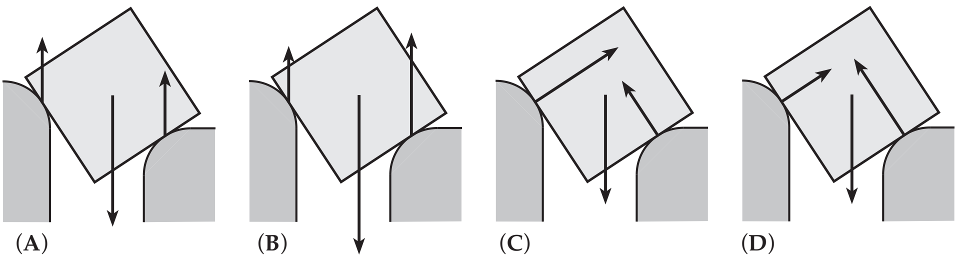
Tekmovanja

Tekmovanje iz fizike za zlato Stefanovo priznanje – državno tekmovanje

Naloge za 8. razred

A1 Kocka miruje, kot kažejo slike. Trenja ni. Katera slika pravilno kaže sile, ki delujejo na kocko?



(**A**) (**B**) (**C**) (**D**)

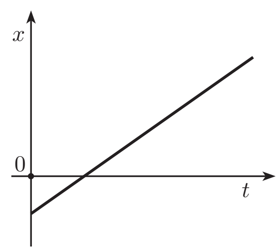
A2 *Galone* in *pinti* so anglosaške prostorninske enote. Ameriška galona meri $3{,}785$ litra, imperialna galona (v rabi v Veliki Britaniji) pa $4{,}5461$ litra. Sodček piva vsebuje v Združenih državah Amerike 31 galon, v Veliki Britaniji pa 36 galon. V obeh državah meri *pint* osmino galone. Miles naroči 2 soda ameriškega piva, ki ga toči v angleške kozarce za 1 pint. Koliko kozarcev napolni, preden izprazni oba soda?

(**A**) 413 (**B**) 479 (**C**) 496 (**D**) 576

A3 Lega avta se s časom spreminja, kot kaže graf. Isto gibanje opiše tudi enačba

$$x = v \cdot t + x_0 \,.$$

Kakšna sta parametra v in x_0?



(**A**) $v > 0$ in $x_0 > 0$. (**B**) $v > 0$ in $x_0 < 0$.

(**C**) $v < 0$ in $x_0 > 0$. (**D**) $v < 0$ in $x_0 < 0$.

A4 V razpredelnici so podatki o masah m štirih kock in dolžinah njihovih robov a. Kocke stojijo na vodoravni podlagi. Pod katero kocko je največji tlak?

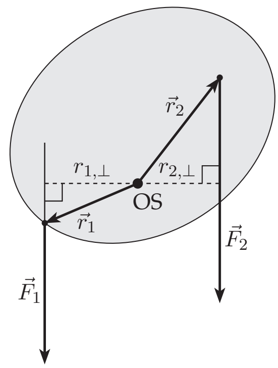
	(**A**)	(**B**)	(**C**)	(**D**)
m	20 mg	100 mg	14 g	130 kg
a	1 mm	10 mm	1 cm	1 m

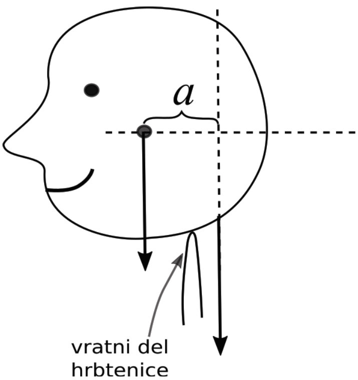
A5 V Ljubljani je najdaljši svetli del dneva junija 10 ur daljši od najkrajšega svetlega dela dneva decembra. Koliko ur traja najkrajši nočni del dneva v Ljubljani?

(**A**) 7 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 14

B1 Pri nalogi boš izračunal silo, s katero glava pritiska na prvo vratno vretence v hrbtenici, in tlak na medvretenčno ploščico med prvim in drugim vratnim vretencem. Upoštevati boš moral dodatni pogoj za ravnovesje, opisan tu:

Sivo telo na sliki je vpeto v osi (pravokotni na ta list), okoli katere se lahko vrti (v ravnini tega lista). Na telo delujeta sili $\vec{F}_1$ in $\vec{F}_2$, ki prijemljeta v točkah, do katerih iz osi kažeta ***ročici*** *$\vec{r}_1$ in $\vec{r}_2$. Telo miruje (se ne vrti okoli osi), če velja $F_1 \cdot r_{1,\perp} = F_2 \cdot r_{2,\perp}$.*





Slika prikazuje Jurijevo glavo v normalni legi. Lobanja sedi na prvem (zgornjem) vratnem vretencu vratne hrbtenice, kjer je os. Masa glave je 5 kg, težišče je pomaknjeno naprej (ni točno nad osjo). Mišice zadnjega dela vratu so pripete na lobanjo in vlečejo lobanjo navzdol. Stalna razdalja $a = 7$ cm (pri pokončni legi glave, glej sliko). Na sliki sta shematično (ne v merilu) prikazani dve sili na lobanjo.

(a) Na sliki glave označi os ter prikaza teže glave $\vec{F}_g$ in sile mišic zadnjega dela vratu $\vec{F}_m$. Označi ročici $\vec{r}_g$ in $\vec{r}_m$.

(b) V normalni legi glave, ki miruje, je $r_{g,\perp} = 3$ cm. S kolikšno silo vlečejo v tej legi lobanjo mišice zadnjega dela vratu?

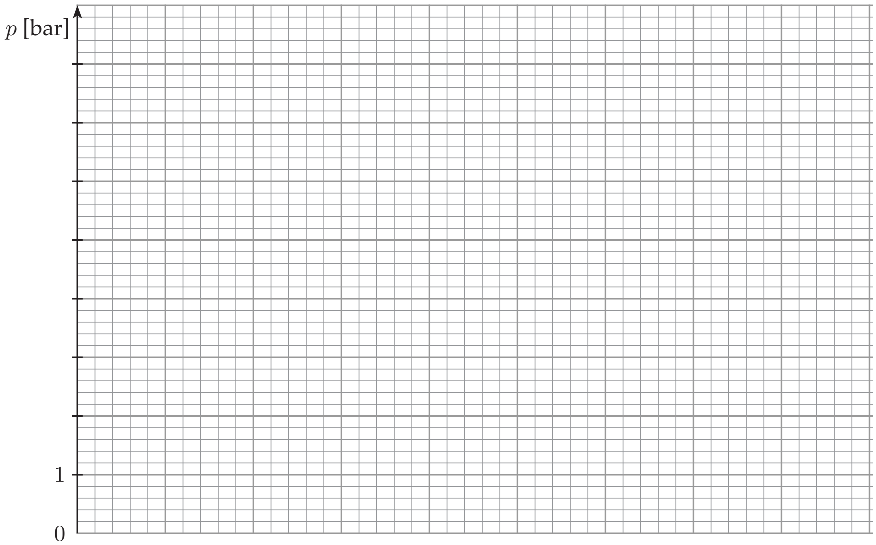
(c) Kolikšna je v normalni legi glave sila lobanje na prvo vratno vretence?

(d) Med prvim in drugim vretencem je prva medvretenčna ploščica s presekom 2,7 cm^2. Kolikšen je tlak na ploščico pri normalni legi glave? Izrazi ga v enoti bar. Zanemari maso prvega vretenca. Zračnega tlaka ne upoštevaj.

(e) Jurij potisne glavo naprej tako, da se ročica $r_{g,\perp}$ poveča na 5 cm. Kolikšna je zdaj sila glave na prvo vretence in kolikšen je tlak na prvo medvretenčno ploščico?

(f) Pri kateri legi glave (kolikšen je $r_{g,\perp}$) sta sila glave na prvo vratno vretence in tlak na prvo medvretenčno ploščico najmanjša in kolikšna sta?

(g) Nariši graf, ki kaže, kako je tlak na prvo medvretenčno ploščico odvisen od $r_{g,\perp}$ v območju možnih vrednosti ročice $r_{g,\perp}$, pri čemer ostaja zadnje vretence med prijemališčema teže in sile mišic zadnjega dela vratu in predpostaviš, da vlečejo vratne mišice lobanjo navzdol, da se torej smer sile vratnih mišic ne spremeni.

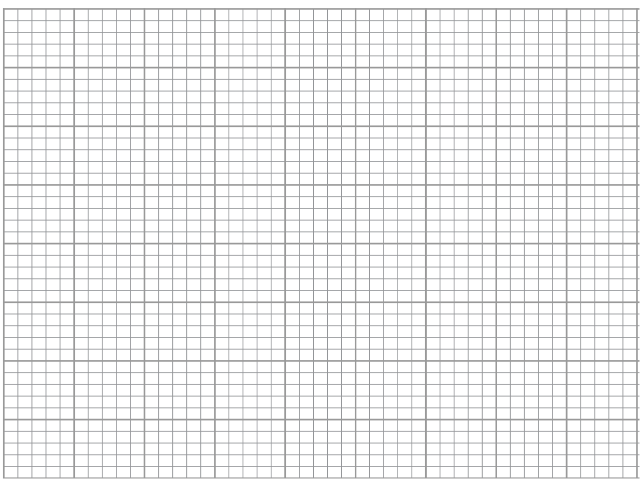


B2 Tri vozila se gibljejo v isti smeri. Tovornjak se giblje s stalno hitrostjo $45\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, avtobus s stalno hitrostjo $75\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ in avto s hitrostjo $135\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. V trenutku $t = 0$ je avtobus 10 km za tovornjakom, avto pa 11 km za avtobusom.

(a) Ob katerem trenutku t_1 avtobus dohiti tovornjak? Čas t_1 izrazi v minutah.

(b) Kolikšne poti so do trenutka t_1 opravili tovornjak, avtobus in avto?

(c) V koordinatni sistem nariši dva grafa, ki kažeta, kako se s časom spreminjata legi tovornjaka in avtobusa od $t = 0$ do trenutka $2 \cdot t_1$. V koordinatnem sistemu označi tudi lego avta ob $t = 0$. Grafa jasno označi.



(d) V istem trenutku t_1 avto pripelje na črpalko. Koliko sta od črpalke tedaj oddaljena tovornjak in avtobus?

(e) Avto s črpalke odpelje v trenutku t_2, ko mimo nje vozi tovornjak. Avto nadaljuje pot s tako hitrostjo, kot jo je imel pred prihodom na črpalko. V katerem trenutku t_3 avto dohiti avtobus?

(f) V koordinatni sistem pri (c) nariši še graf, ki kaže, kako se s časom spreminja lega avta od $t = 0$ do trenutka t_3, ko avto drugič dohiti avtobus. Graf jasno označi.

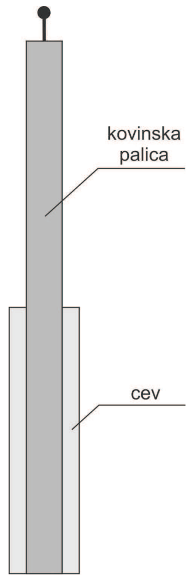
(g) Koliko je ob t_3 od avta oddaljen tovornjak?

C – eksperimentalna naloga: POTOPLJENO TELO

S potapljanjem telesa v vodo razišči njegove dimenzije, gostoto posameznega dela telesa in določi spreminjanje vzgona v odvisnosti od potopljenega dela telesa.

Pripomočki
– sestavljeno telo iz kovinske palice in cevi
– merilni valj
– silomer
– vrvica
– voda
– merilo (lastni geotrikotnik ali merilo na papirju)

Upoštevaj, da pri eksperimentalnih nalogah ocenjujemo tudi natančnost izvedbe poskusa in meritev. **Pri tem poskusu je zelo pomembno, da meritve izvedeš natančno.**



Telo je sestavljeno iz kovinske palice in cevi, ki obdaja spodnji del palice.

(a) S silomerom izmeri težo celotnega telesa in določi njegovo maso.

Teža celotnega telesa $F_g =$ _______________ N

Masa celotnega telesa $m =$ _______________ g

(b) S potapljanjem telesa v vodo izmeri prostornino celotnega telesa in določi prostornini obeh delov sestavljenega telesa.

(i) Prostornina celotnega telesa $V =$ _______________ ml

(ii) Določi prostornino kovinske palice. Pri tem si pomagaj z izmerjeno prostornino dela kovinske palice, ki ni obdana s cevjo.

Prostornina kovinske palice $V_p =$ ______________ ml

(iii) Izračunaj prostornino stene cevi.

Prostornina cevi $V_c =$ ______________ ml

(c) Izračunaj povprečno gostoto telesa in gostoto cevi, ki obdaja kovinsko palico. Gostota kovinske palice je $\rho_p = 2700\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

(i) Povprečna gostota telesa $\rho =$ ______________ $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

(ii) Pri izračunu gostote cevi si pomagaj z enačbo: $m = \rho_p V_p + \rho_c V_c$, pri čemer je m masa celotnega telesa, ρ_p gostota palice, ρ_c gostota cevi, V_p prostornina palice in V_c prostornina stene cevi.

(d) Določi razmerje površin prečnih prerezov zgornjega dela (S_1) in spodnjega dela (S_2) telesa. (namig: Pomagaj si z merjenjem prostornin zgornjega in spodnjega dela telesa. Pri tem upoštevaj, da je prostornina dela telesa z enakim presekom enaka produktu dolžine h in površine prečnega prereza S dela telesa: $V = S \cdot h$.)

Razmerje površin $\frac{S_2}{S_1} =$ ______________

(e) Razišči, kako se spreminja sila F, s katero moraš držati telo, da miruje v različnih položajih in kako se pri tem spreminja sila vzgona F_{vzg}.

(i) Za različne položaje telesa izmeri silo F in izračunaj silo vzgona F_{vzg}. Vrednosti zapiši v tabelo. Pri tem je h_p višina potopljenega dela telesa pod vodno gladino.

Položaj telesa	h_p [mm]	F [N]	F_{vzg} [N]
1. Celotno telo je nad vodno gladino.			
2. V celoti je potopljen le spodnji del telesa.			
3. Potopljeno je celotno telo.			

(ii) Vrednosti iz tabele vnesi v graf, ki prikazuje velikost sile F v odvisnosti od višine potopljenega dela telesa h_p (točke v grafu označi s krogci). V isti graf vriši vrednosti iz tabele, ki prikazujejo silo vzgona F_{vzg} v odvisnosti od višine potopljenega dela telesa h_p (točke v grafu označi s križci).

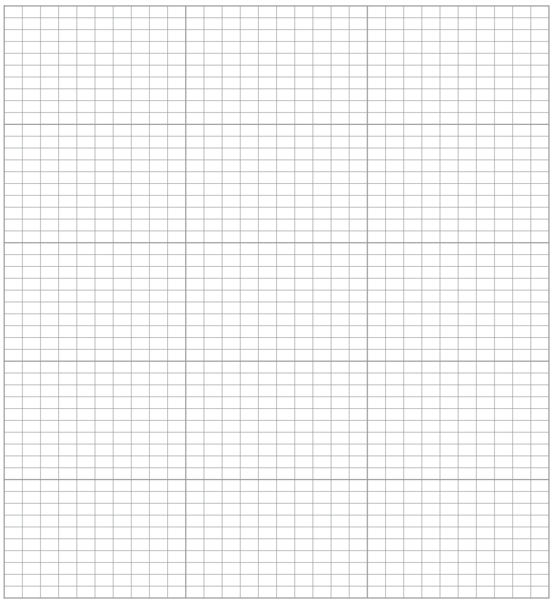
(iii) S polno črto v graf nariši potek spreminjanja sile vzgona F_{vzg} v odvisnosti od potopljenega dela telesa h. Pri tem upoštevaj, da je pri konstantnem prerezu telesa prostornina potopljenega dela telesa premo sorazmerna z višino potopljenega dela telesa.

(iv) S črtkano črto v graf nariši spreminjanje sile F v odvisnosti od h.

(v) V graf doriši potek spreminjanja sile vzgona med potapljanjem telesa, če bi bila celotna kovinska palica obdana s cevjo. Graf ustrezno označi.

(vi) Kolikšno silo bi pokazal silomer, če bi predmet v celoti potopili, pri tem pa bi bila kovinska palica v celoti obdana s cevjo (spodnja in zgornja ploskev kovinske palice nista obdani s cevjo).

$F =$ _______________ N



Naloge za 9. razred

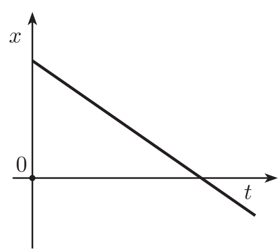
A1 Lega avta se s časom spreminja, kot kaže graf. Takšno gibanje opiše enačba

$$x = v \cdot t + x_0 \, .$$

Kakšna sta parametra v in x_0?

(A) $v > 0$ in $x_0 > 0$. **(B)** $v > 0$ in $x_0 < 0$.

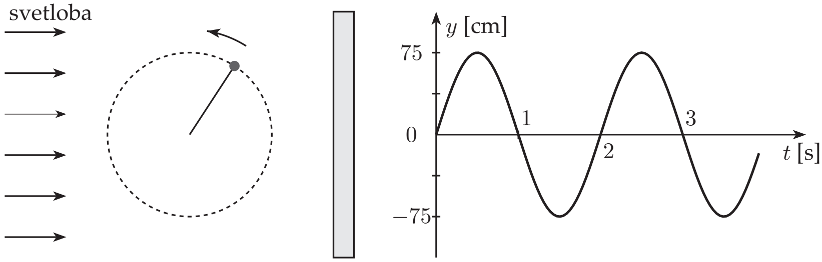
(C) $v < 0$ in $x_0 > 0$. **(D)** $v < 0$ in $x_0 < 0$.



A2 V Ljubljani je najdaljši svetli del dneva junija 10 ur daljši od najkrajšega svetlega dela dneva decembra. Koliko ur traja najkrajši nočni del dneva v Ljubljani?

(**A**) 7 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 14

A3 Na vrtiljaku, ki se enakomerno vrti, sedi Jurček. Vrtiljak od strani osvetljujejo reflektorji. Na steni, ki je na drugi strani vrtiljaka nasproti reflektorja, opazujemo Jurčkovo senco. Slika kaže tloris vrtiljaka, označena je smer vrtenja vrtiljaka in smer, iz katere prihaja svetloba. Graf kaže, kako se odmik y Jurčkove sence od $y = 0$ spreminja s časom. S kolikšno hitrostjo se giblje Jurček?

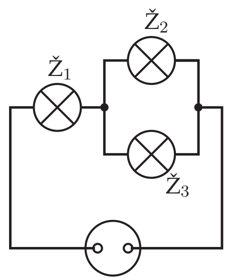


(**A**) $0{,}75\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (**B**) $1{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (**C**) $1{,}18\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (**D**) $2{,}36\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

A4 *Galone* in *pinti* so anglosaške prostorninske enote. Ameriška galona meri $3{,}785$ litra, imperialna galona (v rabi v Veliki Britaniji) pa $4{,}5461$ litra. Sodček piva vsebuje v Združenih državah Amerike 31 galon, v Veliki Britaniji pa 36 galon. V obeh državah meri *pint* osmino galone. Miles naroči 2 soda ameriškega piva, ki ga toči v angleške kozarce za 1 pint. Koliko kozarcev napolni, preden je sod prazen?

(**A**) 413 (**B**) 479 (**C**) 496 (**D**) 576

A5 Na vir napetosti so najprej vezane samo žarnice $\check{Z}_1$, $\check{Z}_2$ in $\check{Z}_3$, kot kaže slika. Potem v vezje vežemo še četrto žarnico. Katera izjava je pravilna?



(**A**) Po vezavi žarnice $\check{Z}_4$ se skupni tok skozi vir zagotovo poveča.
(**B**) Po vezavi žarnice $\check{Z}_4$ se skupni tok skozi vir zagotovo zmanjša.
(**C**) Po vezavi žarnice $\check{Z}_4$ se skupni tok skozi vir ne spremeni.
(**D**) Po vezavi žarnice $\check{Z}_4$ se skupni tok skozi vir bodisi zmanjša bodisi poveča.

B1 Imaš te pripomočke: vir stalne napetosti, žice in 3 porabnike. Predpostavi, da za vse 3 porabnike velja, da je napetost na posameznem porabniku U_i premosorazmerna toku I_i, ki teče skozi porabnik, $U_i = R_i \cdot I_i$, kjer je R_i konstanten *upor* porabnika. Dva porabnika sta enaka ($R = R_1 = R_2 = 100\,\Omega = 100\ \frac{\text{V}}{\text{A}}$), tretji ($R_3$) je različen: ko je na R_3 enaka napetost kot na porabniku R_1, teče skozi R_1 dvakrat tolikšen tok kot skozi porabnik R_3.

(a) Kolikšen je R_3?

(b) Nariši sheme vseh možnih različnih vezav vseh 3 porabnikov, pri čemer skozi vse 3 porabnike teče tok, in sheme razločno označi s črkami A, B ... Porabnike označi z R in R_3.

(c) Pri kateri vezavi vseh 3 porabnikov teče skozi vir največji in pri kateri najmanjši tok?

(d) Ko je na vir napetosti priključen samo porabnik R_1, teče skozenj tok 180 mA. Kolikšna je napetost vira in kolikšna sta največji in najmanjši tok iz prejšnjega vprašanja?

(e) Izračunaj, kolikšni so tokovi skozi vir v vseh možnih preostalih vezavah 3 porabnikov.

B2 Sateliti in vesoljske postaje se gibljejo po (skoraj) krožnicah okoli Zemlje s hitrostmi, ki se po velikostih ne spreminjajo. Središča krožnic - tirnic - so v središču Zemlje. Obseg krožnice o izračunaj z obrazcem $o = 2 \cdot \pi \cdot r = 6{,}28 \cdot r$, kjer je r polmer krožnice. Ko povežemo gravitacijski in 2. Newtonov zakon, dobimo zvezo med r in hitrostjo satelita v

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}\,, \quad \text{kjer je } m \text{ masa satelita,}$$

masa Zemlje je $M = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg, polmer Zemlje je $R = 6371$ km in gravitacijska konstanta je $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}$.

(a) Mednarodna vesoljska postaja (ISS) kroži 405 km nad Zemljinim površjem. Kolikšno pot opravi pri enem obhodu?

(b) S kolikšno hitrostjo se giblje ISS?

(c) Kolikokrat v enem dnevu obkroži ISS Zemljo?

(d) Tirnice *geostacionarnih* satelitov ležijo v ekvatorski ravnini (presek ekvatorske ravnine in Zemlje je ekvator). Geostacionarni sateliti se gibljejo s takimi hitrostmi, da so stalno v zenitu nad isto točko nad Zemljo. Kolikšen je obhodni čas geostacionarnega satelita?

(e) Kolikšen je polmer tirnice geostacionarnega satelita?

(f) Prepostavi, da nad ekvatorjem v taki oddaljenosti, kot je ISS, obkroža Zemljo satelit DMFA. Giblje se v nasprotni smeri, kot se okoli svoje osi vrti Zemlja. V nekem trenutku je DMFA v zenitu nad točko na Viktorijinem jezeru v Afriki, kjer meja med Ugando in Kenijo seka ekvator. Čez koliko časa bo DMFA prvič ponovno v zenitu nad isto točko?

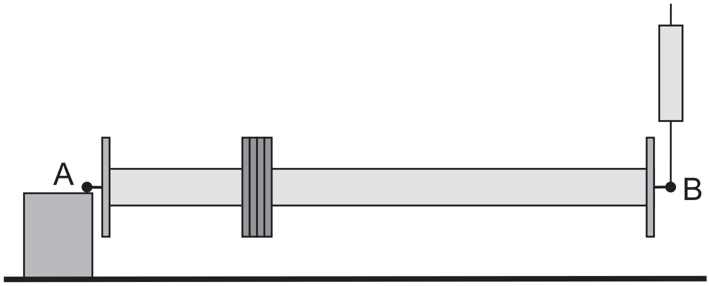
C – eksperimentalna naloga: SESTAVLJENO TELO IN PREMIKAJOČI OBROČKI

Razišči, kako se spreminjata sili v prijemališčih palice A in B pri premikanju obročev vzdolž palice in kolikšna je masa posameznega dela sestavljenega telesa.

Pripomočki
– sestavljeno telo iz plastične palice in šest kovinskih obročev
– podstavek
– silomer
– merilo

Upoštevaj, da pri eksperimentalnih nalogah ocenjujemo tudi natančnost izvedbe poskusa in meritev. **Pri tem poskusu je zelo pomembno, da meritve izvedeš natančno.**

Telo sestavlja plastična palica in šest kovinskih obročev. Dva obroča sta pritrjena na konca palice, štirje obroči pa so premični vzdolž palice. Palica je v vodoravni legi in podprta v točki A, v točki B pa visi na silomeru.



(a) S silomerom izmeri težo celotnega telesa in določi njegovo maso.

Teža telesa: _______________ N Masa telesa: _______________ kg

(b) Telo postavi na podstavek, kot kaže slika. V prijemališču B drži telo s silomerom tako, da bo mirovalo v vodoravnem položaju. Silomera ne smeš premakniti v točko A.

(i) Določi silo F_A v primeru, ko so obroči postavljeni tako, da velja $F_A = F_B$.

$F_A =$ _______________ N

(ii) Premikajoče obroče postavi tako, da bo sila F_A, s katero podstavek deluje na telo v prijemališču A, največja. Kolikšna je sila F_A v tem primeru?

$F_A =$ _______________ N

(iii) Premikajoče obroče postavi tako, da bo sila F_A, s katero podstavek deluje na telo v prijemališču A, najmanjša. Kolikšna je sila F_A v tem primeru?

$F_A =$ _______________ N

(c) Vse premikajoče obroče postavi v skrajno lego k prijemališču B. Če telo miruje, velja naslednja zveza:

$$F_A \cdot \frac{L}{2} + F_g \cdot r = F_B \cdot \frac{L}{2}$$

Pri tem je L razdalja med točkama A in B, r razdalja od težišča palice s pritrjenima obročema do težišča skupine premikajočih se obročev in F_g skupna teža premikajočih se obročev.

(i) Izmeri razdalji L in r ter sili v prijemališčih A in B.

$L =$ ______________ cm $\qquad F_A =$ ______________ N

$r =$ ______________ cm $\qquad F_B =$ ______________ N

(ii) S prej zapisano zvezo izračunaj maso enega obroča. Pri tem predpostavi, da je masa vseh obročev na palici enaka.

$m_1 =$ ______________ g

(iii) Določi maso plastične palice m_p. Maso vijakov v obeh prijemališčih lahko zanemariš.

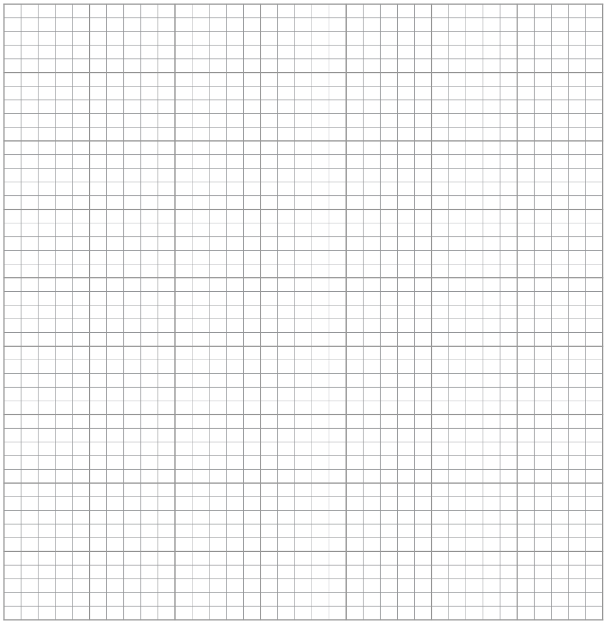
$m_p =$ ______________ g

(d) Nariši graf $F_B(x)$, ki ponazarja spreminjanje velikosti sile F_B v prijemališču B v odvisnosti od razdalje x. Ta razdalja x predstavlja razdaljo od prijemališča A do težišča obročev, ki jih pri poskusu premikamo.

(i) Premikaj vse štiri obroče hkrati tako, da so med seboj v stiku (obroči, ki jih premikaš, se vedno med seboj dotikajo). Izmeri silo F_B za primera, ko so vsi premakljivi obroči v eni izmed skrajnih leg (skrajno levo ali skrajno desno na palici). Izmeri F_B še za tri različne vmesne lege. Vse izmerjene vrednosti vnesi v graf in nariši krivuljo, ki ponazarja $F_B(x)$. Na vodoravni osi grafa (abscisa) je x.

(ii) V graf doriši še tri krivulje, ki ponazarjajo $F_B(x)$, če premikamo le en obroč, le dva obroča v stiku in le tri obroče v stiku. Obroči, ki jih ne premikamo, so ves čas v skrajni legi ob prijemališču A. Jasno označi z 1, 2, 3 in 4, katera črta v grafu predstavlja potek spreminjanja $F_B(x)$ za izbrano število obročev, ki jih med meritvijo premikaš v različne lege.

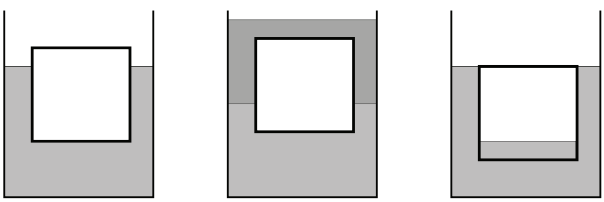
(iii) V graf doriši še krivuljo, ki ponazarja $F_B(x)$, če bi po palici premikali 6 obročev od ene do druge skrajne lege. Krivuljo označi s 6.



56. fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje

Skupina I

1. Votlo kovinsko škatlo v obliki kvadra z višino 12 cm neprodušno zapremo in jo damo v veliko posodo, ki je pred tem do višine 20 cm napolnjena z vodo. Ploščina zgornje ploskve škatle je 7,0 dm^2. Kovinska škatla plava, nad vodno gladino je 1,0 cm škatle kot kaže leva slika. V nalogi zanemari morebitni vzgon zraka na škatlo in maso zraka v škatli.



   a) Kolikšna je masa škatle?

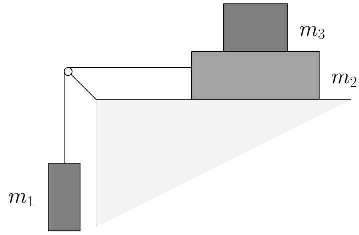
   b) V posodo z vodo dolijemo še toliko olja, da je škatla v celoti potopljena kot kaže srednja slika. Gostota olja je manjša od gostote vode, olje in voda se ne mešata. Ko se tekočini in škatla umirijo, je v vodi potopljeno 3,0 cm škatle. Kolikšna je gostota olja?

   c) V naslednjem poskusu škatlo na spodnjih delih stranskih ploskev večkrat prevrtamo, da lahko iz nje uhaja zrak in vanjo počasi priteka voda. Škatlo damo v veliko posodo, ki je pred tem do višine 20 cm napolnjena samo z vodo brez olja. V času 50 s se škatla popolnoma potopi v vodo, kot kaže desna slika. S kolikšnim povprečnim volumskim tokom voda priteka v škatlo?

2. Na mizi pripravimo sistem klad in škripca: leva klada visi na lahki neraztegljivi vrvici, ki je prek lahkega škripca pritrjena na klado na mizi, na kateri leži tretja klada; mase klad označimo z m_1, m_2 in m_3, kot kaže slika. Klade in miza so iz enakega lesa, koeficient trenja med lesenimi površinami je $k_{tr} = 0{,}20$, koeficient lepenja med lesenimi površinami je $k_l = 0{,}30$. Mase klad na mizi so konstantne, $m_2 = 4{,}0\,\mathrm{kg}$ ter $m_3 = 2{,}5\,\mathrm{kg}$, medtem ko maso viseče klade m_1 spreminjamo.

   a) Vsaj kolikšna mora biti masa viseče klade, da sistem ni več v ravnovesju in klada na mizi skupaj s klado na njej prične drseti?

   b) Kolikšen sme biti največ pospešek sistema in kolikšna masa viseče klade, da se kladi na mizi gibljeta skupaj, ne da bi zgornja klada zdrsnila glede na spodnjo?

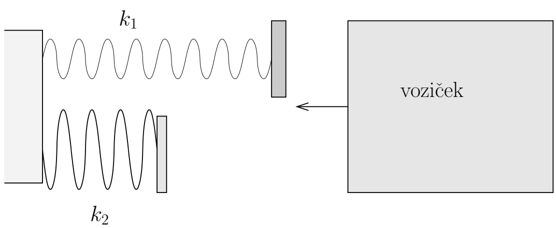


3. Batman stoji sredi velike votline nad breznom brez dna na mirujoči ploščadi 20 m pod stropom votline. V nekem trenutku začne ploščad prosto padati v brezno. Batman se reši tako, da navpično proti stropu ustreli eno svojih naprav — pajek, ki se prilepi na strop in nosi dolgo močno lahko vrvico, na katero je Batman privezan. Hitrost pajka ob izstrelitvi je glede na Batmana 50 m/s, pajek se prilepi na strop, čim se dotakne stropa, ne glede na to, s kolikšno hitrostjo zadane strop. Zanemari sunek sile na Batmana ob izstrelitvi pajka.

   a) V kolikšnem času od trenutka, ko začne ploščad padati, mora Batman izstreliti pajka, da se ravno še reši?

   b) V kolikšnem času od trenutka, ko začne ploščad padati, pa mora Batman izstreliti pajka, da se ravno še reši, če je dolžina vrvice končna in znaša 50 m?

4. Amortizer je sestavljen iz dveh lahkih vzporednih vzmeti in dveh plošč. Vsaka vzmet je na enem krajišču pritrjena na steno in ima na drugem krajišču pritrjeno ploščo, kot v pogledu od zgoraj kaže slika. Daljša vzmet je neobremenjena dolga $l_1 = 15$ cm in ima prožnostni koeficient $k_1 = 10$ N/cm, krajša vzmet je neobremenjena dolga $l_2 = 5$ cm in ima prožnostni koeficient $k_2 = 50$ N/cm. V amortizer se zaleti nakupovalni voziček z maso 20 kg. Predpostavi, da se ob trku vozička v katerokoli ploščo voziček in plošča sprimeta. Voziček se ves čas giblje premo.



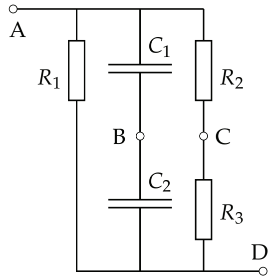
   a) Kolikšno hitrost je imel voziček, če se je ustavil 3,0 cm od stene? Predpostavi, da sta masi plošč amortizerja zanemarljivi.

   b) Naj bo masa plošče na daljši vzmeti 2,0 kg, voziček pa naj se proti steni pelje z enako hitrostjo kot v a) delu naloge. S kolikšno hitrostjo se v tem primeru voziček zaleti v ploščo na krajši vzmeti?

   c) Na kolikšni razdalji od stene se ustavi voziček v delu b) ob predpostavki, da ima plošča na krajši vzmeti zanemarljivo maso?

Skupina II

1. Iz dveh kondenzatorjev s kapacitetama $C_1 = 1{,}0\,\mathrm{nF}$ in $C_2 = 2{,}5\,\mathrm{nF}$ ter treh upornikov z upori $R_1 = 2R$ in $R_2 = R_3 = R$, $R = 50\,\Omega$, sestavimo vezje na sliki. Vezje ima štiri možne priključke, ki jih označimo s črkami A, B, C, D. Imamo tudi vir enosmerne napetosti 20 V. Kolikšen naboj se po dolgem času nabere na kondenzatorju s kapaciteto C_2, če



   a) vir napetosti vežemo med priključka A in D?

   b) vir napetosti vežemo med priključka A in D, medtem ko priključka B in C povežemo s prevodno žico z zanemarljivim uporom?

   c) vir napetosti vežemo med priključka A in C?

2. V zaprti posodi s skupno površino sten 20 dm^2 je 5,0 kg vode s temperaturo 20 °C. Zunanja temperatura je 20 °C. Vodo grejemo s potopnim grelcem s konstantnim uporom, ki ga priklopimo na vir z izmenično napetostjo 220 V. Na grelcu piše: 400 W, ∼220 V. Toploto, potrebno za segrevanje lonca, zanemari.

   a) V kolikšnem času bi se voda v posodi segrela na 22 °C, če bi ne bilo izgub toplote skozi stene posode?

   b) Toplotni tok skozi stene posode P_s je sorazmeren s temperaturno razliko ΔT med notranjostjo in zunanjostjo posode in s površino sten posode S: $P_s = kS\Delta T$. Oceni, kolikšna je vrednost sorazmernostnega koeficienta k, če segrevanje vode v delu a) traja 1 minuto in 50 sekund? Ocenjena vrednost k naj velja za posodo v vseh naslednjih delih naloge.

   c) Do kolikšne najvišje temperature lahko s tem potopnim grelcem segrejemo vodo v posodi?

   d) Koliko časa traja, da s podobnim potopnim grelcem, ki ima upor 100 Ω in ga priključimo na vir z izmenično napetostjo 220 V, segrejemo v isti posodi enako količino vode s temperature 27 °C na temperaturo 29 °C?

   e) Koliko časa bi potrebovali v primeru d), če bi greli vodo z obema grelcema, ki bi ju vezali zaporedno na vir z izmenično napetostjo 220 V?

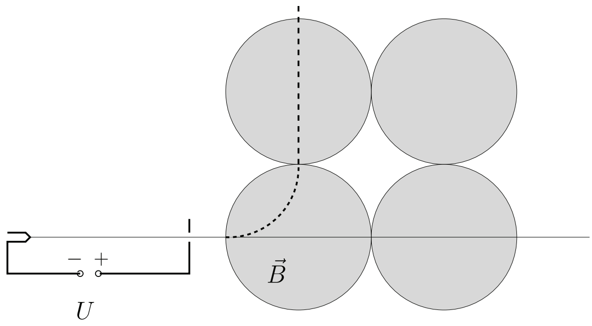
3. Negativne ione z nabojem $e = -e_0$ pospešujemo z napetostjo U in odklanjamo s tuljavami, kot kaže slika. Polmer tuljav je 8,0 cm; tuljave so postavljene tako, da so njihove osi pravokotne na list. Ko tuljavo priključimo na vir napetosti, nastane znotraj tuljave homogeno magnetno polje, zunaj pa polja ni.

   a) Kolikšna naj bo gostota magnetnega polja v tuljavi, da se curek ogljikovih ionov odkloni za 90° pri pospeševalni napetosti 1000 V? Določi tudi smer polja (levo, desno, gor, dol, v list, ali iz lista). Masa ogljikovega iona je $2{,}0 \cdot 10^{-26}$ kg.

   b) Kolikšna mora biti pospeševalna napetost, da dobimo enak odklon s curkom kisikovih ionov, ki so enako nabiti kot ogljikovi ioni? Kilomolski masi kisika in ogljika sta v razmerju 4/3. Tok v tuljavi je enak kot pri a).

   c) Vsako od tuljav priključimo na vir napetosti, da so magnetna polja v vseh po velikosti enaka velikosti polja v a) delu naloge. Določi smer polja v vsaki tuljavi tako, da bo po izhodu iz tuljav curek ogljikovih ionov nadaljeval pot tako, kot če v tuljavah ne bi bilo polja. Koliko dodatnega časa porabi za pot skozi tuljave?

   d) Z najmanj koliko tuljavami je mogoče curek usmerjati tako, da na koncu ioni čelno trčijo z ioni, ki zapuščajo pospeševalni del naprave? Skiciraj postavitev tuljav in označi smer polja v vsaki tuljavi.



4. Kolesarska zračnica ima srednji obseg $l = 180$ cm. Polmer prečnega preseka zračnice r je odvisen od razlike med tlakom zraka v zračnici p in zunanjim zračnim tlakom $p_0 = 1$ bar. Odvisnost opisuje relacija
$$p - p_0 = A\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \ ,$$
pri čemer sta vrednosti parametrov $A = 12$ bar in $r_0 = 15$ mm. Tlak v zračnici je sprva $p = 2$ bar, zunanja temperatura je $23\,^\circ$C.

   a) Kolikšen je polmer prečnega preseka zračnice?

   b) S tlačilko vpihamo v zračnico še $V = 0{,}75$ L zraka, merjeno pri zunanjem tlaku in zunanji temperaturi, in počakamo, da se temperatura v zračnici izenači z zunanjo temperaturo. Kolikšna sta sedaj polmer prečnega preseka zračnice in tlak v zračnici?

Skupina III

1. V zaprti posodi s skupno površino sten 20 dm^2 je 5,0 kg vode s temperaturo 20 °C. Zunanja temperatura je 20 °C. Vodo grejemo s potopnim grelcem iz železa, ki ga priklopimo na vir z izmenično napetostjo 220 V. Pri temperaturi vode 20 °C je moč grelca 400 W. Toploto, potrebno za segrevanje lonca, zanemari.

   a) V kolikšnem času bi se voda v posodi segrela na 22 °C, če bi ne bilo izgub toplote skozi stene posode in bi grelec oddajal konstantno moč?

   b) Toplotni tok skozi stene posode P_s je sorazmeren s temperaturno razliko ΔT med notranjostjo in zunanjostjo posode in s površino sten posode S: $P_s = kS\Delta T$. Oceni, kolikšna je vrednost sorazmernostnega koeficienta k, če segrevanje vode v delu a) traja 1 minuto in 50 sekund? Ocenjena vrednost k naj velja za posodo v vseh naslednjih delih naloge.

   c) Do kolikšne najvišje temperature bi lahko s tem potopnim grelcem s konstantno močjo segreli vodo v posodi?

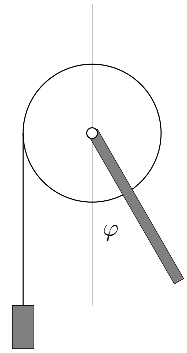
   V resnici se električni upor železa spreminja s temperaturo kot $R(T) = R_0\,[1 + \alpha(T - T_0)]$, kjer je $\alpha = 0{,}00567\ \mathrm{K}^{-1}$ in je $R_0 = R(T_0)$ vrednost upora pri temperaturi T_0. Temperatura železa, iz katerega je grelec, je ves čas za neko konstantno vrednost višja od temperature vode, v katero je grelec potopljen. To pomeni, da je sprememba temperature železa kar enaka spremembi temperature vode in lahko v izrazu za $R(T)$ uporabimo $T_0 = 20$ °C in za T trenutno temperaturo vode.

   d) Do kolikšne najvišje temperature lahko s tem potopnim grelcem zares segrejemo vodo v posodi?

e) Izpelji izraz za odvisnost hitrosti segrevanja vode $\frac{dT}{dt}$ od trenutne temperature vode T in odvisnost skiciraj na grafu $\frac{dT}{dt}\left(T\right)$.

Kolikšna je hitrost segrevanja pri začetni temperaturi vode $T = T_0$ in kolikšna pri $T = 35$ °C?

2. Poenostavljen model signalne naprave, ki jo uporabljamo v železniškem prometu, kaže slika. Signalna palica z dolžino 50 cm in maso 1,0 kg je pritrjena na lahko vreteno s polmerom 10 cm. Palico dvigujemo z utežjo na lahki vrvici, ki je navita na vreteno.



a) Kolikšna naj bo masa uteži, da bo v ravnovesju kot φ med palico in navpičnico enak 30°?

b) Poišči vse kote iz intervala $0 \leq \varphi \leq 180°$, pri katerih je sistem pri nespremenjeni masi uteži v ravnovesju. Za vsako ravnovesno lego napiši, ali je stabilna ali labilna, in odgovor utemelji.

c) S kolikšno najmanjšo hitrostjo moramo mirujočo utež iz a) dela naloge suniti navzdol, da bo palica dosegla najvišjo lego ($\varphi = 180°$)?

d) Kolikšna je kotna hitrost palice iz primera c) v najvišji legi ($\varphi = 180°$)?

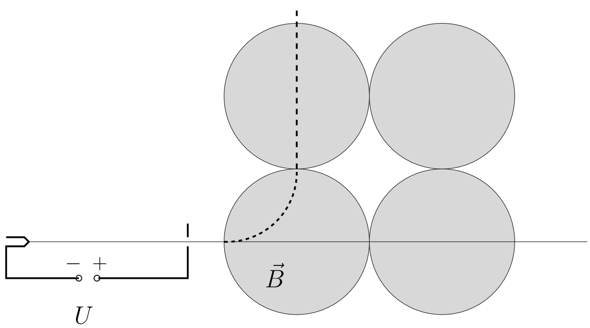
3. Negativne ione z nabojem $e = -e_0$ pospešujemo z napetostjo U in odklanjamo s tuljavami, kot kaže slika. Polmer tuljav je 8,0 cm; tuljave so postavljene tako, da so njihove osi pravokotne na list. Ko tuljavo priključimo na vir napetosti, nastane znotraj tuljave homogeno magnetno polje, zunaj pa polja ni.

a) Kolikšna naj bo gostota magnetnega polja v tuljavi, da se curek ogljikovih ionov odkloni za 90° pri pospeševalni napetosti 1000 V? Določi tudi smer polja (levo, desno, gor, dol, v list, ali iz lista). Masa ogljikovega iona je $2{,}0 \cdot 10^{-26}$ kg.

b) Kolikšna mora biti pospeševalna napetost, da dobimo enak odklon s curkom kisikovih ionov, ki so enako nabiti kot ogljikovi ioni? Kilomolski masi kisika in ogljika sta v razmerju 4/3. Tok v tuljavi je enak kot pri a).

c) Vsako od tuljav priključimo na vir napetosti, da so magnetna polja v vseh po velikosti enaka velikosti polja v a) delu naloge. Določi smer polja v vsaki tuljavi tako, da bo po izhodu iz tuljav curek ogljikovih ionov nadaljeval pot tako, kot če v tuljavah ne bi bilo polja. Koliko dodatnega časa porabi za pot skozi tuljave?

d) Z najmanj koliko tuljavami je mogoče curek usmerjati tako, da na koncu ioni čelno trčijo z ioni, ki zapuščajo pospeševalni del naprave? Skiciraj postavitev tuljav in označi smer polja v vsaki tuljavi.



4. Balon, ki ima prazen maso 1,0 g, napolnimo s helijem do prostornine 5,0 L in pričvrstimo na zgornje krajišče zelo lahke palice z dolžino 100 cm. Palica je prosto gibljiva okoli vodoravne osi, ki gre skozi spodnje krajišče. Balon ima obliko krogle, stik s palico je narejen tako, da balon okoli stika ne opleta in je težišče balona ves čas na premici, na kateri leži palica. Temperatura helija in okoliškega zraka je 20 °C in tlak 100 kPa. Kilomolska masa helija je 4,0 kg/kmol.

   a) S kolikšno frekvenco balon zaniha, ko ga rahlo sunemo v vodoravni smeri? Gibanje balona lahko obravnavaš kot gibanje točkastega telesa, podobno kot gibanje telesa na vrvici pri matematičnem nihalu. Pri tem in naslednjem vprašanju privzemi, da upor zraka ne vpliva na frekvenco nihanja.

   b) S kolikšno frekvenco zaniha balon iz a) dela naloge, če upoštevaš, da je masa palice 2,0 g in da balon ni točkast. Vztrajnostni moment krogelne lupine s polmerom r in maso m okoli simetrijske osi je $J = \frac{2}{3}\,mr^2$.

18. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol – državno tekmovanje

Naloge za 1. letnik

A1. Za 3 kg pomaranč in 5 kg limon plačamo skupaj 8,40 €. Za 5 kg pomaranč in 4 kg limon plačamo skupaj 8,80 €. Koliko skupno plačamo za 2 kg pomaranč in 3 kg limon?

(A) 7,20 € **(B)** 5,20 € **(C)** 3,60 € **(D)** 5,60 € **(E)** 4,80 €

A2. Tonček je izpisal tretjo potenco izraza $2x^3y-3xy^2$. Ugotovil je, da imata potenci z osnovama x in y v enem izmed členov enaka eksponenta. Kolikšen je koeficient v tem členu?

(A) 36 **(B)** -36 **(C)** 18 **(D)** -54 **(E)** 54

A3. Naj za realni števili x in y velja $\frac{x}{x+y} = 101$. Kolikšna je vrednost izraza $\frac{y-x}{y}$?

(A) $1,02$ **(B)** 100 **(C)** 201 **(D)** $2,01$ **(E)** $1,01$

B1. Trgovec je iz tovarne dobil pošiljko, v kateri je bilo 480 kozarcev majoneze več kot kozarcev gorčice. Ko je prodal $80\ \%$ kozarcev majoneze in četrtino kozarcev gorčice, je ugotovil, da ima 300 kozarcev gorčice več kot majoneze. Koliko kozarcev gorčice in koliko kozarcev majoneze je bilo v pošiljki, ki jo je dobil iz tovarne?

B2. Dan je izraz, v katerem je x realno število in $x \notin \{-3,-1,0,1,2,3,4\}$.

$$\frac{x^2-4x}{5x-5} \cdot \left(\frac{x^3+1}{x^2+x} - 1\right) \cdot \left(\left(1 - \frac{3x-3}{x^2+x-6}\right) \cdot \left(\frac{6}{x+3} - \frac{1}{x-2}\right)^{-1} - 1\right)^{-1}$$

Poenostavi ga.

B3. Računsko določi vse možne pare naravnih števil a in b, $a > b$, tako da bo razlika kvadratov teh dveh števil enaka 60.

Naloge za 2. letnik

A1. Kaj dobimo po racionalizaciji izraza $\dfrac{4+2\sqrt{6}}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}$?

(**A**) $1-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (**B**) $1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (**C**) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$
(**D**) $-1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (**E**) $-1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$

A2. Kot α je za 33° manjši od svojega komplementarnega kota. Koliko je velik komplementarni kot?

(**A**) $29^\circ 50'$ (**B**) $61^\circ 50'$ (**C**) $61{,}5^\circ$ (**D**) $29{,}5^\circ$ (**E**) $61{,}30^\circ$

A3. Naj bosta α in β ostra kota pravokotnega trikotnika. Kateri izmed navedenih izrazov je enakovreden izrazu $\dfrac{\sin(90^\circ-\alpha)+\cos\beta}{4\sin\beta\cdot\cot(90^\circ-\alpha)}$?

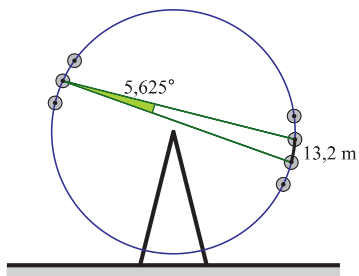
(**A**) $\frac{\sin\beta+\cos\beta}{4\cos\beta}$ (**B**) $\frac{\sin\beta+\cos\beta}{4\sin\beta}$ (**C**) $\frac{1}{4\cos\beta}$ (**D**) $\frac{\sin\beta-\cos\beta}{4\cos\beta}$ (**E**) $\frac{\sin\beta+\cos\beta}{2\cos\beta}$

B1. Izračunaj koordinate točke C, ki je enako oddaljena od točk $A(-6,1)$ in $B(2,-3)$ ter leži na premici $y=3x-6$. Zapiši še enačbo množice vseh točk, ki so enako oddaljene od točk A in B.

B2. Brez uporabe računala poenostavi izraz:

$$a\cdot\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-2a^{-\frac{1}{3}}}-\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+5a^{\frac{1}{3}}}\right)\cdot\left(1+3a^{-1}-10a^{-2}\right)-(\sqrt{5}-2)\sqrt{9+4\sqrt{5}}$$

B3. London Eye je ogromno kolo, ki nam omogoča zelo lep razgled na London. Kolo ima po krožnici enakomerno razporejene kabine v obliki krogel. Iz središča svoje kabine vidimo lok med središčima dvema sosednjih kabin na drugi strani kolesa pod kotom $5{,}625^\circ$ (glej sliko). Izračunaj, koliko kabin je pritrjenih na kolo. Dolžina loka med središčima dveh sosednjih kabin je $13{,}2$ m. Izračunaj razdaljo med središčima najbolj oddaljenih kabin.



Naloge za 3. letnik

A1. Če bi plašč stožca razgrnili v ravnino, bi dobili četrtino kroga s polmerom 8 cm. Koliko je visok stožec?

(**A**) 10 cm (**B**) $2\sqrt{15}$ cm (**C**) $\sqrt{20}$ cm (**D**) 3 cm (**E**) 16 cm

A2. V kateri točki graf funkcije $f(x)=2\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2}x-5)-4$ seka abscisno os?

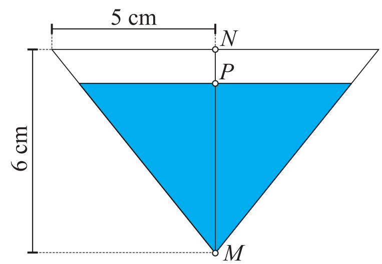
(**A**) $\left(\frac{7\sqrt{2}}{2},0\right)$ (**B**) $(7\sqrt{2},0)$ (**C**) $(1-7\sqrt{2},0)$ (**D**) $\left(\frac{\sqrt{2}}{7},0\right)$ (**E**) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-7,0\right)$

A3. Štiri pozitivna števila so v razmerju $1:2:3:4$. Vsota kvadratov najmanjših treh števil je za 1 manjša od vsote največjih treh števil. Največ koliko nizov takih števil lahko najdemo?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

B1. Določi tako število $a > 1$, da se bosta paraboli z enačbama $y = (a-1)x^2 + 3x + 4$ in $y = -x^2 - (a-1)x - 2 + a$ dotikali.

B2. Kozarec valjaste oblike s polmerom 4 cm in višino 9 cm je do $\frac{2}{9}$ višine napolnjen z vodo. Mark se je odločil, da bo vso vodo prelil v kozarec stožčaste oblike s polmerom 5 cm in višino 6 cm (glej sliko). Pri prelivanju je 5% vode polil. Koliko decilitrov vode je v stožčastem kozarcu in kako visoko sega voda (tj. koliko je $|MP|$)?



B3. Reši enačbo

$$\sqrt[3]{\frac{4}{9} \cdot \sqrt{\left(\frac{81}{16}\right)^x \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{8}{27}\right)^{x-1}}}} = \frac{3^{\frac{13}{x-1}}}{\sqrt{4^{\frac{13}{x-1}}}}.$$

Naloge za 4. letnik

A1. Kolikšna je vrednost funkcije $f(x) = \log_3\left(\frac{\sin\left(\frac{x\pi}{2}\right)}{\log_{\frac{1}{2}} 2^x}\right)$ za $x = -3$?

(**A**) 0 (**B**) -3 (**C**) ne obstaja (**D**) 1 (**E**) -1

A2. S števkami $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ in 9 sestavljamo soda šestmestna števila, katerih prva števka je praštevilo. Koliko je vseh takih šestmestnih števil?

(**A**) 20160 (**B**) 9440 (**C**) 25552 (**D**) 4320 (**E**) 49152

A3. Katera izmed navedenih funkcij je odvod funkcije $f(x) = \frac{1-2x}{\sqrt{2x}}$?

(**A**) $f'(x) = \frac{-\sqrt{2x}(6x-1)}{4x^2}$ (**B**) $f'(x) = \frac{-\sqrt{2x}(6x-1)}{8x^2}$ (**C**) $f'(x) = \frac{-\sqrt{2x}(6x+1)}{4x^2}$

(**D**) $f'(x) = \frac{-\sqrt{2x}(6x+1)}{8x^2}$ (**E**) $f'(x) = \frac{-\sqrt{2x}(1-6x)}{4x^2}$

B1. Pokaži, da velja:

$$\frac{(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{2} = (1+\sin\alpha)\cdot(1+\cos\alpha).$$

B2. V zavetišču imajo 15 psov in 20 mačk. Izmed njih naključno izberemo 8 živali. Izračunaj verjetnosti dogodkov na pet decimalnih mest natančno:

a) Izbrali smo 8 psov,

b) Izbrali smo 5 psov in 3 mačke,

c) Izbrali smo več psov kot mačk,

d) Izbrali smo vsaj 6 mačk.

B3. a) Reši enačbi $9^x - 4\cdot 5^{2x-3} = 25^{x-1} + 2\cdot 3^{2x-3}$ in $\sqrt{x+1+\sqrt{x+1+\sqrt{x+3}}} = \sqrt{x+3}$.

b) Zapiši splošno obliko polinoma z vodilnim koeficientom 2, katerega ničle so enake rešitvam enačb iz a).

Rešitve tekmovanja iz fizike za zlato Stefanovo priznanje – državno tekmovanje

Rešitve za 8. razred

A1 Ker ni trenja (lepenja), sta sili, s katero leva in desna podpora delujeta na kocko, v prijemališčih pravokotni na površino podpor in kocko. Poleg sil leve in desne podpore deluje na kocko tudi teža. Kocka miruje, vsota sil, ki delujejo nanjo, je 0. Obema pogojema zadostijo sile, prikazane na sliki (D).

A2 Miles je naročil 2 sodčka ameriškega piva, kar je v litrih $V_p = 2 \cdot 31 \cdot 3{,}785\,\text{litrov} = 234{,}7\,\text{litrov}$. Pivo toči v angleške kozarce s prostornino 1 *angl.* pint, kar je v litrih $V_k = \frac{1}{8} \cdot 4{,}5461$ litra $= 0{,}568$ litra. Pivo s prostornino V_p natoči v

$$\text{(A)} \qquad N = \frac{V_p}{V_k} = \frac{234{,}7\,\text{l}}{0{,}568\,\text{l}} = 413$$

angleških kozarcev za 1 pint.

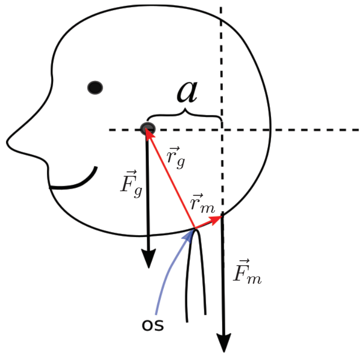
A3 Ob času $t = 0$ je koordinata lege $x = v \cdot 0 + x_0 = x_0 < 0$. S časom se koordinata lege x povečuje, zato očitno velja $v > 0$. Pravilna rešitev je (B).

A4 V razpredelnici so izračunane teže kock, ploščine ploskev in tlaki pod kockami.

	(A)	(B)	(C)	(D)
m	20 mg $= 2 \cdot 10^{-5}$ kg	100 mg $= 10^{-4}$ kg	14 g $= 14 \cdot 10^{-3}$ kg	130 kg
F_g	$2 \cdot 10^{-4}$ N	10^{-3} N	$14 \cdot 10^{-2}$ N	1300 N
a	1 mm $= 10^{-3}$ m	10 mm $= 10^{-2}$ m	1 cm $= 10^{-2}$ m	1 m
$S = a^2$	10^{-6} m^2	10^{-4} m^2	10^{-4} m^2	1 m^2
$p = \frac{F_g}{S}$	200 Pa	10 Pa	1400 Pa	1300 Pa

A5 Najdaljši svetli dan dneva junija traja enako kot najdaljši nočni del dneva decembra in najkrajši svetli dan dneva decembra traja enako kot najkrajši nočni del dneva junija. Najkrajša noč junija traja 7 ur (A), svetli del dneva je tedaj 10 ur daljši in traja 17 ur. Skupaj traja dan 7 ur + 17 ur = 24 ur.

B1 (a) Na sliki glave so označeni os, teža glave $\vec{F}_g$, sila mišic zadnjega dela vratu $\vec{F}_m$ ter ročici $\vec{r}_g$ in $\vec{r}_m$.



(b) Teža glave je $F_g = 50$ N. Pri pokončni legi glave velja $a = r_{g,\perp} + r_{m,\perp} = 7$ cm in če je $r_{g,\perp} = 3$ cm, je $r_{m,\perp} = 4$ cm. Iz pogoja za ravnovesje $F_g \cdot r_{g,\perp} = F_m \cdot r_{m,\perp}$ izrazimo silo mišic zadnjega dela vratu

$$F_m = F_g \cdot \frac{r_{g,\perp}}{r_{m,\perp}} = 50\,\mathrm{N} \cdot \frac{3\,\mathrm{cm}}{4\,\mathrm{cm}} = 37{,}5\,\mathrm{N}.$$

(c) Glava miruje, nanjo deluje poleg teže in sile vratnih mišic še sila prvega vratnega vretenca $\vec{F}_v$, ki glavo podpira. Sila vretenca na glavo deluje v smeri navzgor in uravnovesi težo in silo mišic in meri $F_v = F_g + F_m = 50\,\mathrm{N} + 37{,}5\,\mathrm{N} = 87{,}5$ N. Glava deluje na prvo vratno vretence z nasprotno enako silo $F_{a\to v} = 87{,}5$ N.

(d) Glava deluje s silo $\vec{F}_{g\to v}$ na prvo vratno vretence, vretence pa na medvretenčno ploščico s po velikosti enako silo $\vec{F}_{pl}$, $F_{pl} = 87{,}5$ N. Presek ploščice je $S = 2{,}7$ cm$^2 = 2{,}7 \cdot 10^{-4}$ m^2 in tlak na ploščico je

$$p = \frac{F_{pl}}{S} = \frac{87{,}5\,\mathrm{N}}{2{,}7 \cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2} = 3{,}24 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} = 3{,}24\,\mathrm{bar}.$$

(e) Če se pri stalnem $a = r_{g,\perp} + r_{m,\perp} = 7$ cm ročica teže poveča na $r_{g,\perp} = 5$ cm, je $r_{m,\perp} = 2$ cm. Sila mišic zadnjega dela vratu se poveča na

$$F_m = F_g \cdot \frac{r_{g,\perp}}{r_{m,\perp}} = 50\,\mathrm{N} \cdot \frac{5\,\mathrm{cm}}{2\,\mathrm{cm}} = 125\,\mathrm{N},$$

sila glave na prvo vratno vretence se poveča na $F_v = F_g + F_m = 50\,\mathrm{N} + 125\,\mathrm{N} = 175\,\mathrm{N}$, tlak na medvretenčno ploščico pa se poveča na

$$p = \frac{F_{pl}}{S} = \frac{175\,\mathrm{N}}{2{,}7 \cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2} = 6{,}48 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} = 6{,}48\,\mathrm{bar}.$$

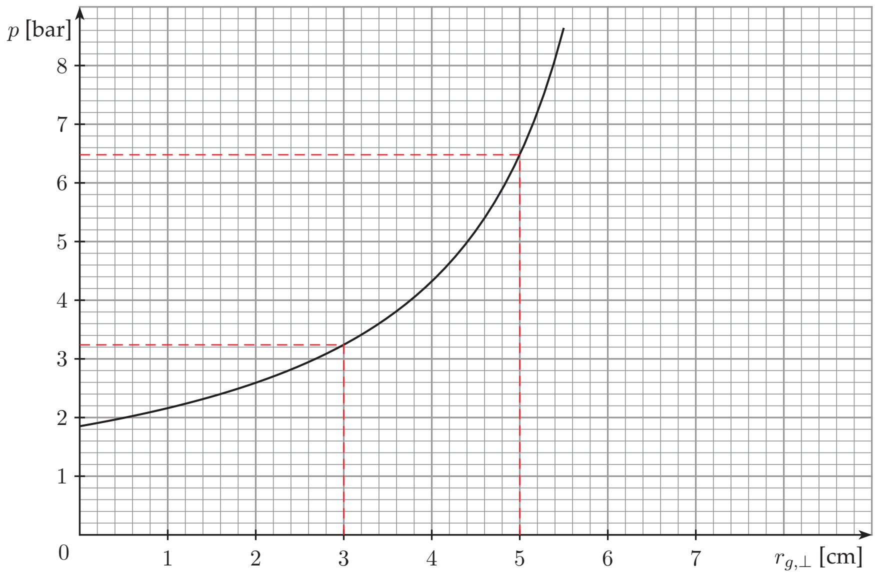
(f) Glava pritiska na prvo vratno vretence z najmanjšo silo, ko je $r_{g,\perp} = 0$ cm - ko je prijemališče teže - težišče - glave navpično nad osjo (prvim vratnim vretencem). Tedaj je sila vratnih mišic

$$F_m = F_g \cdot \frac{r_{g,\perp}}{r_{m,\perp}} = 50\,\mathrm{N} \cdot \frac{0\,\mathrm{cm}}{7\,\mathrm{cm}} = 0,$$

sila glave na prvo vratno vretence pa je po velikosti enaka teži glave, $F_v = F_g + F_m = 50\,\mathrm{N} + 0\,\mathrm{N} = 50$ N. Tlak na medvretenčno ploščico je

$$p = \frac{F_{pl}}{S} = \frac{50\,\mathrm{N}}{2{,}7 \cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2} = 1{,}85 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} = 1{,}85\,\mathrm{bar}.$$

(g) V koordinatnem sistemu je graf, ki kaže, kako je tlak na medvretenčno ploščico odvisen od $r_{g,\perp}$ v območju vrednosti $0 < r_{g,\perp} < 7$ cm.



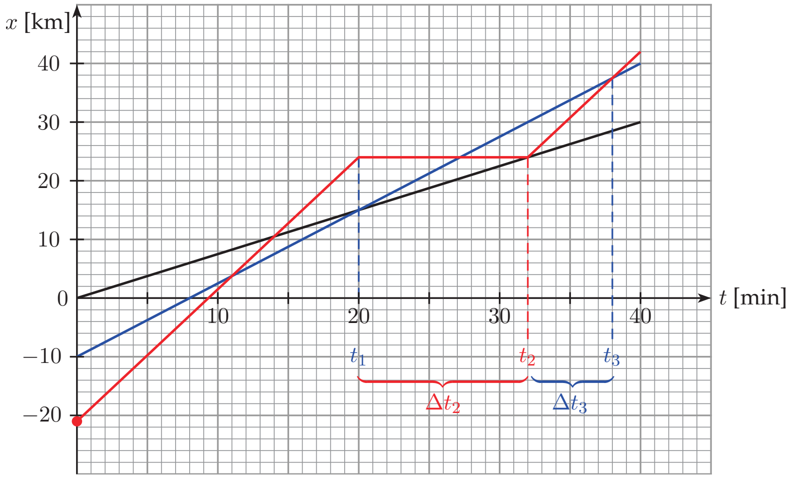
B2 (a) Najenostavneje je, če hitrosti vozil najprej izrazimo v enoti $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}}$. Tovornjak vozi s hitrostjo $v_t = 45\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 0{,}75\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}}$, avtobus s hitrostjo $v_b = 75\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 1{,}25\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}}$ in avto s hitrostjo $v_a = 135\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 2{,}25\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}}$.

V času t_1 prevozi tovornjak pot $s_{t,1} = v_t \cdot t_1$, avtobus pa pot $s_{b,1} = v_b \cdot t_1$, ki je za $d_1 = 10$ km daljša od poti tovornjaka, $s_{b,1} = s_{t,1} + d_1$. Izrazimo čas t_1,

$$t_1 = \frac{d_1}{v_b - v_t} = \frac{10\,\mathrm{km}}{1{,}25\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}} - 0{,}75\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}}} = 20\,\mathrm{min}.$$

(b) Do trenutka t_1 je tovornjak prevozil pot $s_{t,1} = v_t \cdot t_1 = 15\,\mathrm{km}$, avtobus pot $s_{a,1} = v_a \cdot t_1 = 25\,\mathrm{km}$ in avto pot $s_{a,1} = v_a \cdot t_1 = 45$ km.

(c) V koordinatnem sistemu sta s črno in modro črto narisana grafa, ki kažeta, kako se s časom od $t = 0$ do $t = 2 \cdot t_1 = 40$ min spreminjata legi tovornjaka in avtobusa. Lego avta ob $t = 0$ označuje rdeča pika. Mogoča (in enako pravilna) je tudi drugačna izbira izhodišča za merjenje lege.



(d) Črpalka je od začetne lege avta ob $t = 0$ oddaljena za toliko, kolikor je avto prevozil do t_1, torej za 45 km. Začetna lega avta je za 10 km $+ 11$ km $= 21$ km oddaljena od začetne lege tovornjaka, kar pomeni, da je črpalka od začetne lege tovornjaka oddaljena za 45 km -21 km $= 24$ km. Tovornjak je do t_1 prevozil pot $s_{t,1} = 15$ km, kar pomeni, da sta tovornjak in avtobus v trenutku t_1, ko se srečata, od črpalke oddaljenja še za $d_2 = 24$ km -15 km $= 9$ km (in se črpalki približujeta).

(e) Tovornjak pot $d_2 = 9$ km do črpalke opravi v času

$$\Delta t_2 = \frac{d_2}{v_t} = \frac{9\,\mathrm{km}}{0{,}75\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}}} = 12\,\mathrm{min}.$$

Avto s črpalke odpelje v trenutku $t_2 = t_1 + \Delta t_2 = 32$ min. Ob istem trenutku t_2 je avtobus že mimo črpalke: od srečanja s tovornjakom ob t_1 je avtobus opravil pot $s_{b,2} = v_b \cdot \Delta t_2 = 15$ km, kar pomeni, da je ob t_2 že za $d_3 = s_{b,2} - d_2 = 6$ km naprej od črpalke. Avto ga dohiti v času

$$\Delta t_3 = \frac{d_3}{v_a - v_b} = \frac{6\,\mathrm{km}}{2{,}25\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}} - 1{,}25\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}}} = 6\,\mathrm{min},$$

kar pomeni, da se to zgodi ob $t_3 = t_2 + \Delta t_3 = 38$ min.

(f) Z rdečo črto je v koordinatnem sistemu pri (c) narisan graf, ki kaže, kako se med $t = 0$ in t_3 spreminja lega avta.

(g) V času Δt_3 opravi tovornjak pot $s_{t,3} = v_t \cdot \Delta t_3 = 4{,}5$ km, avto pa pot $s_{a,3} = v_a \cdot \Delta t_3 = 13{,}5$ km, kar pomeni, da je v trenutku t_3 razdalja med tovornjakom in avtom $d_4 = s_{a,3} - s_{t,3} = 9$ km.

C Eksperimentalna naloga

(a) Teža celotnega telesa $F_g = 0{,}48$ N $\pm 0{,}02$ N.

Masa celotnega telesa $m = 48$ g ± 2 g.

(b) Pravilni odgovori na podvprašanja:

i. Prostornina celotnega telesa $V = 23$ ml ± 1 ml.

ii. Prostornina kovinske palice $V_p = 14$ ml ± 1 ml.

iii. Prostornina stene cevi $V_c = 9$ ml ± 1 ml.

(c) Pravilni odgovori na podvprašanja:

i. Povprečna gostota telesa $\rho = 2100\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \pm 100\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

ii. Iz enačbe $m = \rho_p \cdot V_p + \rho_c \cdot V_c$ izrazimo gostoto cevi

$$\rho_c = \frac{m}{V_c} - \rho_c \cdot \frac{V_p}{V_c}$$

Gostota cevi $\rho_c = 1100\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \pm 200\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

(d) Razmerje površin

$$\frac{S_2}{S_1} = 2{,}3$$

(e) Pravilni odgovori na podvprašanja:

i. Rezultati meritev in računov so v tabeli.

Položaj telesa	h_p [mm]	F [N]	F_{vzg} [N]
1. Celotno telo je nad vodno gladino.	0	$0{,}48 \pm 0{,}02$	0
2. V celoti je potopljen le spodnji del telesa.	60 ± 2	$0{,}32 \pm 0{,}02$	$0{,}16 \pm 0{,}02$
3. Potopljeno je celotno telo.	120 ± 2	$0{,}24 \pm 0{,}02$	$0{,}24 \pm 0{,}02$

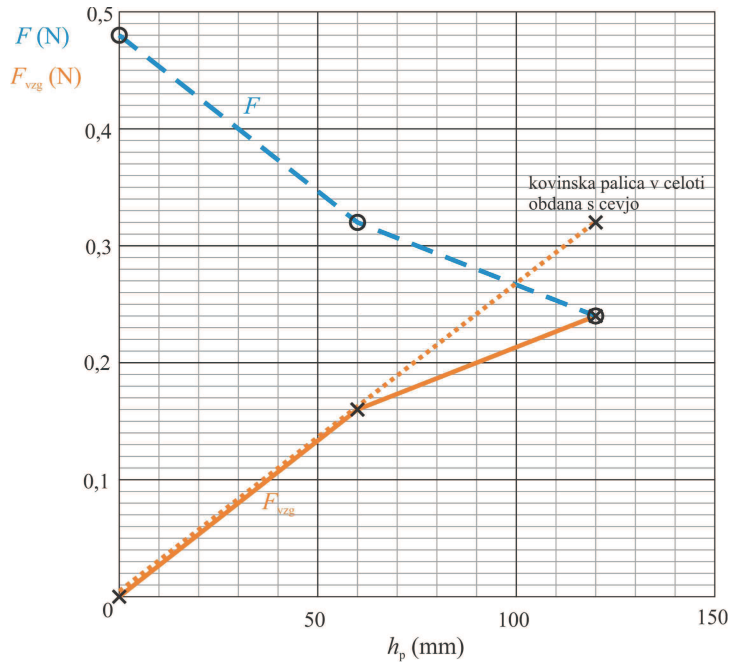
(f) Graf 0

(g) Graf 1

(h) Graf 2

(i) Graf 3

(j) Teža cevi je $m_c = \rho_c \cdot V_c = 10$ g, odkoder dobimo $F_{g,c} = 0{,}1$ N.
Teža palice, ki je v celoti obdana s cevjo: $F' = F_g + F_{g,c} = 0{,}48$ N $+0{,}1$ N $= 0{,}58$ N.
Sila, ki bi jo pokazal silomer: $F = F' - F_{vzg} = 0{,}58$ N $-0{,}32$ N $= 0{,}26$ N.



Rešitve za 9. razred

A1 Ob času $t = 0$ je koordinata lege $x = v \cdot 0 + x_0 = x_0 > 0$. S časom se koordinata lege x zmanjšuje, zato očitno velja $v < 0$. Pravilna rešitev je (C).

A2 Najdaljši svetli dan dneva junija traja enako kot najdaljši nočni del dneva decembra in najkrajši svetli dan dneva decembra traja enako kot najkrajši nočni del dneva junija. Najkrajša noč junija traja 7 ur (A), svetli del dneva je tedaj 10 ur daljši in traja 17 ur. Skupaj traja dan 7 ur + 17 ur = 24 ur.

A3 Iz grafa preberemo, da je polmer krožnice, po kateri se na vrtiljaku giblje Jurček, $R = 0{,}75$ m. Jurček opravi cel obhod v (obhodnem) času $t_o = 2$ s. Pot pri enem obhodu je $s_o = 2 \cdot \pi \cdot R = 4{,}71$ m in Jurčkova hitrost je (D) $v = \frac{s_o}{t_o} = 2{,}36\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

A4 Miles je naročil 2 sodčka ameriškega piva, kar je v litrih $V_p = 2 \cdot 31 \cdot 3{,}785$ litrov $= 234{,}7$ litrov. Pivo toči v angleške kozarce s prostornino 1 *angl.* pint, kar je v litrih $V_k = \frac{1}{8} \cdot 4{,}5461$ litra $= 0{,}568$ litra. Pivo s prostornino V_p natoči v

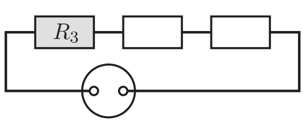
$$\text{(A)} \qquad N = \frac{V_p}{V_k} = \frac{234{,}71}{0{,}5681} = 413$$

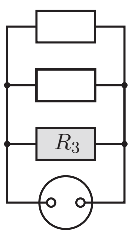
angleških kozarcev za 1 pint.

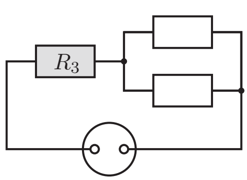
A5 Pravilna izjava je (D). Četrto žarnico lahko vežemo v krog tako, da se tok skozi vir bodisi poveča (če jo kateremukoli elementu ali elementom, ki so že v krogu, vežemo vzporedno) bodisi zmanjša (če jo vežemo zaporedno s katerimkoli elementom, ki je že v krogu).

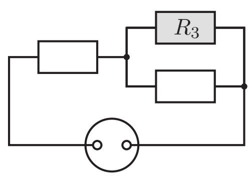
B1 (a) Upoštevamo povezavo med napetostma na porabnikih R_1 in R_3 in tokovoma skozi njiju, $U_1 = R_1 \cdot I_1 = R_1 \cdot 2 \cdot I_3 = U_3 = R_3 \cdot I_3$, odkoder dobimo $R_3 = 2 \cdot R_1 = 2 \cdot R = 200\,\Omega$.

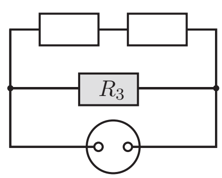
(b) Obstaja 6 različnih vezav 3 porabnikov, od katerih sta dva enaka. Vezave so na slikah od A do F.

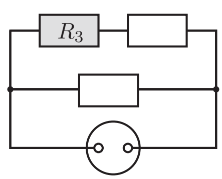
(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


(F)


(c) Največji tok teče skozi vir pri vezavi (B), ko so vsi 3 porabniki vezani vzporedno. Najmanjši tok teče skozi vir pri vezavi (A), ko so vsi 3 porabniki vezani zaporedno.

(d) Ko je na vir priključen samo porabnik $R_1 = 100\,\Omega$, teče skozenj tok $I_0 = 180$ mA $= 0{,}18$ A, kar pomeni, da je na porabniku napetost

$$U_1 = R_1 \cdot I_0 = 100\,\Omega\ \cdot 0{,}18\,\mathrm{A}\ = 18\,\mathrm{V}.$$

To je v primeru, ko je na vir priključen samo ta porabnik, hkrati tudi napetost vira, $U_0 = 18$ V.

V vezju (B) so vsi porabniki na vir napetosti vezani vzporedno, kar pomeni, da je na vsakem od njih napetost 18 V. Skozi vsakega od (enakih) porabnikov R_1 in R_2 tečeta enaka tokova $I_1 = I_2 = I_0 = 180$ mA, skozi porabnik R_3 pa teče pol manjši tok $I_3 = 90$ mA. Tok skozi vir je vsota tokov skozi porabnike, $I_B = I_1 + I_2 + I_3 = 450$ mA.

V vezju (A) so vsi porabniki na vir napetosti vezani zaporedno, kar pomeni, da teče skozi vse - in vir - isti tok I_A. Napetosti na porabnikih R_1 in R_2 sta enaki, $U_1 = U_2 = R_1 \cdot I_A$. Napetost na porabniku R_3 je $U_3 = R_3 \cdot I_A = 2 \cdot R_1 \cdot I_A = 2 \cdot U_1$. Vsota napetosti na vseh 3 porabnikih je enaka napetosti vira, $U_0 = U_1 + U_2 + U_3 = 4 \cdot U_1$, odkoder dobimo napetost $U_1 = \frac{1}{4} U_0 = 4{,}5$ V. Iz napetosti U_1 lahko izračunamo tok I_A,

$$I_A = \frac{U_1}{R_1} = \frac{4{,}5\,\mathrm{V}}{100\,\Omega} = 0{,}045\,\mathrm{A} = 45\,\mathrm{mA}.$$

(e) V vezju (C) sta enaka porabnika R_1 in R_2 vezana vzporedno, kar pomeni, da je na njiju ista napetost U_1 in da skozi njiju tečeta enaka tokova $I_1 = I_2$. Skozi porabnik R_3 teče isti tok kot skozi vir in ta tok je vsota tokov skozi porabnika R_1 in R_2; $I_3 = I_C = I_1 + I_2 = 2 \cdot I_1$. Napetost vira U_0 je vsota napetosti na porabnikih R_3 in R_1 (ali R_2): $U_0 = U_3 + U_1 = R_3 \cdot I_C + R_1 \cdot \frac{1}{2}\, I_C$, odkoder izrazimo tok I_C,

$$I_C = \frac{U_0}{R_3 + \frac{1}{2} R_1} = \frac{18\,\mathrm{V}}{250\,\Omega} = 0{,}072\,\mathrm{A} = 72\,\mathrm{mA}.$$

V vezju (D) sta različna porabnika R_1 in R_3 vezana vzporedno, kar pomeni, da je na njiju ista napetost. Tok I_3 skozi porabnik R_3 je polovica toka I_1 skozi R_1, $I_3 = \frac{1}{2} I_1$. Tok skozi vir in porabnik R_2 je vsota teh dveh tokov, $I_D = I_1 + I_3 = I_1 + \frac{1}{2} I_1 = \frac{3}{2} I_1$. Napetost vira U_0 je vsota napetosti na porabnikih R_2 in R_1 (ali R_3): $U_0 = U_2 + U_1 = R \cdot I_D + R \cdot I_1 = R \cdot \frac{3}{2} I_1 + R \cdot I_1 = R \cdot \frac{5}{2} I_1$, odkoder izrazimo tokova I_1 in I_D,

$$I_1 = \frac{U_0}{\frac{5}{2} R} = \frac{18\,\mathrm{V}}{250\,\Omega} = 0{,}072\,\mathrm{A} = 72\,\mathrm{mA} \qquad \text{in} \qquad I_D = \frac{3}{2} I_1 = 0{,}108\,\mathrm{A} = 108\,\mathrm{mA}.$$

V vezju (E) je na porabniku R_3 napetost $U_3 = U_0$ in skozenj teče tok $I_3 = 90$ mA. Enaka porabnika R_1 in R_2 sta vezana zaporedno, skozi njiju teče isti tok I_1 in na vsakem od njiju je polovica napetosti vira, $U_1 = \frac{1}{2} U_0$, zato skozi njiju teče pol tolikšen tok kot v primeru, ko je na enem od njiju cela napetost vira. Velja $I_1 = 90$ mA. Tok skozi vir je vsota obeh tokov, $I_E = I_3 + I_1 = 0{,}18$ A $= 180$ mA.

V vezju (F) je na porabniku R_1 napetost $U_1 = U_0$ in skozenj teče tok $I_1 = 180$ mA. Različna porabnika R_2 in R_3 sta vezana zaporedno, skozi njiju teče isti tok I_2. Napetost U_3 na porabniku R_3 je dvakrat tolikšna kot napetost U_2 na R_2, $U_3 = 2 \cdot U_2$. Vsota teh dveh napetosti je enaka napetosti vira, $U_0 = U_2 + U_3 = 3 \cdot U_2$. Ker je napetost U_2 na R_2 enaka tretjini napetosti vira, je tok I_2 skozi vejo, kjer sta zaporedno vezana R_2 in R_3 tretjina toka I_0; $I_2 = \frac{1}{3} I_0 = 0{,}06$ A $= 60$ mA. Tok skozi vir je vsota tokov I_1 in I_2, $I_F = I_1 + I_2 = 0{,}24$ A $= 240$ mA.

B2 (a) Mednarodna vesoljska postaja, ki se giblje na višini $h = 405$ km nad Zemljinim površjem, se giblje po krožnici s polmerom $r = R + h = 6371\,\mathrm{km}\ + 405\,\mathrm{km} = 6776$ km. Pri enem obhodu opravi pot

$$s = 2 \cdot \pi \cdot r = 6{,}28 \cdot 6776\,\mathrm{km} = 42\,575\,\mathrm{km}.$$

(b) Hitrost, s katero se giblje ISS, izrazimo iz zapisane zveze med polmerom tirnice r in hitrostjo v,

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2} \cdot 6{,}0 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{\mathrm{kg}^2 \cdot 6776 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}} = 7685\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 7{,}685\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\,.$$

(c) Čas, ki ga ISS potrebuje za en obhod Zemlje, je

$$t_0 = \frac{s}{v} = \frac{42\,575\,\mathrm{km \cdot s}}{7{,}685\,\mathrm{km}} = 5540\,\mathrm{s} = 92\,\mathrm{min}\,20\,\mathrm{s}.$$

En dan traja $t_{1dan} = 24 \cdot 60 \cdot 60$ s $= 86\,400$ s. V tem času ISS obkroži Zemljo

$$N = \frac{t_{1dan}}{t_0} = \frac{86\,400\,\mathrm{s}}{5540\,\mathrm{s}} = 15{,}6 - \mathrm{krat}.$$

(d) Če naj bo geostacionarni satelit neprestano nad isto točko na ekvatorju, je čas, v katerem opravi satelit en obhod po svoji krožni tirnici, $t_{gs} = t_{1dan} = 1$ dan. (Če smo zelo natančni in upoštevamo, da se v enem dnevu tudi Zemlja premakne na svoji tirnici okoli Sonca, ugotovimo, da je čas, v katerem satelit opravi točno en obhod - 360° -, nekoliko krajši od 1 dneva - za približno 4 minute. Tega popravka v nadaljevanju ne bomo upoštevali.)

(e) Geostacionarni satelit kroži po tirnici s polmerom r_{gs}, ki jo moramo izračunati. Pri enem obhodu opravi pot $s_{gs} = 2 \cdot \pi \cdot r_{gs}$.
Združimo dve zvezi za hitrost satelita, ki smo ju že zapisali ali uporabili,

$$v_{gs} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r_{gs}}} \qquad \text{in} \qquad v_{gs} = \frac{s_{gs}}{t_{gs}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{gs}}{t_{1dan}},$$

dobimo

$$\sqrt{\frac{G \cdot M}{r_{gs}}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{gs}}{t_{1dan}},$$

obe strani enačbe kvadriramo,

$$\frac{G \cdot M}{r_{gs}} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_{gs}^2}{t_{1dan}^2},$$

izrazimo r_{gs},

$$r_{gs}^3 = \frac{G \cdot M \cdot t_{1dan}^2}{4 \cdot \pi^2}$$

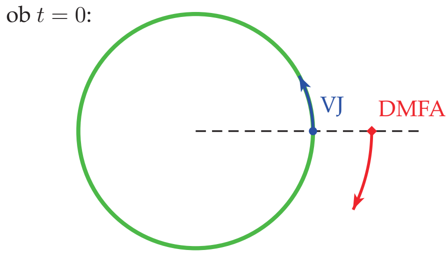
oziroma

$$\begin{aligned} r_{gs} &= \sqrt[3]{\frac{G \cdot M \cdot t_{1dan}^2}{4 \cdot \pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2} \cdot 6{,}0 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \cdot (86\,400\,\mathrm{s})^2}{\mathrm{kg}^2 \cdot (6{,}28)^2}} = \\ &= 42{,}3 \cdot 10^6\,\mathrm{m} = 42{,}3 \cdot 10^3\,\mathrm{km}. \end{aligned}$$

(f) Satelit DMFA kroži v ekvatorski ravnini po tirnici, ki ima polmer enak polmeru tirnice ISS satelita $r = 6776$ km, s hitrostjo, ki je enaka hitrosti ISS satelita, $v = 7{,}685\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$. Pri enem celem obhodu opravi pot $s = 42\,575$ km.

V trenutku $t = 0$ je v zenitu nad Viktorijinim jezerom v Afriki, in ob času t_1 je ponovno v zenitu nad isto točko. Medtem se nekoliko zasuče tudi Zemlja, zato satelit DMFA do t_1 ne opravi celega obhoda (in poti s), ampak je njegova pot s_1 manjša od s za del poti

ob $t = 0$:

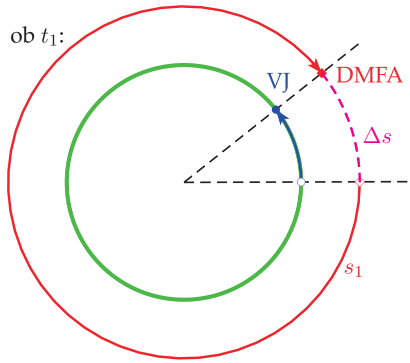


$$\Delta s = s \cdot \frac{t_1}{1\,\mathrm{dan}},$$

velja

$$s_1 = s - \Delta s = s - s \cdot \frac{t_1}{1\,\mathrm{dan}}.$$

ob t_1:



Satelit DMFA se giblje s hitrostjo v in velja tudi

$$s_1 = v \cdot t_1.$$

Izenačimo oba izraza za s_1,

$$v \cdot t_1 = s - s \cdot \frac{t_1}{1\,\mathrm{dan}}$$

in izrazimo čas t_1,

$$t_1 = \frac{s}{v + \frac{s}{1\,\mathrm{dan}}} = \frac{42\,575\,\mathrm{km}}{7{,}685\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} + \frac{42\,575\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{dan}}} = 5206\,\mathrm{s} = 86\,\mathrm{min}\,46\,\mathrm{s}.$$

C Eksperimentalna naloga

(a) Teža telesa je $4{,}5$ N $\pm 0{,}2$ N.
Masa telesa je $0{,}45$ kg $\pm 0{,}02$ kg.

(b) Pravilni odgovori na podvprašanja:

i. $F_A = 2{,}3$ N $\pm 0{,}2$ N.

ii. $F_A = 3{,}3$ N $\pm 0{,}2$ N.

iii. $F_A = 1{,}2$ N $\pm 0{,}2$ N.

(c) Pravilni odgovori na podvprašanja:

i. V našem primeru je bila palica dolga $32{,}0$ cm $\pm 0{,}5$ cm.

$L = 32$ cm $\pm 0{,}5$ cm $\qquad F_A = 1{,}2$ N $\pm 0{,}2$ N

$r = 14$ cm $\pm 0{,}4$ cm $\qquad F_B = 3{,}4$ N $\pm 0{,}2$ N

ii. Iz zapisane enačbe izrazimo F_g,

$$F_g = \frac{L}{2r} \cdot (F_B - F_A) = 2{,}4\,\mathrm{N}\ \pm 0{,}4\,\mathrm{N}.$$

Določimo maso 4 obročev, $m = 240$ g ± 40 g, in maso 1 obroča, $m_1 = 60$ g ± 10 g.

iii. Maso izračunamo tako, da od mase telesa odštejemo maso obročev, $m_p = (450\,\mathrm{g} \pm 20\,\mathrm{g}) - (360\,\mathrm{g} \pm 40\,\mathrm{g}) = (90\,\mathrm{g} \pm 60\,\mathrm{g})$.

(d) Pravilni odgovori na podvprašanja:

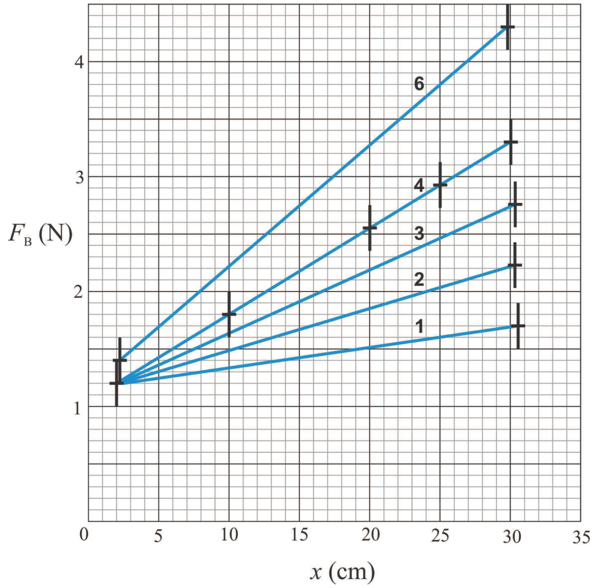
i. Graf

ii. 1 obroč:

2 obroča:

3 obroči:

iii. Teža palice s 6 obroči je $F' = F + 2 \cdot F_{g,1} = 4{,}5\,\mathrm{N} + 1{,}2\,\mathrm{N} = 5{,}7\,\mathrm{N} \pm 0{,}2\,\mathrm{N}$.
F je teža palice s 4 obroči, $F = 4{,}5\,\mathrm{N} \pm 0{,}2\,\mathrm{N}$.
$F_{g,1}$ je teža 1 obroča, $F_{g,1} = 0{,}6\,\mathrm{N} \pm 0{,}1\,\mathrm{N}$.



Rešitve 56. fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje

Rešitve skupine I

1. Višino škatle označimo z l, površino zgornje ploskve s S, maso škatle z m, gostoti vode in olja po vrsti z ρ_v in ρ_o, potopljeni del v vodo (ko je nad gladino zrak) z x, potopljeni del vodo v primeru (a), ko je nad njo olje, pa z x'. Težni pospešek označimo z g. V našem primeru je višina škatle $l = 12\,\mathrm{cm}$, $(l - x) = 1\,\mathrm{cm}$, torej je $x = 11\,\mathrm{cm}$, medtem ko je $x' = 3\,\mathrm{cm}$; $S = 7\ \mathrm{dm}^2$.

   a) Ko imamo opravka v posodi le z vodo, škatla plava na vodi, torej je sila teže škatle F_g uravnotežena s silo vzgona vode F_vzg. Sila vzgona je enaka teži izpodrinjene tekočine. Ker je volumen škatle enak Sl, ravnovesje zapišemo kot

$$F_\mathrm{g} = F_\mathrm{vzg}, \tag{1}$$
$$mg = \rho_v S x g, \tag{2}$$
$$m = \rho_v S x = 7{,}7\ \mathrm{kg}\,. \tag{3}$$

b) V primeru olja in vode imamo opravka z dvema silama vzgona, in sicer del škatle potopljen v vodo čuti silo vzgona $F_{\mathrm{vzg},v}$ zaradi izpodrinjene vode, medtem ko del škatle potopljen v olje čuti silo vzgona $F_{\mathrm{vzg},o}$ zaradi izpodrinjenega olja. Ravnotežje med silami vzgona in silo teže škatle zdaj zapišemo kot

$$F_{\mathrm{g}} = F_{\mathrm{vzg},v} + F_{\mathrm{vzg},o}, \tag{4}$$
$$mg = \rho v S x' g + \rho_o S(l - x')g, \tag{5}$$
$$m = \rho_v S x' + \rho_o S(l - x'). \tag{6}$$

Ko vstavimo maso škatle iz enačbe (3), dobimo

$$\rho_v S x = \rho_v S x' + \rho_o S(l - x'), \tag{7}$$
$$\rho_o = \rho_v \frac{x - x'}{l - x'} = 890\ \mathrm{kg}/m^3. \tag{8}$$

c) Masni tok vode v škatlo označimo s Φ_m, volumski tok z Φ_V, čas pritekanja s t. Masa škatle in vode v njej ob času t je enaka $m + \Phi_m t$. Takrat je skupna teža škatle in pritečene vode enaka sili vzgona izpodrinjene vode, katere volumen ustreza volumnu celotne škatle. Velja torej

$$(m + \Phi_m t)g = \rho_v S l g, \tag{9}$$
$$(m + \rho_v \Phi_V t) = \rho_v S l, \tag{10}$$
$$\Phi_V = \frac{\rho_v S l - m}{\rho_v t} = \frac{S(l - x)}{t} = 14\ \mathrm{mL/s} \tag{11}$$

Upoštevali smo povezavo med masnim in volumskim pretokom vode $\Phi_m = \rho_v \Phi_V$, ter maso škatle iz enačbe (3).

2. Mase uteži označimo z m_1, $m_2 = 4$ kg in $m_3 = 2{,}5$ kg, kot prikazuje slika v navodilu; $k_{tr} = 0{,}20$, $k_l = 0{,}30$. Sile na vsako od uteži so naslednje (glej sliko):

- Viseča utež: sila teže F_{g1} navzdol ter sila vrvi F_v navzgor
- Spodnja utež na mizi: sila teže F_{g2} navzdol, navpična sila zgornje uteži F_{23} navzdol, sila podlage F_0 navzgor, sila vrvi F_v v levo, vodoravna sila podlage F_{t2} v desno ter vodoravna sila zgornje uteži F_{t3} v desno.
- Zgornja utež na mizi: sila teže F_{g3}, sila spodnje uteži (podlage) F_{23} navzgor, ter vodoravna sila spodnje uteži F_{t3}.

Upoštevali smo, da je sila vrvi po velikosti v vrvi ves čas enaka, škripec le obrača njeno smer, ter da sta sili zgornje uteži na spodnjo in spodnje uteži na zgornjo nasprotno enaki.

a) Obravnavamo primer, ko je utež m_1 dovolj velika, da imamo ravno še opravka z ravnotežjem. To pomeni, da je vsota sil na vsako od uteži enaka 0, in sicer tako v navpični kot vodoravni smeri. Dobimo naslednje enačbe:

$$m_1,\ y: \quad F_{g1} = F_v, \tag{12}$$
$$m_2,\ x: \quad F_v = F_{t2} + F_{t3}, \qquad y: \quad F_{g2} + F_{23} = F_0, \tag{13}$$
$$m_3,\ x: \quad F_{t3} = 0, \qquad y: \quad F_{g3} = F_{23}. \tag{14}$$

Med utežema na mizi torej ni nobene vodoravne komponente. Vodoravna sila F_{t2} je največja možna sila lepenja, torej je enaka $F_{t2} = k_l\, F_0$. Za visečo utež torej dobimo

$$F_{g1} = F_v = F_{t2} = k_l F_0 = k_l(F_{g_2} + F_{g3}), \tag{15}$$
$$m_1 g = k_l\,(m_2 + m_3)g, \qquad m_1 = k_l\,(m_2 + m_3) = 1{,}95\ \mathrm{kg}. \tag{16}$$

b) Tokrat se celoten sistem giblje s pospeškom a, in sicer viseča utež navzdol, uteži na mizi pa v levo. Po 2. Newtonovem zakonu za vodoravno in navpično smer za vsako od klad dobimo naslednje enačbe:

$$m_1,\ y: \quad m_1 a = F_{g1} - F_v, \tag{17}$$
$$m_2,\ x: \quad m_2 a = F_v - F_{t2} - F_{t3}, \qquad y: \quad 0 = F_{g2} + F_{23} - F_0, \tag{18}$$
$$m_3,\ x: \quad m_3 a = F_{t3}, \qquad y: \quad 0 = F_{g3} - F_{23}. \tag{19}$$

Tokrat spodnja utež drsi po podlagi, tako da je vodoravna sila F_{t2} enaka sili trenja: $F_{t2} = k_{tr} F_0$. Zgornja utež pa ravno še ne zdrsne, tako da je sila med utežema na mizi enaka največji sili lepenja: $F_{t3} = k_l F_{23} = k_l F_{g3}$. S tem dobimo ključni pogoj za največji dovoljen pospešek a iz enačbe za zgornjo utež v x-smeri:

$$m_3 a = F_{t3} = k_l F_{g3} = k_l m_3 g, \tag{20}$$
$$a = k_l g = 2{,}94\ \mathrm{m/s^2}. \tag{21}$$

Nato se osredotočimo na enačbo za spodnjo utež, prav tako v x-smeri, od koder lahko določimo silo vrvi:

$$m_2 a = F_v - F_{t2} - F_{t3} = F_v - k_{tr} F_0 - m_3 a = F_v - k_{tr}(F_{g2} + F_{g3}) - m_3 a, \tag{22}$$
$$F_v = (m_2 + m_3)a + k_{tr}(m_2 + m_3)g = (k_l + k_{tr})(m_2 + m_3)g. \tag{23}$$

Maso viseče uteži nato določimo iz enačbe za to utež v y-smeri:

$$m_1 a = F_{g1} - F_v, \tag{24}$$
$$m_1(g - a) = F_v = (k_l + k_{tr})(m_2 + m_3)g, \tag{25}$$
$$m_1 = \frac{k_l + k_{tr}}{1 - k_l}(m_2 + m_3) = 4{,}6\ \mathrm{kg}. \tag{26}$$

3. $h = 20$ m, $v_0 = 50$ m/s, $l = 50$ m.

a) Naj Batman izstreli pajka ob času t_a. V tistem trenutku se nahaja na razdalji

$$y = h + \frac{1}{2} g t_a^2$$

pod stropom in se giblje s hitrostjo $u = g t_a$ navzdol. Izstreljeni pajek ima ob času t_a zato hitrost navzgor $v_0 - u$ in mora s to hitrostjo premagati višino y do stropa. V mejnem primeru mora biti hitrost pajka, ko se zaleti v strop, enaka nič. Iz enačbe za pot pri enakomerno pospešenem gibanju z znano začetno hitrostjo in pospeškom ter končno hitrostjo nič sledi

$$2gy = (v_0 - u)^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{(v_0 - u)^2}{2g}$$

oziroma

$$h + \frac{1}{2} g t_a^2 = \frac{1}{2g}\left(v_0 - g t_a\right)^2$$

in od tu

$$t_a = \frac{v_0}{2g} - \frac{h}{v_0} = 2{,}1510\ \mathrm{s} \approx 2{,}15\ \mathrm{s}.$$

b) Nalogo najhitreje in najbolj elegantno rešimo, če jo rešujemo v koordinatnem sitemu prosto padajoče ploščadi. Ker gre za kinematiko, nas ne skrbijo ne sistemski pospeški ne kaj podobnega, zanima nas le opis gibanja v tem koordinatnem sistemu.

Z vidika ploščadi se lega stropa $z(t)$ s časom spreminja po enačbi

$$z(t) = h + \frac{1}{2} g t^2\ ,$$

kjer je t merjen od trenutka, ko začne ploščad padati. Ker na pajka od izstrelitve naprej deluje isti težni pospešek kot na ploščad, se z vidika ploščadi pajek po izstrelitvi giblje enakomerno s hitrostjo v_0 navpično navzgor. Višina pajka nad ploščadjo $y(t')$ je od časa t', ki ga merimo od trenutka izstrelitve pajka, enaka

$$y(t') = v_0 t' \ .$$

Batman se ravno še reši, če se nahaja v trenutku, ko pajek zadane strop, na razdalji $z(t_2) = l$ pod stropom, od koder sledi, da mora pajek zadeti strop v trenutku

$$t_2 = \sqrt{\frac{2(l-h)}{g}} = 2{,}47436 \text{ s} \approx 2{,}47 \text{ s},$$

merjeno od začetka padanja ploščadi. Po drugi strani mora pajek v času t' preleteti isto razdaljo l, saj je to dolžina vrvice

$$l = v_0 t' \qquad \longrightarrow \qquad t' = \frac{l}{v_0} = 1 \text{ s}.$$

Iz obeh rezultatov je očitno, da mora Batman izstreliti pajka najkasneje $t_b = t_2 - t'$ od začetka padanja ploščadi

$$t_b = t_2 - t' \approx 1{,}47 \text{ s}.$$

4. $l_1 = 15$ cm, $k_1 = 10$ N/cm, $l_2 = 5$ cm, $k_2 = 50$ N/cm, $l_3 = 3$ cm, $m = 20$ kg, $m_p = 2$ kg.

a) Vsa kinetična energija pretvori v prožnostno. Vzmeti imata različna raztezka, $l_1 - l_3$ in $l_2 - l_3$. Velja

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}k_1(l_1 - l_3)^2 + \tfrac{1}{2}k_2(l_2 - l_3)^2 = 8{,}2 \text{ J}\,, \qquad v = 0{,}91 \text{ m/s}\,.$$

b) Pri trku s prvo ploščo pride do neprožnega trka. Po trku ima voziček hitrost

$$v' = v\,\frac{m}{m + m_p} = 0{,}83 \text{ m/s}$$

in kinetično energijo

$$W'_{\text{kin}} = \tfrac{1}{2}(m + m_p)v'^2 = 7{,}45 \text{ J}\,.$$

Na poti do do druge plošče se hitrost zmanjša na račun prožnostne energije prve vzmeti. Za končno kinetično energijo velja

$$\tfrac{1}{2}(m + m_p)v''^2 = \tfrac{1}{2}(m + m_p)v'^2 - \tfrac{1}{2}k_1(l_2 - l_3)^2 = 2{,}45 \text{ J}\,.$$

Hitrost tik pred trkom z drugo ploščo je

$$v'' = \sqrt{v'^2 - \frac{k_1}{(m + m_p)}(l_1 - l_2)^2} = 0{,}47 \text{ m/s}.$$

c) Če označimo razdaljo do stene z x, velja

$$W'_{\text{kin}} = \tfrac{1}{2}k_1(l_1 - x)^2 + \tfrac{1}{2}k_2(l_2 - x)^2$$

in x zadošča kvadratni enačbi:

$$\tfrac{1}{2}(k_1 + k_2)x^2 - (k_1 l_1 + k_2 l_2)x + \tfrac{1}{2}k_1 l_1^2 + \tfrac{1}{2}k_2 l_2^2 - W'_{\text{kin}}\,.$$

Če merimo x v centimetrih, se enačba poenostavi v:

$$0{,}3\,x^2 - 4x + 10{,}05 = 0$$

s smiselno rešitvijo

$$x = 3{,}3 \text{ cm}\,.$$

Druga rešitev, $x_2 = 13$ cm, ni smiselna, saj je $x_2 > l_2$.

Rešitve skupine II

1. $C_1 = 1{,}0\,\text{nF}$, $C_2 = 2{,}5\,\text{nF}$, $R_1 = 2R$, $R_2 = R_3 = R$, $R = 50\,\Omega$, $U = 20$ V.

   Za vsakega od upornikov označimo njegov upor, tok skozenj in padec napetosti po vrsti z R_i, I_i in U_i. Uporniki so oštevilčeni, kot kaže slika iz navodil. Kondenzatorja imata kapaciteti C_1 in C_2, padca napetosti U_1' in U_2', na njiju se nabereta naboja e_1 in e_2. Napetost generatorja označimo z U.

   Za upornike velja Ohmov zakon $U_i = R_i I_i$, za kondenzatorje pa povezava med nabojem in napetostjo z zvezo $U_i' = e_i/C_i$. Za izračun naboja e_2 na drugem (spodnjem) kondenzatorju zadošča, da določimo padec napetosti na tem kondenzatorju U_2'. Po dolgem času tok v vejah s kondenzatorji ne teče več, s e je pa na njih nabral naboj.

   a) Med priključkoma A in D je napetost U. Po 2. Kirchhoffovem zakonu bo poljubna pot od priključka A do D morala dati skupen padec napetosti na vseh elementih enak U. Izberemo si pot po srednji veji čez oba upornika:

$$U = U_1' + U_2' = e_1/C_1 + e_2/C_2. \tag{1}$$

   Ker sta kondenzatorja vezana zaporedno, se bo na njiju nabral enak naboj, torej $e := e_1 = e_2$. Zato dobimo

$$e_2 = e = U/(1/C_1 + 1/C_2) = 1{,}43 \cdot 10^{-8}\ \text{As}. \tag{2}$$

   b) Med priključkoma A in D je ponovno napetost U, le da sta tokrat priključka B in C povezana z žico, in zato na enaki napetosti. Tokrat zapišemo 2. Kirchhoffov zakon za dve poti: prva pot vodi prek upornikov R_2 in R_3, druga pot pa prek upornika R_2 ter kondenzatorja C_2. Dobimo

$$U = U_2 + U_3, \qquad U = U_2 + U_2'.$$

   Iz zgornjih enačb vidimo, da je padec napetosti na uporniku R_3 in kondenzatorju C_2 enak. Ker v vejah s kondenzatorji ne teče noben tok, tudi po žici med priključkoma B in C ni toka, zato teče skozi R_2 in R_3 enak tok $I := I_2 = I_3$. Velja torej $U = I(R_2 + R_3)$, padec napetosti na R_3 je torej

$$U_3 = I\,R_3 = U R_3/(R_2 + R_3),$$

   in zato je naboj na drugem kondenzatorju enak

$$e_2 = U_2'\,C_2 = U_3\,C_2 = U C_2\ R_2/(R_2 + R_3) = 2{,}5 \cdot 10^{-8}\ \text{As}.$$

   c) Tokrat je napetost U med priključkoma A in C, brez dodatnih žic. Padce napetosti obravnavamo na dveh različnih poteh: prva pot je prek upornikov R_1 in R_3, druga pot pa prek kondenzatorjev C_1 in C_2 ter nato prek upornika R_3. Po 2. Kirchhoffovem zakonu dobimo

$$U = U_1 + U_3, \qquad U = U_1' + U_2' + U_3.$$

   Skupen padec napetosti na kondenzatorjih je enak padcu napetosti na uporniku R_1. Kondenzatorja sta ponovno vezana zaporedno in imata enak nabran naboj, in ker v njuni veji ne teče noben tok je tok skozi upornika R_1 in R_3 enak. Definiramo $e := e_1 = e_2$ in $I := I_1 = I_3$. Zgornje enačbe za padce napetosti se prepišejo v

$$U = I(R_1 + R_3), \qquad U = e/C_1 + e/C_2 + IR_3,$$

   od koder za naboj e dobimo

$$e = \frac{U - IR_3}{1/C_1 + 1/C_2} = U\ \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\ \frac{R_1}{R_1 + R_3} = 9{,}5 \cdot 10^{-9}\ \text{As}.$$

2. $S = 20\ \mathrm{dm}^2 = 0{,}20\ \mathrm{m}^2$, $m = 5$ kg, $P_0 = 400$ W, $U = 220$ V, $c = 4200$ J/kg K, $R = 100\ \Omega$, $\Delta T = 2$ K, $T_0 = 20$ °C, $T_1 = 27$ °C, $T_2 = 29$ °C, $t_b = 110$ s.

a) Prejeta moč gre za segrevanje vode

$$mc\Delta T = P_0 t_a \qquad \Longrightarrow \qquad t_a = \frac{mc\Delta T}{P_0} = 105\ \mathrm{s}.$$

b) Med segrevanjem je povprečen toplotni tok skozi stene približno tak, kot da bi bila v posodi povprečna temperatura med začetno 20 °C in končno 22 °C. Povprečna temperaturna razlika, ki žene toplotni tok je torej $\Delta T' = \frac{1}{2}\Delta T$. Velja

$$mc\Delta T = \left(P_0 - kS\Delta T'\right) t_b$$

oziroma

$$P_0 t_a = \left(P_0 - kS\Delta T'\right) t_b \qquad \Longrightarrow \qquad k = \frac{2P_0}{S\Delta T}\left(1 - \frac{t_a}{t_b}\right) = 90{,}91\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}} \approx 91\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}}\ .$$

c) Segrevanje se ustavi, ko so izgube skozi steno enake moči grelca

$$P_0 = kS(T_k - T_0) \qquad \Longrightarrow \qquad T_k = T_0 + \frac{P_0}{kS} = T_0 + \Delta T\frac{t_b}{2(t_b - t_a)} = 42\,°\mathrm{C}.$$

d) Moč grelca z uporom R je $P = U^2/R = 484$ W. Oceno toplotnega toka skozi stene dobimo iz povprečne temperature vode $\hat{T}$ med segrevanjem od T_1 do T_2, $\hat{T} = (T_1 + T_2)/2 = 28$ °C. Podobno kot pri b) velja

$$mc\Delta T = \Big(P - kS(\hat{T} - T_0)\Big)\, t_d$$

in od tu

$$t_d = \frac{mc\Delta T}{P - kS(\hat{T} - T_0)} = 124{,}06\ \mathrm{s} \approx 124\ \mathrm{s}.$$

e) Pri zaporedno vezanih grelcih se seštejeta upora in je zato moč manjša

$$P_e = \frac{U^2}{R + R_0} = P_0\frac{R_0}{R + R_0} = 219\ \mathrm{W},$$

kjer je R_0 upor grelca iz a) dela naloge $R_0 = U^2/P_0 = 121\ \Omega$. Za čas segrevanja dobimo

$$t_e = \frac{mc\Delta T}{P_e - kS(\hat{T} - T_0)} = 571{,}04\ \mathrm{s} \approx 571\ \mathrm{s} \approx 9{,}5\ \mathrm{min}.$$

3. $U = 1000$ V, $m_C = 2{,}0 \cdot 10^{-26}$ kg, $r = 8{,}0$ cm, $M_O/M_C = 4/3$.

a) Pri pospeševanju v električnem polju je kinetična energija na koncu enaka električnemu delu. Od tod sledi

$$\tfrac{1}{2}m_C v^2 = e_0 U\,, \qquad v = \sqrt{\frac{2e_0U}{m_C}} = 1{,}27 \cdot 10^5\ \mathrm{m/s}\,.$$

V magnetnem polju naredi pot, ki je enaka ravno četrtini obsega krožnice, torej je polmer krožnice enak polmeru tuljave. Pri enakomernem kroženju je radialni pospešek enak magnetni sili

$$m_C\frac{v^2}{r} = e_0 vB\,, \qquad B = \frac{mv}{e_0 r} = 0{,}20\ \mathrm{T}\,.$$

Smer sile je določena z vektorskim produktom med hitrostjo in magnetnim poljem:

$$\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B} = -e_0\vec{v} \times \vec{B}\,.$$

Da bo smer sile v levo (glede na smer hitrosti), mora biti smer polja **iz lista**.

b) Iz enačb pri a) izrazimo napetost z maso iona m:

$$U = \frac{mv^2}{2e_0} = \frac{m^2v^2}{2me_0} = \frac{e_0 r^2 B^2}{2m}\,.$$

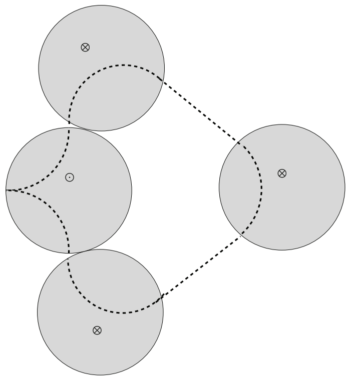
Pri konstantnem naboju polmeru in gostoti polja je potrebna napetost obratno sorazmerne z maso. Torej

$$\frac{U_O}{U_C} = \frac{m_C}{m_O} = \frac{M_C}{M_O} = \frac{3}{4}\,, \qquad U_0 = 750\ \mathrm{V}\,.$$

c) Če v tuljavah ne bi bilo polja, bi ion na poti skozi tuljave opravil pot $4r$ in za to potreboval čas $t_0 = 4r/v$; ob prisotnosti polja pa opravi pot, ki je ravno enaka obsegu tuljave. Hitrost ostane enaka začetni, saj magnetna sila deluje pravokotno na smer gibanja in velikosti hitrosti ne spreminja. Časovni zaostanek je enak

$$\Delta t = \frac{2\pi r}{v} - \frac{4r}{v} = \frac{2(\pi-2)r}{v} = 1{,}43\ \mu\mathrm{s}\,.$$

d)



4. $l = 180$ cm, $A = 12$ bar, $r_0 = 15$ mm, $p_1 = 2$ bar, $p_0 = 1$ bar, $T = 20\,^\circ$C.

Začetni polmer določimo kar z obračanjem podane zveze:

$$r_1 = r_0\left(1 - \frac{\Delta p}{A}\right)^{-1} = 16{,}36\ \mathrm{mm}\,.$$

Iz tega si izračunamo maso zraka v zračnici:

$$m_1 = \frac{p_1 VM}{RT} = \frac{p_1 \pi r_1^2 l M}{RT} = 3{,}57\ \mathrm{g}\,.$$

Tej masi dodamo maso $\frac{p_0 VM}{RT} = 0{,}88$ g, skupaj je to $m_2 = 4{,}45$ g.

V prejšnjem stanju smo po plinski enačbi imeli

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{MRT}$$

v novem stanju pa

$$p_2 V_2 = \frac{m_2}{MRT}\,.$$

Enačbi delimo, upoštevamo še $V = \pi r^2 l$ in dobimo

$$\frac{p_1 r_1^2}{p_2 r_2^2} = \frac{m_1}{m_2}\,,$$

velja pa tudi enačba zračnice

$$p_2 - p_0 = A\left(1 - \frac{r_0}{r_2}\right)\,.$$

Z eliminacijo tlaka p_2 dobimo

$$\frac{p_1 r_1^2 m_2}{r_2^2 m_1} = p_0 + A\left(1 - \frac{r_0}{r_2}\right)\,.$$

Množimo z r_2^2 in dobimo kvadratno enačbo:

$$r_2^2\,(p_0 + A) - A r_0 r_2 - \frac{p_1 r_1^2 m_2}{m_1} = 0\,,$$

iz česar sledi

$$r_2 = 16{,}9\ \mathrm{mm}\,.$$

Tlak pa kar iz enačbe zračnice:

$$p_2 = 2{,}34\ \mathrm{bar}\,.$$

Rešitve skupine III

1. $S = 20\ \mathrm{dm}^2 = 0{,}20\ \mathrm{m}^2$, $m = 5$ kg, $P_0 = 400$ W, $U = 220$ V, $c = 4200$ J/kg K, $\Delta T = 2$ K, $T_0 = 20$ °C, $T_1 = 35$ °C, $\alpha = 0{,}00567\ \mathrm{K}^{-1}$, $t_b = 110$ s.

a) Prejeta moč gre za segrevanje vode

$$mc\Delta T = P_0 t_a \qquad \Longrightarrow \qquad t_a = \frac{mc\Delta T}{P_0} = 105\ \mathrm{s}.$$

b) Med segrevanjem je povprečen toplotni tok skozi stene približno tak, kot da bi bila v posodi povprečna temperatura med začetno 20 °C in končno 22 °C. Povprečna temperaturna razlika, ki žene toplotni tok je torej $\Delta T' = \frac{1}{2}\Delta T$. Velja

$$mc\Delta T = \left(P_0 - kS\Delta T'\right) t_b$$

oziroma

$$P_0 t_a = \left(P_0 - kS\Delta T'\right) t_b \qquad \Longrightarrow \qquad k = \frac{2P_0}{S\Delta T}\left(1 - \frac{t_a}{t_b}\right) = 90{,}91\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}} \approx 91\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K}}\ .$$

c) Segrevanje se ustavi, ko je toplotni tok skozi stene enake moči grelca

$$P_0 = kS(T_c - T_0) \qquad \Longrightarrow \qquad T_c = T_0 + \frac{P_0}{kS} = T_0 + \Delta T\frac{t_b}{2(t_b - t_a)} = 20\,{}^\circ\mathrm{C} + 22\,{}^\circ\mathrm{C} = 42\,{}^\circ\mathrm{C}.$$

d) Moč grelca z uporom R je $P = U^2/R$, torej se moč grelca s temperaturo spreminja kot

$$P(T) = \frac{P_0}{1 + \alpha(T - T_0)}$$

Izraz iz c) dela naloge se tako spremeni v

$$T_d = T_0 + \frac{P(T_d)}{kS} = T_0 + \frac{P_0}{kS}\,\frac{1}{1 + \alpha(T_d - T_0)} = T_0 + \Delta T\frac{t_b}{2(t_b - t_a)}\,\frac{1}{1 + \alpha(T_d - T_0)}\ .$$

Od tu dobimo kvadratno enačbo za T_d z rešitvijo $T_d = 39{,}78$ °C≈ 39,8 °C.

Bolj fizikalno lahko do rešitve pridemo tudi iterativno. Definirajmo

$$\delta T \equiv \Delta T \frac{t_b}{2(t_b - t_a)} = 22 \text{ K}$$

in enačbo za T_d preoblikujmo v

$$T_d - T_0 = T_0 + \frac{\delta T}{1 + \alpha(T_d - T_0)} \ .$$

Ker je $\alpha\delta T = 0{,}12474$ precej manj od 1, v prvem približku namesto $T_d - T_0$ vzamemo kar rešitev iz c) dela naloge 22 K. Od tu dobimo za $T_d - T_0$ približek $T_d - T_0 = 19{,}56$ K. S tem približkom na desni strani enačbe že dobimo na levi $T_d - T_0 = 19{,}804$ K, kar je končna rešitev. Če nismo zadovoljni, naredimo še eno iteracijo in dobimo $T_d - T_0 = 19{,}779$ K. Končna rešitev je $T_d \approx 39{,}8$ °C. Seveda lahko iterativno reševanje izpustimo in rešimo kvadratno enačbo, kjer je ena rešitev negativna, druga pa pravilna.

e) Mala količina toplote, ki jo prejme voda v kratkem času dt, povzroči majhno spremembo temperature dT. Energjska bilanca je

$$mc\,dT = \left[\frac{P_0}{1 + \alpha(T - T_0)} - kS(T - T_0)\right] dt = P_0 \left[\frac{1}{1 + \alpha(T - T_0)} - \frac{2(t_b - t_a)}{\Delta T t_b}(T - T_0)\right] dt$$

oziroma

$$\frac{dT}{dt} = \frac{P_0}{mc}\left[\frac{1}{1 + \alpha(T - T_0)} - \frac{2(t_b - t_a)}{\Delta T t_b}(T - T_0)\right] \approx \frac{P_0}{mc}\left[1 - \left(\alpha + \frac{2(t_b - t_a)}{\Delta T t_b}\right)(T - T_0)\right] \ ,$$

ker je produkt $\alpha\delta T$ dovolj majhen, da naredimo približen razvoj

$$\frac{1}{1 + \alpha(T - T_0)} \approx 1 - \alpha(T - T_0) \ .$$

vidimo, da je odvisnost hitrosti od temperature približno linearna s koeficientom $k = -5{,}11 \cdot 10^{-2}\ \text{K}^{-1}$, če zapišemo

$$\frac{dT}{dt} = \frac{P_0}{mc}\left[1 - k(T - T_0)\right] \ ,$$

Pri $T = T_0$ dobimo hitrost segrevanja $19{,}05 \cdot 10^{-3}$ K/s, pri $T = T_1$ pa $4{,}44 \cdot 10^{-3}$ K/s.

2. $m = 1$ kg, $l = 50$ cm, $r = 10$ cm, $\varphi_0 = 30°$.

a) V ravnovesju je navor uteži nasprotno enak navoru palice in sledi:

$$m_u g r = mg\frac{l}{2}\sin\varphi_0 \, , \qquad m_u = \frac{ml}{4l} = 1{,}25 \text{ kg} \, .$$

b) Enačba za ravnovesje

$$m_u g r = mg\frac{l}{2}\sin\varphi$$

ima za m_u iz a) splošno rešitev

$$\sin\varphi = \frac{1}{2} \, .$$

Poleg rešitve s $\varphi = \varphi_0 = 30°$, obravnavane pri a), ima drugo rešitev pri

$$\varphi \equiv \varphi_2 = 150° \, .$$

Ravnovesno stanje je v tem primeru **labilno**. Če malo povečamo kot, se navor palice zmanjša, in palica se prične gibati proti večjim vrednostim φ. Če pa se kot malo zmanjša, se poveča navor palice, in kot se prične zmanjševati.

c) Palica mora ravno doseči drugo ravnovesno lego pri φ_2; v tej legi sistem za trenutek obmiruje, nato pa utež potegne palico do končne lege pri $\varphi = 180°$. (Palica sicer nadaljuje vrtenje dokler utež ne doseže tal.) Končno lego pri računu ohranitve vsote kinetične in potencialne energije bomo torej postavili v drugo ravnovesno lego pri $\varphi = \varphi_2 = 150°$. Kinetična energija je tu nič, končna lega za račun potencialne energije je pri φ_2 in začetna pri φ_0.

Kinetična energija na začetku je enaka vsoti kinetične energije uteži in rotacijske kinetične energije palice, ki se vrti okoli krajišča:

$$W_{\rm kin} = \tfrac{1}{2}m_u v^2 + \tfrac{1}{2}J\omega^2 = \tfrac{1}{2}m_u r^2\omega^2 + \frac{1}{6}ml^2\omega^2\,,$$

saj je hitrost uteži enaka obodni hitrosti vretena. Z upoštevanjem rešitve pri a) sledi

$$W_{\rm kin} = \frac{ml}{24}\,(3r+4l)\,\omega^2\,.$$

Potencialna energija uteži se spremeni za

$$W_{\rm pot,u} = m_u g h, \qquad h = -r(\varphi_2 - \varphi_0)\,, \qquad \varphi_2 - \varphi_0 = 120° = \frac{2\pi}{3}\,.$$

Višino težišča palice zapišemo kot $z = \frac{1}{2}l(1-\cos\varphi)$, če je izhodišče pri $\varphi = 0$. Potencialna energija palice se poveča za

$$\Delta W_{\rm pot,p} = mg\,\frac{l}{2}\,(1-\cos\varphi_2) - mg\,\frac{l}{2}\,(1-\cos\varphi_0) = mg\,\frac{l}{2}\,(\cos\varphi_0 - \cos\varphi_2)\,.$$

Z upoštevanjem rešitve pri a) sledi za skupno spremembo

$$\Delta W_{\rm pot} = -\frac{mgl}{4}\,(\varphi_2 - \varphi_0 + 2(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_0))\,\,.$$

Iz ohranitve energije sledi

$$\omega = \sqrt{\frac{6g\,(2(\cos\varphi_0 - \cos\varphi_2) - \varphi_2 + \varphi_0)}{3r+4l}} = 5{,}9\ {\rm s}^{-1}\,, \qquad v = \omega r = 59\ {\rm cm/s}.$$

d) V zgornji legi ima sistem palice in uteži kinetično energijo, ki je enaka spremembi potencialne energije, ko se palica premakne iz ravnovesne lege pri $\varphi_2 = 150°$ do $\varphi = 180°$.

Končno kinetično energijo zapišemo tako kot v primeru c):

$$W_{\rm kin} = \tfrac{1}{2}m_u v^2 + \tfrac{1}{2}J\omega^2 = \tfrac{1}{2}m_u r^2\omega^2 + \frac{1}{6}ml^2\omega^2\,,$$

Potencialna energija uteži se spremeni za

$$W_{\rm pot,u} = -m_u g r\Delta\varphi_2 \qquad \Delta\varphi_2 = 180° - 150° = \frac{\pi}{6}\,.$$

Potencialna energija palice se poveča za

$$W_{\rm pot,p} = mg\,\frac{l}{2}\,(1-\cos\pi) - mg\,\frac{l}{2}\,(1-\cos\varphi_2) = mg\,\frac{l}{2}\,(1+\cos\varphi_2)$$

Z upoštevanjem rešitve pri a) sledi za skupno spremembo

$$W_{\rm pot} = -\frac{mgl}{4}\,(\Delta\varphi_2 - 2(1+\cos\varphi_2))$$

Iz ohranitve energije sledi

$$\omega = \sqrt{\frac{6g\,(\Delta\varphi_2 - 2(1+\cos\varphi_2))}{3r+4l}} = 2{,}56\ {\rm s}^{-1}\,.$$

3. $U = 1000$ V, $m_C = 2{,}0 \cdot 10^{-26}$ kg, $r = 8{,}0$ cm, $M_O/M_C = 4/3$.

a) Pri pospeševanju v električnem polju je kinetična energija na koncu enaka električnemu delu. Od tod sledi

$$\tfrac{1}{2} m_C v^2 = e_0 U\,, \qquad v = \sqrt{\frac{2e_0 U}{m_C}} = 1{,}27 \cdot 10^5 \text{ m/s}\,.$$

V magnetnem polju naredi pot, ki je enaka ravno četrtini obsega krožnice, torej je polmer krožnice enak polmeru tuljave. Pri enakomernem kroženju je radialni pospešek enak magnetni sili

$$m_C \frac{v^2}{r} = e_0 v B\,, \qquad B = \frac{mv}{e_0 r} = 0{,}20 \text{ T}\,.$$

Smer sile je določena z vektorskim produktom med hitrostjo in magnetnim poljem:

$$\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B} = -e_0 \vec{v} \times \vec{B}\,.$$

Da bo smer sile v levo (glede na smer hitrosti), mora biti smer polja **iz lista**.

b) Iz enačb pri a) izrazimo napetost z maso iona m:

$$U = \frac{mv^2}{2e_0} = \frac{m^2v^2}{2me_0} = \frac{e_0 r^2 B^2}{2m}\,.$$

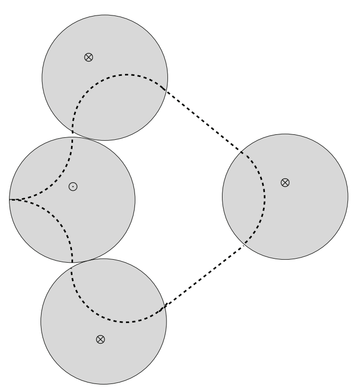
Pri konstantnem naboju polmeru in gostoti polja je potrebna napetost obratno sorazmerne z maso. Torej

$$\frac{U_O}{U_C} = \frac{m_C}{m_O} = \frac{M_C}{M_O} = \frac{3}{4}\,, \qquad U_0 = 750 \text{ V}\,.$$

c) Če v tuljavah ne bi bilo polja, bi ion na poti skozi tuljave opravil pot $4r$ in za to potreboval čas $t_0 = 4r/v$; ob prisotnosti polja pa opravi pot, ki je ravno enaka obsegu tuljave. Hitrost ostane enaka začetni, saj magnetna sila deluje pravokotno na smer gibanja in velikosti hitrosti ne spreminja. Časovni zaostanek je enak

$$\Delta t = \frac{2\pi r}{v} - \frac{4r}{v} = \frac{2(\pi - 2)r}{v} = 1{,}43\ \mu\text{s}\,.$$

d)



4. $m_b = 1,0$ g, $V = 5$ L, $T = 293$ K, $p = 100$ kPa, $M_{\mathrm{He}} = 4$ kg/kmol, $M_{\mathrm{z}} = 29$ kg/kmol, $l_0 = 100$ cm.

a) Maso helija določimo iz splošne plinske enačbe:

$$m_{\mathrm{He}} = \frac{pM_{\mathrm{He}}V}{RT} = 0{,}82 \text{ g}\,.$$

Vzgon okoliškega zraka je enak teži izpodrinjenega zraka:

$$F_v = m_z g\,, \qquad m_z = \frac{pM_{\mathrm{z}}V}{RT} = 5{,}96 \text{ g}\,.$$

Ko balon odmaknemo iz ravnovesne lege, nanj deluje sila palice, ki ima smer proti osi, v navpični smeri pa sila teže balona skupaj s helijem in vzgon. Rezultanta kaže v smeri gibanja balona in je po velikosti enaka

$$F = (m_z g - m_{\mathrm{He}} - m_b)g \tan\varphi,$$

če je φ kot med navpičnico in palico. Za majhne kote velja $\tan\varphi \approx \varphi$. Tako kot pri matematičnem nihalu izrazimo kot z odmikom iz ravnovesne lege, s, in razdaljo do osi, l: Rezultanta sil kaže proti ravnovesni legi:

$$F = -(m_z g - m_{\mathrm{He}} - m_b)g\,\frac{s}{l}\,.$$

Po 2. Newtonovem zakonu je $(m_b + m_{\mathrm{He}})a = F$. Pospešek pri nihanju zapišemo kot $a = -\omega^2 s$ in iz

$$-(m_{\mathrm{He}} + m_b)\omega^2 s = -(m_z g - m_{\mathrm{He}} - m_b)g\,\frac{s}{l}$$

sledi

$$\omega = \frac{2\pi}{t_0} = \sqrt{\frac{(m_z - m_{\mathrm{He}} - m_b)g}{(m_{\mathrm{He}} + m_b)l}} = 4{,}7 \text{ s}^{-1}\,, \qquad \nu = 0{,}7 \text{ s}^{-1}\,, \qquad t_0 = 1{,}4 \text{ s}\,.$$

pri čemer smo za l vstavili kar dolžino palice. Pri točnejši obravnavi bi morali vzeti razdaljo do težišča balona, $l^* = l + r$, kjer je r polmer balona

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 10{,}6 \text{ cm}.$$

V tem primeru se ω zmanjša za 5 %, $\omega = 4{,}5 \text{ s}^{-1}$.

Sistem lahko obravnavamo tudi kot fizično nihalo. Če balon na palici odmaknemo za majhen kot iz ravnovesne lege, lahko navor zapišemo kot

$$M = F_{\mathrm{vzg}} l \sin\varphi - (m_{\mathrm{He}} + m_b)l \sin\varphi \approx (m_z - (m_{\mathrm{He}} + m_b))gl\varphi \equiv D\varphi\,.$$

Vztrajnostni moment sistema je

$$J = (m_{\mathrm{He}} + m_b)l^2$$

saj balon po predpostavki obravnavamo kot točkasto telo. Dobimo enak rezultat kot pri izpeljavi s silami:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J}} = \sqrt{\frac{(m_z - m_{\mathrm{He}} - m_b)g}{(m_{\mathrm{He}} + m_b)l}}\,.$$

b) Če masa palice ni zanemarljiva, moramo sistem obravnavati kot fizično nihalo. Upoštevamo tudi, da balon ni točkasto telo. Navor pri a) se spremeni:

$$\begin{aligned}
M &= F_{\mathrm{vzg}}(l+r)\sin\varphi - (m_{\mathrm{He}}+m_b)(l+r)\sin\varphi - m_p g\,\frac{l}{2}\sin\varphi \\
&\approx \left[(m_z - m_{\mathrm{He}} - m_b)(l+r) - m_p\,\frac{l}{2}\right] g\varphi \\
&\equiv D\varphi\,. \\
D &= \left[(m_z - m_{\mathrm{He}} - m_b)(l+r) - m_p\,\frac{l}{2}\right] g \\
&= 44{,}8\ \mathrm{mN\,m} - 9{,}8\ \mathrm{mN\,m} = 35{,}0\ \mathrm{mN\,m}
\end{aligned}$$

Vztrajnostni moment pa je enak

$$\begin{aligned}
J &= (m_{\mathrm{He}}+m_b)(l+r)^2 + \frac{1}{3}\,m_p l^2 + \frac{2}{5}\,m_{\mathrm{He}} r^2 + \frac{2}{3}\,m_b r^2\,. \\
&= 2{,}18\ \mathrm{gm}^2 + 0{,}67\ \mathrm{gm}^2 + 0{,}003\ \mathrm{gm}^2 + 0{,}007\ \mathrm{gm}^2 = 2{,}86\ \mathrm{gm}^2
\end{aligned}$$

Znatno prispeva le vztrajnostni moment palice, vztrajnostni moment balona s helijem okoli svojega težišča je zanemarljiv.

Dobimo

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J}} = 3{,}50\ \mathrm{s}^{-1}\,, \qquad \nu = 0{,}56\ \mathrm{s}^{-1}\,, \qquad t_0 = 1{,}79\ \mathrm{s}\,.$$