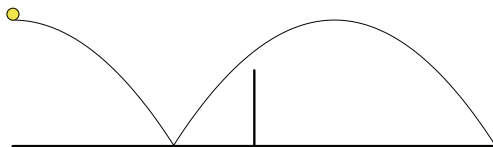


Tekmovanja

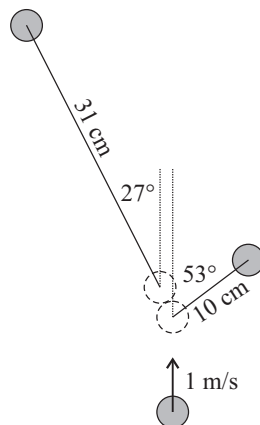
57. fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje

Skupina I

1. Miza pri namiznem tenisu je dolga 274 cm, višina mrežice je 15,25 cm. Žogico obravnavaj kot točkasto telo. Igralec servira žogico z višine 30 cm nad mizo natančno nad krajšim robom mize, da žogica odleti v smeri, vzporedni z daljšim robom mize.
 - a) S kolikšno hitrostjo mora odleteti žogica, da bo po prožnem odboju na njegovi polovici mize padla točno na rob mize na nasprotni strani, tako kot kaže slika?
 - b) Na kolikšni višini nad mrežico žogica preleti mrežico?

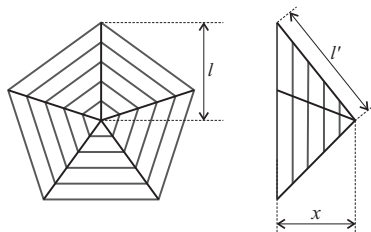


2. Matjaž se igra z dvema enakima kovancema, kot je videl na tekmovanju Kresnička pri mlajši sestri Alenki. Na mizo pogrne papir, na papir postavi kovanec in s svinčnikom označi lego kovanca pred trkom. Alenko prosi, da od zgoraj (v tlorisu) snema trk na pametni telefon. Drug enak kovanec nato potisne, da se zaleti v mirujoči kovanec. Iz posnetka oceni, da je bila hitrost gibajočega se kovanca tik pred trkom 1 m/s in da se kovanca po trku nista nič vrtela in se je vsak od kovancev gibal premo. Ko sta se po trku kovanca zaradi trenja med papirjem in kovancem ustavila, je Matjaž označil lego kovancev in iz risbe (glej sliko) razbral naslednje podatke: en kovanec se je po trku premaknil za 31 cm pod kotom 27° levo glede na smer hitrosti gibajočega se kovanca pred trkom, drugi kovanec se je premaknil za 10 cm pod kotom 53° desno glede na smer hitrosti gibajočega se kovanca pred trkom.

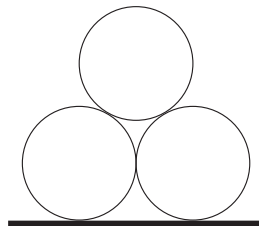


- a) Iz podatkov o prepotovani poti obeh kovancev izračunaj razmerje velikosti hitrosti obeh kovancev takoj po trku.
- b) Kolikšni sta hitrosti prvega in drugega kovanca takoj po trku?
- c) Kolikšen je koeficient trenja med kovancem in papirno podlago?

3. Pajkova mreža je popolnoma simetrična kot kaže leva slika. Ko je mreža prazna, se vse niti nahajajo v eni navpični ravnini in je dolžina vsake od petih radialnih niti od sredine mreže do zunanjega oglišča mreže enaka 45 cm (na levi sliki je ta dolžina označena z l). Ko je mreža prazna, so vse niti napete s silo 6 mN. Predpostavi, da za niti za vse obremenitve, dokler se ne pretrgajo, velja Hookov zakon in da je prožnostni koeficient niti 0,15 N/m. Nit se pretrga, ko je njen relativni raztezek $s/l_0 = 0,2$, kjer l_0 označuje dolžino nenapete niti in s raztezek niti.

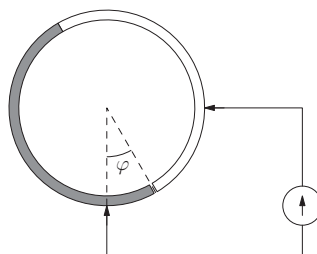


- a) Kolikšna je skupna prožnostna energija radialnih niti v prazni pajkovi mreži?
- b) Kolikšno največjo maso sme imeti muha, ki prileti v središče mreže s hitrostjo 2 m/s pravokotno na ravnino navpično postavljene mreže, da se mreža ne pretrga? Stranski pogled na pajkovo mrežo potem, ko se vanjo ulovi muha, kaže desna slika (z x je označen premik središča mreže glede na ravnino prazne mreže in z l' dolžina posamezne radialne niti). Privzemi, da muha v trenutku, ko se ujame v mrežo, preneha leteti in da je sunek teže muhe med ustavljanjem v mreži zanemarljiv.
4. Na vodoravno ledeno površino zložimo tri enake lesene valje, kot kaže slika. Po dolžini so vsi valji poravnani med seboj.
- a) Najmanj kolikšen mora biti koeficient lepenja les-les, da bo spodnji valj v ravnotežju?
- b) Najmanj kolikšen pa mora biti koeficient lepenja les-led, da se struktura ne podre?



Skupina II

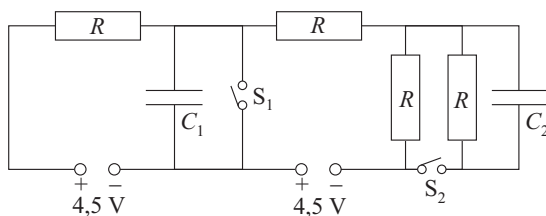
1. V neki napravi je vrtiljiv gumb za nastavljanje napetosti vpet na obroček, sestavljen iz dveh polovičnih krožnih odsekov s polmerom 5 mm. Vsak odsek je narejen iz dveh različnih zlitin germanija. Na enem izmed stikov je med obema deloma ozka neprevodna reža, kot kaže slika. Obroček je preko dveh drsnih kontaktov, ki sta na obodu obročka razmaknjena za kot 90° , vezan na tokovni vir, ki poganja konstanten tok 1 mA. Simbol za tokovni vir je krog, v katerem je puščica, ki nakazuje smer toka. Osenčeni del obročka ima specifični upor $0,4 \Omega$, neosenčeni del obročka ima specifični upor $0,16 \Omega$.



Prečni presek obročka je 3 mm^2 . Kot zasuka obročka φ štejeemo v smeri, nasprotni smeri gibanja urinih kazalcev. Zasuk je nič, ko je presledek med različnima deloma obročka na spodnjem kontaktu.

- a) Kolikšna je napetost med kontaktoma pri zasuku obročka za kot 60° ?
- b) Prostoročno nariši graf napetosti v odvisnosti od kota zasuka za kote med 0° in 360° .
- c) Izračunaj povprečno električno moč tokovnega vira, če se gumb vrtiljivo s konstantno kotno hitrostjo.

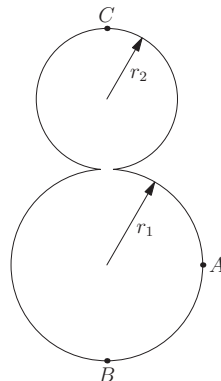
2. Kondenzator je sestavljen iz dveh kvadratnih plošč z robom 30 cm, ki sta postavljeni vodoravno ena nad drugo in sta razmaknjeni za 2 cm. Plošči priključimo na vir napetosti tako, da je spodnja plošča priključena na pozitivni in zgornja na negativni priključek vira. Spodnja plošča je mokra in iz nje z majhnimi hitrostmi naključno uhajajo vodne kapljice s pozitivnim nabojem $2 \cdot 10^{-17}$ As. Polmer kapljic je $1 \mu\text{m}$. Gibanje kapljic je ves čas dovolj počasno, da velja linearni zakon upora: $F_u = kv$, kjer je F_u sila upora, v hitrost kapljic in $k = 2 \cdot 10^{-12}$ Ns/m sorazmernostni koeficient.
- Najmanj kolikšno napetost moramo priključiti med plošči, da nabite kapljice ne bodo padle nazaj na spodnjo ploščo?
 - Kolikšno hitrost dosežejo kapljice med dviganjem proti zgornji plošči, če med plošči priključimo napetost 60 V?
3. V vezje vezemo 4 enake upornike $R = 300 \Omega$, dve stikali S_1 in S_2 , dva enaka kondenzatorja $C_1 = C_2 = 4 \mu\text{F}$ ter dva vira z gonilno napetostjo 4,5 V, kot kaže shema vezja. Zanima nas, kako na vezje vpliva preklapljanje stikal S_1 in S_2 .



- Stikalo S_1 je razklenjeno, stikalo S_2 je sklenjeno. Kolikšen je naboj na vsakem od kondenzatorjev? Za kondenzator C_1 označi, na kateri plošči je pozitivni in na kateri negativni naboj in svoj odgovor utemelji.
 - Kolikšen tok in v kateri smeri steče takoj za tem, ko razklenemo stikalo S_2 , skozi upornik, ki je na shemi najbolj desno?
 - Na koncu sklenemo obe stikali, S_1 in S_2 . Kolikšen tok in v katero smer teče skozi stikalo S_1 po dolgem času? Kolikšen je naboj na vsakem od kondenzatorjev po dolgem času?
4. Fizik opazuje vrenje svinca. Na dnu posode nastane okrogel mehurček s prostornino $10,0 \text{ mm}^3$, ki se počasi dvigne do gladine na višini 23 cm. Tik pod gladino ima okrogli mehurček prostornino $11,3 \text{ mm}^3$. Svinec vre pri 1749°C , ko ima gostoto 8800 kg/m^3 . Kilomol svinca ima maso 207 kg. Zunanji tlak je 1 bar. Privzemi, da ima svinčeva para v mehurčku med dviganjem ves čas enako temperaturo kot staljeni svinec v posodi in da je temperatura vrelišča svinca neodvisna od tlaka. Vpliv površinske napetosti svinca na dogajanje zanemari.
- Kolikšna bi bila pričakovana prostornina mehurčka tik pod gladino, če bi ves svinec, ki napolnjuje mehurček na dnu posode, ostal v plinastem stanju?
 - Oceni kolikšno delo bi v primeru a) opravila svinčeva para med dviganjem mehurčka.
 - Za koliko se med dviganjem spremeni masa svinčeve pare v mehurčku?
 - Oceni specifično izparilno toploto svinca.

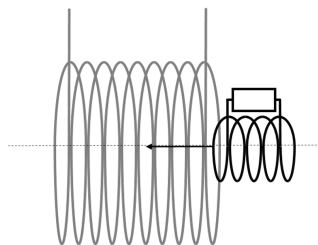
Skupina III

1. Sonda *New Horizons* je na prvi dan leta 2019 obletela telo Kupier-jevega pasu z vzdevkom *Ultima-Thule*. Telo je podobno zlepku krogel s premeroma $2r_1 = 19$ km in $2r_2 = 14$ km, kot kaže slika. Masa manjše krogle je $2 \cdot 10^{15}$ kg, masa večje krogle je $5 \cdot 10^{15}$ kg. Zamislimo si, da načrtujemo raziskovalno vozilo, za katerega moramo določiti tehnične omejitve, da bo misija na *Ultima-Thule* uspešna. V vprašanjih a) in b) zanemari vrtenje telesa *Ultima-Thule* okoli svojega težišča.



- a) Najmanj kolikšen mora biti koeficient lepenja med podlago in kolesi vozila v točki A, da vozilo ne zdrsne?
 - b) Izračunaj, s kolikšno največjo hitrostjo sme voziti vozilo v točki B, da ne izgubi stika s podlago.
 - c) V resnici se telo vrti okoli težišča tako, da je os vrtenja pravokotna na ravnino lista. Najmanj kolikšen mora biti obhodni čas vrtenja telesa, da vozilo ne izgubi stika s podlago, ko je parkirano v točki C?
2. Dve tanki zbiralni leči sta razmaknjeni za 40 cm. Goriščna razdalja prve leče je 9 cm, goriščna razdalja druge leče je 6 cm. S tretjo lečo, ki jo bomo dali med prvo in drugo lečo, želimo doseči, da se bo svetloba v vzporednem curku žarkov, ki oklepa majhen kot z optično osjo, tudi po prehodu skozi sistem treh leč širila v vzporednem curku, ki bo vzporeden curku vpadle svetlobe. Z drugimi besedami: sistem treh leč naj ne spremeni smeri širjenja curka vzporedne svetlobe, ampak naj ga samo vzporedno premakne. Optične osi vseh treh leč sovpadajo.
 - a) Na kolikšno razdaljo od prve leče moramo med prvo in drugo lečo postaviti tretjo lečo?
 - b) Kolikšna mora biti goriščna razdalja tretje leče?

3. Dve tuljavi postavimo na skupno os, tako da desno krajišče večje tuljave sovпада z levim krajiščem manjše (glej sliko). Večja tuljava ima polmer 2 cm, dolžino 20 cm in 200 navojev. Po tuljavi teče konstanten tok 1 A. Manjša tuljava ima polmer 1 cm, dolžino 10 cm in 100 navojev ter je sklenjena preko upornika z uporom $0,01 \Omega$. Manjšo tuljavo začnemo s konstantno hitrostjo 10 cm/s potiskati proti drugemu krajišču večje tuljave; osi tuljav ves čas sovpadata.



- a) Kolikšna napetost se inducira v mali tuljavi na začetku premikanja? Dogovorimo se, da to napetost štejemo kot pozitivno napetost.
- b) Prostoročno nariši graf toka skozi manjšo tuljavo v odvisnosti od časa v prvih treh sekundah premikanja.
- c) Koliko naboja se pretoči skozi upornik v prvih dveh sekundah premikanja?

Predpostavi, da je magnetno polje homogeno povsod znotraj prve tuljave, zunaj prve tuljave pa zanemarljivo majhno. Magnetno polje druge tuljave zanemari.

4. Kondenzator je sestavljen iz dveh prevodnih kvadratnih plošč z robom 20 cm, ki sta postavljeni vodoravno ena nad drugo in sta razmaknjeni za 2 cm. Plošči priključimo na napetost 1 V, spodnja plošča je priključena na pozitivni in zgornja na negativni priključek vira. S celotne pozitivne plošče z majhnimi hitrostmi naključno uhajajo zelo majhni pozitivni nabiti delci z nabojem $2 \cdot 10^{-16}$ As. Gibanje delcev je ves čas dovolj počasno, da velja linearni zakon upora: $F_u = kv$, kjer je F_u sila upora, v hitrost delcev in $k = 2 \cdot 10^{-15}$ Ns/m sorazmernostni koeficient. Težo delcev zanemari.

- S koliko največjo hitrostjo se gibljejo delci med ploščama?
- Plošči postavimo v vodoravno homogeno magnetno polje z gostoto 5 T. S koliko končno hitrostjo in v katero smer se gibljejo delci med ploščama? Smer hitrosti opredeli tako, da določiš kot med hitrostjo in smerjo električnega polja ter kot med hitrostjo in smerjo magnetnega polja.

55. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje - državno tekmovanje

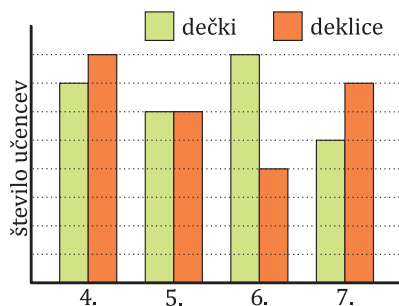
Naloge za 5. razred

A1. Na katero mesto naj Maja zaokroži število 407 619, da bo dobila največje število?

- (A) na mesto desetice (B) na mesto stotic (C) na mesto tisočic
(D) na mesto desetisočic (E) na mesto stotisočic

A2. S prikaza je razvidno, koliko dečkov in deklic je v 4., 5., 6. in 7. razredu. V 6. in 7. razredu je skupaj 96 dečkov in deklic. Kolikšno je skupno število deklic iz 4. razreda in dečkov iz 5. razreda?

- (A) 13 (B) 30 (C) 42 (D) 56 (E) 60

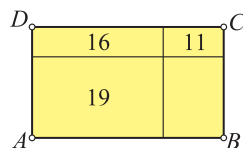


A3. Nalivno pero stane 4 evre več kot svinčnik. Klemen je kupil 3 nalivna peresa in 5 svinčnikov ter za to plačal 60 evrov. Koliko stane svinčnik?

- (A) 5 evrov (B) 6 evrov (C) 8 evrov
(D) 11 evrov (E) 12 evrov

A4. Jaka je narisal pravokotnik $ABCD$ in ga razdelil na 4 manjše pravokotnike. Povedal je, da so obsegi treh manjših pravokotnikov enaki 11 cm, 16 cm in 19 cm ter da obseg četrtega pravokotnika ni ne največji ne najmanjši. Kolikšen je obseg pravokotnika $ABCD$?

- (A) 27 cm (B) 30 cm (C) 32 cm (D) 35 cm (E) 38 cm



A5. Koliko krogcev bo na sliki na 10. mestu, če nadaljuješ vzorec na sliki?

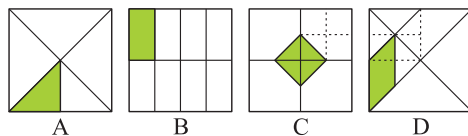
- (A) 10 (B) 20 (C) 55 (D) 110 (E) 220



A6. Na slikah A, B, C in D so kvadrati z enako dolgo stranico in na vsakem kvadratu je en del pobarvan. Na kateri sliki je ploščina pobarvanega dela največja?

- (A) A (B) B (C) C (D) D

(E) Vsi pobarvani deli imajo enako ploščino.



A7. Pet različno visokih sveč je razporejenih na svečniku od najnižje do najvišje. Višini katerih koli sosednjih dveh sveč se razlikujeta za 2 cm. Vse gorijo enako hitro: vsaka se v eni uri zaradi dogorevanja zniža za 15 mm. Vse sveče prižgemo istočasno. Po kolikem času bodo dogorele vse, če najnižja dogori v 4 urah?

- (A) 50 minut (B) 4 ure (C) 9 ur 20 minut
(D) 33 ur 20 minut (E) 50 ur

A8. Tri nogometna moštva so med sabo igrala tekme za trening. Moštvo O je odigralo 6 tekem, moštvo M 7 tekem in moštvo T 11 tekem. Koliko tekem sta odigrali med sabo moštvi O in T?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

B1. Izračunaj vrednost izraza $12 + 8 : (5 - (4 \cdot (5 \cdot 2 - 7) - (6 \cdot 4 - 3 \cdot 5))) + 2) - 3$.

B2. Opazovalec prometa je ugotovil, da sta na vsakih 7 osebnih avtomobilov pripeljala 2 tovornjaka, na vsakih 8 tovornjakov pa 1 avtobus. Skupaj je naštel 740 vozil. Koliko je bilo med njimi avtomobilov in koliko tovornjakov?

Naloge za 6. razred

A1. Kolikšna je vrednost izraza $45,3 : (3 \cdot (2^2 + 3^2 \cdot 2 + 0,81 : 0,027 : 10) : 10)$?

- (A) 6,04 (B) 2,85 (C) 45,3 (D) 28,5 (E) 1

A2. Maja je v pesek z rimsko številko napisala število, od katerega je odštela 2019 in dobila razliko MCDLXXV. Njen mlajši brat je izbrisal dve črki v zapisu zmanjševanca. Tako je na tleh ostal zapis MMM_D_CIV. Kateri dve črki je izbrisal?

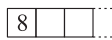
- (A) X in X (B) C in X (C) M in C (D) C in C (E) C in I

A3. Učiteljica je Miji dala več kartončkov. Na vsakem je bila zapisana ena izmed števk 3, 2, 1 ali 0. Prosila jo je, naj s kartončki oblikuje vsa 6-mestna števila, tako da bo vsota števk vsakega nastalega števila enaka 3. Največ koliko števil lahko sestavi Mija?

- (A) 1 (B) 16 (C) 20 (D) 21 (E) 25

A4. Papirni trak je razdeljen na enake kvadratke in v prvem kvadratu je zapisano število 8. Vika bo po vrsti v vsak kvadrateski sproti zapisovala števila, in sicer:

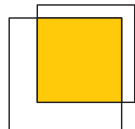
- če je v predhodnem kvadratu sodo število, bo zapisala polovico tega števila,
- če je v predhodnem kvadratu liho število, bo zapisala vsoto števil iz predhodnih dveh kvadratkov.



Katero število bo Vika zapisala v 2019. kvadrateski po vrsti?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 8

A5. Dva kvadrata se prekrivata, kot kaže slika. Ploščina preseka predstavlja $\frac{3}{4}$ ploščine manjšega kvadrata. Ploščina preseka je enaka tudi $\frac{9}{16}$ ploščine večjega kvadrata. Kolikšno je razmerje med ploščinama manjšega in večjega kvadrata?



- (A) 3 : 16 (B) 1 : 4 (C) 27 : 64 (D) 4 : 9 (E) 3 : 4

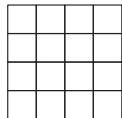
A6. Za štiri dvomestna števila, sestavljena iz števka x in y , velja: $\overline{xx} + \overline{xy} + \overline{yx} + \overline{yy} = 352$. Kolikšna je vsota števk $x + y$?

- (A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) 18

A7. Vrtnar potrebuje 6 ur, da prekoplje vrt, dolg 10 m in širok 10 m. Koliko časa bo porabil za gredico, dolgo 5 m in široko 5 m, če bo delal enako hitro kot v vrtu?

- (A) 1 uro (B) 90 minut (C) 2 uri (D) 150 minut (E) 3 ure

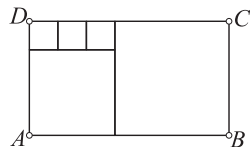
A8. Kvadrat s stranico 4 cm je razdeljen na 16 kvadratkov, kot kaže slika. Kolikšna je vsota ploščin vseh možnih kvadratov, ki jih lahko najdemo na sliki?



- (A) 16 cm² (B) 32 cm² (C) 84 cm² (D) 88 cm² (E) 104 cm²

B1. V skladišču imamo 9 do vrha polnih posod soka, katerih prostornine so 1 ℓ, 2 ℓ, 3 ℓ, 4 ℓ, 5 ℓ, 6 ℓ, 7 ℓ, 8 ℓ in 9 ℓ. Zapiši vse možne razporeditve posod v vsaj dve skupini tako, da bo v vsaki skupini enako število posod in enaka količina soka.

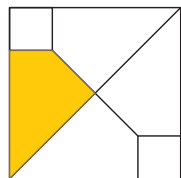
B2. Pravokotnik $ABCD$ je sestavljen iz samih kvadratov. Vsota obsegov enega malega, srednjega in velikega kvadrata je 80 cm. Izračunaj obseg pravokotnika $ABCD$.



Naloge za 7. razred

A1. Kvadrat s stranico dolžine 4 cm razdelimo na dva kvadratka s stranico dolžine 1 cm in štiri skladne štirikotnike. Kolikšna je ploščina osenčenega štirikotnika?

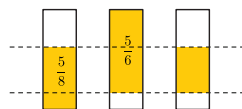
- (A) $\frac{2}{3}$ cm² (B) 3 cm² (C) $\frac{15}{4}$ cm² (D) $\frac{7}{2}$ cm² (E) 15 cm²



A2. S katerim okrajšanim ulomkom je zapisana vrednost izraza $\frac{3}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{3}}}$?

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{3}{7}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{10}{11}$ (E) $3\frac{1}{3}$

A3. Na sliki so 3 skladni pravokotniki. Z ulomkoma je zapisano, kolikšen del prvega oziroma drugega pravokotnika je osenčen. Kolikšen del tretjega pravokotnika je osenčen?



- (A) $\frac{11}{24}$ (B) $1\frac{11}{13}$ (C) $\frac{13}{24}$ (D) $\frac{3}{8}$ (E) $\frac{1}{2}$

A4. Obratna vrednost katerega izmed naštetih števil je najmanjša?

- (A) 0,2019 (B) $0,201\overline{9}$ (C) $0,20\overline{19}$ (D) $0,2\overline{019}$ (E) $0,\overline{2019}$

A5. Stranici AB in AC trikotnika ABC sta enako dolgi, kot v oglišču A pa je velik 40° . V notranjosti trikotnika leži točka O , tako da sta kota $\angle CBO$ in $\angle ACO$ enako velika. Koliko je velik kot $\angle BOC$?

- (A) 35° (B) 55° (C) 70° (D) 110° (E) 140°

A6. Mia je kupila plašč, čevlje in hlače. Hlače so stale $\frac{2}{3}$ cene čevljev, plašč pa je stal $\frac{2}{3}$ vsote cen hlač in čevljev. Kolikšna je bila cena hlač, če je plašč stal 120 EUR?

- (A) 60 EUR (B) 72 EUR (C) 108 EUR (D) 120 EUR (E) 126 EUR

A7. Čarobni leteči zmaj se odziva na dve besedi: pri HOP se dvigne za 20 % trenutne višine, pri DOL se spusti za 25 % trenutne višine. Po zaporedju ukazov HOP-HOP-DOL-HOP-DOL poleti zmaj na višino 486 m. Kako visoko je bil, preden je dobil omenjeno zaporedje ukazov?

- (A) 437,4 m (B) 441,8 m (C) 500 m (D) 534,6 m (E) 600 m

A8. Katera izmed izjav je pravilna za neko naravno število k ?

- (A) $6 \cdot k = 1216788$ (B) $5 \cdot k = 2^3 \cdot 4 \cdot 7^5$ (C) $2 \cdot k = 1234569$ (D) $3^2 \cdot k = 1245387$
(E) nobena izmed navedenih izjav

A9. V mizarski delavnici so dobili naročilo za 34 stolov in 12 miz. Najprej so izdelali 4 stole, nato 12 miz in na koncu še 30 stolov. Stole in mize so sproti zlagali v skladišče in jih odpeljali naročniku, ko so bili izdelani vsi naročeni izdelki. Kolikokrat je bilo v skladišču dvakrat toliko enih izdelkov kot drugih?

- (A) enkrat (B) dvakrat (C) trikrat (D) štirikrat (E) nikoli

A10. Katere je največje praštevilo, ki deli vsako trimestno število, sestavljeno iz treh enakih neničelnih števk?

- (A) 13 (B) 19 (C) 31 (D) 37 (E) 91

B1. Na nekem smučišču so letno vozovnico v primerjavi s prejšnjo sezono podražili za 68 %, a se je izkupiček od prodaje zvišal le za 5 %. Za koliko odstotkov je upadlo število prodanih letnih vozovnic?

B2. Točka D je nožišče višine na hipotenuzo AB pravokotnega trikotnika ABC . Presek simetrale pravega kota s hipotenuzo je točka E . Kot med simetralo pravega kota in višino na hipotenuzo pravokotnega trikotnika je enak $\frac{1}{9}$ velikosti drugega ostrega kota trikotnika CED . Koliko sta velika ostrata trikotnika ABC ?

Naloge za 8. razred

A1. Kolikšna je vrednost izraza $\sqrt{\frac{49}{48}} - \sqrt{\frac{48}{49}}$?

- (A) $-\frac{\sqrt{3}}{84}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{84}$ (C) 1 (D) $\sqrt{3}$ (E) $\frac{84}{\sqrt{3}}$

A2. Katera je zadnja številka vsote $201^9 + 9^{201}$?

- (A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 8 (E) 9

A3. V petkotniku je kot α enak $\frac{3}{8}$ največjega kota, kot β je enak $\frac{9}{16}$ največjega kota, kot γ je enak $\frac{11}{16}$ največjega kota, kot δ pa je enak $\frac{3}{4}$ največjega kota. Kolikšna je velikost največjega kota petkotnika?

- (A) 150° (B) 160° (C) 170° (D) 175° (E) 190°

A4. Obratna vrednost nasprotna vrednosti katerega od naštetih števil je največja?

- (A) 0,2019 (B) $0,201\bar{9}$ (C) $0,20\bar{19}$ (D) $0,2\overline{019}$ (E) $0,\overline{2019}$

A5. Za 7 kg breskev plačamo enako kot za 1 kg jabolk in 2 kg grozdja skupaj. Za 7 kg jabolk plačamo enako kot za 10 kg grozdja in 1 kg breskev skupaj. Koliko kilogramov grozdja lahko kupimo za ceno 12 kg jabolk?

- (A) 9 (B) 12 (C) 18 (D) 24 (E) 28

A6. Večkotnik, ki ga je opazovala Janja, je imel 3-krat toliko stranic in 10-krat toliko diagonal kot večkotnik, ki ga je opazoval Jure. Kateri večkotnik je opazovala Janja?

- (A) trikotnik (B) 10-kotnik (C) 15-kotnik (D) 21-kotnik (E) 63-kotnik

A7. Zaradi suše se je gladina jezera znižala za 10 %. Po obilnem deževju se je dvignila za 15 %, tako je bila 35 cm višja kot pred sušo. Kolikšna je bila višina gladine jezera pred sušo?

- (A) 1 m (B) 7 m (C) 10 m (D) 12 m (E) 15 m

A8. Iz vremenskega poročila za Ljubljano smo razbrali, da so bile jutranje temperature (v $^\circ\text{C}$) pet dni zapored med seboj različne in da je bil zmnožek njihovih vrednosti enak 12. Vrednosti temperatur so bile v poročilu zapisane s celimi števili. Kolikšna je vsota vrednosti izmerjenih temperatur v teh 5 dneh?

- (A) 8 (B) 7 (C) 5 (D) 4 (E) 3

B1. Izračunaj vrednost izraza $\sqrt{\frac{2019 - (-2)^5 - 3 \cdot 2^0}{(-8)^2}} : \sqrt{2} + \frac{2019^2 - 81}{2^3} : (4^3 + 3)$.

B2. V množici je 75 štirikotnikov, ki so rombi, deltoidi ali pravokotniki. Izmed pravokotnikov je četrtnina kvadratov. Rombov je dvakrat toliko kot pravokotnikov. Deltoidov pa je trikrat toliko kot pravokotnikov. Koliko kvadratov je v množici?

B3. Romb $ABCD$ in kvadrat $DCEF$ se od zunaj dotikata vzdolž daljice CD . Točka G je presečišče daljic AC in BE . Kolikšna je velikost kota $\angle AGB$? Odgovor računsko utemelji!

Naloge za 9. razred

A1. V srednjem veku je mesto imelo obzidje v obliki kroga. Tuja vojska ga je hotela zavzeti, zato so se tuji vojaki razporedili na razdalji 3 km od zidu in tako oblikovali krožnico z obsegom 16π km. Kolikšen je bil obseg obzidja?

- (A) 4π km (B) 8π km (C) $5\frac{1}{3}\pi$ km (D) 10π km (E) 13π km

A2. Daljši višini pravokotnega trikotnika sta dolgi 3 cm in $\sqrt{3}$ cm. Koliko je dolga najkrajša višina?

- (A) 1 cm (B) $\frac{1}{2}$ cm (C) $\frac{3}{2}$ cm (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm (E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm

A3. Na izpitu je 20 % študentov doseglo oceno 6, 30 % študentov oceno 7, 15 % študentov oceno 8, 5 % študentov oceno 9 in ostali 10. Kolikšna je bila razlika med povprečno vrednostjo in mediano ocen?

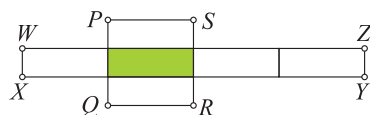
- (A) 0 (B) 0,05 (C) 0,35 (D) 0,45 (E) 3,5

A4. Naj bo $x - \frac{y}{3} = 4$. Koliko je $\frac{8x}{2y}$?

- (A) 2^{12} (B) 4^4 (C) 8^2 (D) 4^{-3}
(E) Izraz zavzame različne vrednosti glede na x in y .

A5. Osenčeni del predstavlja $\frac{1}{3}$ ploščine štirikotnika $QRSP$ in $\frac{1}{4}$ ploščine štirikotnika $XYZW$. Velja tudi $|PS| : |WX| = 3 : 1$. Kolikšno je razmerje $|PQ| : |WZ|$?

- (A) 1 : 2 (B) 1 : 3 (C) 1 : 4 (D) 1 : 6 (E) 1 : 9



A6. Mravlja in hrošček tekujeta v teku. Tečeta s konstantno hitrostjo. Mravlja pusti hroščku 30 cm prednosti, po 6 sekundah pa je že 24 cm pred njim. Po 10 s od začetka tekme je mravlja v cilju. Koliko centimetrov ima v tem trenutku hrošček še do cilja?

- (A) 24 cm (B) 60 cm (C) 72 cm (D) 90 cm
(E) ne da se natančno določiti

A7. Koliko celih števil reši neenačbo $|\sqrt{7} - x| \leq 4$?

- (A) vsa (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

A8. Kolo sreče ima 18 polj, oštevilčenih s števili od 1 do 18, pri čemer so polja s praštevili obarvana rdeče, ostala pa so bela. Kolikšna je verjetnost, da se kolo ustavi na rdečem polju, oštevilčenem z deliteljem števila 30?

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{2}{9}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) 1

B1. Obravnavaj enačbo $(2x + 3)^2 - (2x - a)(2x + a) = 2a(2x + a)$ z neznanko x .

B2. Dan je pravokotni trikotnik ABC , katerega dolžini katet sta v razmerju $a : b = 12 : 5$. Na hipotenuzi pravokotnega trikotnika leži središče krožnice, ki se dotika katete a in gre skozi oglišče A . Nariši skico in izračunaj razmerje med polmerom dane krožnice in dolžino katete b .

B3. Pred štirimi leti je bila Eva za 20 % mlajša od Blaža, čez štiri leta pa bo Blaž za 15 % starejši od Eve. Koliko sta stara Eva in Blaž letos?

Tekmovanje v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike – šolsko tekmovanje

1. skupina: Poslovna matematika

1. naloga

V podjetju Motorček so proizvajali motorna kolesa. V 20 dneh so proizvedli 350 motornih koles. Zaposlenih je bilo 15 delavcev, ki so delali po 8 ur na dan. Ker bodo morali zaradi dodatnega naročila proizvodnjo povečati za 14 %, razmišljajo o možnih scenarijih.

- Ali bi dosegli cilj in v kakšnem času, če bi zaposlili 5 novih delavcev, celoten kolektiv pa bi delal po 7,5 ure na dan?
- Koliko ur (in minut) na dan bi morali delati delavci, če podjetje ne bi zaposlilo nove delovne sile, s kupcem pa bi se dogovorili za dva dodatna dneva za izvedbo naročila?

2. naloga

Na razpisu pridobljena denarna sredstva v višini 150.000,00 EUR so razdelili med štiri turistične kraje, in sicer:

- $\frac{1}{5}$ sredstev premo sorazmerno številu prebivalcev;
(Podatki: Kraj A ima 10.000 prebivalcev, kraj B 30.300 prebivalcev, kraj C 16.500 prebivalcev in kraj D 18.200 prebivalcev.)
- preostanek pa tako, da dobi kraj A štirikrat več sredstev kot kraj C; kraj B $\frac{1}{3}$ več sredstev kot kraj A; kraj D pa trikrat toliko kot skupaj kraja A in B.
Koliko sredstev je pridobil vsak turistični kraj?

3. naloga

V nasadu raste 3000 jablan, od tega jih je 20 % sorte gala, 25 % sorte jonagold, ostalo pa je sorta idared.

- Izračunaj količino pridelanih sort jabolk, če je v povprečju pridelana količina jabolk na drevo – sorta gala 12 kg na jablano, sorta jonagold 9 kg na jablano in sorta idared 14 kg na jablano?
- Naslednje leto je bila zgodaj spomladi pozeba, ki je zmanjšala količino pridelanih jabolk, in sicer na 75 % jablan sorte gala za 4 kg, na 40 % jablan sorte jonagold za 3 kg in na 30 % jablan sorte idared za 2 kg. Izračunaj pridelano količino jabolk po pozebi in razliko med obema pridelkoma (v kg in v odstotkih).

4. naloga

Janez in Meta sta se odločila za nakup gorskih koles, moškega in ženskega.

- Pri nakupu moškega gorskega kolesa sta se dogovorila, da bosta 30 % njegove vrednosti plačala takoj, ostanek, ki bo obrestovan po 4,5-% letni obrestni meri, pa v 3 mesecih. Kolikšno je bilo dokončno poplačilo gorskega kolesa, če je bila njegova osnovna cena 1.457,25 EUR?

- b) Pri nakupu ženskega gorskega kolesa sta se v trgovini dogovorila, da ga bosta plačala v dveh obrokih, in sicer prvega takoj – v višini 50 % od celotne cene ženskega gorskega kolesa, drugi obrok pa bosta poravnala čez 6 mesecev v znesku 452,55 EUR. Kolikšna je bila cena Metinega kolesa v trgovini, če so v drugem obroku vračunane tudi obresti po 7,2-% letni stopnji za čas odloga drugega obroka?

2. skupina: Statistika

1. NALOGA

Število državljanov Slovenije, ki so se odselili v tujino, se je po letu 2011 podvojilo. Najpogosteje gre za mlade ljudi, stare od 25 do 34 let, od katerih jih ima kar 40 odstotkov višjo ali visokošolsko izobrazbo. Boljše življenjske možnosti iščejo zlasti v Nemčiji in Avstriji. (*Dnevnik, avgust 2018*)

V tabeli 1 so predstavljeni podatki o Slovencih do starosti 39 let, ki so se leta 2017 izselili v tujino. V tabeli dopolnite manjkajoče podatke.

Tabela 1: **Odseljeni iz Slovenije v letu 2017 po spolu in starostnih skupinah**

Spol	Starost v letih				Skupaj
	20–24	25–29	30–34	35–39	
Moški		1420		1297	5124
Ženske		1246		712	3745
Skupaj	1668	2666	2526	2009	

Vir: <https://pxweb.stat.si/pxweb/Dialog/SaveShow.asp>

- a) Dopolnite tabelo tako, da izračunate manjkajoče podatke. Pri izračunu si lahko pomagате s podatki v tabeli 2. (*Rezultate zaokrožite na celo število.*)
- b) Izračunajte strukturo odseljenih iz Slovenije po starostnih skupinah. (*Rezultate izrazite v strukturnih odstotkih in jih zaokrožite na 2 decimalni mesti natančno.*)

Tabela 2: **Struktura odseljenih iz Slovenije po starostnih skupinah v letu 2017**
(v odstotkih)

Spol	Starost v letih				Skupaj
	20–24	25–29	30–34	35–39	
Moški			30,02		
Ženske			26,38		
Skupaj		*			

- c) Izračunajte strukturo odseljenih iz Slovenije po spolu. (Rezultate izrazite v strukturnih odstotkih in jih zaokrožite na 2 decimalni mesti natančno.)

Tabela 3: **Struktura odseljenih iz Slovenije po spolu v letu 2017** (v odstotkih)

Spol	Starost v letih				Skupaj
	20–24	25–29	30–34	35–39	
Moški	52,10		*		
Ženske	47,90				
Skupaj					

- d) Razložite podatka v tabeli 2 in tabeli 3, ki sta označena z zvezdico.

2. NALOGA

Tabela 4: **Število prebivalstva po spolu, število zasebnih gospodinjstev in gostota prebivalstva ob popisih v letih od 1981 do 2018**

Leto	Prebivalci - SKUPAJ	Moški	Ženske	Gostota prebivalstva na km ²	Zasebna gospodinjstva
1981	1891864	918766	973098	93,3	594571
1991	1913355	923643	989712	94,4	632278
2002	1964036	958576	1005460	96,9	684847
2011	2050189	1014563	1035626	101,1	813531
2015	2062874	1022229	1040645	101,8	820541
2018	2066880	1027041	1039839	102,0	824618

Vir: SURS

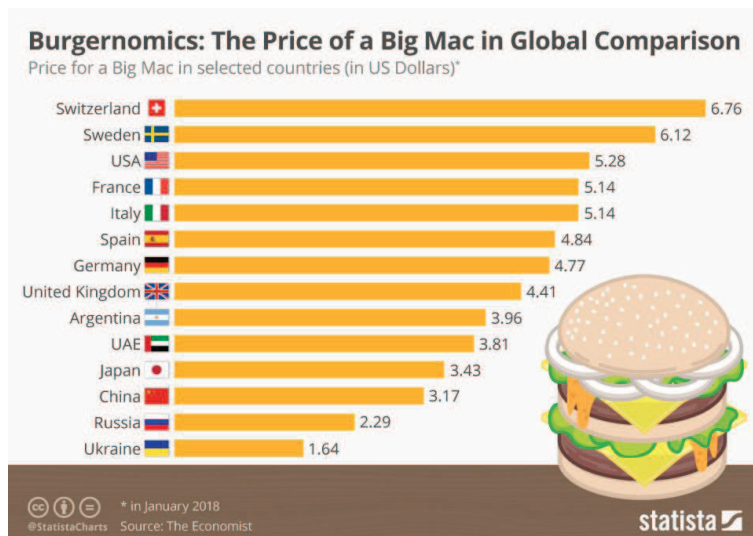
Tabela 5: **Izbrani kazalci ob popisih v letih od 1981 do 2018**

Leto	a)	b)	c)
1981			
1991			
2002			
2011			
2015			
2018			

- a) Izračunajte število žensk na 1000 moških za posamezna leta. (Rezultate zaokrožite na 2 decimalni mesti natančno in jih vpišite v tabelo 5.)
- b) Zapišite obrazec za izračun površine in izračunajte površino za posamezna leta. (Rezultate zaokrožite na 2 decimalni mesti natančno in jih vpišite v tabelo 5.)
- c) Izračunajte število članov na gospodinjstvo po letih. (Rezultate zaokrožite na 2 decimalni mesti natančno in jih vpišite v tabelo 5.)

3. NALOGA

Slika prikazuje cene hamburgerja Big Mac v nekaterih državah v mesecu januarju 2018.



Vir: <https://www.statista.com/chart/13672/burgernomics-the-price-of-a-big-mac-in-global-comparison/>

- a) S pomočjo ustreznih indeksov analizirajte cene hamburgerja po državah tako, da boste primerjali ceno hamburgerja v posamezni državi s ceno hamburgerja v Veliki Britaniji. (Rezultate zaokrožite na 2 decimalni mesti natančno in jih vpišite v tabelo 6.)

Tabela 6: Indeksi za cene hamburgerja po državah v mesecu januarju 2018

Država		
 Švica		
 Švedska		
 ZDA		
 Francija		
 Španija		
 Nemčija		
 Velika Britanija		
 Japonska		
 Kitajska		
 Rusija		

- b) Za koliko odstotkov je bila cena hamburgerja v Švici in Rusiji višja oz. nižja v primerjavi s ceno hamburgerja v Veliki Britaniji?
- c) Grafično prikažite kazalce, ki ste jih izračunali pri točki a.

- d) V mesecu januarju 2018 je povprečna neto plača v Sloveniji znašala 1.077,73 EUR. Izračunajte, koliko hamburgerjev bi lahko s povprečno slovensko plačo kupili v Švici in Veliki Britaniji. (*Rezultate zaokrožite na celo število.*)

4. NALOGA

Tabela 7: **Delavci po produktivnosti** (izraženi v številu izdelkov) v podjetju **Lampionček, d. o. o.**

Število izdelkov	Zaposleni f_j	b)	c)	d)
20 - 24	2			
25 - 29	10			
30 - 34	22			
35 - 39	42			
40 - 44	24			
45 - 49	10			
Skupaj	110			

- a) Katero populacijo smo opazovali, kaj je bila statistična enota in kaj statistična spremenljivka?

Stat. populacija:

Stat. enota:

Stat. spremenljivka:

- b) Izračunajte relativne frekvence in razložite izračunani kazalec v 3. razredu. (*Rezultate zaokrožite na 3 decimalna mesta natančno in jih vpišite v tabelo 7.*)
- c) Izračunajte kumulativno absolutnih frekvenc in razložite izračunani kazalec v 5. razredu. (*Rezultate zaokrožite na celo število in jih vpišite v tabelo 7.*)
- d) Izračunajte kumulativno relativnih frekvenc in razložite izračunani kazalec v 4. razredu. (*Rezultate zaokrožite na 3 decimalna mesta natančno in jih vpišite v tabelo 7.*)

Rešitve 57. fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje

Skupina I

1. $l = 274$ cm, $h_0 = 15,25$ cm, $h = 30$ cm.

a)

Do prvega odboja prepotuje žogica natanko tretjino poti s konstantno hitrostjo, ki je enaka hitrosti, s katero igralec servira žogico. Istočasno v navpični smeri „pade“ z višine h v času t :

$$h = \frac{1}{2}gt^2, \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,247 \text{ s}.$$

Vodoravna hitrost je enaka

$$v = \frac{l}{3t} = \frac{l}{3} \sqrt{\frac{g}{2h}} = 3,69 \text{ m/s} \approx 3,7 \text{ m/s}.$$

b)

Žogica se odbije z navpično hitrostjo, ki je po velikosti enaka navpični hitrosti, s katero pade na mizo:

$$v_y = gt = g \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Do mrežice na polovici mize po odboju prepotuje razdaljo $l' = \frac{1}{2}l - \frac{1}{3}l = \frac{1}{6}l$. Za to pot porabi točno polovico časa, izračunanega pri a):

$$t' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

V tem času se dvigne za

$$y = v_y t' - \frac{1}{2}gt'^2 = g \sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{1}{2}g \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2h}{g}} \right)^2 = \frac{3h}{4} = 22,5 \text{ cm},$$

kar je 7,25 cm nad mrežico.

2. $\varphi_L = 27^\circ$, $s_L = 31$ cm, $\varphi_D = 53^\circ$, $s_D = 10$ cm, $v_0 = 1$ m/s.

a)

Kinetična energija kovancev po trku se zmanjšuje zaradi trenja

$$\frac{mv^2}{2} = mgk_t s,$$

kjer sta v in s hitrost in pot levega ali desnega kovanca, m masa kovanca in k_t koeficient trenja. Očitno torej velja

$$\frac{v_L^2}{v_D^2} = \frac{s_L}{s_D} \quad \text{oziroma} \quad \frac{v_L}{v_D} = \sqrt{\frac{s_L}{s_D}} = \sqrt{3,1} = 1,76.$$

Opomba: Enak rezultat bi dobili tudi iz pogoja, da je skupna gibalna količina obeh kovancev po trku v smeri, pravokotni na smer v_0 , enaka nič

$$\frac{v_L}{v_D} = \frac{\sin \varphi_D}{\sin \varphi_L} = 1,76.$$

Ker v nalogi zahtevamo rešitev iz dolžin poti, drugi način ne prinaša vseh možnih točk, čeprav je rezultat pravilen.

b)

Ohranitev gibalne količine v smeri hitrosti v_0 nam da

$$mv_0 = mv_L \cos \varphi_L + mv_D \cos \varphi_D ,$$

kar nam skupaj z rezultatom iz a) da

$$v_D = \frac{v_0}{\cos \varphi_D + \cos \varphi_L \sqrt{s_L/s_D}} = 0,46 \text{ m/s}.$$

in

$$v_L = \frac{v_0}{\cos \varphi_L + \cos \varphi_D \sqrt{s_D/s_L}} = 0,81 \text{ m/s}.$$

Enak rezultat sledi iz enačbe za ohranitev gibalne količine v pravokotni smeri:

$$v_D = \frac{v_0 \sin \varphi_L}{\sin \varphi_L \cos \varphi_D + \sin \varphi_D \cos \varphi_L} ,$$
$$v_L = v_D \frac{\sin \varphi_D}{\sin \varphi_L} = \frac{v_0 \sin \varphi_D}{\sin \varphi_L \cos \varphi_D + \sin \varphi_D \cos \varphi_L} .$$

c)

Iz zakona o spremembi kinetične energije dobimo še koeficient trenja

$$k_t = \frac{v_L^2}{2gs_L} = \frac{v_D^2}{2gs_D} = 0,11 .$$

Tu je pomembno, da je ob pravilnem izračunu pri a) rezultat za levi in za desni kovanec enak, medtem ko sta rezultata med seboj različna, če pri a) dijak ne izračuna razmerja pravilno.

3. $l = 45 \text{ cm}$, $F = 6 \text{ mN}$, $k = 0,15 \text{ N/m}$, $s_0 = 0,2$, $v = 2 \text{ m/s}$.

a)

Radialna nit je raztegnjena za

$$\Delta l = \frac{F}{k} = 4,0 \text{ cm} .$$

Prožnostna energija petih radialnih niti v prazni mreži je tako

$$W_{\text{pr}} = 5 \frac{1}{2} k \Delta l^2 = 0,6 \text{ mJ} .$$

b)

Neobremenjena radialna nit ima dolžino

$$l_0 = l - \Delta l = 41 \text{ cm} .$$

Tik preden se pretrga, je njen raztezek enak

$$s = l_0 \frac{s}{l_0} = 8,2 \text{ cm} ,$$

prožnostna energija pa

$$W_{\text{pr}}' = 5 \frac{1}{2} k s^2 = 2,52 \text{ mJ} \approx 2,5 \text{ mJ} .$$

Ko se muha v mreži zaustavi, se njena kinetična energija porabi za povečanje prožnostne energije mreže:

$$\frac{1}{2} m v^2 = W_{\text{pr}}' - W_{\text{pr}} .$$

Od tod izračunamo največjo možno maso muhe

$$m = \frac{2(W_{\text{pr}}' - W_{\text{pr}})}{v^2} = \frac{5k(s^2 - \Delta l^2)}{v^2} = 0,96 \text{ g} \approx 1 \text{ g} .$$

4. a)

Na spodnji (recimo desni) valj deluje zgornji valj s silo, ki jo razstavimo na komponento F_2 , pravokotno glede na podlago v stiku valjev, in na komponento F_{l2} , vzporedno s podlago v tej točki, ki ustreza sili lepenja in kaže v levo. Smer sile F_2 tvori kot 60° z vodoravnico, smer sile F_{l2} pa kot 30° . V stiku z ledeno ploskvijo deluje pravokotna sila podlage F_1 in (vodoravna) sila lepenja F_{l1} , ki kaže v levo.

Iz pogoja za ravnovesje sil v vodoravni smeri sledi:

$$F_2 \cos 60^\circ = F_{l1} + F_{l2} \cos 30^\circ.$$

Pogoj za ravnovesje navorov zapišemo za os valja, tako da je ročica kar polmer valja r :

$$F_{l1} r = F_{l2} r, \quad F_{l1} = F_{l2},$$

saj je navor sil F_1 in F_2 enak nič, ker sta obe vzporedni z ročico.

Iz prve enačbe izrazimo silo lepenja na stiku les-les:

$$F_{l2} = \frac{F_2 \cos 60^\circ}{1 + \cos 30^\circ}.$$

Iskani koeficient trenja les-les je potem

$$k_{l2} = \frac{F_{l2}}{F_2} = \frac{\cos 60^\circ}{1 + \cos 30^\circ} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 0,27.$$

b)

Na zgornji valj deluje teža F_g in spodnja valja s silami, ki so po 3. Newtonovem zakonu nasprotno enake silam, s katerimi zgornji valj deluje na spodnja valja. Zaradi simetrije spodnji desni valj uravnoteži polovico teže zgornjega valja. Zapišimo pogoj za ravnovesje zgornjega valja. V navpični smeri velja:

$$\frac{1}{2} F_g = F_2 \sin 60^\circ + F_{l2} \sin 30^\circ = F_{l2} \left(\frac{\sin 60^\circ}{k_{l2}} + \sin 30^\circ \right).$$

Ker sta sili lepenja enaki, velja

$$F_{l1} = F_{l2} = \frac{F_g}{2 \left(\frac{\sin 60^\circ}{k_{l2}} + \sin 30^\circ \right)}.$$

Hitro ugotovimo, da sila F_1 podpira polovico skupne teže vseh treh valjev:

$$F_1 = \frac{3}{2} F_g.$$

Za iskani koeficient trenja les-led velja:

$$k_{l1} = \frac{F_{l1}}{F_1} = \frac{1}{3 \left(\frac{\sin 60^\circ}{k_{l2}} + \sin 30^\circ \right)}.$$

Ko vstavimo izraz za k_{l2} se z nekoliko preurejanja rezultat poenostavi v

$$k_{l1} = \frac{\sin 30^\circ}{3(1 + \sin 60^\circ)} = \frac{k_{l2}}{3} = \frac{1}{3(2 + \sqrt{3})} = 0,09.$$

Skupina II

1. $I = 1 \text{ mA}$, $\zeta_1 = 0,4 \text{ }\Omega\text{m}$, $\zeta_2 = 0,16 \text{ }\Omega\text{m}$, $S = 3 \text{ mm}^2$, $r = 5 \text{ mm}$, $\varphi = 60^\circ$.

a)

Najprej si izračunajmo celotna upora obeh polovic:

$$R_1 = \zeta_1 \frac{\pi r}{S} = 2094 \text{ }\Omega,$$

$$R_2 = \zeta_2 \frac{\pi r}{S} = 838 \text{ }\Omega.$$

Pri kotu $0 < \varphi < 90^\circ$ tok teče po daljši strani. Nadomestni upor je:

$$R(\varphi) = \left(1 - \frac{\varphi}{\pi}\right)R_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\varphi}{\pi}\right)R_2.$$

To je linearno od $R(0) = R_1 + R_2/2$ do $R(90^\circ) = R_1/2 + R_2$.

Pri kotu 60° je po zgornji zvezi upor

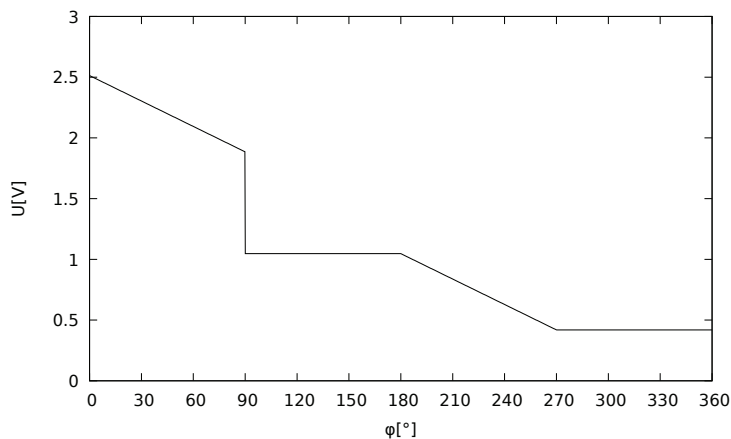
$$R(60^\circ) = \frac{2}{3}R_1 + \frac{5}{6}R_2 = 2094 \text{ }\Omega,$$

kar je ravno enako kot celoten R_1 (ker je $R_2/R_1 = 2/5$).

b)

Pri ostalih kotih teče tok po krajši strani. Od $\varphi = 90^\circ$ do $\varphi = 180^\circ$ vidimo samo $R = R_1/2$. Od 180° do 270° imamo linearno zvezo, ki se potem od 270° spet izravna pri $R = R_2/2$.

Vemo še $U = RI$ in lahko narišemo graf:



c)

Povprečna moč bo pa povprečna vrednost trenutne moči

$$P = RI^2 = UI,$$

ki je sorazmerna z uporom. Napetost lahko povprečimo tudi na grafu. Po četrtninah so povprečja upora $\frac{3}{4}(R_1 + R_2)$, $R_1/2$, $(R_1 + R_2)/4$ ter $R_2/2$, skupno pa $\frac{3}{8}(R_1 + R_2) = 1099 \text{ }\Omega$, povprečna moč pa 1.1 mW .

2. $a = 30 \text{ cm}$, $d = 2 \text{ cm}$, $e = 2 \cdot 10^{-17} \text{ As}$, $r = 1 \text{ } \mu\text{m}$, $k = 2 \cdot 10^{-12} \text{ Ns/m}$, $U = 60 \text{ V}$.

a)

Električna sila na kapljico uravnovesi težo kapljice:

$$eE = e \frac{U_0}{d} = mg = \rho g \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Napetost, ki uravnovesi kapljice, je enaka

$$U_0 = \frac{4\pi\rho g r^3 d}{3e} = 41 \text{ V}.$$

b)

Ko kapljice dosežejo končno hitrost je vsota vseh sil na kapljico enaka 0. Električna sila uravnovesi težo in upor zraka:

$$eE = mg + kv, \quad e \frac{U}{d} = \rho g \frac{4\pi r^3}{3} + kv.$$

Največja hitrost je enaka

$$v = \frac{e \frac{U}{d} - \rho g \frac{4\pi r^3}{3}}{k} = 9,5 \text{ mm/s}.$$

Z rezultatom iz dela a) se izraz za hitrost poenostavi v

$$v = \frac{e(U - U_0)}{kd}.$$

3. $R = 300 \text{ } \Omega$, $C_1 = C_2 = 4 \text{ } \mu\text{F}$, $U_0 = 4,5 \text{ V}$.

a)

Ko je stikalo S_2 sklenjeno in stikalo S_1 razklenjeno, je nadomestni upor vezja $R_a = 2R + \frac{1}{2}R = 750 \text{ } \Omega$. Tok skozi prva dva upornika in skozi vira je $I_a = 2U_0/R_a = 12 \text{ mA}$. Padec napetosti na prvem uporniku je $U_1 = RI_a = 3,6 \text{ V}$. Napetost na kondenzatorju C_1 je $U_{a1} = U_0 - U_1 = 0,9 \text{ V}$ in naboj

$$e_{a1} = C_1 U_{a1} = 3,6 \text{ } \mu\text{As}.$$

Ker je potencial na zgornji plošči večji od potenciala na spodnji, oziroma je napetost med spodnjo in zgornjo ploščo pozitivna, je pozitivni naboj na zgornji plošči.

Skozi vsakega od vzporedno vezanih upornikov, ki jima je vzporedno vezan kondenzator C_2 , teče tok $I_a/2$, zato je napetost na tem kondenzatorju $U_{a2} = RI_a/2$ in naboj

$$e_{a2} = C_2 U_{a2} = 7,2 \text{ } \mu\text{As}.$$

b)

Takoj za tem, ko razklenemo stikalo S_2 , deluje kondenzator C_2 kot vir napetosti, ki poganja tok samo skozi najbolj desni upornik R v vezju. Začetni tok je torej

$$I = \frac{U_{a2}}{R} = \frac{RI_a/2}{R} = \frac{I_a}{2} = 6 \text{ mA}.$$

c)

Ko sta sklenjeni obe stikali, razpade vezje v dve enostavni neodvisni vezji, ki imata sicer skupni vodnik, ki vsebuje stikalo S_1 , a tok po vsakem teče neodvisno od drugega. Skozi stikalo S_1 teče vsota obeh tokov, pri čemer moramo paziti na predznak posameznega toka. Napetost na kondenzatorju C_1 je 0, saj je preko stikala S_1 kratko sklenjen. Naboj $e_{c1} = 0$.

Levi električni krog vsebuje en vir in en upornik, tok I_{c1} v tem krogu je $I_{c1} = U_0/R = 15 \text{ mA}$ in teče skozi stikalo S_1 navzdol (gledano v narisani shemi). Desni električni krog vsebuje en vir in tri upornike z nadomestnim uporom $R_D = 3R/2$. Tok skozi desni vir je $I_{c2} = U_0/R_D = 10 \text{ mA}$ in teče skozi stikalo S_1 navzgor (gledano v narisani shemi). Za tok skozi stikalo S_1 dobimo

4. $V_0 = 10,0 \text{ mm}^3$, $h = 23 \text{ cm}$, $V_1 = 11,3 \text{ mm}^3$, $T = 1749 \text{ }^\circ\text{C}$, $\rho_s = 8800 \text{ kg/m}^3$, $M = 207 \text{ kg/kmol}$, $p_0 = 1 \text{ bar}$.

a)

Na dnu posode je tlak

$$p = p_0 + \rho_s g h = 1,20 \text{ bar} = 1,20 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Ker je temperatura konstantna, velja za pričakovano vrednost prostornine tik pod gladino:

$$pV_0 = p_0V, \quad V = \frac{pV_0}{p_0} = 12,0 \text{ mm}^3.$$

b)

Opravljen delo je produkt tlaka in spremembe prostornine. Ker tlak pri dvigovanju ni konstanten, za oceno vzamemo kar povprečni tlak $\bar{p} = (p_0 + p)/2$.

Če bi se mehurček razpel do prostornine V , bi para opravila delo

$$A = \bar{p}(V - V_0) = \frac{(p + p_0)(V - V_0)}{2} = 0,22 \text{ mJ}.$$

c)

Ker je dejanska sprememba prostornine manjša za $\Delta V = 0,7 \text{ mm}^3$ od pričakovane, pomeni, da se je pri dvigovanju del pare kondenziral.

Maso pare izračunamo iz splošne plinske enačbe:

$$p_0 \Delta V = \frac{\Delta m_p}{M} RT, \quad \Delta m_p = \frac{p_0 \Delta V M}{RT} = 0,84 \text{ } \mu\text{g}.$$

d)

Energija, sproščena pri kondenzaciji, se je porabila za delo pri razpenjanju mehurčka. Delo izračunamo podobno kot pri b), le da sedaj upoštevamo dejansko prostornino zraka pod gladino:

$$A_1 = \bar{p}(V_1 - V_0) = \frac{(p + p_0)(V_1 - V_0)}{2} = 0,14 \text{ mJ}.$$

Iz energijske bilance sledi ocena za izparilno toploto q_i :

$$\Delta m_p q_i = A_1, \quad q_i = \frac{A_1}{\Delta m_p} = 170 \text{ kJ/kg}.$$

Skupina III

1. $r_1 = 9,5 \text{ km}$, $r_2 = 7 \text{ km}$, $m_1 = 5 \cdot 10^{15} \text{ kg}$, $m_2 = 2 \cdot 10^{15} \text{ kg}$.

a)

Na vozilo v točki A deluje privlačna sila večje krogle, F_1 , v smeri pravokotno na podlago in privlačna sila druge krogle, F_2 , ki jo razstavimo na komponento $F_{2\perp}$, pravokotno na podlago, in na komponento $F_{2\parallel}$, vzporedno s podlago. Komponenta $F_{2\parallel}$ je v mirovanju uravnovešena s silo lepenja F_l . Če z α označimo kot med zveznico središč obeh krogel in zveznico med središčem manjše krogle in točko A z dolžino r , sledi

$$\sin \alpha = \frac{r_1}{r}, \quad r = \sqrt{r_1^2 + (r_1 + r_2)^2} = 19 \text{ km}, \quad \alpha = 30^\circ.$$

Če z m označimo maso vozila, velja

$$F_1 = \frac{Gmm_1}{r_1^2}, \quad F_{2\perp} = F_2 \sin \alpha = \frac{Gmm_2 \sin \alpha}{r^2}, \quad F_{2\parallel} = F_2 \cos \alpha = \frac{Gmm_2 \cos \alpha}{r^2}.$$

Koeficient lepenja mora biti najmanj

$$k_l = \frac{F_l}{F_1 + F_{2\perp}} = \frac{F_{2\parallel}}{F_1 + F_{2\perp}} = \frac{\frac{m_2 \cos \alpha}{r^2}}{\frac{m_1}{r_1^2} + \frac{m_2 \sin \alpha}{r^2}} = \frac{r_1^2 m_2 \cos \alpha}{r^2 m_1 + r_1^2 m_2 \sin \alpha} = 0,08.$$

b)

Radialni pospešek pri kroženju po krožnici z radijem r_1 mora biti manjši od težnega pospeška v točki B:

$$\frac{v_B^2}{r_1} = \frac{Gm_1}{r_1^2} + \frac{Gm_2}{(2r_1 + r_2)^2}.$$

Dovoljeno hitrost lažje izračunamo, če izpostavimo prvi člen, ki daleč največ prispeva:

$$v_B = \sqrt{\frac{Gm_1}{r_1}} \sqrt{1 + \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{r_1}{2r_1 + r_2} \right)^2} = 6,08 \text{ m/s} \approx 6 \text{ m/s}.$$

c)

V tem primeru vozilo skupaj s telesom kroži okoli težišča, ki je na zveznici med središčema krogel in oddaljeno od točke C za

$$r^* = \frac{m_2 r_2 + m_1 (2r_2 + r_1)}{m_2 + m_1} = 18,8 \text{ km}.$$

Tudi v tem primeru je v mejnem primeru radialni pospešek zaradi kroženja po krožnici z radijem r^* enak težnemu pospešku v točki C:

$$\omega^2 r^* = \frac{Gm_2}{r_2^2} + \frac{Gm_1}{(2r_2 + r_1)^2}, \quad \omega = \frac{2\pi}{t_0},$$

pri čemer je t_0 čas enega obrata telesa okoli težišča. Sledi

$$\omega = \sqrt{\frac{Gm_2}{r^* r_2^2}} \sqrt{1 + \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{r_2}{2r_2 + r_1} \right)^2} = 4,21 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

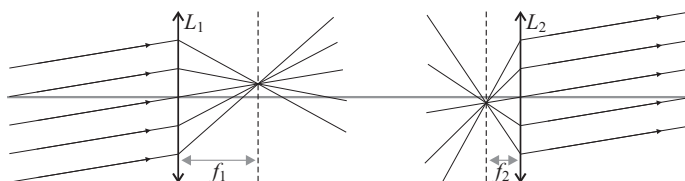
in

$$t_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 14930 \text{ s} = 249 \text{ min} = 4 \text{ h } 9 \text{ min} \approx 4 \text{ h}.$$

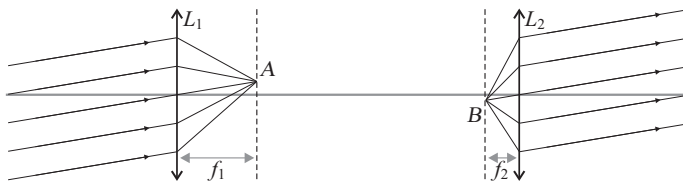
2. $f_1 = 9 \text{ cm}$, $f_2 = 6 \text{ cm}$, $X = 40 \text{ cm}$.

a)

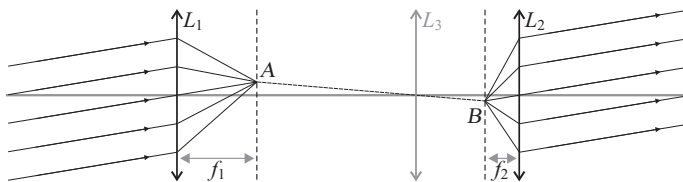
Naj bo x koordinata vzdolž optične osi, merjeno od L_1 , in y odmik od optične osi v vpadni ravnini. Zahtevo naloge o vzporednem premiku ilustrira prva slika.



Leča L_1 je v točki $(0,0)$, leča L_2 je v točki $(X,0)$. Vzporedna svetloba, ki vpada na lečo L_1 z leve pod majhnim kotom φ , se preslika v točko A v goriščni ravnini L_1 , $A = (f_1, f_1\varphi)$. Če naj se po prehodu leče L_2 z leve proti desni svetloba širi v isto smer kot prej, torej pod kotom φ , mora izhajati iz ustrezne točke B v goriščni ravnini L_2 , torej iz $B = (X - f_2, -f_2\varphi)$. Ustrezni točki sta označeni na spodnji sliki.



To pomeni, da mora leča L_3 preslikati predmet iz točke A v B . Ker se temenski žarek ne lomi, moramo lečo L_3 postaviti na presečišče daljice AB in optične osi, kot kaže slika.



Iz enačbe premice $y(x) = kx + n$ skozi točki A in B in zahteve $y(d) = 0$ določimo oddaljenost d tretje leče L_3 od koordinatnega izhodišča pri leči L_1 .

$$d = Xf_1/(f_1 + f_2) = 24 \text{ cm}$$

b)

Goriščno razdaljo določimo iz enačbe leče $1/f = 1/a + 1/b$, kjer za dano preslikavo z lečo L_3 iz rešitve dela a) dobimo $a = d - f_1 = 15 \text{ cm}$ in $b = X - d - f_2 = 10 \text{ cm}$.

$$f_3 = \frac{ab}{a+b} = 6 \text{ cm}.$$

3. $r_v = 2 \text{ cm}$, $l_v = 20 \text{ cm}$, $N_v = 200$, $r_m = 1 \text{ cm}$, $l_m = 10 \text{ cm}$, $N_m = 100$, $I = 1 \text{ A}$, $R_0 = 0,01 \Omega$, $v = 10 \text{ cm/s}$.

a)

Magnetno polje v veliki tuljavi meri

$$B = \frac{\mu_0 N_v I}{l_v} = 1,257 \text{ mT} \approx 1,26 \text{ mT}.$$

Napetost v mali tuljavi se inducira zaradi spreminjanja magnetnega pretoka v mali tuljavi. Če v času Δt vstopi v veliko tuljavo ΔN ovojev male tuljave, se pretok skozi malo tuljavo spremeni za $\Delta\Phi = BS\Delta N = B\pi r_m^2 \Delta N$. Mala tuljava je cela v veliki tuljavi ob času $t_0 = l_m/v = 1 \text{ s}$, število ovojev, ki v času Δt vstopi v malo tuljavo, je tako $\Delta N = \frac{N_m \Delta t}{t_0}$. Za inducirano napetost sledi:

$$U_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = B\pi r_m^2 \frac{\Delta N}{\Delta t} = B\pi r_m^2 \frac{N_m v}{l_m} = \frac{\mu_0 \pi r_m^2 N_v N_m I v}{l_v l_m} = 39,5 \cdot 10^{-6} \text{ V} \approx 40 \mu\text{V}.$$

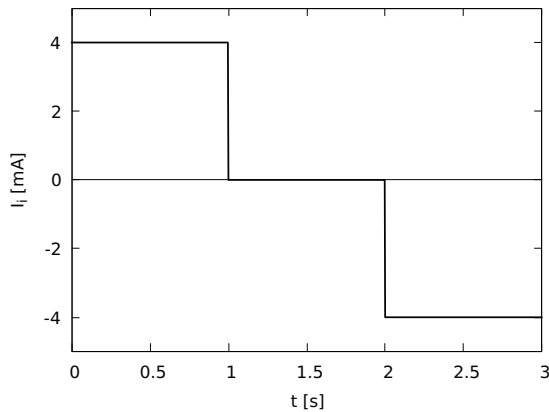
b)

Inducirana napetost požene tok

$$I_i = U_i/R = 3,95 \text{ mA} \approx 4 \text{ mA}.$$

Ko je mala tuljava v celoti v veliki tuljavi, se magnetni pretok skozi njo ne spreminja, inducirana napetost je enaka 0. To se zgodi v času $t_0 = l_m/v = 1 \text{ s}$. Ko pa mala tuljava prične izstopati iz večje, se magnetni pretok manjša, zato ima inducirana napetost in tok nasproten (negativen) predznak glede na napetost in tok pri vstopanju. To se zgodi po času $l_v/v = 2 \text{ s}$. Mala tuljava v celoti izstopi iz velike ob času 3 s. Velja:

$$I_i = \begin{cases} 4 \text{ mA}, & 0 \text{ s} < t < 1 \text{ s} \\ 0, & 1 \text{ s} < t < 2 \text{ s} \\ -4 \text{ mA}, & 2 \text{ s} < t < 3 \text{ s} \end{cases}$$



c)

V času 2 s se pretoči naboj

$$e = I_i t_0 = 4 \text{ mAs},$$

saj v času $1 \text{ s} < t < 2 \text{ s}$ tok ne teče.

4. $a = 20 \text{ cm}$, $d = 2 \text{ cm}$, $e = 2 \cdot 10^{-16} \text{ As}$, $k = 2 \cdot 10^{-15} \text{ Ns/m}$, $U = 1 \text{ V}$, $B = 5 \text{ T}$.

a)

Ko delec doseže konstantno hitrost, je vsota sil enaka 0 in velja

$$eE = e \frac{U}{d} = kv, \quad v = \frac{eU}{kd} = 5 \text{ m/s}.$$

b)

Ko so sile v ravnovesju, se delec giblje pod določenim kotom glede na smer električnega polja. Smeri sil kaže slika. Ravnovesne pogoje zapišimo za smer vzporedno z magnetno silo in za pravokotno smer, vzporedno s hitrostjo in silo upora. V prvem primeru velja

$$eE \sin \alpha = evB$$

in v drugem

$$eE \cos \alpha = kv.$$

Enačbi delimo in dobimo smer gibanja:

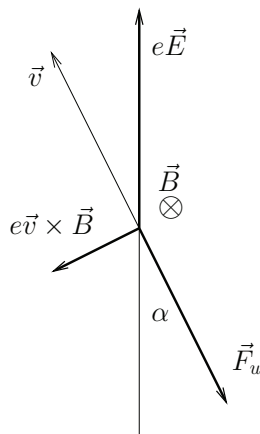
$$\tan \alpha = \frac{eB}{k} = 0,5, \quad \alpha = 27^\circ.$$

Enačbi še kvadriramo in seštejemo:

$$e^2 E^2 = e^2 B^2 v^2 + k^2 v^2 = (e^2 B^2 + k^2) v^2.$$

Končna hitrost je

$$v = \frac{eE}{\sqrt{e^2 B^2 + k^2}} = \frac{eU}{d\sqrt{e^2 B^2 + k^2}} = 4,5 \text{ m/s}.$$



Rešitve 55. tekmovanja iz matematike za Vegovo priznanje – državno tekmovanje

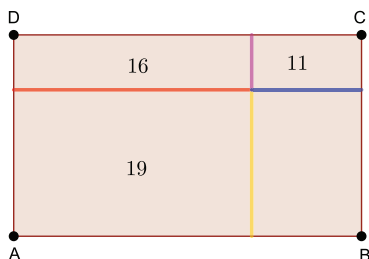
Rešitve za 5. razred

A1. Število zaokrožimo na vsa predlagana mesta. Zapovrstjo dobimo: 407 620, 407 600, 408 000, 410 000 in 400 000. Največje število nastane, ko zakrožimo na desetisočice.

A2. 96 dečkov in deklic 6. in 7. razreda predstavlja 24 kvadratkov iz diagrama, torej en kvadratarek predstavlja 4 osebe. Deklice iz 4. razreda so predstavljene z 8, dečki iz 5. razreda pa s 6 kvadratkami. Teh 14 kvadratkov predstavlja $14 \cdot 4 = 56$ oseb.

A3. Tri nalična peresa in pet svinčnikov skupaj stane 12 evrov več kot 8 svinčnikov. Klemen bi za 8 svinčnikov plačal $60 - 12 = 48$ evrov, torej eden stane 6 evrov.

A4. Obseg pravokotnika $ABCD$ je enak vsoti dolžin dveh rdečih, dveh rumenih, dveh modrih in dveh vijoličnih daljic. Iz dolžin rdeče in rumene daljice dobimo obseg največjega notranjega pravokotnika, iz ostalih dveh pa najmanjšega. Vsota obsegov najmanjšega in največjega notranjega pravokotnika je enaka obsegu pravokotnika $ABCD$, torej 30 cm.



A5. Slika na 10. mestu bo imela $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 = 110$ krogcev.

A6. Celoten kvadrat pokrijemo z 8 osenčenimi trikotniki s prve slike oziroma z 8 osenčenimi pravokotniki z druge slike. Na tretji sliki vsakega od notranjih 4 kvadratov, ki skupaj tvorijo celoten kvadrat, pokrijemo z dvema osenčenima kvadratom. Za celotnega torej potrebujemo 8 takih kvadratov. Z osenčenim paralelogramom na četrti sliki pokrijemo oba trikotnika v levem zgornjem kotu. Za celoten kvadrat potrebujemo 16 takih trikotnikov oziroma 8 osenčenih paralelogramov. Vsi pobarvani liki imajo zato enako ploščino.

A7. Najnižja sveča je visoka $4 \cdot 1,5 = 6$ cm. Naslednje štiri so po vrsti visoke 8, 10, 12 in 14 cm. Sveča visoka, 12 cm, dogori v $4 \cdot 2 = 8$ urah. Za 5 mm se sveče skrajšajo v 20 minutah, torej dogorijo za $20 \text{ mm} = 2 \text{ cm}$ v $4 \cdot 20 = 80$ minutah oziroma 1 uri in 20 minut. Najvišja sveča dogori zadnja, in sicer po 9 urah in 20 minutah.

A8. Seštejemo število tekem, ki sta jih odigrali moštvi O ter T, in odštejemo število tekem, ki jih je odigralo moštvo M. Dobimo dvakrat šteto število tekem med O in T. Torej je iskano število tekem enako: $(6 + 11 - 7) : 2 = 5$.

B1.

$$\begin{aligned} 12 + 8 : (5 - (4 \cdot (5 \cdot 2 - 7) \cdot (6 \cdot 4 - 3 \cdot 5)) + 2) - 3 &= \\ = 12 + 8 : (5 - (4 \cdot 3 - (24 - 15)) + 2) - 3 &= \\ = 12 + 8 : (5 - (12 - 9) + 2) - 3 &= \\ = 12 + 8 : (5 - 3 + 2) - 3 &= \\ = 12 + 8 : 4 - 3 = 9 + 2 = 11 \end{aligned}$$

B2.

Tovornjakov je osemkrat toliko kot avtobusov, na en avtobus pride 8 tovornjakov in 28 osebnih avtomobilov ($4 \cdot 7$), torej lahko vozila obravnavamo v skupinah po $1 + 8 + 28 = 37$. Delimo $740 : 37 = 20$, skupaj je videl 20 takih skupin, avtomobilov je tedaj $20 \cdot 28 = 560$, tovornjakov pa $20 \cdot 8 = 160$.

Rešitve za 6. razred

A1. Izračunajmo:

$$\begin{aligned} 45,3 : (3 \cdot (2^2 + 3^2 \cdot 2 + 0,81 : 0,027 : 10) : 10) &= 45,3 : (3 \cdot (4 + 18 + \frac{810}{27} : 10) : 10) = \\ = 45,3 : (3 \cdot (22 + \frac{81}{27}) : 10) &= 45,3 : (3 \cdot (22 + 3) : 10) = 45,3 : (3 \cdot 25 : 10) = 45,3 : 7,5 = \\ = \frac{453}{75} = \frac{151}{25} = \frac{604}{100} &= 6,04 \end{aligned}$$

A2. Zapis MCDLXXV predstavlja število 1475. Prištejemo 2019 in dobimo 3494, kar z rimsko številko zapišemo kot MMMCDXCIV. Pravilen je odgovor **(B)**.

A3. S števčkama 3 in 0 lahko sestavi le eno pravo 6-mestno število: 300 000. S števčkami 1, 2 in 0 lahko sestavi pet pravih 6-mestnih števil, ki se začnejo z 1: 120 000, 102 000, 100 200, 100 020, 100 002, ter pet takih, ki se začnejo z 2: 210 000, 201 000, 200 100, 200 010, 200 001. Mija lahko uporabi tri kartončke s števkami 1 ter tri kartončke s števkami 0. S temi kartončki lahko sestavi:

- štiri števila, ki se začnejo z 11: 111 000, 110 100, 110 010, 110 001,
- tri števila, ki se začnejo s 101: 101 100, 101 010, 101 001,
- dve števili, ki se začneta s 1001: 100 110, 100 101 in
- število 100 011.

Vsega skupaj Mija lahko sestavi: $1 + 5 + 5 + 10 = 21$ števil.

A4. Prva štiri števila so 8, 4, 2 in 1. Zadnje med njimi je liho, zato naslednjega dobimo kot vsoto zadnjega in predzadnjega: $2 + 1 = 3$. Sledi število, ki je vsota zadnjih dveh: $1 + 3 = 4$. Opazimo, da se števila začnejo ponavljati v naslednjem vrstnem redu: 8, 4, 2, 1, 3, 4, 2, 1, 3, 4, 2, 1, 3, ... Brez upoštevanja števila 8 je v 2019. kvadratku število, ki stoji na 2018. mestu v vzorcu 4, 2, 1, 3, 4, 2, 1, 3, ... Ker pri deljenju 2018 s 4 ostane 2, je iskano število na drugem mestu v nizu 4, 2, 1, 3. Pravilen je odgovor **(B)**.

A5. Ploščina manjšega kvadrata predstavlja $\frac{4}{3}$ ploščine preseka, ploščina večjega kvadrata pa $\frac{16}{9}$. Razmerje ploščin je zato enako $\frac{4}{3} : \frac{16}{9} = \frac{3}{4} = 3 : 4$.

A6. Za števke na mestu enic velja: $A + B + A + B = 2 \cdot A + 2 \cdot B$, za števke na mestu desetic pa: $10 \cdot A + 10 \cdot A + 10 \cdot B + 10 \cdot B = 20 \cdot A + 20 \cdot B$. Skupaj je to enako: $22 \cdot A + 22 \cdot B$. Delimo število 352 z 22 in dobimo 16, torej je $A + B = 16$.

A7. Gredica, dolga 5 m in široka 5 m, predstavlja četrtno pravokotnega vrta, dolgega 10 m in širokega 10 m. Zato bo zanjo potreboval le četrtno časa, ki ga potrebuje za vrt, torej 1,5 ure oziroma 90 minut.

A8. V kvadratu na sliki najdemo 16 kvadratkov s ploščino 1 cm^2 , 9 kvadratov s ploščino 4 cm^2 , 4 kvadrate s ploščino 9 cm^2 ter enega s ploščino 16 cm^2 . Vsota vseh ploščin je enaka: $16 \cdot 1 + 9 \cdot 4 + 4 \cdot 9 + 1 \cdot 16 = 104 \text{ cm}^2$.

B1. Devet posod razdelimo v vsaj dve skupini, tako da jih damo v 3 skupine po tri oziroma v 9 skupin z eno posodo. Druga možnost odpade, ker v nobeni skupini ne bo enaka količina soka. Skupna prostornina posod je $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45 \text{ l}$, zato je prostornina posod v vsaki skupini $45 : 3 = 15$ litrov. V prvo skupino damo najmanjšo posodo, tako ostane 14 litrov soka za preostali dve posodi. Edini dve možnosti sta: $1 + 6 + 8$ in $1 + 5 + 9$. V prvem primeru sta ostali skupini $2 + 4 + 9$ in $3 + 5 + 7$. V drugem primeru pa $2 + 6 + 7$ in $3 + 4 + 8$.

B2. Dolžina stranice srednjega kvadrata je enaka trikratniku dolžine stranice malega kvadrata. Zato je obseg srednjega kvadrata enak trikratniku obsega malega kvadrata. Podobno je obseg velikega kvadrata enak štirikratniku obsega malega kvadrata, saj je dolžina stranice velikega kvadrata enaka štirikratniku dolžine stranice malega kvadrata. Vsota obsegov malega, srednjega in velikega kvadrata je torej enaka osemkratniku obsega malega kvadrata. Ker je ta vsota enaka 80 cm, je obseg malega kvadrata enak 10 cm, dolžina njegove stranice pa 2,5 cm. Ena stranica osenčenega pravokotnika je enako dolga kot stranica velikega kvadrata, torej 10 cm. Dolžina druge stranice pravokotnika pa je enaka sedemkratniku dolžine stranice malega kvadrata, to je 17,5 cm. Obseg senčenega pravokotnika je $2 \cdot 10 + 2 \cdot 17,5 = 55 \text{ cm}$.

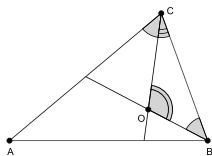
Rešitve za 7. razred

A1. Ploščina enega osenčenega štirikotnika je enaka $\frac{1}{4} \cdot (4^2 - 2 \cdot 1^2) = \frac{7}{2}$.

A2. Izračunajmo: $\frac{3}{3 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{3 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{\frac{10}{3}} = \frac{3}{10} = \frac{3}{10} = \frac{10 \cdot 3}{33} = \frac{10}{11}$.

A3. V prvem pravokotniku neosenčeni del predstavlja $\frac{3}{8}$ pravokotnika. Torej je osenčenih $\frac{5}{6} - \frac{3}{8} = \frac{11}{24}$ tretjega pravokotnika.

A4. Večje kot je število, manjša je njegova obratna vrednost. Torej je rešitev največje število med naštetimi. Vseh pet števil se ujema v prvih štirih decimalkah. Največje število je zato $0,201\overline{9}$, katerega peta decimalka je enaka 9 in je največja izmed petih decimalk naštetih števil.



A5.

Trikotnik ABC je enakokrak z osnovnico BC , torej sta kota β in γ skladna in sta velika $\frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$. Kot $\angle CBO$ je po velikosti enak kotu $\angle ACO$, zato velja $\angle CBO + \angle OCB = \angle ACO + \angle OCB = \gamma$. Velikost kota $\angle BOC = 180^\circ - \angle CBO - \angle OCB = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

A6. Cena čevljev je enaka $\frac{3}{2}$ cene hlač, zato hlače in čevlji skupaj stanejo $\frac{5}{2}$ cene hlač. Plašč stane $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{3}$ cene hlač oziroma hlače stanejo $\frac{3}{5} \cdot 120 = 72$ EUR.

A7. Zapišimo računski izraz za zaporedje ukazov in končno višino zmaya: $1,2 \cdot 1,2 \cdot 0,75 \cdot 1,2 \cdot 0,75 = \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{486}{500}$. Od tod sledi, da je bila začetna višina zmaya 500 m.

A8. Izjava B ni pravilna; desna stran enakosti v izjavi B ni večkratnik števila 5, leva pa je. Niti izjava C ni pravilna; leva stran enakosti je večkratnik števila 2, na desni strani enakosti pa je liho število. Prav tako ni pravilna izjava D; leva stran enakosti je večkratnik števila 9, vsota števk števila na desni strani enakosti pa je enaka 33 in ni deljiva z 9. Izjava A je pravilna, saj je na levi strani enakosti večkratnik števila 6, na desni pa sodo število, katerega vsota števk je enaka 33. Sodo število na desni strani enakosti je deljivo z 2 in s 3, torej je deljivo s 6 oziroma je večkratnik števila 6.

A9. Ko so izdelali 4 stole in 2 mizi, je bilo stolov dvakrat toliko kot miz. Ko so izdelali še 6 miz, so bili v skladišču 4 stoli in $2 + 6 = 8$ miz, torej je bilo miz dvakrat toliko kot stolov. Ko so izdelali vseh 12 miz in še 2 stola, je bilo v skladišču 12 miz in $4 + 2 = 6$ stolov, torej je bilo dvakrat toliko miz kot stolov. Ko so izdelali še 18 stolov, je bilo v skladišču 12 miz in $6 + 18 = 24$ stolov; tedaj je bilo stolov dvakrat toliko kot miz. Zapovrstjo zapišimo vse ugodne možnosti: 4 stoli in 2 mizi, 4 stoli in 8 miz, 6 stolov in 12 miz ter 24 stolov in 12 miz.

A10. Trimestno število, sestavljeno iz treh enakih neničelnih števk, zapišimo v obliki $\overline{aaa}$ oziroma $a \cdot 111$. Iz razcepa $111 = 3 \cdot 37$ uvidimo, da je 37 iskano praštevilo.

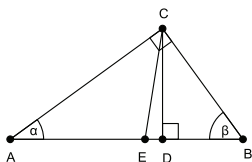
B1.

Rešitev 1.

Število prodanih kart je enako razmerju med višino izkupička in ceno karte. Izkupiček letošnje sezone je 1,05-krat tolikšen kot lani, cena karte pa je 1,68-krat tolikšna. Izračunajmo razmerje in ga zapišimo z %: $\frac{1,05}{1,68} = \frac{105}{168} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8} = \frac{625}{1000} = 0,625 = 62,5$

Rešitev 2.

V prejšnjem letu so prodali n vozovnic po ceni c , izkupiček je bil enak $n \cdot c$. Nova cena je za 68 % višja oziroma je enaka $1,68 \cdot c$. Izkupiček pa je enak $1,05 \cdot n \cdot c$. Število prodanih vstopnic je torej enako $1,05 \cdot n \cdot c : (1,68 \cdot c)$ oziroma $0,625 \cdot n$, kar je enako 62,5 % prodanih kart v preteklem letu. Število prodanih kart je upadlo za 37,5 %.



B2.

Za trikotnik CED velja: $\angle DEC + \angle ECD = \angle DEC + \frac{1}{9}\angle DEC = \frac{10}{9}\angle DEC = 90^\circ$. Od tod sledi, da je kot $\angle DEC$ velik 81° in $\angle CEA = 99^\circ$. Ker je daljica CE simetrala pravega kota, za velikost kota α velja: $\alpha + 99^\circ + 45^\circ = 180^\circ$ oziroma $\alpha = 36^\circ$. Iz enačbe: $\beta + \alpha = 90^\circ$ pa sledi, da je kot β velik 54° .

Opomba: Podobno dobimo, če vzamemo, da je kateta a daljša od katete b .

Rešitve za 8. razred

A1. Izračunajmo $\sqrt{\frac{49}{48}} - \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{7}{4\sqrt{3}} - \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{49-48}{7 \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{28 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{84}$.

A2. V številu 201^9 na mestu enic stoji 1. Število $9^{200} = (9^2)^{100} = 81^{100}$ ima na mestu enic 1, torej se število 9^{201} konča z 9. Zadnja številka vsote $201^9 + 9^{201}$ je 0.

A3. Označimo s φ največji notranji kot petkotnika. Seštejmo $\frac{3}{8}\varphi + \frac{9}{16}\varphi + \frac{11}{16}\varphi + \frac{3}{4}\varphi + \varphi = \frac{54}{16}\varphi$. Vsota velikosti notranjih kotov petkotnika je enaka 540° , torej je kot φ velik 160° .

A4. Večje kot je število, manjša je njegova nasprotna vrednost. Manjše kot je število, večja je njegova obratna vrednost. Čim večje je število, tem večja je obratna vrednost njegove nasprotnne vrednosti. Torej je rešitev največje število med naštetimi. Vseh pet števil se ujema v prvih štirih decimalkah. Največje število je zato 0,2019, katerega peta decimalka je enaka 9 in je največja izmed petih decimalk naštetih števil.

A5. Za ceno 49 kg jabolk lahko kupimo 70 kg grozdja in 7 kg breskev. Ker 7 kg breskev stane toliko 1 kg jabolk in 2 kg grozdja skupaj, bi za 49 kg jabolk plačali toliko kot za 72 kg grozdja in 1 kg jabolk. Torej 48 kg jabolk stane toliko kot 72 kg grozdja in za ceno 12 kg jabolk lahko dobimo $\frac{72}{4} = 18$ kg grozdja.

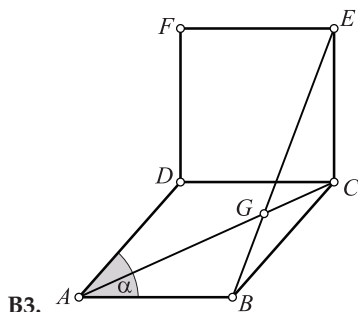
A6. Število diagonal v n -kotniku je enako $\frac{n(n-3)}{2}$, v večkotniku s $3n$ stranicami pa $\frac{3n(3n-3)}{2}$. Zapišemo enačbo $\frac{3n(3n-3)}{2} = 10 \cdot \frac{n(n-3)}{2}$ in jo preoblikujemo v $3(3n-3) = 10(n-3)$ oziroma $9n-9 = 10n-30$. Rešitev enačbe je $n = 21$, torej je Janja opazovala 63-kotnik.

A7. Višino gladine jezera pred sušo označimo z x . Iz besedila lahko zapišemo enačbo: $x \cdot 0,9 \cdot 1,15 = x + 35$. Izračunamo in dobimo enačbo $x \cdot 1,035 = x + 35$ oziroma $x \cdot 0,035 = 35$. Rešitev je $x = 1000 \text{ cm} = 10 \text{ m}$.

A8. Zapišimo število 12 kot zmnožek petih različnih celih števil $12 = 3 \cdot 4 = 1 \cdot 3 \cdot 4 = 1 \cdot 3 \cdot (-2) \cdot 2 \cdot (-1)$. Vsota množenčev iz zadnjega številskega izraza je enaka 3.

B1. Izračunajmo $\sqrt{\frac{2019 - (-2)^5 - 3 \cdot 2^0}{(-8)^2}} : \sqrt{2} + \frac{2019^2 - 81}{2^3} : (4^3 + 3) =$
 $= \sqrt{\frac{2019 - (-32) - 3 \cdot 1}{64}} : \sqrt{2} + \frac{(2019 - 9) \cdot (2019 + 9)}{8} : (64 + 3) =$
 $= \sqrt{\frac{2048}{64 \cdot 2} + \frac{2010 \cdot 2028}{8 \cdot 67}} =$
 $= \sqrt{\frac{128 \cdot 16}{128} + \frac{3 \cdot 670 \cdot 4 \cdot 507}{8 \cdot 67}} =$
 $= \sqrt{16 + \frac{3 \cdot 10 \cdot 507}{2}} =$
 $= 4 + 7605 = 7609$

B2. Označimo število kvadratov z x , torej je ostalih pravokotnikov $3x$. Vseh rombov je $8x$, število tistih, ki niso kvadrati, je potem $8x - x = 7x$. Podobno je število deltoidov, ki niso rombi, enako $12x - 8x = 4x$. Zapišimo enačbo za vse štirikotnike skupaj: $4x + 7x + 4x = 15x = 75$. Rešitve enačbe je $x = 75 : 15 = 5$ in kvadratov je v množici 5.



Označimo $\alpha = \angle BAD = \angle DCB$, torej je velikost kota $\angle ECB = 90^\circ + \alpha$. Trikotnik EBC je enakokrak s krakoma EC in BC , zato za velikosti kotov velja $\angle BEC = \angle CBE = \frac{180^\circ - (90^\circ + \alpha)}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Ker diagonala AC romba $ABCD$ razpolavlja notranji kot $\angle DCB$, je en notranji kot trikotnika EGC velik $\angle ECG = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Upoštevamo še $\angle BEC = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$, torej je velikost tretjega notranjega kota trikotnika enaka $\angle CGE = 180^\circ - (90^\circ + \frac{\alpha}{2}) - (45^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 45^\circ$. Kota $\angle CGE$ in $\angle AGB$ sta sovršna in zato je kot $\angle AGB$ velik 45° .

Rešitve za 9. razred

A1. Obseg zidu je enak $2\pi r$, zato je obseg vojaškega obroča $2\pi(r+3)$. Izenačimo $2\pi(r+3) = 16\pi$ in dobimo $2\pi r = 10\pi$. Pravilen je odgovor (D).

A2. Daljši višini pravokotnega trikotnika sta njegovi kateti, zato je dolžina hipotenuze enaka $c = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ cm. Izračunajmo ploščino trikotnika $S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ oziroma $S = \frac{c \cdot v}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot v}{2}$. Sledi $2v = 3$ in $v = \frac{3}{2}$ cm.

A3. Mediana ocen je vrednost na polovici urejenih podatkov, zato je enaka povprečju med 7 in 8, torej 7,5. Ker je oceno 10 doseglo 30 % študentov in je bila povprečna ocena enaka $0,2 \cdot 6 + 0,3 \cdot 7 + 0,15 \cdot 8 + 0,05 \cdot 9 + 0,3 \cdot 10 = 7,95$, je bila razlika med povprečno vrednostjo in mediano ocen enaka 0,45.

A4. Ulomek lahko zapišemo kot $\frac{8x}{2y} = \frac{2^{3x}}{2^y} = 2^{3x-y} = 2^{3(x-\frac{y}{3})} = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$.

A5. Naj bo S_1 ploščina štirikotnika $QRSP$ in S_2 ploščina štirikotnika $XYZW$. Zapišemo enakost $\frac{1}{3}S_1 = \frac{1}{4}S_2$ oziroma $\frac{1}{3}|PS| \cdot |PQ| = \frac{1}{4}|WX| \cdot |WZ|$. Iz podanega razmerja izrazimo $|PS| = 3 \cdot |WX|$, vstavimo v zadnjo enakost in dobimo $\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot |WX| \cdot |PQ| = \frac{1}{4}|WX| \cdot |WZ|$. Od tod sledi $\frac{|PQ|}{|WZ|} = \frac{1}{4}$ in iskano razmerje je 1 : 4.

A6. V 6 sekundah mravlja pridobi 54 cm glede na hroščka, torej v 1 sekundi pridobi 9 cm in v 10 sekundah 90 cm. Hrošček ima do cilja še $90 - 30 = 60$ cm.

A7. Iz ocene $2 < \sqrt{7} < 3$ sledi $\sqrt{7} + 1 < 4$ in $-4 < \sqrt{7} - 6 < -3$. Neenačbo rešijo števila $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ in 6. Pravičen je odgovor **(E)**.

A8. Praštevilski delitelji števila 30 so 2, 3 in 5. Verjetnost je enaka $\frac{3}{18} = \frac{1}{6}$.

B1. Preoblikujmo levo stran enačbe: $(2x+3)^2 - (2x-a)(2x+a) = 4x^2 + 12x + 9 - (4x^2 - a^2) = 12x + a^2 + 9$ in še desno stran: $2a(2x+a) = 4ax + 2a^2$. Dobimo enačbo

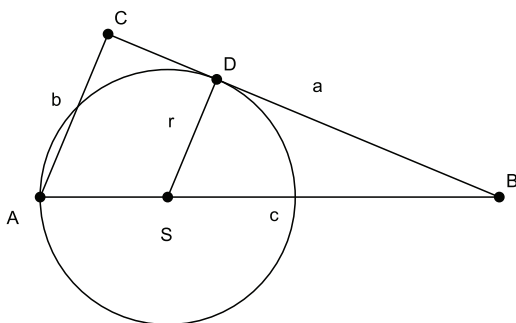
$$12x + a^2 + 9 = 4ax + 2a^2$$

$$12x - 4ax = a^2 - 9$$

$$4x(3-a) = (a-3)(a+3).$$

Rešitev enačbe je $x = \frac{-(a+3)}{4}$, če je $a \neq 3$.

Za $a = 3$ dobimo $4x \cdot 0 = 0 \cdot 6$ oziroma $0 = 0$, torej je v tem primeru rešitev poljubno realno število.



B2.

Iz razmerja katet zapišemo $a = 12t$ in $b = 5t$. Zapišemo Pitagorov izrek $c^2 = a^2 + b^2 = (12t)^2 + (5t)^2 = 144t^2 + 25t^2 = 169t^2$ in dobimo, da je hipotenuza dolga $c = 13t$. Iz podobnosti trikotnikov sledi: $c : b = (13t - r) : r$ oziroma $13 : 5 = (13t - r) : r$. Enačbo preoblikujemo v $13r = 65t - 5r$, torej je $r = \frac{65}{18}t$ in zato $r : b = 13 : 18$.

B3. Označimo z e Evino starost pred štirimi leti in z b Blažovo takratno starost. Ker je bila Eva za 20 % mlajša od Blaža, je za njuni starosti veljala enakost: $e = b \cdot 0,8$. Čez štiri leta bosta stara $e+8$ in $b+8$ let. Ker bo Blaž za 15 % starejši od Eve, bo star $(e+8) \cdot 1,15$ oziroma $(b \cdot 0,8 + 8) \cdot 1,15$. Dobimo enačbo $(b \cdot 0,8 + 8) \cdot 1,15 = b + 8$ z rešitvijo $b = 15$. Eva je letos stara 16 let in Blaž 19 let.

Rešitve tekmovanja v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike – šolsko tekmovanje

Rešitve 1. skupine: Poslovna matematika

1a. naloga

20 dni	350 koles	15 delavcev	8 ur
↑	↑	↓	↓
x dni	399 koles	20 delavcev	7,5 ur

$$x = \frac{20 \cdot 399 \cdot 15 \cdot 8}{350 \cdot 20 \cdot 7,5} = \underline{\underline{18,24 \text{ dneva}}}$$

Odgovor: Cilj bi dosegli v 18,24 dneva.

1b. naloga

20 dni	350 koles	15 delavcev	8 ur
↓	↑	↓	↑
22 dni	399 koles	15 delavcev	x ur

$$x = \frac{8 \cdot 20 \cdot 399}{22 \cdot 350} = \underline{\underline{8,29090909 \text{ ure}}}$$

Izračun: $8,2909090909 = \underline{\underline{8 \text{ ur } 17 \text{ minut}}}$

Odgovor: Delavci bi morali delati 8 ur 17 minut.

2. naloga

Izračun $\frac{1}{5}$ in preostanka

$$m_1 = \frac{1}{5} \text{ od } 150.000,00 = \underline{\underline{30.000,00 \text{ EUR}}}$$

$$m_2 (\text{preostanek}) = 150.000,00 - 30.000,00 = \underline{\underline{120.000,00 \text{ EUR}}}$$

Rešitev k tč. a) $m_1 = 30.000,00 \text{ EUR}$

$$A : B : C : D = 10.000 x + 30.300 x + 16.500 x + 18.200 x$$

$$75.000 x = 30.000,00$$

$$\underline{\underline{x = 0,4}}$$

$$\begin{aligned}
 A &= 10.000 \cdot 0,4 = \underline{\underline{4.000,00 \text{ EUR}}} \\
 B &= 30.300 \cdot 0,4 = \underline{\underline{12.120,00 \text{ EUR}}} \\
 C &= 16.500 \cdot 0,4 = \underline{\underline{6.600,00 \text{ EUR}}} \\
 D &= 18.200 \cdot 0,4 = \underline{\underline{7.280,00 \text{ EUR}}}
 \end{aligned}$$

Rešitev k tč. b) $m_2 = 120.000,00 \text{ EUR}$

$$\begin{aligned}
 A &= 4x &= \underline{\underline{12.521,74}} \\
 B &= 4x + \left(\frac{1}{3} \cdot 4x\right) = \frac{12x + 4x}{3} = \frac{16x}{3} &= \underline{\underline{16.695,65}} \\
 C &= x &= \underline{\underline{3.130,43}} \\
 D &= 3 \cdot \left(4x + \frac{16}{3}x\right) = 3 \cdot \frac{28}{3}x = 28x &= \underline{\underline{87.652,17}}
 \end{aligned}$$

$$A + B + C + D = 120.000,00$$

$$33x + \frac{16}{3}x = 120.000,00 \quad (*3)$$

$$99x + 16x = 360.000,00$$

$$\underline{\underline{x = 3.130,434783}}$$

Odgovor: Koliko sredstev je pridobil vsak turistični kraj?

$$A = 4.000,00 + 12.521,74 = \underline{\underline{16.521,74 \text{ EUR}}}$$

$$B = 12.120,00 + 16.695,65 = \underline{\underline{28.815,65 \text{ EUR}}}$$

$$C = 6.600,00 + 3.130,43 = \underline{\underline{9.730,43 \text{ EUR}}}$$

$$D = 7.280,00 + 87.652,17 = \underline{\underline{94.932,17 \text{ EUR}}}$$

3a. naloga

$$\text{Sorta gala} = 20 \% \text{ od } 3000 = 600 \text{ jablan; } \text{pridelek} = 600 \cdot 12 = \underline{\underline{7.200 \text{ kg jabolk gala}}}$$

$$\text{Sorta jonagold} = 25 \% \text{ od } 3000 = 750 \text{ jablan; } \text{pridelek} = 750 \cdot 9 = \underline{\underline{6.750 \text{ kg jabolk jonagold}}}$$

$$\text{Sorta idared} = 55 \% \text{ od } 3000 = 1650 \text{ jablan; } \text{pridelek} = 1650 \cdot 14 = \underline{\underline{23.100 \text{ kg idared}}}$$

3b. naloga

$$\text{Sorta gala} = 600 \cdot 0,75 = 450 \text{ jablan}$$

$$\text{Sorta jonagold} = 750 \cdot 0,40 = 300 \text{ jablan}$$

$$\text{Sorta idared} = 1650 \cdot 0,30 = 495 \text{ jablan}$$

Pridelek:

$$\text{Gala: } 150 \cdot 12 = \underline{\underline{1800 \text{ kg}}}$$

$$450 \cdot 8 = \underline{\underline{3600 \text{ kg}}}$$

$$\text{jonagold: } 450 \cdot 9 = \underline{\underline{4050 \text{ kg}}}$$

$$300 \cdot 6 = \underline{\underline{1800 \text{ kg}}}$$

$$\text{idared: } 495 \cdot 12 = \underline{\underline{5940 \text{ kg}}}$$

$$1155 \cdot 14 = \underline{\underline{16170 \text{ kg}}}$$

$$\text{Količina pridelanih jabolk po pozebi} = 5400 \text{ kg} + 5850 \text{ kg} + 22110 \text{ kg} = \underline{\underline{33360 \text{ kg}}}$$

$$\text{Razlika med obema pridelkoma} = 37050 \text{ kg} - 33360 \text{ kg} = \underline{\underline{3690 \text{ kg}}} \text{ (absolutno)}$$

$$\text{v odstotkih} = 3690/37050 \cdot 100 = \underline{\underline{9,96 \%}} \text{ (relativno)}$$

4a. naloga

Takojšnje plačilo: 30 % od 1.457,25 EUR = 437,18 EUR

Ostanek dolga = 1.457,25 – 437,18 = **1.020,07 EUR**

$G = 1.020,07 \text{ EUR}$

$p = 4,5 \%$

$m = 3 \text{ meseci}$

$G^+ = x \text{ EUR}$

$$o = \frac{G \times p \times m}{1200} = \frac{1.020,07 \times 3 \times 4,5}{1200} = \mathbf{11,48 \text{ EUR}}$$

$$G^+ = G + o = 1.020,07 + 11,48 = \mathbf{1.031,55 \text{ EUR}}$$

4b. naloga

$G^+ = 452,55 \text{ EUR}$

$p = 7,2 \%$

$m = 6 \text{ mesecev}$

$G = x \text{ EUR}$

$$G^+ = G + \frac{G \times p \times m}{1200}$$

$$G = \frac{G+o}{1+\frac{p \times m}{1200}} = \frac{452,55}{1+\frac{7,2 \times 6}{1200}} = \mathbf{436,82 \text{ EUR}}$$

$$\text{ali } G = \frac{(G+o) \times 1200}{1200 + (p \times m)}$$

Odg.: Metino kolo v trgovini stane **873,64 EUR**. Izračun: $(436,82 \times 2)$.

Rešitve 2. skupine: Statistika

1a. naloga

Tabela 1: Odseljeni iz Slovenije v letu 2017 po spolu in starostnih skupinah

Spol	Starost v letih				Skupaj
	20–24	25–29	30–34	35–39	
Moški	869	1420	1538	1297	5124
Ženske	799	1246	988	712	3745
Skupaj	1668	2666	2526	2009	8869

Vir: <https://pxweb.stat.si/pxweb/Dialog/SaveShow.asp>

1b. naloga

Tabela 2: Struktura odseljenih iz Slovenije po starostnih skupinah v letu 2017 (v odstotkih)

Spol	Starost v letih				Skupaj
	20–24	25–29	30–34	35–39	
Moški	16,69	27,71	30,02	25,31	100,00
Ženske	21,34	33,27	26,38	19,01	100,00
Skupaj	18,81	30,06*	28,48	22,65	100,00

1c. naloga

Tabela 3: **Struktura odseljenih iz Slovenije po spolu v letu 2017** (v odstotkih)

Spol	Starost v letih				Skupaj
	20–24	25–29	30–34	35–39	
Moški	52,10	53,26	60,89*	64,56	57,77
Ženske	47,90	46,74	39,11	35,44	42,23
Skupaj	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

1d. naloga

1. Komentar: **30,06 odstotka odseljenih iz Slovenije v letu 2017 je bilo starih od 25 do 29 let.**
2. Komentar: **Med odseljenimi iz Slovenije v letu 2017 v starostni skupini od 30 do 34 let je bilo 60,89 odstotka moških.**

2a. naloga

Tabela 4: **Število prebivalstva po spolu, število zasebnih gospodinjstev in gostota prebivalstva ob popisih v letih od 1981 do 2018**

Leto	Prebivalci - SKUPAJ	Moški	Ženske	Gostota prebivalstva na km ²	Zasebna gospodinjstva
1981	1891864	918766	973098	93,3	594571
1991	1913355	923643	989712	94,4	632278
2002	1964036	958576	1005460	96,9	684847
2011	2050189	1014563	1035626	101,1	813531
2015	2062874	1022229	1040645	101,8	820541
2018	2066880	1027041	1039839	102,0	824618

Vir: SURS

2b. in c. naloga

Tabela 5: **Izbrani kazalci ob popisih v letih od 1981 do 2018**

Leto	Število žensk na 1000 moških	Površina v km ²	Št. članov na gospod.
1981	1059,14	20227,21	3,18
1991	1071,53	20268,59	3,03
2002	1048,91	20268,69	2,87
2011	1020,76	20278,82	2,52
2015	1018,02	20263,99	2,51
2018	1012,46	20263,53	2,51

$$\text{Površina} = \frac{\text{Število prebivalcev}}{\text{Gostota prebivalstva}}$$

3a. naloga

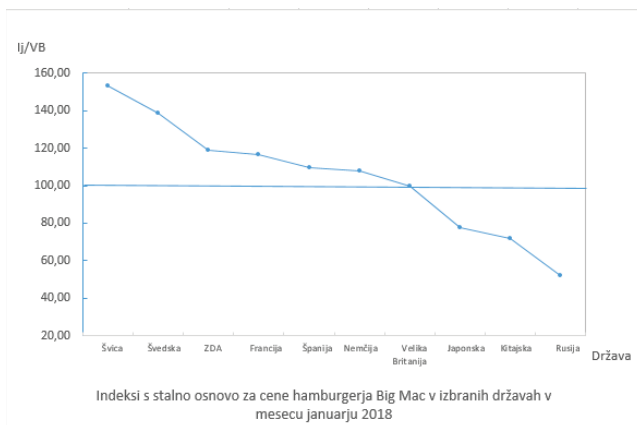
Tabela 6: **Indeksi za cene hamburgerja po državah v mesecu januarju 2018**

Država	I _{jv8}	D _j %
 Švica	153,29	+53,29
 Švedska	138,78	
 ZDA	119,05	
 Francija	116,55	
 Španija	109,75	
 Nemčija	108,16	
 Velika Britanija	100,00	
 Japonska	77,78	
 Kitajska	71,88	
 Rusija	51,93	-48,07

3b. naloga

V Švici je bila cena hamburgerja višja za 53,29 odstotka, v Rusiji pa za 48,07 odstotka nižja v primerjavi s ceno hamburgerja v Veliki Britaniji.

3c. naloga



3d. naloga

Št. hamburgerjev_{Švica} = 1077,73/6,76 = 159 hamburgerjev

Št. hamburgerjev_{VB} = 1077,73/4,41 = 244 hamburgerjev

4a. naloga

Stat. populacija: delavci v podjetju Lampionček, d.o.o.

Stat. enota: delavec

Stat. sprem.: produktivnost dela

4b. naloga

Tabela 7: Delavci po produktivnosti (izraženi v številu izdelkov) v podjetju Lampionček, d. o. o.

Število izdelkov	Zaposleni f_j	b)	c)	d)
20 - 24	2	0,018	2	0,018
25 - 29	10	0,091	12	0,109
30 - 34	22	0,200	34	0,309
35 - 39	42	0,382	76	0,691
40 - 44	24	0,218	100	0,909
45 - 49	10	0,091	110	1,000
Skupaj	110	1,000		

Razlaga kazalca: **20** odstotkov zaposlenih je izdelalo od 30 do 34 izdelkov.

4c. naloga

Razlaga kazalca: **100** zaposlenih je izdelalo do 44 izdelkov.

4d. naloga

Razlaga kazalca: **69,1** odstotka zaposlenih je izdelalo do 39 izdelkov.