iz podobnosti trikotnikov TO_1B_1, TSD' in TO_2B_2 sledi

$$\frac{r_1}{|O_1T|} = \frac{|SD'|}{|ST|} = \frac{r_2}{|O_2T|},$$

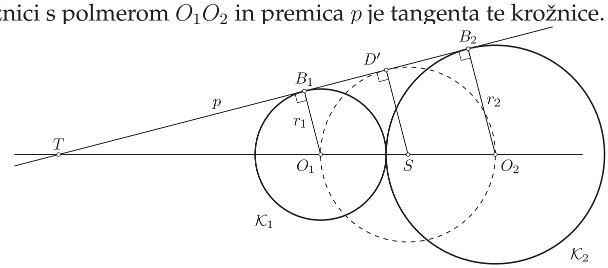
torej je

$$|SD'| \cdot |O_1T| = r_1 \cdot |ST| = r_1 \cdot (|SO_1| + |O_1T|) \qquad \text{in}$$
$$r_2 \cdot |O_1T| = r_1 \cdot |O_2T| = r_1 \cdot (|O_2O_1| + |O_1T|) = r_1 \cdot (2|SO_1| + |O_1T|).$$

Prvo enačbo pomnožimo z 2 in od nje odštejemo drugo enačbo, da dobimo

$$(2|SD'| - r_2) \cdot |O_1T| = r_1 \cdot |O_1T|.$$

Od tod sledi $2|SD'| - r_2 = r_1$ oziroma $|SD'| = \frac{r_1+r_2}{2} = \frac{|O_1O_2|}{2} = |SO_1| = |SO_2|$. Torej točka D' leži na krožnici s polmerom O_1O_2 in premica p je tangenta te krožnice.



B2. Pokazali bomo, da takšno praštevilo ne obstaja. Enačbo preoblikujemo v $p^2 + p = n^3 - 1$ in obe strani razstavimo, da dobimo $p(p+1) = (n-1)(n^2+n+1)$. Če p deli $n-1$, tedaj n^2+n+1 deli $p+1$. Od tod sledi $n^2+n+1 \leq p+1 \leq n$, kar pa je protislovje. Torej mora p deliti n^2+n+1 in zato $n-1$ deli $p+1$. To pomeni, da obstaja naravno število k, da velja $n^2+n+1 = kp$ in $p+1 = k(n-1)$. Iz druge enakosti izrazimo p in ga vstavimo v prvo enakost, da dobimo $n^2+n+1 = k(k(n-1)-1) = k^2n-k^2-k$. Slednje preoblikujemo v $n^2+(1-k^2)n+(k^2+k+1) = 0$ in to pogledamo kot kvadratno enačbo v spremenljivki n. Ker mora imeti ta enačba rešitev, ki je naravno število, mora biti njena diskriminanta $D = k^4-6k^2-4k-3$ popoln kvadrat. Opazimo, da je $D = (k^2-3)^2 - 4k - 12 < (k^2-3)^2$, saj je $4k+12 > 0$. Prvi popoln kvadrat, ki je manjši od $(k^2-3)^2$, je $(k^2-4)^2$, zato mora veljati $D \leq (k^2-4)^2$. Z upoštevanjem zveze $D = k^4-6k^2-4k-3$ to neenakost preoblikujemo v $2k^2-4k-19 \leq 0$ oziroma $2k(k-2) \leq 19$. Opazimo, da za $k \geq 5$ neenakost ni izpolnjena, torej so edine naravne rešitve 1, 2, 3 in 4. Toda diskriminanta D je pri teh vrednostih števila k zaporedoma enaka -12, -19, 12 in 141 in v nobenem primeru ni popoln kvadrat. Torej tako praštevilo p ne obstaja.

B3. Tretji pogoj v nalogi pove, da sta števili a in b povezani, če lahko števila v množici K razporedimo v vrsto, ki se začne z a in konča z b, tako da sta vsaki dve sosednji števili v tej vrsti različne parnosti. Vrsto, v kateri sta vsaki dve sosednji števili različne parnosti, bomo imenovali *alternirajoča* vrsta.

Obravnavajmo različni možnosti glede na parnost števila k.

Denimo, da je k sodo število. Števili a in b sta povezani z alternirajočo vrsto natanko tedaj, ko sta različnih parnosti. Ker je $k \geq 3$, lahko izmed števil v množici K izberemo dve števili, ki sta iste parnosti in zato nista povezani.

Denimo, da je k liho število. Števili a in b sta povezani z alternirajočo vrsto natanko tedaj, ko sta iste parnosti. Ker je $k \geq 3$, lahko izmed števil v množici K izberemo dve števili, ki sta različne parnosti in zato nista povezani.

Rešitve za 3. letnik

A1. Če je Tadejev ulomek enak $\frac{a}{b}$, tedaj je Sarin ulomek $\frac{1.4 \cdot a}{b}$, Katjin ulomek pa $\frac{2 \cdot a}{b} = \frac{1.4 \cdot a}{0.7 \cdot b}$. Katja mora imenovalec Sarinega novega ulomka zmanjšati za 30%.

A2. Dolžino, širino in višino kvadra označimo z a, b in c. Tedaj po Pitagorovem izreku velja $a^2+b^2 = |XY|^2 = 64$, $b^2+c^2 = |ZX|^2 = 55$ in $c^2+a^2 = |YZ|^2 = 81$. Enačbe seštejemo, da dobimo $2(a^2+b^2+c^2) = 200$. Dolžina telesne diagonale kvadra je enaka $\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10$ cm.

A3. Trikotnika AED in DEF imata ploščini v razmerju $1 : 1$ in skupno višino skozi oglišče E, zato sta tudi njuni stranici v razmerju $|DA| : |FD| = 1 : 1$. Trikotnika ACB in FCB imata ploščini v razmerju $4 : 1$ in skupno višino skozi oglišče C, zato sta njuni stranici v razmerju $|BA| : |BF| = 4 : 1$. Torej je $|BA| = 4|BF|$, $|FA| = |BA| - |BF| = 3|BF|$, $|FD| = \frac{1}{2}|FA| = \frac{3}{2}|BF|$ in $|BD| = |BF| + |FD| = \frac{5}{2}|BF|$. Sledi $|FA| : |BD| = 3|BF| : \frac{5}{2}|BF| = 6 : 5$.

B1. Logaritem je definiran le za pozitivna števila, zato mora biti $x > 0$. Število $x = 1$ očitno ni rešitev enačbe, zato lahko privzamemo, da je $x \neq 1$. Za pozitivno realno število $x \neq 1$ velja $\log_{10} x = \frac{1}{\log_x 10}$, zato je $\log_{10} 6 = \frac{\log_x 6}{\log_x 10} = \log_{10} x \cdot \log_x 6$. S pomočjo te zveze lahko dano enakost preoblikujemo do

$$6^{\log_{10} x} + \left(x^{\log_x 6}\right)^{\log_{10} x} = 72$$

in nato upoštevamo enakost $x^{\log_x 6} = 6$, da dobimo

$$2 \cdot 6^{\log_{10} x} = 72.$$

Od tod sledi $6^{\log_{10} x} = 36 = 6^2$, torej je $\log_{10} x = 2$ oziroma $x = 100$.

B2. Naj bo $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ iskani polinom. Če je $\frac{k}{m}$ neka njegova racionalna ničla, tedaj k deli a_0 in m deli a_n. Ker pa sta a_0 in a_n oba enaka 1 ali -1, sta tudi k in m enaka 1 ali -1. Torej so vse ničle polinoma $p(x)$ enake 1 ali -1. Hkrati je tudi vodilni koeficient polinoma $p(x)$ enak 1 ali -1, zato lahko pišemo $p(x) = \pm(x-1)^m(x+1)^k$ za neki nenegativni celi števili m in k (ne obe enaki 0). Če je $m = 0$, tedaj očitno le polinoma $\pm(x+1)$ zadoščata pogojem naloge, in če je $k = 0$, le polinoma $\pm(x-1)$ zadoščata pogojem naloge. V nadaljevanju zato predpostavimo, da sta k in m naravni števili. Sledi

$$\pm p(x) = (x^m - mx^{m-1} + \cdots)(x^k + kx^{k-1} + \cdots) = x^{k+m} + (k-m)x^{k+m-1} + \cdots,$$

torej je $k - m = \pm 1$.

Če je $k = m+1$, potem je

$$\pm p(x) = (x^2-1)^m(x+1) = (x^{2m} - mx^{2m-2} + \cdots)(x+1) = x^{2m+1} + x^{2m} - mx^{2m-1} + \cdots,$$

od koder sledi $m = 1$ in $p(x) = \pm(x-1)(x+1)^2 = \pm(x^3 + x^2 - x - 1)$.

Če pa je $k = m-1$ oziroma $m = k+1$, pa podobno kot zgoraj sledi

$$\pm p(x) = (x^2-1)^k(x-1) = (x^{2k} - kx^{2k-2} + \cdots)(x-1) = x^{2k+1} - x^{2k} - kx^{2k-1} + \cdots,$$

torej je $k = 1$ in $p(x) = \pm(x-1)^2(x+1) = \pm(x^3 - x^2 - x + 1)$.

Vse rešitve so torej polinomi $\pm(x-1)$, $\pm(x+1)$, $\pm(x^3+x^2-x-1)$ in $\pm(x^3-x^2-x+1)$.

B3. Označimo s P presečišče daljice BC in simetrale kota $\sphericalangle BAC$, z Q pa presečišče daljice AC in simetrale kota $\sphericalangle CBA$. Presečišče premic AP in BQ je torej središče trikotniku ABC včrtane krožnice, označimo ga z I. Ker je trikotnik BAD enakokrak z vrhom pri A, je $\sphericalangle BDA = \frac{1}{2}(\pi - \sphericalangle DAB) = \frac{1}{2}(\sphericalangle BAC) = \sphericalangle PAC$. Torej sta premici BD in PA vzporedni in trikotnika BCD in PCA sta si podobna. Sledi

$$\frac{|CB|}{|CD|} = \frac{|CP|}{|CA|} \quad \text{oziroma} \quad |CP| \cdot |CD| = |CB| \cdot |CA|.$$

Na enak način pokažemo, da sta tudi premici AE in QB vzporedni ter trikotnika ECA in BCQ podobna, zato velja še

$$\frac{|CE|}{|CA|} = \frac{|CB|}{|CQ|} \quad \text{oziroma} \quad |CE| \cdot |CQ| = |CB| \cdot |CA|.$$

Iz zgornjih enakosti sledi

$$|CP| \cdot |CD| = |CE| \cdot |CQ| \quad \text{oziroma} \quad \frac{|CP|}{|CQ|} = \frac{|CE|}{|CD|}.$$

To pomeni, da sta trikotnika PCQ in ECD podobna. V posebnem sta premici PQ in ED vzporedni. Štirikotnik $FECD$ je paralelogram, saj ima dva para vzporednih stranic, zato sta trikotnika ECD in DFE skladna. Posledično sta trikotnika PCQ in DFE podobna. Iz vzporednosti premic BD in PA, AE in QB ter PQ in ED sledi, da sta tudi trikotnika QIP in EGD podobna. Torej sta celo štirikotnika $PCQI$ in $DFEG$ podobna. Ker je diagonala CI simetrala kota $\sphericalangle QCP$, je tudi diagonala FG simetrala kota $\sphericalangle EFD$.

2. način. Uporabimo oznake iz prve rešitve. Podobnost trikotnikov PCQ in ECD lahko pokažemo tudi nekoliko drugače. Simetrala notranjega kota trikotnika razdeli nasprotno stranico v razmerju, ki je enako razmerju priležnih stranic. Tako velja

$$\frac{|BP|}{|CP|} = \frac{|AB|}{|AC|} \quad \text{oziroma} \quad |BP| = \frac{|AB| \cdot |CP|}{|AC|}.$$

Slednje vstavimo v enakost $|BP| + |CP| = |BC|$ in izrazimo $|CP|$, da dobimo

$$|CP| = \frac{|CA| \cdot |CB|}{|AB| + |AC|} = \frac{|CA| \cdot |CB|}{|CD|},$$

kjer smo upoštevali še $|AB| = |AD|$. Na enak način izpeljemo še

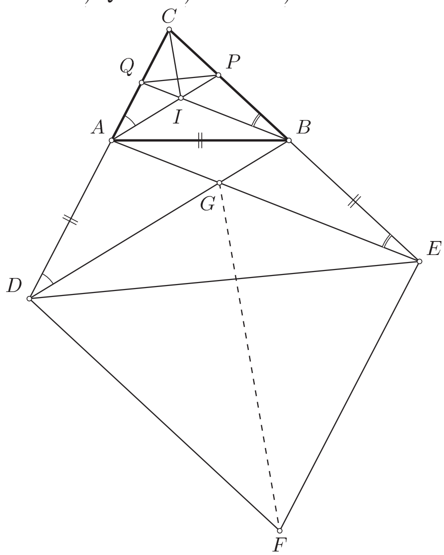
$$|CQ| = \frac{|CA| \cdot |CB|}{|AB| + |BC|} = \frac{|CA| \cdot |CB|}{|CE|}.$$

Od tod sledi $\frac{|CP|}{|CQ|} = \frac{|CE|}{|CD|}$, zato sta si trikotnika PCQ in ECD podobna in premici PQ in ED sta vzporedni. Ker sta tudi premici EF in AC ter premici DF in BC vzporedni, sta si podobna tudi trikotnika PCQ in DFE.

Na enak način kot v prvi rešitvi pokažemo, da sta premici BD in PA ter premici AE in QB vzporedni. Skupaj z vzporednostjo premic PQ in ED to pomeni, da sta trikotnika QIP in EGD podobna. Od tod sledi $\frac{|DE|}{|DG|} = \frac{|PQ|}{|PI|}$, iz podobnosti trikotnikov PCQ in ECD pa še $\frac{|DF|}{|DE|} = \frac{|PC|}{|PQ|}$. Zadnji dve enakosti zmnožimo, da dobimo

$$\frac{|DF|}{|DG|} = \frac{|PC|}{|PI|}.$$

Zaradi vzporednosti premic DF in PC ter premic DG in PI, pa sledi še $\sphericalangle FDG = \sphericalangle CPI$. Trikotnika FDG in CPI se tako ujemata v enem kotu in razmerju stranic ob tem kotu, zato sta si podobna. Na enak način pokažemo, da sta si podobna tudi trikotnika FEG in CQI. Torej je $\sphericalangle EFG = \sphericalangle QCI = \sphericalangle ICP = \sphericalangle GFD$.



Rešitve za 4. letnik

A1. Ker je $a = 2^8$, je $b = 1 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^8 = 2^{0+1+2+\ldots+8} = 2^{36}$. Torej velja $b^2 = 2^{72} = a^9$. Pravilen odgovor je (**D**).

A2. Ker je $f(x)$ soda funkcija in $g(x)$ liha funkcija, velja $f(-x) = x$ in $g(-x) = -g(x)$ za vsa realna števila x. Torej je $\varphi(-x) = f(g(-x)) + g(f(-x)) = f(-g(x)) + g(f(x)) = f(g(x)) + g(f(x)) = \varphi(x)$. Pravilen odgovor je (**C**). Primer $f(x) = x^2$ in $g(x) = 2x$ pokaže, da nobena od ostalih enakosti ni nujno izpolnjena, saj v tem primeru velja $\varphi(x) = 6x^2$, $f(f(x)) = x^4$, $g(g(x)) = 4x$ in $2f(g(x)) = 8x^2$.

A3. Verjetnosti, da na eni kocki pade črka A, B, C oz. I so zaporedoma enake $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ oz. $\frac{1}{6}$. Mislimo si, da Klara kocke vrže tako, da so urejene v vrsto. Tedaj je verjetnost, da pade beseda $BABICA$ enaka $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right)^2$. Ugoden pa je katerikoli izid, kjer so črke v tej besedi premešane. Vseh takih izidov je skupaj $\frac{6!}{(2!)^2}$, saj gre za permutacije s ponavljanjem na 6 elementih, pri čemer se črki A in B pojavita 2-krat. Verjetnost, da lahko Klara iz dobljenih črk sestavi besedo $BABICA$ je torej $\frac{6!}{(2!)^2} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right)^2$.

B1. Naj bo d največji skupni delitelj danih števil. Tedaj d deli tudi števila

$$\begin{aligned}
&(2a - 3b - 1) - 2(a - 2b + 3) = b - 7,\\
&(a - 2b + 3) + 2(b - 7) = a - 11,\\
&(3a + b - 2) - (b - 7) = 3a + 5,\\
&(3a + 5) - 3(a - 11) = 38.
\end{aligned}$$

Torej je d lahko največ 38. Če izberemo $a = 11$ in $b = 7$, potem je $a - 2b + 3 = 0$, $2a - 3b - 1 = 0$ in $3a + b - 2 = 38$, torej je največji skupni delitelj res lahko 38.

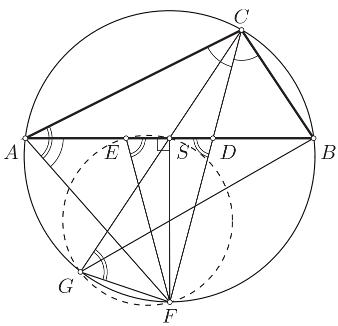
B2. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da je $|AC| > |BC|$. Potem točka D leži med S in B, točka E pa med S in A. Hkrati točka G leži na istem bregu premice FS kot točka E. Simetrali stranice in nasprotnega kota v trikotniku se vedno sekata na trikotniku očrtani krožnici. Torej simetrala stranice AB poteka skozi točko F, kar pomeni, da je premica SF pravokotna na premico AB. Od tod sledi, da sta trikotnika FSD in FSE skladna, zato velja

$$\sphericalangle FES = \sphericalangle SDF = \sphericalangle ADF = \sphericalangle ACD + \sphericalangle DAC.$$

Po izreku o obodnih kotih je

$$\sphericalangle FGS = \sphericalangle FGC = \sphericalangle FAC = \sphericalangle FAB + \sphericalangle BAC = \sphericalangle FCB + \sphericalangle BAC = \sphericalangle ACF + \sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD +$$

Od tod sledi $\sphericalangle FES = \sphericalangle FGS$. Ker točki E in G ležita na istem bregu premice FS, po izreku o obodnih kotih sledi, da točke E, G, F in S ležijo na isti krožnici.

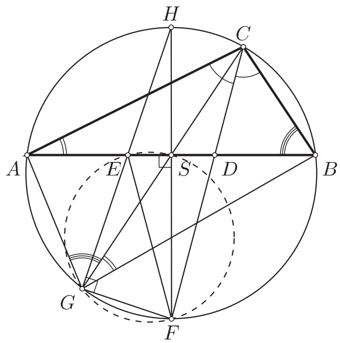


2. način. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da je $|AC| > |BC|$. Potem točka D leži med S in B, točka E pa med S in A. Ker je $AGBC$ tetiven štirikotnik, je $\sphericalangle BGC = \sphericalangle BAC$, torej sta trikotnika GBS in ACS podobna, saj imata dva enaka kota. Podobno je $\sphericalangle SGA = \sphericalangle CBS$, zato sta tudi trikotnika AGS in CBS podobna. Iz prve podobnosti sledi $\frac{|SG|}{|SA|} = \frac{|BG|}{|AC|}$, iz druge pa $\frac{|SG|}{|SB|} = \frac{|AG|}{|BC|}$. Ker pa je $|SA| = |SB|$, iz obeh enakosti sledi $\frac{|BG|}{|AC|} = \frac{|AG|}{|BC|}$ oziroma $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|BG|}{|AG|}$. Ker je premica CD simetrala kota $\sphericalangle ACB$, je $\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$. Točki D in E sta simetrični glede na razpolovišče stranice AB, zato velja $|BE| = |AD|$ in $|AE| = |BD|$. Iz vsega tega izpeljemo

$$\frac{|BE|}{|AE|} = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|BG|}{|AG|}.$$

Ker točka E leži na daljici AB, od tod sledi, da je premica GE simetrala kota $\sphericalangle BGA$.

Označimo s H drugo presečišče premice GE in trikotniku ABC očrtane krožnice. Ker je premica GE simetrala kota $\sphericalangle BGA$, sta krožna loka $\widehat{BH}$ in $\widehat{AH}$ enako dolga. Podobno je premica CF simetrala kota $\sphericalangle ACB$, zato sta tudi krožna loka $\widehat{AF}$ in $\widehat{BF}$ enako dolga. Od tod sledi, da je daljica HF premer trikotniku ABC očrtane krožnice, torej po Talesovem izreku velja $\sphericalangle FGE = \sphericalangle FGH = \frac{\pi}{2}$. Hkrati pa iz enakosti krožnih lokov sledi tudi, da premica HF poteka skozi S in je pravokotna na stranico AB, torej je $\sphericalangle ESF = \frac{\pi}{2}$. Po Talesovem izreku torej točke E, G, F in S ležijo na isti krožnici.



B3. Če je $a_n \geq 0$ za nek n, tedaj je $\frac{a_n^2+10a_n}{2a_n+4} \geq 0$ in zato je tudi $a_{n+1} \geq 0$. Ker je $a_1 = m > 0$, so torej vsi členi zaporedja a_n nenegativna cela števila.

Za majhna naravna števila m izračunamo nekaj členov zaporedja a_n:

- pri $m = 1$ dobimo $1, 1, 1, 1, \ldots$,
- pri $m = 2$ dobimo $2, 3, 3, 3, \ldots$,
- pri $m = 3$ dobimo $3, 3, 3, 3, \ldots$,
- pri $m = 4$ dobimo $4, 4, 4, 4, \ldots$,
- pri $m = 5$ dobimo $5, 5, 5, 5, \ldots$,
- pri $m = 6$ dobimo $6, 6, 6, 6, \ldots$,
- pri $m = 7$ dobimo $7, 6, 6, 6, \ldots$,
- pri $m = 8$ dobimo $8, 7, 6, 6, \ldots$

Opazimo, da se člen zaporedja na vsakem koraku zmanjša, razen v primeru, ko je enak 2. Zato obravnavamo dve primera:

1. primer: Recimo, da je $a_n = 2$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Potem je $a_{n+1} = 3$. Ker je $\left[\frac{3^2+10\cdot 3}{2\cdot 3+4}\right] = \left[\frac{39}{10}\right] = 3$, sledi, da je $a_k = 3$ za vse $k \geq n+1$. Naloga je v tem primeru dokazana.

2. primer: Recimo, da je $a_n \neq 2$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Dokažimo, da je zaporedje v tem primeru padajoče. Ker so vsi členi zaporedja a_n cela števila, je pogoj $a_{n+1} \leq a_n$ ekvivalenten pogoju $\frac{a_n^2+10a_n}{2a_n+4} < a_n+1$. Ta neenakost pa je ekvivalentna neenakosti $a_n^2 - 4a_n + 4 > 0$ oziroma $(a_n-2)^2 > 0$, kar očitno drži za vsak $n \in \mathbb{N}$, saj po predpostavki noben člen zaporedja ni enak 2. Zaporedje a_n je torej padajoče, njegovi členi pa so nenegativna cela števila (različna od 2), zato mora biti zaporedje od nekega člena naprej konstantno.

2. način. Če je $a_n \geq 1$ za nek n, tedaj je $10a_n \geq 2a_n + 4$, torej je tudi $a_{n+1} \geq 1$. Ker je $a_1 = m \geq 1$, so torej vsi členi zaporedja a_n naravna števila. Opazimo, da velja

$$\left[\frac{1^2+10\cdot 1}{2\cdot 1+4}\right] = \left[\frac{11}{6}\right] = 1, \quad \left[\frac{2^2+10\cdot 2}{2\cdot 2+4}\right] = \left[\frac{24}{8}\right] = 3, \quad \left[\frac{3^2+10\cdot 3}{2\cdot 3+4}\right] = \left[\frac{39}{10}\right] = 3,$$

$$\left[\frac{4^2+10\cdot 4}{2\cdot 4+4}\right] = \left[\frac{56}{12}\right] = 4, \quad \left[\frac{5^2+10\cdot 5}{2\cdot 5+4}\right] = \left[\frac{75}{14}\right] = 5, \quad \left[\frac{6^2+10\cdot 6}{2\cdot 6+4}\right] = \left[\frac{96}{16}\right] = 6,$$

$$\left[\frac{7^2+10\cdot 7}{2\cdot 7+4}\right] = \left[\frac{119}{18}\right] = 6, \quad \left[\frac{8^2+10\cdot 8}{2\cdot 8+4}\right] = \left[\frac{144}{20}\right] = 7.$$

Iz prvih šestih enakosti sledi, da če je nek člen zaporedja manjši ali enak 6, potem je zaporedje od nekje dalje konstantno (in enako 1, 3, 4, 5 ali 6). Zadnji dve enakosti namigujeta, da če je nek člen zaporedja večji kot 6, potem bo naslednji člen strogo manjši. Pokažimo, da to res velja. Denimo torej, da je $a_n > 6$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Pokazati želimo, da je tedaj $a_{n+1} < a_n$. Ker so vsi členi zaporedja naravna števila, je slednja neenakost ekvivalentna neenakosti $a_{n+1} \leq a_n - 1$, ta pa neenakosti $\frac{a_n^2+10a_n}{2a_n+4} < a_n$. Ko odpravimo ulomke, dobimo $a_n^2 - 6a_n > 0$ oziroma $a_n(a_n-6) > 0$. Neenakost je izpolnjena, saj je a_n naravno število in po predpostavki velja $a_n > 6$. Od tod sledi, da so za poljuben m členi zaporedja prej ali slej manjši ali enaki 6, od prej pa že vemo, da je v tem primeru zaporedje od nekega člena naprej konstantno.

Rešitve 19. tekmovanja v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol – državno tekmovanje

Rešitve za 1. letnik

A1. $(y-2)^3 - y(y+5)(y-5) - 29 + 6y^2 = y^3 - 6y^2 + 12y - 8 - y^3 + 25y - 29 + 6y^2 = 37y - 37 = 37(y-1)$.

A2. Predpostavimo, da je danes star x let in zapišemo enačbo $2x - 3(x-6) = x$. Odpravimo oklepaj, enačbo uredimo in dobimo rešitev $x = 9$.

A3. $\frac{16a^{-2}b^{-1}c^{-4}}{2^{-1}a^{-3}b^{-2}c^{-3}} \cdot (a^0) + (ab)^0)^{-1} = 32abc^{-1} \cdot 2^{-1} = 16abc^1$.

B1. Banane označimo z x, jabolka z y in grozdje z z. Vse enote pretvorimo v kilograme in nastavimo sistem enačb, npr.: prva enačba $0,30x + 0,25y + 0,50z = 2,20$, druga enačba $0,45x + 0,30y + 0,25z = 1,98$ in tretja enačba $0,35x + 0,20y + 0,30z = 1,74$. Rešujemo sistem enačb s poljubno metodo, npr:. enačbe množimo s 100 in iz prve enačbe izrazimo z ter dobimo $z = \frac{220-30x-25y}{50}$, vstavimo ga v drugo in tretjo enačbo, enačbi uredimo in dobimo sistem dveh enačb npr.: $60x + 35y = 176$ in $17x + 5y = 42$. Iz druge enačbe izrazimo y, npr.: $y = \frac{42-17x}{5}$ in ga vstavimo v prvo enačbo. Dobimo rešitve enačbe $x = 2$, $y = 1,6$ in $z = 2,4$. Odgovor: Kilogram banan stane 2,00 evra, jabolk 1,60 evra in grozdja 2,40 evra.

B2. Ob upoštevanju osnovnega izreka o deljenju celih števil nastavimo enačbi $x = 2y + 2$ in $x + y = 2(x-y) + 8$. Enačbi uredimo in rešimo sistem. Rešitev sistema je $x = 22$ in $y = 10$. To sta iskani števili. Določimo $D(22,10) = 2$ in $v(22,10) = 110$.

B3.

a) Za x vstavimo $\sqrt{2}$ in izračunamo vrednost izraza $A = |\sqrt{2}+3| + |\sqrt{2}-5| = \sqrt{2}+3-\sqrt{2}+5 = 8$.

b) Za $x < -3$ ima enačba $-x-3-x+5 = 4$ rešitev $x = -1$, kar ne ustreza pogoju. Za $-3 \leq x < 5$ enačba $x+3-x+5 = 4$ nima rešitve. Za $x \geq 5$ ima enačba $x+3+x-5 = 4$ rešitev $x = 3$, kar ne ustreza pogoju. Enačba torej nima rešitev.

Rešitve za 2. letnik

A1. Vemo, da je vsota zunanjih kotov v konveksnem večkotniku enaka $360°$. Zunanji koti torej merijo zapovrstjo $140°, 80°, 120°$ in $20°$. Notranji koti so zato v razmerju $40° : 100° : 60° : 160°$. Razmerje okrajšamo in dobimo $2 : 5 : 3 : 8$.

A2. Uporabimo obrazec za vsoto notranjih kotov v večkotniku $S_n = (n-2) \cdot 180°$ in izračunamo število stranic (oglišč) iskanega večkotnika. Dobimo $n = 25$. Uporabimo še obrazec za število diagonal $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ in dobimo $d_{25} = 275$.

A3. Drugi izraz je zelo podoben izrazu b, namesto $\sqrt[2]{a}$ pa imamo a^{404}. Lahko pa a^{404} pišemo kot $\sqrt[2]{a^{808}}$. Vse skupaj pa lahko preoblikujemo v $\sqrt[2020]{b^{808}} = \sqrt[5]{b^2}$.

B1. Rešimo sistem enačb $3x + 5y = -3$ in $5x + 4y = 8$ in dobimo $x = 4$ in $y = -3$. Presečišče teh dveh premic je $P(4, -3)$. Premico $\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} = 1$ zapišemo v eksplicitni obliki: $y = \frac{1}{2}x - 2$, njen smerni koeficient je $k = \frac{1}{2}$. Ker imajo vzporednice isti smerni koeficient, je $k = \frac{1}{2}$ tudi smerni koeficient iskane premice skozi točko $P(4, -3)$. Iskano premico v eksplicitni obliki zapišemo z enačbo $y = \frac{1}{2}x - 5$, v implicitni $-x + 2y + 10 = 0$ in v odsekovni $\frac{x}{10} + \frac{y}{-5} = 1$.
Opomba: Smerni koeficient premice lahko dobimo tudi iz odsekovne oblike na drug način: iz odsekov dobimo presečišči na koordinatnih oseh $M(4, 0)$ in $N(0, -2)$ in z uporabo $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ zopet dobimo $k = \frac{1}{2}$.

B2. Središči obeh krožnic povežemo z obema krajiščema tetive. Polmer prve krožnice, polovica tetive t in daljica d_1 od središča prve krožnice S_1 do razpolovišča tetive oblikujejo pravokotni trikotnik. Po Pitagorovem izreku dobimo $d_1 = 5$ cm. Ker je oddaljenost središč obeh krožnic 21 cm, je razdalja od središča druge krožnice do razpolovišča tetive $d_2 = 21 - 5 = 16$ cm. Še enkrat uporabimo Pitagorov izrek in dobimo polmer druge krožnice $r_2 = 20$ cm. Za izračun obeh središčnih kotov uporabimo kotne funkcije, npr.: $\sin \frac{\varphi_1}{2} = \frac{t/2}{r_1}$. Dobimo $\varphi_1 \doteq 134,76°$ in $\varphi_2 \doteq 73,74°$. Pripadajoči dolžini lokov sta $l_1 = \frac{\varphi_1}{180°} \cdot \pi \cdot r_1 \doteq 30,58$ cm in $l_2 \doteq 25,74$ cm. Obseg našega lika je vsota obsegov obeh krožnic - dolžini obeh lokov $o = o_1 + o_2 - l_1 - l_2 \doteq 151,03$ cm.

B3. Poenostavimo vsak člen posebej. Prvi člen preoblikujemo v

$$5a^{-x}(1 - a^{-x})^{-1} = \frac{5}{a^x}\left(\frac{a^x - 1}{a^x}\right)^{-1} = \frac{5}{a^x - 1}.$$

Podobno drugi člen preoblikujemo v

$$3a^{-x}(1 + a^{-x})^{-1} = \frac{3}{a^x + 1}.$$

Imenovalec tretjega člena razstavimo na produkt vsote in razlike

$$2a^x(a^{2x} - 1)^{-1} = \frac{2a^x}{a^{2x} - 1} = \frac{2a^x}{(a^x - 1)(a^x + 1)}.$$

Opazimo, da je to hkrati skupni imenovalec za prva dva člena. Prva dva člena razširimo, izraz poenostavimo in dobimo rezultat

$$\frac{5}{a^x - 1} - \frac{3}{a^x + 1} - \frac{2a^x}{(a^x - 1)(a^x + 1)} = \frac{8}{(a^x - 1)(a^x + 1)} = \frac{8}{a^{2x} - 1}.$$

Izračunamo vrednost izraza

$$a = 9^{b+c} \cdot 3^{2b+c} : 27^{\frac{4}{3}b + c + \frac{1}{3}} = 3^{2b+2c} \cdot 3^{2b+c} : 3^{3\left(\frac{4}{3}b + c + \frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{3}.$$

Izračunamo vrednost izraza Z za dobljeni vrednosti a in x: $\frac{8}{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1} = -9$.

Rešitve za 3. letnik

A1. Dolžino krožnega loka izračunamo po formuli $l = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}$. Ker je dolžina krožnega loka enaka polmeru kroga, enačbo preuredimo v $r = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}$. Iz enačbe izrazimo α in dobimo rezultat $\frac{180^\circ}{\pi}$.

A2. Izraz v oklepaju preoblikujemo na skupni korenski eksponent $a^{-1} \cdot \sqrt[2]{a^3 b^{-1}} : \sqrt[3]{b^{-1} a^2} = \sqrt[6]{a^{-6}} \cdot \sqrt[6]{a^9 b^{-3}} : \sqrt[6]{b^{-2} a^4}$. Izraz poenostavimo in damo pod skupni koren: $\sqrt[6]{a^{-1} b^{-1}} = \sqrt[6]{\frac{1}{ab}} = \left(\frac{1}{ab}\right)^{\frac{1}{6}} = ab^{-\frac{1}{6}}$. Logaritem preuredimo v $\log_{ab}(a^{-1} \cdot \sqrt[2]{a^3 b^{-1}} : \sqrt[3]{b^{-1} a^2}) = \log_{ab}(ab)^{-\frac{1}{6}} = -\frac{1}{6}$.

A3. Površina krogle je enaka $P_K = 4\pi R^2$. Če kroglo prerežemo, dobimo še površini dveh glavnih krogov, ki sta enaki $2\pi R^2$. Nova površina je enaka $P_{PK} = 6\pi R^2$. Površina se torej poveča za 50 %.

B1. Označimo $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |AD|$, $e = |AC|$. Naj bosta X in Y nožišči višin zaporedoma iz C in D ter $x = |XB|$ in $y = |AY|$. S pomočjo kosinusnega izreka izračunamo velikost kota $\cos\beta = \frac{a^2+b^2-e^2}{2ab} \Rightarrow \beta \doteq 54,26^\circ \doteq 54^\circ 16'$. V pravokotnem trikotniku s stranicami $|XC|, |XB|$ in $|BC|$ in kotom β izračunamo višino trapeza $v = b \cdot \sin\beta \doteq 3,5$ cm in stranico $x = \sqrt{b^2 - v^2} \doteq 2,5$ cm. V drugem pravokotnem trikotniku s stranicami $|AY|, |YD|$ in $|AD|$ s pomočjo Pitagorovega izreka izračunamo še stranico $y = \sqrt{d^2 - v^2} \doteq 1,5$ cm in tako dobimo dolžino stranice $c = a - x - y \doteq 2,5$ cm. S pomočjo formule $S = \frac{a+c}{2} \cdot v$ izračunamo ploščino trapeza $S \doteq 15,75$ cm^2.

B2.

a) Če je os simetrije premica $x = -2$, je $p = -2$. Iz enačbe $p = \frac{-b}{2a}$ izračunamo iskani koeficient $k = \frac{7}{3}$. Iskana parabola ima enačbo $y = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{17}{3}$.

b) Da bo imela parabola dve ničli, mora biti vrednost diskriminante večja od 0. Ko vstavimo koeficiente v neenačbo, dobimo $4(k-1)^2 - 4(k-3)(2k+1) > 0 \Rightarrow k^2 - 3k - 4 < 0 \Rightarrow (k-4)(k+1) < 0$. Rešitev dane neenačbe je $k \in (-1, 4)$.

B3. V eksponentni enačbi najprej odpravimo ulomek, torej jo pomnožimo z 2 in dobimo $2^x + 2^{-x} = 4(2^x - 2^{-x})$, odpravimo oklepaj: $2^x + 2^{-x} = 4 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{-x}$, prenesemo vse člene na eno stran: $5 \cdot 2^{-x} - 3 \cdot 2^x = 0$ in upoštevamo, da je $2^{-x} = \frac{1}{2^x}$. Enačbo preoblikujemo v $\frac{5}{2^x} - 3 \cdot 2^x = 0$, uvedemo novo neznanko $2^x = t$ in dobimo enačbo $\frac{5}{t} - 3 \cdot 5 = 0$; pomnožimo s t in zapišemo rešitev $5 - 3t^2 = 0, t = \pm\frac{\sqrt{15}}{3}$. Ker je $t = 2^x$, upoštevamo samo pozitivno rešitev $2^x = \frac{sqrt15}{3}$. Eksponentno enačbo logaritmiramo: $\log_2 2^x = \log_2\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right)$ in zapišemo rešitev $x = \log_2\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right)$.

Rešitve za 4. letnik

A1. Zapišemo $a_5 = 2a_4 + 1$ in izračunamo $a_4 = \frac{a_5 - 1}{2} = \frac{7-1}{2} = 3$. Postopoma računamo vse člene do prvega člena $a_3 = \frac{a_4 - 1}{2} = 1$, $a_2 = \frac{a_3 - 1}{2} = 0$, $a_1 = \frac{a_2 - 1}{2} = -\frac{1}{2}$.

A2. Zaloga vrednosti funkcije kosinus je interval $[-1, 1]$, zato sledi, da je zaloga vrednosti funkcije f interval $[-\pi, 2 - \pi]$.

A3. Iz slike preberemo, da je $p'(1) = 0, p(0) = -4$ in $p(4) = 0$, torej je $p'(1) - 2 \cdot p(0) - 4 \cdot p(4) = 8$.

B1.

a) Poiščemo realni rešitvi dane enačbe in zapišemo prva dva člena padajočega aritmetičnega zaporedja $a_1 = 2$ in $a_2 = -1$. Diferenca zaporedja je $d = -3$.

b) Izračunamo 40. člen zaporedja $a_40 = a_1 + 39d = 2 + 39 \cdot (-3) = -115$. Zapišemo splošni člen zaporedja $a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1) \cdot (-3) = 5 - 3n$.

c) Ugotovimo, da je diferenca členov zaporedja z lihimi indeksi $d = -6$ in da je v dani vrsti 20 členov. Uporabimo formuo za vsoto 20 členov aritmetičnega zaporedja in dobimo $s_{20} = \frac{20 \cdot (2 \cdot 2 + 19 \cdot (-6))}{2} = -1100$.

B2.

a) Verjetnost, da bo med nastopajočimi tudi Mihael je $P(A) = \frac{\binom{9}{1}}{\binom{20}{1}} = 0,45 = 45\%$.

b) Vseh možnih vrstnih redov pianistov za šolski nastop je $V_{20}^9 = \frac{20!}{11!} \doteq 6,09 \cdot 10^{10}$.

c) Verjetnost, da bo Mihael igral četrti po vrsti, je $P(C) = \frac{V_{19}^8}{V_{20}^9} = 0,05 = 5\%$

B3.

a) Zapišemo predpis funkcije $h(x) = \frac{x^2+x+4}{x^2+3}$. Izračunamo odvod funkcije $h'(x) = \frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}$. Ničle odvoda funkcije h so rešitve enačbe $-x^2 - 2x + 3 = 0$. Rešitvi enačbe sta $x_1 = 1, x_2 = -3$, to sta stacionarni točki funkcije h. Enačba vodoravne asimptote grafa funkcije h je $y = 1$. Abscisa presečišča grafa funkcije h z vodoravno asimptoto je ničla ostanka pri deljenju števca z imenovalcem racionalne funkcije h. Ničla ostanka $r(x) = x+1$ je $x = -1$. Presečišče je točka $P(-1, 1)$.

b) Zapišemo predpis funkcije $j(x) = x^2 + ax + 3$. Funkcija j bo imela vsaj eno realno ničlo, ko bo veljalo $D \geq 0$, torej je $a^2 - 12 \geq 0$. Rešitve neenačbe so $-2\sqrt{3} \geq a$ ali $a \geq 2\sqrt{3}$.

Rešitve 19. tekmovanja v znanju matematike za dijake poklicnih šol – državno tekmovanje

Rešitve za 1. in 2. letnik

A1. Vrednost 2019 ima številski izraz $3 \cdot (3^2 \cdot 5 \cdot 13 + 2^3 \cdot 11)$.

A2. Julija se je zmotila pri pretvorbi $12°50' = 12{,}5°$, saj velja $12{,}5° = 12°30'$.

A3. Za $x = 5$ ima nenegativno vrednost izraz $x^3 - x$, in sicer $x^3 - x = 5^3 - 5 = 125 - 5 = 120$.

A4. Zapišemo enačbo $\frac{2+4+5+8+x+15+20}{7} = x$, ki ima rešitev $x = 9$.

A5. Matic označi drevesa: $3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots$, Jure pa $5, 10, 15, 20, \ldots$. Podrli bodo 15., 30., 45., 60. in 75. drevo, torej 5 dreves.

A6. Mikroplastika je velikosti od $0{,}3$ mm do 5 mm. V tem intervalu se ne nahaja $4 \cdot 10^{-6}$ m.

A7. Zmnožek $14^{11} \cdot 16^4 \cdot 18^5$ zapišemo s prafaktorji in nato z željenimi osnovami: $14^{11} \cdot 16^4 \cdot 18^5 = 2^{11} \cdot 7^{11} \cdot 2^{16} \cdot 2^5 \cdot 3^{10} = 4^6 \cdot 7^{11} \cdot 12^{10}$.

A8. Na sliki je polovica kolobarja. Razlika med zunanjim in notranjim polmerom kolobarja je $1{,}05 - 0{,}4 = 0{,}65$ m, kar predstavlja rob x.

B1. Za sedemdnevni najem apartmaja bi vsak od devetih prijateljev plačal $1639 \div 9 = 182$ evrov.
Ker si stroške razdeli le šest prijateljev, vsak plača $1639 \div 6 = 273$ evrov, kar je za $50\ \%$ več.
Prostornina dolite vode je $V = \pi r^2 v = \pi \cdot 12^2 \cdot 2\ \mathrm{cm}^3 = 1230{,}9\ \mathrm{cm}^3 = 12{,}3\ \mathrm{dl}$.
Prijatelji lahko pripravijo pogrinjek na $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$ različnih načinov.

B2. Za $x = 5$ je vrednost izraza $2 - \frac{x-2}{5} + \frac{1+x}{4} = 2 - \frac{5-2}{5} + \frac{1+5}{4} = \frac{29}{10}$.
Zapišemo enačbo $2 - \frac{x-2}{5} + \frac{1+x}{4} = 4$. Rešitev enačbe je $x = 27$.
Zapišemo neenačbo $2 - \frac{x-2}{5} + \frac{1+x}{4} \geq 2$. Rešitev neenačbe je $x \geq -13$.
Poenostavimo izraz $2 - \frac{x-2}{5} + \frac{1+x}{4} = \frac{x+53}{20}$. Najmanjše naravno število x, za katerega bo vrednost izraza celo število, je $x = 7$.

B3. Prostornina rezervoarja je $V = abc = (7 \cdot 3 \cdot 4)\ \mathrm{dm}^3 = 84\ \mathrm{dm}^3$.
V treh urah in 20 minutah viličar porabi $3 \cdot 15 + 5 = 50$ litrov goriva. V rezervoarju ostane 12 litrov goriva.
Z viličarjem vsakih $24\ \mathrm{min} = 0{,}4\ \mathrm{h}$ naložijo 18 palet, kar pomeni, da v $8\ \mathrm{h}$ naložijo 360 palet. V skladišču ostane 275 palet.

Rešitve za 3. letnik

A1. Vrednost 2019 ima številski izraz $3 \cdot (3^2 \cdot 5 \cdot 13 + 2^3 \cdot 11)$.

A2. Napačna je trditev $2^0 + (-1)^0 = 0$, saj je $2^0 + (-1)^0 = 1 + 1 = 2$.

A3. Zapišemo enačbo $\frac{2+4+5+8+x+15+20}{7} = x$, ki ima rešitev $x = 9$.

A4. Matic označi drevesa: $3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots$, Jure pa $5, 10, 15, 20, \ldots$. Podrli bodo 15., 30., 45., 60. in 75. drevo, torej 5 dreves.

A5. Mikroplastika je velikosti od $0{,}3\ \mathrm{mm}$ do $5\ \mathrm{mm}$. V tem intervalu se ne nahaja $4 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}$.

A6. Zmnožek $14^{11} \cdot 16^4 \cdot 18^5$ zapišemo s prafaktorji in nato z željenimi osnovami: $14^{11} \cdot 16^4 \cdot 18^5 = 2^{11} \cdot 7^{11} \cdot 2^{16} \cdot 2^5 \cdot 3^{10} = 4^6 \cdot 7^{11} \cdot 12^{10}$.

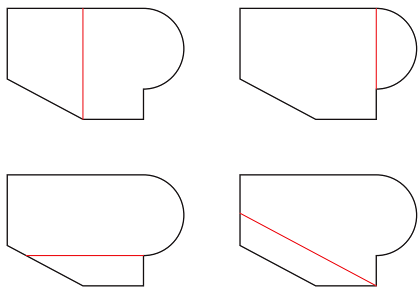
A7. Ploščina osenčenega lika predstavlja razliko med ploščino kvadrata s stranico dolžine $a = 6\ \mathrm{cm}$ in ploščino kroga s polmerom dolžine $r = 3\ \mathrm{cm}$ in znaša $S = a^2 - \pi r^2 = 36 - \pi \cdot 9 = 9 \cdot (4 - \pi)\ \mathrm{cm}^2$. Faktor $x = 9$.

A8. Enačba $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) = 0$ ima dve pozitivni rešitvi 2 in 3.

B1. Za sedemdnevni najem apartmaja bi vsak od devetih prijateljev plačal $1639 \div 9 = 182$ evrov.
Ker si stroške razdeli le šest prijateljev, vsak plača $1639 \div 6 = 273$ evrov, kar je za $50\ \%$ več.
Prostornina dolite vode je $V = \pi r^2 v = \pi \cdot 12^2 \cdot 2\ \mathrm{cm}^3 = 1230{,}9\ \mathrm{cm}^3 = 12{,}3\ \mathrm{dl}$.
Prijatelji lahko pripravijo pogrinjek na $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$ različnih načinov.

B2. Za $x = 5$ je vrednost izraza $2 - \frac{x-2}{5} + \frac{1+x}{4} = 2 - \frac{5-2}{5} + \frac{1+5}{4} = \frac{29}{10}$.
Zapišemo enačbo $2 - \frac{x-2}{5} + \frac{1+x}{4} = 4$. Rešitev enačbe je $x = 27$.
Zapišemo neenačbo $2 - \frac{x-2}{5} + \frac{1+x}{4} \geq 2$. Rešitev neenačbe je $x \geq -13$.
Poenostavimo izraz $2 - \frac{x-2}{5} + \frac{1+x}{4} = \frac{x+53}{20}$. Najmanjše naravno število x, za katerega bo vrednost izraza celo število, je $x = 7$.

B3. Da nastane trapez, narišemo eno daljico tako, kot kažejo slike.



Zunanja mera A je dolga $A = 27 + 8 = 35$ mm.
Zunanja mera B je dolga $B = 8 + 8 + 6 = 22$ mm.
Poševni rob x predstavlja dolžino hipotenuze pravokotnega trikotnika s katetama dolžin $k_1 = 22 - 14 = 8$ mm in $k_2 = 27 - 12 = 15$ mm. Dolžina hipotenuze $x = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ mm.
Iskani kot α izračunamo z uporabo kotne funkcije, ki definira razmerje med dolžinama katet v pravokotnem trikotniku iz prejšnje točke: $tan\alpha = \frac{k_1}{k_2} = \frac{8}{15}$. Dobimo $\alpha = 28{,}07°$.

Rešitve tekmovanja iz fizike za srebrno Stefanovo priznanje – področno tekmovanje

Rešitve za 8. razred

A1 Miha vidi zrcalno sliko prikaza na uri, pri čemer je zrcalo v navpični ravnini (zrcalo je stransko okno avtobusa). Vseeno je, ali opazuje sliko prikaza v levem ali desnem oknu, rešitev je (A).

A2 Pretvorimo čajno žličko v mililitre:

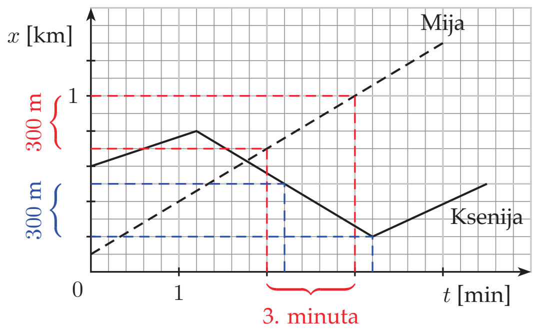
$$\begin{aligned} 1\,\text{čajna žlička} &= \frac{1}{6}\ \text{tekoča unča} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{16}\ \text{US pint} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{8}\ \text{US galona} = \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{8}\cdot 3{,}785\,\text{l} = \frac{1}{768}\cdot 3{,}785\,\text{l} = 0{,}004941 \approx 5\,\text{ml (A)}\,. \end{aligned}$$

A3 Keramični izolator miruje, sile nanj so v ravnovesju. Ker ima izolator zanemarljivo maso, je zanemarljiva – proti ostalim silam, ki delujejo nanj – tudi njegova teža. Na izolator delujejo tri nezanemarljive sile: sila žice z leve strani, sila žice z desne strani in sila podpornega droga. Vsota teh treh sil je 0. Edina skica, na kateri sile zadostijo temu pogoju, je skica (C).

A4 Mija teče ves čas enakomerno, Ksenija pa teče z isto hitrostjo kot v 3. minuti že tudi malo prej in malo kasneje (še prvih 10 s v 4. minuti), kar smo upoštevali pri razbiranju Ksenijine poti. V 3. minuti teka sta v času 60 s obe, Mija in Ksenija, opravili pot $s = 300$ m, kar pomeni, da sta v 1 s tretje minute opravili pot

$$s_1 = \frac{s}{60} = \frac{300\,\mathrm{m}}{60} = 5\,\mathrm{m}\,.$$

Pravilen odgovor je (C).



A5 Pretvorimo vse hitrosti v enoto $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$:

$$\begin{aligned}
&(A) \quad 2 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,,\\
&(B) \quad 2 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 2 \cdot 10^7 \cdot \frac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = 5{,}56 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,,\\
&(C) \quad 2 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} = 2 \cdot 10^8 \cdot \frac{0{,}01\,\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 2 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,,\\
&(D) \quad 2 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}} = 2 \cdot 10^4 \cdot \frac{1000\,\mathrm{m}}{60\,\mathrm{s}} = 3{,}33 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,,
\end{aligned}$$

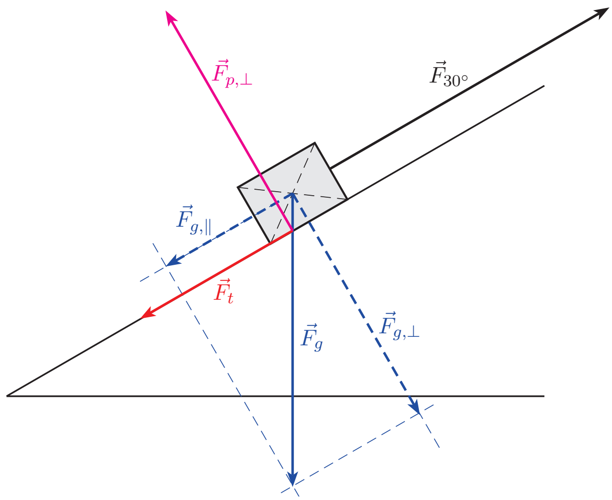
Največja je hitrost (B).

B1 (a) Na zaboj med njegovim gibanjem navzgor po klancu z naklonom $\alpha = 30°$ delujejo štiri sile: teža $\vec{F}_g$, vlečna sila $\vec{F}_{30°}$, pravokotna sila podlage $\vec{F}_{p,\perp}$ ter sila trenja $\vec{F}_t$. Teža zaboja meri $F_g = 50$ N in jo na sliki predstavimo s 5 cm dolgo daljico, usmerjeno navzdol. Poznamo tudi vlečno silo $\vec{F}_{30°}$, ki meri $F_{30°} = 55$ N in jo na sliki predstavimo s 5,5 cm dolgo daljico, usmerjeno vzdolž klanca navzgor. Pravokotna sila podlage $\vec{F}_{p,\perp}$ uravnovesi statično (pravokotno) komponento teže $\vec{F}_{g,\perp}$. Velikost obeh komponent teže določimo z razstavljanjem teže na dve komponenti, pravokotno na klanec $\vec{F}_{g,\perp}$ in vzporedno s klancem $\vec{F}_{g,\parallel}$. Ugotovimo, da je dolžina daljice, s katero ponazorimo pravokotno komponento teže, dolga 4,3 cm $\pm$ 0,1 cm, kar ustreza velikosti sile $F_{g,\perp} = 43\,\mathrm{N} \pm 1\,\mathrm{N}$. To je tudi velikost sile podlage $F_{p,\perp} = F_{g,\perp} = 43\,\mathrm{N} \pm 1\,\mathrm{N}$. Zaboj se giblje enakomerno, kar pomeni, da so tudi sile in komponente sil, ki so vzporedne klancu, uravnovešene. Vzdolž klanca vleče zaboj navzgor vlečna sila $\vec{F}_{30°}$, vzdolž klanca navzdol pa delujeta na zaboj dinamična (klancu vzporedna) komponenta teže $\vec{F}_{g,\parallel}$ in sila trenja $\vec{F}_t$. Ugotovimo, da je dolžina daljice, s katero predstavimo vzporedno komponento teže, dolga 2,5 cm $\pm$0,1 cm, kar ustreza velikosti sile $F_{g,\parallel} = 25$ N. Za velikosti sil velja zveza

$$F_{30°} = F_{g,\parallel} + F_t\,.$$

Sila trenja meri $F_t = F_{30°} - F_{g,\parallel} = 55\,\mathrm{N} - 25\,\mathrm{N} = 30\,\mathrm{N} \pm 1\,\mathrm{N}$.

Prijemališča sil: teža prijemlje v težišču – sredini – zaboja. Vlečna sila prijemlje na pritrdišču vrvi na zaboj. Sila podlage in sila trenja prijemljeta na stiku zaboja s podlago.



(b) Koeficient trenja izračunamo iz razmerja dveh sil, sile trenja in pravokotne sile podlage, njegovo vrednost zaokrožimo na eno decimalno mesto,

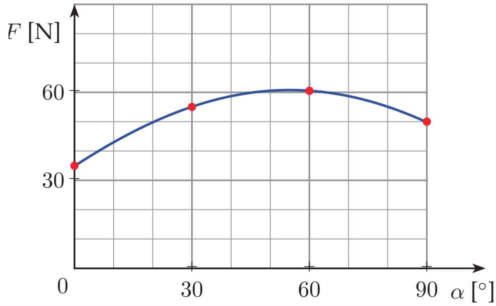
$$k = \frac{F_t}{F_{p,\perp}} = \frac{30\,\mathrm{N}}{43\,\mathrm{N}} = 0{,}7\,.$$

(c) Če isti zaboj vlečemo enakomerno in vzporedno s podlago po vodoravni podlagi, sta vlečna sila in sila trenja uravnovešeni (po velikosti enaki, po smeri nasprotni), $F_{0^\circ} = F_t$. Sila trenja meri $F_t = k \cdot F_{p,\perp}$. Na vodoravni podlagi sta uravnovešeni tudi pravokotna sila podlage in teža, $F_{p,\perp} = F_g = 50$ N. Ker je koeficient trenja tak, kot na prvem klancu, je $F_t = 0{,}7 \cdot 50$ N $= 35$ N. Vlečna sila je po velikosti enaka, $F_{0^\circ} = 35$ N.

(d) Če je naklon klanca drugačen, se spremenita velikosti obeh komponent teže, zato se spremenijo tudi pravokotna sila podlage, sila trenja in vlečna sila. Lahko ponovimo načrtovanje pri novem naklonskem kotu klanca, lahko pa se namesto tega spomnimo, da je $60^\circ = 90^\circ - 30^\circ$. To pomeni, da se pri nespremenjeni teži pri njenem razstavljanju ravno zamenjata velikosti komponent. Pri kotu 30° je merila pravokotna komponenta teže 43 N, pri kotu 60° pa meri toliko vzporedna komponenta teže, $F_{g,\parallel} = 43$ N. Pri kotu 30° je merila vzporedna komponenta teže 25 N, pri kotu 60° pa meri toliko pravokotna komponenta teže, $F_{g,\perp} = 25$ N. Pravokotna sila podlage uravnovesi pravokotno komponento teže, $F_{p,\perp} = F_{g,\perp} = 25$ N. Izračunamo silo trenja, $F_t = k \cdot F_{p,\perp} = 0{,}7 \cdot 25\ \mathrm{N} = 17{,}5\ \mathrm{N} \pm 1$ N. Vlečna sila uravnovesi vsoto trenja in vzporedne komponente teže, $F_{60^\circ} = F_t + F_{g,\parallel} = 17{,}5\ \mathrm{N} + 43\ \mathrm{N} = 60{,}5\ \mathrm{N} \pm 2$ N.

(e) Naklon klanca $89{,}999^\circ$ pomeni navpično steno. Zaboj vlečemo ob steni navgor. Trenja ni – ker zaboj ne deluje na steno s silo v smeri, pravokotni na steno –, vlečna sila uravnovesi težo zaboja, $F_{90^\circ} = F_g = 50$ N.

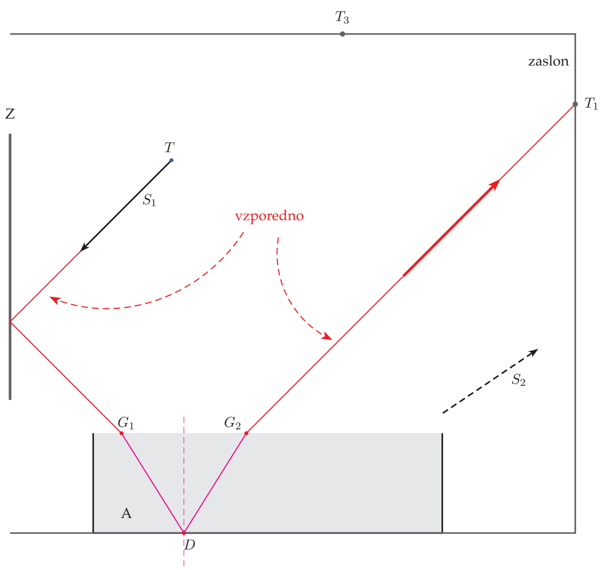
(f) V koordinatni sistem vnesemo točke, ki so že izračunane: velikosti vlečne sile pri naklonih klanca $\alpha = 0°, 30°, 60°$ in $90°$. Točke povežemo z gladko krivuljo, ki ima blizu $\alpha = 60°$ maksimum.



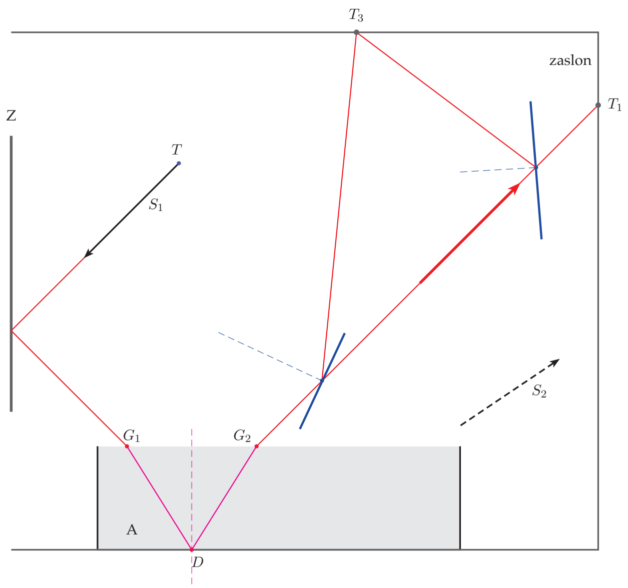
B2 (a) Svetlobni snop, ki se začne, kot označuje puščica S_1, se na zrcalu Z odbije, kot narekuje odbojni zakon, in po odboju vpade na vodno gladino v točki G_1.

O svetlobnem snopu vemo tudi, da konča svojo pot v svetli lisi v točki T_1 na zaslonu, in vemo tudi, iz katere smeri je prišel – vzporeden je bil samemu sebi na delu poti od kazalnika v točki T do zrcala (glej nalogo s šolskega tekmovanja). Iz točke T_1 narišemo vzporednico snopu S_1. Vzporednica seka gladino v točki G_2 – tu svetloba izhaja iz vode in potuje v označeni smeri do T_1.

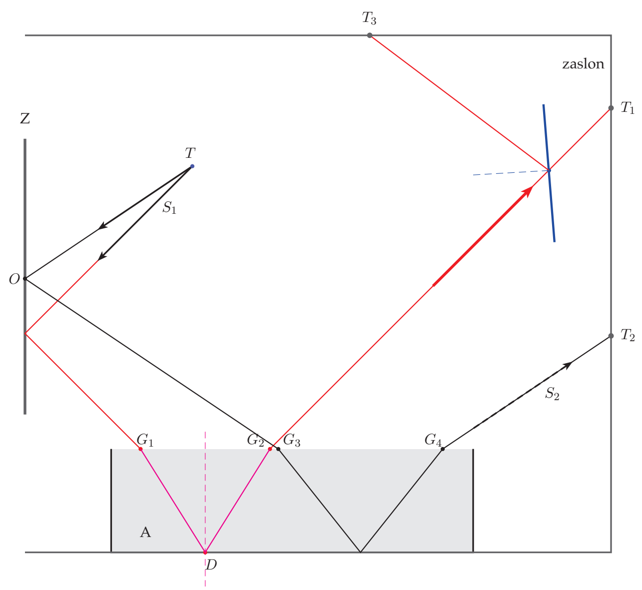
Zdaj poznamo točki G_1 in G_2, v katerih svetloba prestopa gladino. Vemo tudi (glej nalogo s šolskega tekmovanja), da je v vodi pot svetlobe, ki se odbije od vodoravnega dna, simetrična glede na vpadno pravokotnico pri odboju od dna, zato lahko določimo točko D na dnu, kjer se svetlobni snop odbije – je prav na sredini med G_1 in G_2. To dejstvo je povezano z odbojnim zakonom, ki velja v točki D.



(b) Kam Jaka postavi zrcalo? Možnosti je veliko. Dve od njih sta prikazani na sliki, zrcali sta narisani z modro črto. Zrcalo se lahko namesti tudi tako, da snop svetlobe sploh ne zadane gladine vode v akvariju – niti zrcala Z ne –, ampak se že prej odbije v T_3.



(c) Narišemo nosilko snopa S_2 in dobimo točko T_2, kjer svetloba pade na zaslon, in točko G_4, v kateri snop S_2 prehaja gladino iz vode v zrak. Tudi pri spremenjeni smeri kazalnika sta po dveh odbojih svetlobe na zrcalu in dnu akvarija, ki sta med seboj pravokotna, vpadni snop (iz točke T) in dvakrat odbiti snop (njegovo smer označuje puščica S_2) med seboj vzporedna. Narišemo vzporednico nosilki snopa S_2 iz točke T in dobimo točko O, kjer se svetloba v snopu S_2 po odbojnem zakonu odbije od zrcala. Na gladino vpade v točki G_3. Od tu naprej nas vodi enak razmislek kot pri (a) in postopamo enako.



Rešitve za 9. razred

A1 Hitrost, s katero iz posode izteka voda, je tem večja, čim večji je tlak v posodi pri luknjici (glede na tlak zunaj luknjice – zračni tlak). Čim večja je hitrost iztekanja, tem več vode izteče. Ko luknjico odmašimo, je v posodi največ vode in sega najvišje nad luknjico, tlak v posodi pri luknjici je največji, hitrost iztekanja vode je največja in prostornina iztekle vode se najhitreje veča. Med iztekanjem vode (s časom) se vse te količine zmanjšujejo. Graf, ki edini ustrezno prikaže, kako se prostornina iztekle vode spreminja s časom, je na sliki (C).

A2 Ko enoto gravitacijske konstante G množimo s kvadratom enote za maso, kg^2 (zmnožkom enot m_1 in m_2), in delimo s kvadratom enote za razdaljo, m^2 (enota r^2), dobimo enoto za silo, N, ki je, izražena z osnovnimi enotami,

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

Za enote v izrazu za gravitacijsko silo velja

$$\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = [\text{enota } G]\cdot\frac{\mathrm{kg}^2}{\mathrm{m}^2}$$

in

$$[\text{enota } G] = \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2} = \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}\ \text{(A)}.$$

A3 En srednje učinkovit delavec opravlja delo z močjo P_1 čas $t_1 = 10\cdot 12$ ur $= 120$ ur, visoko učinkovit pa z močjo $P_2 = \frac{3}{2}\,P_1$ čas $t_2 = 6\cdot 10$ ur $= 60$ ur. Delo A, ki ga oboji delavci – 15 srednje učinkovitih ali N visoko učinkovitih – opravijo, je na koncu enako,

$$A = 15\cdot P_1\cdot 120\,\mathrm{ur} = N\cdot P_2\cdot 60\,\mathrm{ur}\,,$$

odkoder izrazimo N,

$$N = \frac{15\cdot 120\,\mathrm{ur}}{60\,\mathrm{ur}}\cdot\frac{P_1}{P_2} = 30\cdot\frac{2}{3} = 20\,\text{(C)}.$$

A4 Skupna masa čolna in obeh potnikov je $m = 120$ kg $+ 65$ kg $+ 55$ kg $=$ 240 kg. Čoln se giblje s pospeškom $a = 1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, torej nanj deluje (v smeri gibanja in smeri pospeška) rezultanta sil $F_r = m\cdot a = 240$ N. K rezultanti sil v smeri pospeška prispevata dve sili: sila upora $F_u = 500$ N, ki je nasprotna smeri gibanja, in sila vode na propeler F_{vp} (sila, s katero se propeler odriva od vode – po 3. Newtonovem zakonu je sila, s katero voda deluje na propeler – del čolna – po velikosti enaka sili, s katero propeler deluje na vodo), ki deluje v smeri gibanja čolna. Njuna vsota (rezultanta) $\vec{F}_r = \vec{F}_u + \vec{F}_{vp}$ povzroči, da se čoln giblje s pospeškom $1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Ker delujeta sila vode na propeler in sila upora na čoln v nasprotnih smereh (in ker se čoln giblje s pospeškom v smeri sile vode na propeler), je velikost rezultante F_r razlika med velikostjo sile vode na propeler F_{vp} in velikostjo sile upora F_u, velja $F_r = F_{vp} - F_u$ in od tu dobimo

$$F_{vp} = F_r + F_u = 240\,\mathrm{N} + 500\,\mathrm{N} = 740\,\mathrm{N}\,\text{(D)}.$$

A5 Oreh pada, višina, na kateri je, se s časom zmanjšuje. Najprej počasi, potem vedno hitreje (D).

B1 Celoten poskus je sestavljen iz etap: najprej se led segreva od $-16°C$ do tališča (a), potem se led tali s prvim (b) in drugim grelcem (c), sledi segrevanje vode do vrelišča (d) in se konča z uparevanjem (e). Vsaka etapa traja določen čas. Pri podvprašanjih izračunamo čas trajanja posameznih etap.

(a) Grelec segreje $m = 3$ kg ledu za $\Delta T_{\text{led}} = 16°C$, ko mu odda toploto

$$Q_{(a)} = m \cdot c_l \cdot \Delta T_{\text{led}} = 3\,\text{kg} \cdot 2100\,\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \cdot 16\,\text{K} = 100\,800\,\text{J} = 100{,}8\,\text{kJ}\,.$$

Grelec, ki odda vsako sekundo 120 J toplote, oddaja toplotni tok $P_1 = \frac{120\,\text{J}}{\text{s}} = 120$ W. Toploto $Q_{(a)}$ odda v času

$$\Delta t_{(a)} = \frac{Q_{(a)}}{P_1} = \frac{100\,800\,\text{J}}{120\,\text{W}} = 840\,\text{s} = 14\,\text{min}.$$

Led se je pričel segrevati ob času $t_0 = 0$ in je ogret na temperaturo $0°C$ ob času $t_1 = \Delta t_{(a)} =$ 14 min.

(b) V nadaljevanju poskusa odda prvi grelec ledu toploto $Q_{(b)}$, kar omogoči, da se stali $m_1 =$ 0,75 kg ledu. Toplota $Q_{(b)}$ je

$$Q_{(b)} = m_1 \cdot q_t = 0{,}75\,\text{kg} \cdot 336\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 252\,\text{kJ} = 252\,000\,\text{J}\,.$$

Prvi grelec odda toploto $Q_{(b)}$ v času

$$\Delta t_{(b)} = \frac{Q_{(b)}}{P_1} = \frac{252\,000\,\text{J}}{120\,\text{W}} = 2100\,\text{s} = 35\,\text{min}.$$

Dušan je $\Delta t_{(b)} = 35$ minut talil led s prvim grelcem. Prvi grelec je zamenjal z drugim, močnejšim, ob času $t_2 = t_1 + \Delta t_{(b)} = 49$ minut po začetku poskusa.

(c) Preostalo maso $m_2 = 2{,}25$ kg ledu Dušan tali z močnejšim grelcem, ki oddaja toplotni tok $P_2 = 7 \cdot P_1 = 840$ W. Za staljenje preostalega ledu je potrebna toplota

$$Q_{(c)} = m_2 \cdot q_t = 2{,}25\,\text{kg} \cdot 336\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 756\,\text{kJ} = 756\,000\,\text{J}\,.$$

Drugi grelec odda toploto $Q_{(c)}$ v času

$$\Delta t_{(c)} = \frac{Q_{(b)}}{P_2} = \frac{756\,000\,\text{J}}{840\,\text{W}} = 900\,\text{s} = 15\,\text{min}.$$

Z drugim grelcem je Dušan talil preostali led $\Delta t_{(c)} = 15$ minut. Ves led je staljen ob času $t_3 = t_2 + \Delta t_{(c)} = 64$ minut po začetku poskusa.

(d) V posodi je ob času t_3 tekoča voda z maso $m = 3$ kg pri temperaturi $0°C$. Dušan z drugim grelcem to vodo segreva do vrelišča pri temperaturi $100°C$ za $\Delta T_{\text{voda}} = 100°C$ ($= 100$ K). Grelec odda v tej etapi toploto

$$Q_{(d)} = m \cdot c_v \cdot \Delta T_{\text{voda}} = 3\,\text{kg} \cdot 4200\,\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \cdot 100\,\text{K} = 1\,260\,000\,\text{J} = 1{,}26\,\text{MJ}\,.$$

Drugi grelec odda toploto $Q_{(d)}$ odda v času

$$\Delta t_{(d)} = \frac{Q_{(d)}}{P_2} = \frac{1\,260\,000\,\text{J}}{840\,\text{W}} = 1500\,\text{s} = 25\,\text{min}.$$

Voda se je pričela segrevati ob času t_3 in je ogreta na temperaturo vrelišča $100°C$ ob času $t_4 = t_3 + \Delta t_{(d)} = 89$ min.

(e) V zadnjem delu poskusa Dušan upari $m_3 = 0{,}5$ kg vode. Toplota za uparevanje $Q_{(e)}$ je

$$Q_{(e)} = m_e \cdot q_i = 0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 2{,}26\,\frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{kg}} = 1{,}13\,\mathrm{MJ} = 1\,130\,000\,\mathrm{J}\,.$$

Drugi grelec odda toploto $Q_{(e)}$ v času

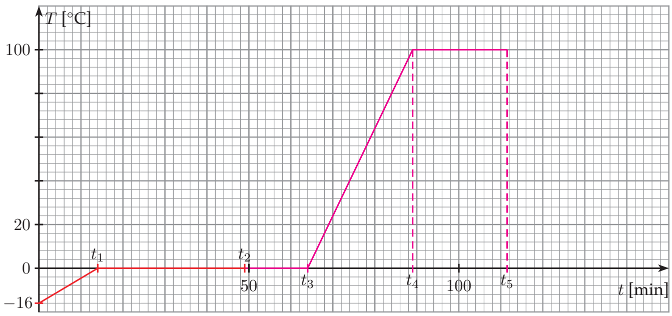
$$\Delta t_{(e)} = \frac{Q_{(e)}}{P_2} = \frac{1\,130\,000\,\mathrm{J}}{840\,\mathrm{W}} = 1345\,\mathrm{s} = 22\,\mathrm{min}\;25\,\mathrm{s}.$$

V posodi je le še 2,5 kg vode ob času $t_5 = t_4 + \Delta t_{(e)} = 111$ min 25 s po začetku poskusa.

Časi, izračunani pri podvprašanjih od (a) do (e) so zapisani v razpredelnici.

proces	trajanje Δt [min]	začetek t_z [min]	konec t_k [min]
(a) segrevanje ledu	$\Delta t_{(a)} = 14$ min	$t_0 = 0$	$t_1 = 14$ min
(b) taljenje s prvim grelcem	$\Delta t_{(b)} = 35$ min	$t_1 = 14$ min	$t_2 = 49$ min
(c) taljenje z drugim grelcem	15	49	64
(d) segrevanje vode do vrenja	25	64	89
(e) uparevanje	22 min 25 s	89	111 min 25 s

(f) Graf prikazuje, kako se je v posodi spreminjala temperatura snovi od začetka poskusa ob $t_0 = 0$ do t_5. Pri risanju grafa si pomagamo s pregledno zapisanimi časi v razpredelnici.



(g) Toplota, ki jo je med celotnim poskusom prejela snov v posodi, je vsota toplot za posamezne etape poskusa, ki smo jih že izračunali pri podvprašanjih od (a) do (e),

$$\begin{aligned} Q &= Q_{(a)} + Q_{(b)} + Q_{(c)} + Q_{(d)} + Q_{(e)} = \\ &= 0{,}1008\,\mathrm{MJ} + 0{,}252\,\mathrm{MJ} + 0{,}756\,\mathrm{MJ} + 1{,}26\,\mathrm{MJ} + 1{,}13\,\mathrm{MJ} = 3{,}4988\,\mathrm{MJ} \approx 3{,}5\,\mathrm{MJ}\,. \end{aligned}$$

B2 (a) Pri spustu od starta na višini h_{start} do točke A na višini h_{A} se Filipova potencialna energija spremeni za

$$\begin{aligned} \Delta W_p &= W_{p,\mathrm{A}} - W_{p,\mathrm{start}} = m \cdot g \cdot (h_{\mathrm{A}} - h_{\mathrm{start}}) = -m \cdot g \cdot h_0 = \\ &= -104\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 9\,\mathrm{m} = -9\,360\,\mathrm{J}. \end{aligned}$$

Filipova potencialna energija se zmanjša.

(b) V točki A ima Filip hitrost $v_{\mathrm{A}} = 13{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ in kinetično energijo

$$W_{k,\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\,m \cdot v_{\mathrm{A}}^2 = \frac{1}{2}\,104\,\mathrm{kg} \cdot \left(13{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 9\,477\,\mathrm{J}.$$

(c) Delo (povprečne) zaviralne sile $F_u = 35$ N na $s_0 = 18$ m dolgem klancu je

$$A = -F_u \cdot s_0 = -35\,\mathrm{N} \,\cdot\, 18\,\mathrm{m} \,=-630\,\mathrm{J}.$$

Zaviralna sila opravi na Filipu negativno delo.

(d) Od starta do točke A se Filipova mehanska energija (vsota njegove kinetične in potencialne energije) spremeni za delo, ki ga na njem na tej poti opravijo zunanje sile razen teže. Edina preostala sila, ki opravlja delo na Filipu poleg teže, je zaviralna sila $\vec{F_u}$. Delo slednje je na prvem spustu negativno, Filipova mehanska energija se pri prvem spustu zmanjša za delo zaviralne sile. Zapišemo lahko

$$W_{k,\mathrm{A}} + W_{p,\mathrm{A}} = W_{k,\mathrm{start}} + W_{p,\mathrm{start}} - |A|$$

Filipovo hitrost na startu izračunamo iz začetne kinetične energije $W_{k,\mathrm{start}}$,

$$\begin{aligned} W_{k,\mathrm{start}} &= W_{k,\mathrm{A}} + W_{p,\mathrm{A}} - W_{p,\mathrm{start}} + |A| = W_{k,\mathrm{A}} + \Delta W_p + |A| = \\ &= 9\,477\,\mathrm{J} \,-9\,360\,\mathrm{J} \,+\, 630\,\mathrm{J} = 747\,\mathrm{J}. \end{aligned}$$

Iz $W_{k,\mathrm{start}}$ izrazimo Filipovo hitrost na startu,

$$v_{\mathrm{start}} = \sqrt{\frac{2 \cdot W_{k,\mathrm{start}}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 747\,\mathrm{J}}{104\,\mathrm{kg}}} = 3{,}79\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \,\approx 3{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

(e) Razmerje med dolžino klanca s_1 med točkama A in B ter višinsko razliko h_1 je enako razmerju med dolžino klanca s_0 med startom in točko A ter višinsko razliko h_0,

$$\frac{s_1}{h_1} = \frac{s_0}{h_0} = \frac{18\,\mathrm{m}}{9\,\mathrm{m}} = 2\,,$$

odkoder dobimo zvezo

$$s_1 = 2 \cdot h_1\,.$$

Ker ima Filip na vrhu grbine v točki B enako hitrost, kot jo je imel na startu, je tudi njegova kinetična energija v točki B enaka njegovi začetni kinetični energiji na startu. Ker je grbina nižje od starta, se je od starta do točke B spremenila – zmanjšala – le Filipova potencialna energija,

$$\Delta W_{p,\mathrm{start}\to\mathrm{B}} = W_{p,\mathrm{B}} - W_{p,\mathrm{start}} = m \cdot g \cdot (h_1 - h_0)\,.$$

Sprememba Filipove potencialne energije od starta do točke B je enaka (negativnemu) delu enake povprečne zaviralne sile, ki deluje na Filipa na poti s_0 med spustom od starta do točke A in vzpenjanjem na poti s_1 od točke A do vrha grbine v točki B,

$$A_{\mathrm{start}\to\mathrm{B}} = -F_u \cdot (s_0 + s_1)\,.$$

Upoštevamo, da velja $\Delta W_{p,\mathrm{start}\to\mathrm{B}} = A_{\mathrm{start}\to\mathrm{B}}$ ter upoštevamo še zvezo $s_1 = 2 \cdot h_1$ in dobimo enačbo

$$m \cdot g \cdot (h_1 - h_0) = -F_u \cdot (s_0 + s_1) = -F_u \cdot (s_0 + 2 \cdot h_1)\,,$$

iz katere izrazimo višino grbine h_1,

$$h_1 = \frac{m \cdot g \cdot h_0 - F_u \cdot s_0}{m \cdot g + 2 \cdot F_u} = \frac{9360\,\mathrm{J} \,-630\,\mathrm{J}}{1040\,\mathrm{N} \,+2 \cdot 35\,\mathrm{N}} = 7{,}86\,\mathrm{m} \approx 7{,}9\,\mathrm{m}\,.$$