

Tekmovanja

54. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje – državno tekmovanje

Naloge za 5. razred

A1. Če od trikratnika nekega števila odštejemo 7, dobimo 2018. Katero število je to?

- (A) 674 (B) 675 (C) 676 (D) 678 (E) 679

A2. Babica Milena je vsakemu izmed svojih treh vnukov dala enako veliko čokolado. Bor jo je razdelil na 15 enako velikih koščkov in jih pojedel 11, Samo jo je razdelil na 10 koščkov in jih pojedel 7, Jani pa jo je razdelil na 30 koščkov in jih pojedel 25. Kateremu je ostalo največ čokolade?

- (A) vsem trem enako (B) Boru (C) Samu (D) Janiju
(E) ne moremo ugotoviti

A3. Letalo je poletelo iz New Yorka dne 13. 4. 2018 ob 15.59 po lokalnem času in pristalo v Parizu po 7 urah in 26 minutah. Ko je v New Yorku ura 13.00, je v Parizu ura 19.00. Kdaj po lokalnem času in na kateri datum je letalo pristalo v Parizu?

- (A) 13. 4. 2018 ob 5.25 (B) 13. 4. 2018 ob 17.25 (C) 13. 4. 2018 ob 23.25
(D) 14. 4. 2018 ob 5.15 (E) 14. 4. 2018 ob 5.25

A4. V Račji vasi je četrtek dan za tržnico, kjer si kmetje izmenjujejo domače živali. Ena rasa je vredna dve kokoši, za eno kravo dobiš eno kozo in tri race, za eno kozo pa dobiš dve raci in dve kokoši. Največ koliko kokoši dobi kmet za eno kravo?

- (A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 16

A5. Peter je račun za 45 € plačal z bankovcem za 100 €. Na koliko načinov mu lahko blagajničarka vrne denar, če mu ne vrne nobenega kovanca?

- (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

A6. Preden je Marija odšla na 2018 km dolgo pot, je števec kilometrov v njenem avtu kazal 29790 km. Kmalu bo videla palindromno število 29792 (to je število, ki se bere enako nazaj kot naprej). Koliko takih števil bo Marija videla med svojim potovanjem, če je omenjeno palindromno število že eno izmed njih?

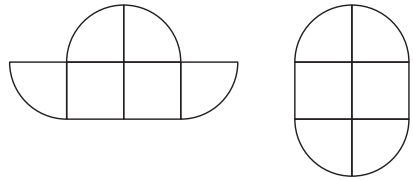
- (A) 4 (B) 18 (C) 20 (D) 21 (E) 23

A7. Za koliko je vsota vseh lihih števil do 50 manjša od vsote vseh sodih števil med 1 in 51?

- (A) 1 (B) 2 (C) 25 (D) 26 (E) vsoti sta enaki

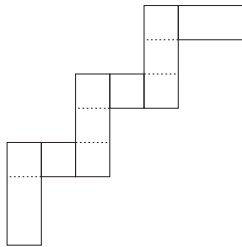
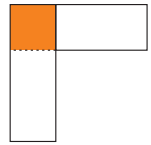
A8. Iz dveh kvadratov s 6 cm dolgo stranico in štirih četrtin kroga s 6 cm dolgim polmerom sestavimo dva lika (glej sliko). Za koliko se razlikujeta njuna obsega?

- (A) za 3 cm (B) za 6 cm (C) za 9 cm
(D) za 12 cm (E) obsega sta enaka



B1. Skladna pravokotnika zalepimo, kot kaže slika. Ploščina osenčenega dela, na katerem se prekrivata, je 4 cm^2 . Dolžina pravokotnika je trikratnik njegove širine.

- (a) Izračunaj dolžino in širino enega izmed obeh pravokotnikov.
(b) Izračunaj ploščino in obseg lika.
(c) Šest takih pravokotnikov zalepimo, kot kaže slika. Kolikšen je obseg nastalega lika?



B2. Tine ima dve knjigi. Iz sredine prve knjige je iztrgal nekaj listov tako, da se na levi strani vidi oznaka strani 26, na desni pa 53.

- (a) Koliko strani je imela prva knjiga, preden je Tine iztrgal nekaj listov, če so bile vse strani oštevilčene s števili od 1 naprej?
(b) V drugi knjigi so za označitev vseh strani porabili skupaj 732 števk. Koliko strani ima ta knjiga?

Naloge za 6. razred

A1. V Kurji vasi je četrtek dan za tržnico, kjer si kmetje izmenjujejo domače živali. Ena gos je vredna dve kokoši, za eno kravo dobimo eno kozo in tri gosi, za eno kozo pa dve gosi in dve kokoši. Največ koliko kokoši dobi kmet za eno kravo?

- (A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 16

A2. Zmanjševanec je šestkrat tolikšen kot odštevanec, njuna razlika pa je enaka četrtni števila 40360. Kako odštevanec zapišemo z rimskimi številkami?

- (A) MMXVII (B) MCMXC (C) MMDCXL (D) MMXVIII (E) MMDCCCI

A3. Kolikšna je vsota vseh naravnih števil, za katere je ostanek pri deljenju s 5 enak količniku?

- (A) 58 (B) 60 (C) 62 (D) 64 (E) 66

A4. Najmanj koliko steklenic po $\frac{3}{4} \text{ l}$ potrebujemo, da vanje pretočimo 15 hl soka, če se pri prelivanju celotne količine razlije 10 litrov soka?

- (A) 1117 (B) 1118 (C) 1986 (D) 1987 (E) 2000

A5. Jaka ima v žepu le kovance po 50 centov in 10 centov v skupni vrednosti 4,80 €. Število kovancev za 50 centov je enako tretjini števila kovancev za 10 centov. Koliko kovancev ima v žepu?

- (A) 13 (B) 18 (C) 20 (D) 24 (E) 42

A6. Vsota števk v letnici 2018 je 11. Kolikokrat v naslednjih stotih letih se bo spet zgodilo, da bo vsota števk v letnici enaka 11?

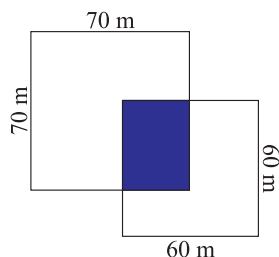
- (A) osemkrat (B) desetkrat (C) dvanajstkrat (D) petnajstkrat (E) dvajsetkrat

A7. Katero izmed naštetih števil je najbližje številu $5\frac{1}{4}$?

- (A) $5\frac{799}{800}$ (B) $\frac{21001}{4000}$ (C) 5,249 (D) 5,251 (E) 5,2499

A8. Kmet ima posestvo s površino 6700 m^2 z dimenzijami, kot so označene na sliki. Katera izmed navedenih dolžin ne more biti dolžina stranice osenčenega pravokotnika?

- (A) 18 m (B) 35 m (C) 40 m (D) 50 m (E) 55 m



B1. V gozdu raste 300 dreves, ki imajo vsaj eno od lastnosti: so smreke, poraščena so z mahom ali pa jih je napadel lubadar. Smrek je 108, z mahom je poraščenih 106 dreves, lubadar pa se je naselil v 150 drevesih. Vemo še, da je lubadar napadel 60 smrek in da mah ne raste na drevesih, okuženih z lubadarjem. Koliko smrek v gozdu je neporaščenih z mahom in nima lubadarja?

B2. Imamo 6 enakih kartonov v obliki pravokotnika z dolžino 6 cm in širino 4 cm. Z njimi sestavljamo pravokotnike, tako da uporabimo vseh 6 kartonov, ki se pri tem ne prekrivajo.

- (a) Koliko je ploščina vsakega od tako sestavljenih pravokotnikov?
 (b) Koliko različnih pravokotnikov (tudi kvadrat je pravokotnik) lahko sestavimo?
 (c) Izračunaj najmanjši obseg in največji obseg tako sestavljenega pravokotnika.

Naloge za 7. razred

A1. Kolikšna je vrednost izraza $\left(\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\right) : 0,2\right) + 12\frac{1}{2} : \frac{3}{0,08}$?

- (A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) 1 (E) 1,5

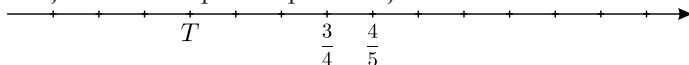
A2. Mravlja potuje na gosenici 24 minut, nato spleza na hrošča in prepotuje na njem štirikrat tolikšno razdaljo. Koliko minut mravlja potuje na hrošču, če se hrošč premika osemkrat tako hitro kot gosenica?

- (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 14

A3. Katero je najmanjše naravno število, deljivo z vsemi enomestnimi naravnimi števili?

- (A) 1 (B) 2017 (C) 2520 (D) 9900 (E) 362880

A4. Katero število je na številski premici predstavljeno s točko T ?



- (A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) $\frac{2}{5}$ (E) $\frac{13}{20}$

A5. Točka D je nožišče višine na hipotenuzo pravokotnega trikotnika ABC . Simetrala pravega kota seka hipotenuzo v točki E . Velikost kota med simetralo pravega kota in višino na hipotenuzo pravokotnega trikotnika je enaka $\frac{1}{9}$ velikosti večjega ostrega kota trikotnika CDE . Koliko je velik manjši ostri kot trikotnika ABC ?

- (A) 30° (B) 36° (C) 45° (D) 54° (E) 60°

A6. Kateri od naslednjih izrazov predstavlja liho število za vsako naravno število n ?

- (A) $2017 \cdot n + 2018$ (B) $2018 + n$ (C) $2018 + n^2$
(D) $2018 \cdot n + 2017$ (E) $2018 \cdot (n + 1)$

A7. Nekaj učencev 7. a razreda se je odločilo, da gredo sami na zaključni izlet, izmed njih je bilo 25 % fantov. En fant si je premislil in namesto njega je na izlet odšla ena deklica iz 7. b. Tako je bilo na izletu 20 % fantov, ostalo so bila dekleta. Koliko fantov in deklet je bilo skupaj na izletu?

- (A) 28 (B) 24 (C) 20 (D) 16 (E) 12

A8. Obseg enakokrakega trikotnika ABC z vrhom C je 50 cm. Obseg trikotnika ATC , kjer je CT težiščnica na osnovnico enakokrakega trikotnika, je 40 cm. Kolikšna je dolžina težiščnice CT ?

- (A) 10 cm (B) 13 cm (C) 15 cm (D) 18 cm (E) 25 cm

A9. V škatlice spravljamo modre in rdeče bonbone, v vsako natanko dva. Izkaže se, da ima $\frac{3}{5}$ modrih bonbonov za par rdečega in $\frac{3}{10}$ rdečih za par modrega. Kolikšen je delež modrih bonbonov med tistimi, ki smo jih razporejali v škatlice?

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{5}{6}$

A10. Koliko naravnih števil reši neenačbo $n^2 \geq 2^n$?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) vsa

B1. Žabici Regica in Skokica skačeta po enako dolgi ravni poti. Ko naredi Regica 4 skoke, jih Skokica istočasno naredi 5, vendar je dolžina 4 Skokičinih skokov enaka dolžini 3 Regičinih skokov. Katera med njima bo prišla hitreje na cilj?

B2. Oče Franc ima tri sinove: Petra, Janeza in Luko. Peter hodi v vrtec, Janez in Luka pa v osnovno šolo. Če dvakrat zaporedoma napišemo Petrova leta, dobimo očetovo starost. Če očetovo starost delimo z Janezovo oceno pri matematiki, dobimo starost enega od sinov. Zmnožek starosti Francetovih otrok je 440. Koliko je star vsak izmed njih, če vemo, da ima Luka višjo oceno pri matematiki kot Janez?

Naloge za 8. razred

A1. Kolikšna je vrednost izraza $\left((-15)^5 - 3^5(-5)^5 - (-1)^{2018}\right)^3$?

- (A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 2018 (E) -2018

A2. Izraz $\sqrt{600} - 0,2\sqrt{54} - \left(\sqrt{6} - 4,8\sqrt{\frac{2}{3}}\right) - 12\sqrt{\frac{1}{6}}$ pomnožimo s $\sqrt{6}$. Kolikšna je vrednost zmnožka?

- (A) 8 (B) $8\sqrt{12}$ (C) 288 (D) 48 (E) $8\sqrt{6}$

A3. Točka S je razpolovišče stranice AB trikotnika ABC . Kot $\sphericalangle CSA$ je velik 40° , kot $\sphericalangle CBA$ pa 20° . Kolikšna je velikost kota $\sphericalangle SAC$?

- (A) 60° (B) 65° (C) 70° (D) 75° (E) 80°

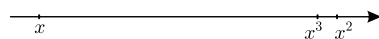
A4. Vsako dekle iz skupine 6 deklet tehta povprečno 60 kg. Ko se skupini pridruži Ana in Sonja, vsako dekle v večji skupini tehta povprečno 58 kg. Ana tehta 8 kg več kot Sonja. Koliko tehta Ana?

- (A) 48 kg (B) 50 kg (C) 52 kg (D) 54 kg (E) 56 kg

A5. V škatlice spravljamo modre in rdeče bonbone, v vsako natanko dva. Izkaže se, da ima 60 % modrih bonbonov za par rdečega in 30 % rdečih za par modrega. Kolikšen je delež modrih bonbonov med tistimi, ki smo jih razporejali v škatlice?

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{5}{6}$

A6. Na številski premici ležijo tri točke, ki predstavljajo števila x , x^2 in x^3 , kot kaže slika. Katero vrednost lahko zavzame število x ?



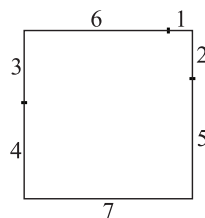
- (A) 2018 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{2017}{2018}$ (D) $-\frac{1}{2018}$ (E) $-\frac{2018}{2017}$

A7. Koliko decimalk ima število $0,12345678910111213 \dots 20172018$?

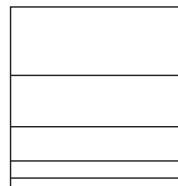
- (A) 1019 (B) 1020 (C) 2018 (D) 6965 (E) 7046

A8. Adam ima palčke dolžine 1 cm, 2 cm, ..., n cm, in sicer po 1 palčko vsake dolžine. Iz njih sestavi kvadrat. Na sliki je primer za $n = 7$. Za katero od naštetih vrednosti števila n lahko sestavi kvadrat?

- (A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15



B1. Pet pravokotnikov ima enako dolžino a . Širina prvega pravokotnika je b , širina vsakega naslednjega je za 1 manjša od širine predhodnega pravokotnika. Z vsemi petimi sestavimo večji pravokotnik tako, da se sosednja pravokotnika dotikata vzdolž skladne stranice (glej sliko).



(a) Izrazi obseg tako nastalega pravokotnika z a in b .

(b) Izračunaj dolžino in širino najmanjšega izmed pravokotnikov, če je lik, ki nastane iz vseh petih pravokotnikov, kvadrat s ploščino 400.

B2. Gasilci so v diskontu kupili nekaj zabojev po 24 plastenk vode za gasilsko veselico. V nekaj urah je zmanjkalo plastenk vode in Janez je moral po dodatne zaloge v isti diskont. Kupil je 4 zaboje manj kot prvič in pri tem založil svoj denar. Tudi to vodo so vso popili. Ena plastenka je stala 30 centov, skupaj pa so na veselici popili natanko 816 plastenk. Koliko denarja mora gasilsko društvo vrniti Janezu?

B3. Sod ima prostornino 200 l. Do $\frac{3}{5}$ je napolnjen s sokom, ki vsebuje 60 % sadnega deleža.

- (a) Koliko odstotkov sadnega deleža bi vseboval sok, če bi dolili toliko vode, da bi bil sod poln?
- (b) Manca želi pripraviti v sodu toliko soka z 20 % sadnega deleža, kolikor je v njem soka s 60 % sadnega deleža. Zato bo nekaj tekočine iz sode odlila in jo nadomestila z enako količino vode. Koliko tekočine bo odlila?

Naloge za 9. razred

A1. Jure je na tablo napisal petnajst pozitivnih celih števil, katerih edini modus je 3, mediana pa je enaka 2. Med napisanimi števili je šest trojk. Katere izmed naštetih števil je najmanjša vrednost, ki je lahko aritmetična sredina teh petnajstih števil?

- (A) 3 (B) $\frac{33}{15}$ (C) $\frac{31}{15}$ (D) $\frac{28}{15}$ (E) $\frac{9}{5}$

A2. Dolžine stranic trikotnika ABC so $|AB| = 3$ m, $|AC| = 4$ m in $|BC| = 5$ m. Točka T je presečišče stranice BC in višine na to stranico. Koliko je razmerje dolžin daljic BT in CT ?

- (A) 12 : 13 (B) 2 : 3 (C) 3 : 4 (D) 3 : 5 (E) 9 : 16

A3. Za število a velja: $(a - 2)(a - 29) = 89$. Kolikšna je vrednost izraza $\frac{a^2}{a+1}$?

- (A) 29 (B) 31 (C) 41 (D) 58 (E) 61

A4. Ena kateta pravokotnega trikotnika je za 10 cm daljša od druge katete in za 10 cm krajša od hipotenuze. Kolikšna je ploščina tega trikotnika?

- (A) 0,9 m² (B) 900 cm² (C) 60 cm² (D) 0,6 m² (E) 6 dm²

A5. Ploščine treh mejnih ploskev kvadra so $S_1 = 2$ m², $S_2 = 3$ m² in $S_3 = 6$ m². Kolikšna je prostornina kvadra?

- (A) 18 m³ (B) 12 m³ (C) 10 m³ (D) 6 m³ (E) 5 m³

A6. V izrazu $a^b - c^d$ vsako od števil a, b, c in d zamenjamo natanko z enim od števil: $-1, -2, -3$ in -4 , tako da dobimo čim manjšo vrednost. Kolikšen je zmnožek števil b in d ?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 12

A7. V kovinsko posodo v obliki kocke s stranico dolžine 6 cm vstavimo voščeno enakorobno piramido z enako osnovno ploskvijo, kot jo ima kocka. Nato piramido stalimo, da se vosek enakomerno porazdeli. Kako visoko v posodi sega vosek?

- (A) 1 cm (B) $\sqrt{2}$ cm (C) $\sqrt{3}$ cm (D) 2 cm (E) 3 cm

A8. Večkrat vržemo dve igralni kocki hkrati in vsakič izračunamo absolutno vrednost razlike števil pik na zgornjih ploskvah. Verjetnost, da bo absolutna vrednost razlike pik manjša od a , je enaka $\frac{2}{3}$. Koliko je a ?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

B1. Vsota števil vseh diagonal, vseh stranic in vseh oglišč nekega večkotnika je enaka 55. Izračunaj vsoto velikosti vseh notranjih kotov tega večkotnika.

B2. Dolžini katet pravokotnega trikotnika ABC sta $|BC| = 6$ cm in $|AC| = 2$ cm. Krožnica s središčem v oglišču C in polmerom b seka hipotenuzo v točkah A in D . Izračunaj razmerje $|AD| : |AB|$.

- B3.** V pekarni pakirajo piškote v škatle, v vsako škatlo dajo enako dvomestno število piškotov. Ko je trgovec naročil dvomestno število škatel piškotov, je dežurni pek zapisal številke v obratnem vrstnem redu. Tako je trgovec dobil 4248 piškotov premalo. Koliko škatel piškotov je naročil trgovec? Rešitev utemelji.

16. tekmovanje v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike za srednje šole – državno tekmovanje

1. skupina: Poslovna matematika

1. NALOGA

Pekarna ima tri proizvodne linije. Na vsaki je zaposlenih 12 pekov, ki so v ponedeljek spekli 1840 kg kruha in drobnega pekovskega peciva.

- a) Koliko kg kruha in peciva bodo spekli v torek, če se je število pekov na vsaki proizvodni liniji zmanjšalo za tretjino? Upoštevajte, da se je storilnost pekov zaradi okvare peči zmanjšala za 10 %.
- b) Za razvoz kruha in peciva ima pekarna na voljo štiri kombije. Ponedeljkovo količino sta razvozila dva kombija, in sicer vsak polovico. Koliko kg kruha in peciva je bilo natovorjenih v vsakem kombiju v ponedeljek?
Koliko kg kruha in peciva bo natovorjenih v vsakem kombiju v sredo, ko bo celotna količina za 70 % večja od ponedeljkove in jo bodo razvozili s štirimi kombiji, vsak enako proizvedeno količino?

2. NALOGA

Ministrstvo za kmetijstvo je v letu 2017 odobrilo 40.000,00 EUR nepovratnih sredstev za kmete, ki so utrpeli škodo zaradi toče. Med štiri kmetije, za katere imamo naslednje podatke:

Kmetija	Katastrski dohodek v EUR	Ocenjena škoda v EUR
Arh	54.000,00	12.000,00
Ban	72.000,00	9.600,00
Cot	36.000,00	14.400,00
Dimc	108.000,00	12.000,00

- a) razdelite sredstva premo sorazmerno ocenjeni škodi.
- c) razdelite sredstva premo sorazmerno ocenjeni škodi in hkrati obratno sorazmerno s katastrskim dohodkom.
- d) razdelite sredstva tako, da dobi kmetija Arh 20 % več sredstev kot kmetija Ban, kmetija Cot 40 % manj sredstev kot kmetija Arh in kmetija Dimc 1,5-krat toliko sredstev kot kmetija Cot.
- e) Za koliko % več ali manj sredstev dobi kmetija Cot od kmetije Arh? Pri izračunu upoštevajte podatke iz točke c).

3. NALOGA

Družina Kos se že nekaj čas odloča za nakup jadrnice. Všeč jim je jadrnica, ki je imela prvotno ceno 81.000,00 EUR. Lastnik je zaradi potrebnih popravil znižal ceno za 13 %. Ker ni bilo kupcev, se je odločil, da bo sam opravil popravila. Zato je sledila podražitev jadrnice za x %, nato ponovno podražitev še za 15 %. Bodoči kupec bi moral poravnati tudi stroške dodatnih storitev v višini 2.650,00 EUR, tako da bi na koncu moral plačati za jadrnico skupaj s stroški 127.883,40 EUR?

- Kolikšna je bila neznana podražitev v %?
- Kolikšna je bila skupna pocenitev ali podražitev v %?
- Izrazite stroške dodatnih storitev v % od cene po zadnji podražitvi.
- Za koliko % bi se morala jadrnica 3-krat zapored podražiti za enak odstotek, da bi bila končna cena te jadrnice 95.000,00 EUR. Upoštevajte, da je začetna cena jadrnice 81.000,00 EUR?

4. NALOGA

Družina Kos varčuje še za nakup stanovanja. Prihranila je že 55.680,00 EUR in jih hrani na bančnem računu.

- Po kakšni letni obrestni meri bi se morala obrestovati privarčevana sredstva 11,5 leta, da bi se povečala za 75 % pri polletni kapitalizaciji, dekurzivnem obrestovanju in relativni obrestni meri?
- Družini Kos poleg privarčevanih 55.680,00 EUR za nakup stanovanja manjka še 10 % sredstev. Koliko časa bi morala biti v banki vezana privarčevana sredstva, če banka obrestuje vloge po 4-% letni obrestni meri z dnevno kapitalizacijo, da bi družina zbrala dovolj denarja za nakup stanovanja, če je obrestna mera konformna? Čas izrazite v letih in dnevih.
- Kolikšna bi bila privarčevana sredstva družine, če bi se obrestovala le 5 let po 4-% letni obrestni meri, četrtnetletni kapitalizaciji z relativno obrestno mero in dekurzivnim obrestovanjem?

2. skupina: Statistika

1. NALOGA

Čokolada je prehrabeni izdelek, narejen iz kakava. Naj bo rjava, črna ali bela, z lešniki, karamelo, mlečna..., nihče se ne more upreti tej sladki razvadi.

Tabela 1: Največji proizvajalci čokolade na svetu po vrednosti prodaje in strukturnih odstotkih v letu 2014

Proizvajalec	Prodaja v milijonih USD	Strukturni delež v %
Mars Inc (ZDA)	14.350	24,47
Mondelēz International (ZDA)		
Ferrero Group (Luksemburg/Italija)		14,45
Nestlé SA (Švica)	9.818	13,84
Meiji Co Ltd (Japonska)		
Hershey Foods Corp (ZDA)	4.021	9,91
Chocoladenfabriken Lindt & Sprüngli AG (Švica)		
Skupaj	75.512	100,00

Vir: <https://sl.wikipedia.org/wiki/Čokolada>

- a) Dopolnite tabelo tako, da izračunate vrednosti prodaje posameznega proizvajalca v milijonih ameriških dolarjev ali izračunate strukturni delež posameznega proizvajalca, izražen v strukturnih odstotkih. (*Prodajo v milijonih ameriških dolarjev zaokrožite na cela števila, strukturne odstotke pa na dve decimalni mesti natančno in jih vpišite v zgornjo tabelo.*)
- b) Pri nas je zelo priljubljena čokolada Milka, ki originalno izvira iz Švice in je od leta 1990 v lastništvu druge največje proizvajalke čokolade Mondelez International iz ZDA. Na trgu je po nekaterih podatkih okoli 45 različic te čokolade: mlečna, jagodna z oreščki idr. Vsaka vrsta ima nekoliko drugačno sestavo, odvisno od dodatkov. Na spletni strani lahko najdemo podatke o sestavinah v 100-gramski mlečni čokoladi Milka.

Tabela 2: Povprečne hranilne vrednosti posameznih sestavin v 100-gramski tablici mlečne čokolade Milka

Povprečna hranilna vrednost na 100 g:	100 g
Energijska vrednost	2213 kJ / 530 kcal
Maščobe	29 g
– od tega nasičene maščobe	18 g
Ogljikovi hidrati	59 g
– od tega sladkorji	58 g
Prehranske vlaknine	1,8 g
Beljakovine	6,3 g
Sol	0,4 g
Ostalo	3,5 g

Vir: <http://www.kompas-shop.si/sl/Cokolade/Milka--mlečna-cokolada>

Ana je kupila 270-gramsko čokolado Milka in želi ugotoviti, koliko je v njej posameznih sestavin. Pomagajte ji izračunati energijske vrednosti posameznih sestavin v 270-gramski tablici čokolade, če poznate podatke o sestavinah v 100-gramski in veste, da je struktura čokolade enaka tako pri 100-gramski kot pri 270-gramski čokoladi. (*Rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti natančno in jih zapišite v spodnjo tabelo.*)

Tabela 3: Povprečne hranilne vrednosti posameznih sestavin v 270-gramski tablici mlečne čokolade Milka

Povprečna hranilna vrednost na 270 g:	
Maščobe	
Ogljikovi hidrati	
Prehranske vlaknine	
Beljakovine	
Sol	
Ostalo	

2. NALOGA

V občini Mala vas poznamo za obdobje zadnjih treh let nekatere podatke o številu zaposlenih za nedoločen čas in številu iskalcev zaposlitve.

Tabela 4: Zaposleni in iskalci zaposlitve po četrtletjih leta 2016 v občini Mala vas

Obdobje	Število zaposlenih	Število iskalcev zaposlitve
1. četrtletje	5945	18
2. četrtletje	5824	20
3. četrtletje	6212	87
4. četrtletje		107

Vir: izmišljeni podatki

- a) Izračunajte število iskalcev zaposlitve na 1000 zaposlenih za prva tri četrtletja. (*Rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti natančno.*)

- b) Izračunajte število zaposlenih v 4. četrtletju, če je znan podatek, da je bilo v zadnjem četrtletju 17 iskalcev zaposlitve na 1000 zaposlenih. (*Število zaposlenih zaokrožite na celo število*).
- c) Občino Mala vas je v prvem polletju leta 2016 obiskalo 2350 turistov, od tega 68 % tujih, v drugem polletju pa samo 125 turistov, od tega 12 % tujih.
- Za obe polletji izračunajte število tujih turistov na 100 vseh turistov. (*Rezultate zaokrožite na celo število*).
 - Za obe polletji izračunajte še število tujih turistov na 100 domačih turistov. (*Rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti natančno*).

3. NALOGA

V letu 2016 je bilo v turističnih nastanitvenih objektih v Sloveniji zabeleženih več kot 4,3 milijona prihodov turistov (tj. prihodov domačih in tujih turistov skupaj). Prihodov domačih turistov smo v letu 2016 našli skoraj 1,3 milijona, prihodov tujih pa 3 milijone. Od tujih turistov, ki so v letu 2016 obiskali Slovenijo, je bilo največ turistov iz naslednjih držav: iz Italije 17 %, iz Avstrije in Nemčije po 10 %, iz Hrvaške 5 % in iz Republike Koreje 4 %.

- a) Izračunajte število prihodov tujih turistov iz omenjenih držav. (*Rezultate zaokrožite na celo število in jih vpišite v spodnjo tabelo*).

Tabela 5: Prihodi tujih turistov po državah v Sloveniji v letu 2016

Država	Število prihodov tujih turistov
Italija	
Avstrija	
Nemčija	
Hrvaška	
Republika Koreja	

- b) Tabela 6 prikazuje stopnje rasti za prenočitve turistov v Sloveniji v letih od 2008 do 2016.

- Stopnje rasti izrazite v obliki verižnih indeksov. (*Rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti natančno*).
- Izračunane verižne indekse prikažite grafično.

Tabela 6: Stopnje rasti za prenočitve turistov v Sloveniji v letih od 2008 do 2016

Leto	Stopnje rasti za prenočitve turistov	V_j	Število prenočitev turistov v milijonih
2008	-		
2009	-3,23		
2010	-1,11		
2011	5,62		
2012	1,06		
2013	1,05		
2014	0		
2015	7,29		
2016	8,74		



- Izračunajte število prenočitev turistov v Sloveniji po letih, če vemo, da je bilo leta **2012 9,5 milijona prenočitev turistov**. (Rezultate zaokrožite na 1 decimalno mesto natančno in jih vpišite v prazni stolpec v tabeli 6.)

4. NALOGA

Štirje dijaki so igrali igro Človek ne jezi se. Igralno kocko so vrgli 200-krat. Pri tem so zabeležili naslednje rezultate: 35-krat so vrgli po 1 piko, 25-krat po 2 piki, v 20 odstotkov metih po 3 pike, v osmini metov po 4 pike, v 30 metih po 5 pik, v preostalih metih pa po 6 pik.

- a) Sestavite frekvenčno porazdelitev metov po številu vrženih pik na kocki.

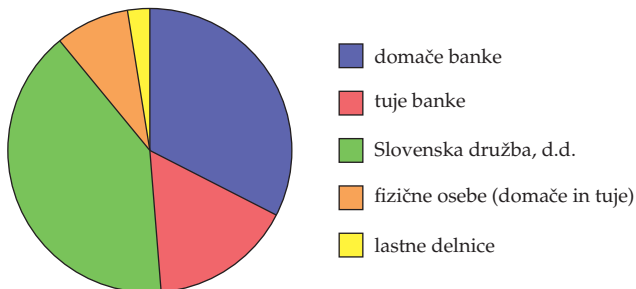
Tabela 7: Frekvenčna porazdelitev metov po številu pik pri igri človek ne jezi se

Število padlih pik	Absolutna frekvenca f_i		
1 pika			
2 piki			
3 pike			
4 pike			
5 pik			
6 pik			
Skupaj			

- b) Pri koliko odstotkih metov je bilo vrženih 6 pik?
- c) Katero je bilo najpogostejše število vrženih pik?
- d) Kolikšno je bilo povprečno število doseženih pik pri igri Človek ne jezi se?
- e) Pogostost padlega števila pik pri metih grafično prikažite s strukturnim krogom.

Tekmovanje v znanju finančne matematike in statistike - državno tekmovanje

1. S krožnim diagramom in v tabeli je prikazana lastniška struktura podjetja Rombon, d.d.

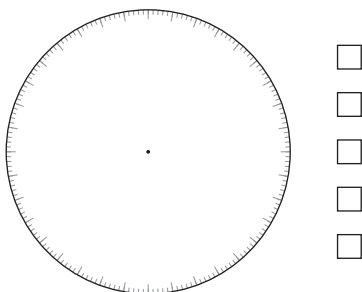


Skupina delničarjev	Število delnic	Lastniški delež v %
domače banke	708 936	
tuje banke		
Slovenska družba, d.d.	878 976	40,32
fizične osebe (domače in tuje)	183 556	8,42
	55 154	2,53
Skupaj		100,00

Rezultate zaokroži na dve decimalni mesti.

- Dopolni tabelo z manjkajočimi podatki.
- Kdo ima v lasti največji delež podjetja Rombon, d.d.?
- Med delničarji je 9 bank (domačih in tujih skupaj). Banke med sabo lastniško niso povezane in nimajo delnic Slovenske družbe, d.d. Koliko tujih bank je med delničarji, če ima vsaka domača banka v povprečju v lasti 118 156 delnic? Ali ima vsaka tuja banka v povprečju v lasti več delnic podjetja Rombon, d.d., kot domača banka? Odgovor utemelji.
- Slovenska družba, d.d., se je odločila prodati 500 310 delnic podjetja Rombon, d.d., domačim in tujim bankam. Koliko delnic so skupaj kupile domače banke, če se je njihov lastniški delež v podjetju Rombon, d.d., zvišal za 12,7 odstotne točke? Kolikšen je nov lastniški delež podjetja Rombon, d.d., ki ga imajo v lasti tuje banke? Za koliko odstotnih točk se je znižal lastniški delež, ki ga ima v lasti Slovenska družba, d.d.?
- Nariši krožni diagram, ki prikazuje novo lastniško strukturo podjetja Rombon, d.d.

Opomba: Daljše črtice označujejo kotne korake po 10°, krajše črtice pa 2°. Za ločevanje kategorij lahko uporabiš različne teksture.



2. Metka in Borut kupujeta stanovanje. Ker nimata dovolj privarčevanih sredstev, bosta na banki najela kredit v višini 50 000 EUR. Odplačala ga bosta s 120 mesečnimi obroki, prvi obrok bo plačan 1 mesec po najemu kredita. Banka uporablja mesečno konformno obrestovanje in 4 % letno obrestno mero.

Rezultate zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) Določi višino obrokov, če so vsi obroki enaki.
- b) Metka in Borut pričakujeta, da se bodo njuna družina in zato tudi stroški v prihodnosti povečali, zato razmišljata o kreditu z neenakimi anuitetami. Določi višini obrokov, če je prvih 60 obrokov med seboj enakih, višina zadnjih 60 obrokov pa je za polovico nižja od višine prvih 60 obrokov.
- c) Ker ne vesta, kdaj se bo njuna družina povečala, si želita, da se obroki nižajo postopno. Višina vsakega naslednjega obroka naj bo za 1 % nižja od višine prejšnjega. Določi višini prvega in zadnjega obroka.

3. Na trgu obstajata enoletna brezakuponska ter dveletna kuponska obveznica z letnimi kuponi po 5 % kuponski obrestni meri. Naslednji kupon kuponske obveznice bo izplačan čez natanko eno leto. Obe obveznici imata nominalno vrednost 1000 EUR, cena brezakuponske obveznice je 969 EUR, cena kuponske pa 1015,50 EUR.

- a) Privzemi, da časovno strukturo trenutnih efektivnih obrestnih mer pri zveznem obrestovanju opisuje linearna funkcija

$$R(0, t) = kt + n.$$

S pomočjo cen obveznic določi neznana parametra k in n ter obrestni meri $R(0, 1)$ in $R(0, 2)$. Rezultate v odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

- b) Investitor meni, da se časovna struktura obrestnih mer v prihodnjem letu ne bo spremenila, torej $R(t_1, t_2) = R(0, t_2 - t_1)$ za vse $0 \leq t_1 \leq 1$, ter da bo izdajatelj obveznic čez eno leto izdal novo enoletno brezakuponsko obveznico z nominalno vrednostjo 1000 EUR. Kolikšen donos in donosnost v dvehletnem obdobju ustvari, če danes kupi eno brezakuponsko obveznico, čez eno leto pa z njeno nominalno vrednostjo kupi nove enoletne brezakuponske obveznice? Privzemi, da je možen nakup tisočinke obveznice. Rezultate v evrih ali odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.
- c) Investitor iz točke b) lahko danes kupi eno dvehletno kuponsko obveznico in nato čez eno leto v novo brezakuponsko obveznico investira samo prejeti kupon. Kolikšen donos in donosnost v dvehletnem obdobju ustvari s to investicijsko strategijo?
- d) Kakšen portfelj brezakuponskih in kuponskih obveznic naj danes ustvari investor iz točke b), če želi investirati 15 000 EUR in v dvehletnem obdobju ustvariti donosnost v višini 7 %?

4. Delnica podjetja BCD, d.d., je bila 6. januarja 2018 vredna 18,11 EUR. Privzemi, da je bila takrat netvegana efektivna obrestna mera pri zveznem obrestovanju enaka 1,80 % za vsa dospelja.

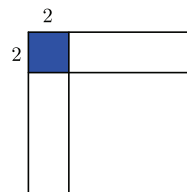
- a) Kakšnim pogojem je morala ta dan ustrezati premija evropske prodajne opcije na delnico podjetja BCD, d.d., z zapadlostjo 6. oktobra 2018 in izvršilno ceno 18,75 EUR, če na trgu ni bila možna arbitraža?

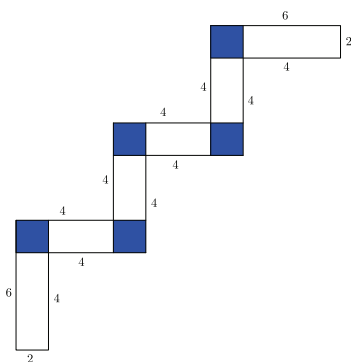
- b) Danes, 6. aprila 2018, je delnica podjetja BCD, d.d., vredna 18,61 EUR, netvegana efektivna obrestna mera pri zveznem obrestovanju pa je še vedno 1,8 % za vsa dospetja. Kakšnim pogojem mora danes zadoščati premija evropske nakupne opcije na delnico podjetja BCD, d.d., z zapadlostjo 6. oktobra 2018 in izvršilno ceno 18,75 EUR? Ali je mogoča arbitražna, če se je premija te opcije ustalila pri 7,11 EUR. Če je, opiši arbitražno strategijo.
- c) Danes na trgu lahko trgujemo z opcijama iz točk a) in b). Premija opcije iz točke a) je enaka 5,85 EUR. Ali je možna arbitražna? Če je, opiši arbitražno strategijo.

Rešitve 54. tekmovanja iz matematike za Vegovo priznanje – državno tekmovanje

Rešitve za 5. razred

- A1. Izračunamo $(2018 + 7) : 3 = 675$.
- A2. Boru je ostalo $1 - \frac{11}{15} = \frac{4}{15} = \frac{8}{30}$ čokolade. Samu je je ostalo $1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10} = \frac{9}{30}$, Janiju pa $1 - \frac{25}{30} = \frac{5}{30}$. Največ čokolade je ostalo Samu.
- A3. Ob vzletu letala v New Yorku je ura v Parizu 19.59. Do polnoči sta le še 2 uri in 1 minuta, torej je letalo pristalo v Parizu naslednji dan, 14. 4. 2018, ob 5.25.
- A4. Kmet za eno kravo dobi 1 kozo in 3 race. Kozo zamenja za 2 raci in 2 kokoši, skupaj ima 5 rac in 2 kokoši. Ker za vsako raco dobi 2 kokoši, jih dobi še 10. Vsega skupaj ima največ 12 kokoši.
- A5. Blagajničarka vrne Petru 55 €. Zapišimo število 55 kot vsoto večkratnikov števila 5, 10, 20 in 50 na vseh 13 načinov: $11 \cdot 5, 9 \cdot 5 + 10, 7 \cdot 5 + 20, 7 \cdot 5 + 2 \cdot 10, 5 \cdot 5 + 20 + 10, 5 \cdot 5 + 3 \cdot 10, 3 \cdot 5 + 2 \cdot 20, 3 \cdot 5 + 20 + 2 \cdot 10, 3 \cdot 5 + 4 \cdot 10, 5 + 50, 5 + 2 \cdot 20 + 10, 5 + 20 + 3 \cdot 10$ in $5 + 5 \cdot 10$.
- A6. Marija bo prispela na cilj, ko bo števec v avtu kazal 31808 km. Zanimajo nas vsa palindromna števila med 29790 in 31808. Palindromna števila oblike $29a92$ so tri, in sicer je a lahko 7, 8 ali 9. Deset palindromnih števil je oblike $30a03$, kjer je a poljubna števka. Ustrezni palindromni števil oblike $31a31$ je enako 8, saj je a števka od 0 do 7. Marija bo med svojim potovanjem videla $3 + 10 + 8 = 21$ palindromnih števil.
- A7. Vseh naravnih lihih števil do 50 je 25. Vseh sodih števil med 1 in 51 je prav tako 25. Razlika med dvema sosednjima številoma, sodim in lihim, je 1. Torej je omenjena vsota sodih števil za $25 \cdot 1 = 25$ večja od vsote omenjenih lihih števil.
- A8. Levi lik je omejen s štirimi loki, ki skupaj tvorijo krožnico, ter štirimi daljicami dolžine 6 cm. Desni lik je omejen s štirimi loki, ki skupaj tvorijo enako krožnico kot pri levem liku, ter dvema daljicama dolžine 6 cm. Razlika obsegov je zato enaka $2 \cdot 6 = 12$ cm.
- B1. Osenčeni lik je kvadrat s ploščino 4 cm^2 , torej je dolžina njegove stranice 2 cm. Širina enega od obeh pravokotnikov, ki ju zlepimo, je tudi 2 cm, dolžina pa 6 cm.
- Ploščina lika, zlepljenega iz dveh pravokotnikov, je enaka $p = 6 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 20 \text{ cm}^2$, obseg pa $o = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 24 \text{ cm}$.
- Obseg lika, zlepljenega iz šestih pravokotnikov, pa je enak $o = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 10 \cdot 4 = 56 \text{ cm}$.





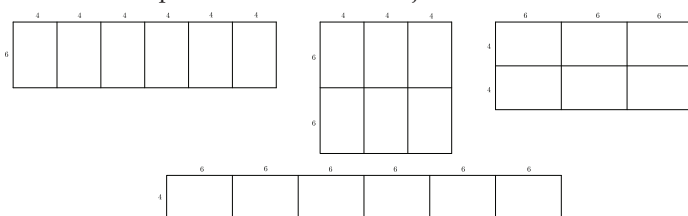
B2. Pred označeno stranjo je na začetku ostalo 25, toliko jih ostane tudi zadaj. Zadnja stran ima torej oznako $53 + 25 = 78$.

Za označitev prvih 9 strani so porabili 9 števk. Strani z dvomestno oznako je 90 in zanje so porabili 180 števk. Odštejemo $732 - 180 - 9 = 543$ in dobimo število števk za strani s trimestno oznako. Takih strani je $543 : 3 = 181$, torej ima knjiga $9 + 90 + 181 = 280$ strani.

Rešitve za 6. razred

- A1.** Kmet za eno kravo dobi 1 kozo in 3 race. Kozo zamenja za 2 raci in 2 kokoši, skupaj ima 5 rac in 2 kokoši. Ker za vsako raco dobi 2 kokoši, jih dobi še 10. Vsega skupaj ima največ 12 kokoši.
- A2.** Razlika je enaka $40360 : 4 = 10090$ oziroma $6 \cdot a - a = 5 \cdot a$. Torej je odštevanec $10900 : 5 = 2018$, zapisano z rimskimi številkami *MMXVIII*.
- A3.** Števila, ki zadoščajo pogojem naloge, so: $5 \cdot 1 + 1 = 6$, $5 \cdot 2 + 2 = 12$, $5 \cdot 3 + 3 = 18$, $5 \cdot 4 + 4 = 24$. Njihova vsota je enaka 60.
- A4.** Pretočiti moramo 1500 l soka. Ker ga 10 l razlijemo, napolnimo $1490 : 3 \cdot 4 = 1986\frac{2}{3}$ steklenice. Potrebujemo 1987 steklenic.
- A5.** Jaka lahko kovance razporedi v kupčke tako, da so na vsakem kupčku 3 kovanci za 10 centov in 1 kovanec za 50 centov. Vrednost kovancev posameznega kupčka je 80 centov. Ker ima Jaka skupaj 4,80 €, kovance razporedi v 6 kupčkov. Skupaj ima $6 \cdot 4 = 24$ kovancev.
- A6.** Med letnicama 2019 in 2118 iščemo tiste, katerih vsota števk je 11. Ker je prva števka vseh enaka 2, mora biti vsota zadnjih treh števk enaka 9. Če je druga števka enaka 0, mora biti vsota zadnjih dveh števk enaka 9. Takih števil je 8, in sicer: 2027, 2036, 2045, 2054, 2063, 2072, 2081 in 2090. Če pa je druga števka enaka 1, mora biti vsota zadnjih dveh 8. Taki letnici sta 2, in sicer: 2108 in 2117.
- A7.** Vsa števila zapišemo v obliki mešanega števila, ki ima ulomek z imenovalcem 40000: $5\frac{1}{4} = 5\frac{10000}{40000}$, $5\frac{799}{800} = 5\frac{39950}{40000}$, $5\frac{21001}{4000} = 5\frac{10010}{40000}$, $5,249 = 5\frac{9960}{40000}$, $5,251 = 5\frac{10040}{40000}$ in $5,2499 = 5\frac{9996}{40000}$. Iskano število je 5,2499.
- A8.** Površina osenčenega dela je enaka $70^2 + 60^2 - 6700 = 1800 \text{ m}^2$. Preverimo vse predlagane dolžine tako, da izračunamo količnike: $1800 : 18 = 100$, $1800 : 35 \div 51$, $1800 : 40 = 45$, $1800 : 50 = 36$ in $1800 : 55 \div 32$. Edino število, ki ne ustreza dimenzijam posestva, je 100, kar pomeni, da dolžina osenčenega pravokotnika ne more biti 18 m.

- B1.** Razberemo, da med 300 drevesi v gozdu ni smreke, poraščene z mahom, ki bi jo napadel lubadar. Zapišemo enačbo $300 = 108 + 106 + 150 - 60 - x$, kjer je x število smrek, poraščenih z mahom. Rešimo in dobimo $x = 4$. Torej je v gozdu $108 - 60 - 4 = 44$ smrek, neporaščenih z mahom in brez lubadarja.
- B2.** Ploščina enega kartona je $6 \cdot 4 = 24 \text{ cm}^2$. Ploščine vseh sestavljenih pravokotnikov so med seboj enake in znašajo $p = 6 \cdot 24 = 144 \text{ cm}^2$. Zložimo lahko 4 različne pravokotnike z dimenzijami: 4×36 , 6×24 , 8×18 in 12×12 .



Največji obseg ima pravokotnik z dimenzijami 4×36 , in sicer 80 cm. Najmanjši obseg ima kvadrat s stranico 12 cm, in sicer 48 cm.

Rešitve za 7. razred

- A1.** Izračunajmo $\left(\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\right) : 0,2\right) + 12\frac{1}{2} : \frac{3}{0,08} = \left(\frac{6}{15} - \frac{5}{15}\right) : \frac{1}{5} + \frac{25}{2} \cdot \frac{0,08}{3} = \frac{1}{15} \cdot 5 + \frac{25}{2} \cdot \frac{8}{3 \cdot 100} = \frac{1}{3} + \frac{4}{12} = \frac{2}{3}$.
- A2.** Hrošč je 8-krat toliko hiter kot gosenica, torej mravlja s hroščem za enako razdaljo kot z gosenico potrebuje $24 : 8 = 3$ minute. Ker s hroščem prepotuje 4-krat tolikšno razdaljo, je z njim potovala 12 minut.
- A3.** Če je število deljivo z 9, je deljivo tudi s 3. Če je deljivo z 8, je deljivo tudi z 2 in 4. Za deljivost s 6 mora biti število deljivo z 2 in 3. Iskano najmanjše naravno število je zmnožek števil 9, 8, 7 in 5, to je število 2520.
- A4.** Izračunamo razliko $\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{1}{20}$. Točka T predstavlja število $\frac{3}{4} - 3 \cdot \frac{1}{20} = \frac{15}{20} - \frac{3}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.
- A5.** Predpostavimo, da v trikotniku ABC velja: kot α je po velikosti večji od kota β . Točka D zato leži bližje oglišču A . Velikost kota $\sphericalangle DCE$ je enaka $\frac{1}{9}$ velikosti kota $\sphericalangle CED$, zato je vsota njunih velikosti enaka $\frac{10}{9}$ velikosti kota $\sphericalangle CED$. Upoštevamo, da je vsota velikosti notranjih kotov trikotnika 180° , in dobimo, da je velikost kota $\sphericalangle CED = 81^\circ$. Torej sta velikosti kotov $\sphericalangle BEC = 180^\circ - 81^\circ = 99^\circ$ in $\sphericalangle CBE = \sphericalangle CBA = 180^\circ - 45^\circ - 99^\circ = 36^\circ = \beta$.
- A6.** Edino v primeru D seštejemo sodo in liho število ne glede na vrednosti naravnega števila n , torej je ta vsota liho število.
- A7.** En fant predstavlja 5 % vseh učencev, kar pomeni, da 20 učencev predstavlja 100 %.
- A8.** Obseg trikotnika ABC sestavljata dva kraka a in osnovnica c , vsota njihovih dolžin je 50 cm. Obseg trikotnika ATC sestavljajo krak a , polovica osnovnice c in težiščnica t , katerih vsota dolžin je 40 cm. Če trikotnik ABC razpolovimo, ugotovimo, da je vsota dolžin kraka a in polovice osnovnice c enaka 25 cm. Če dodamo še težiščnico t , je vsota dolžin enaka 40 cm. Torej je dolžina težiščnice t enaka 15 cm.
- A9.** Označimo z m število modrih bonbonov, z r pa število rdečih bonbonov. Iz besedila lahko zapišemo zvezo: $0,6m = 0,3r$, torej je $r = 2m$ oziroma rdečih bonbonov je dvakrat toliko kot modrih. Od tod sledi, da modri bonboni predstavljajo $\frac{1}{3}$ vseh.
- A10.** Neenačbo rešijo 3 naravna števila, in sicer so to: 2, 3 in 4.

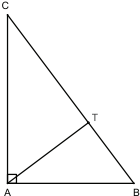
- B1.** Regica porabi za 1 skok $\frac{1}{4}$ časa, Skokica pa $\frac{1}{5}$ časa. Za 3 skoke Regica porabi $\frac{3}{4}$ časa, Skokica za 4 skoke $\frac{4}{5}$ časa. Ker se dolžini ujemata in je $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$, je Regica hitrejša.
- B2.** Razcepimo zmnožek starosti otrok $440 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11$. Glede na to, da eden hodi v vrtec, druga dva pa v šolo, imamo le dve možnosti $440 = 4 \cdot 10 \cdot 11$ ali $5 \cdot 8 \cdot 11$. V prvem primeru je Peter star 4 leta, oče pa 44 let, kar je enako zmnožku Janezove ocene pri matematiki in starosti enega od starejših sinov. Edina možnost je, da ima Janez pri matematiki oceno 4, starost enega od sinov pa je 11.
V drugem primeru bi bil Peter star 5 let, oče pa 55. Janez bi imel v tem primeru pri matematiki oceno 5, kar pa ni možno, saj ima Luka pri matematiki višjo oceno kot Janez. Torej je oče je star 44 let, sinovi pa 4 leta, 10 let in 11 let.

Rešitve za 8. razred

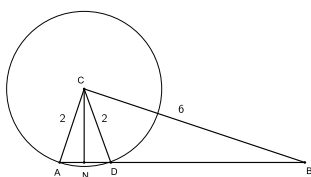
- A1.** Izračunajmo $\left((-15)^5 - 3^5(-5)^5 - (-1)^{2018}\right)^3 = (-15^5 - 3^5 \cdot (-5^5) - 1)^3 = (-15^5 + 15^5 - 1)^3 = (-1)^3 = -1$.
- A2.** Izračunajmo $\sqrt{600} - 0,2\sqrt{54} - \left(\sqrt{6} - 4,8\sqrt{\frac{2}{3}}\right) - 12\sqrt{\frac{1}{6}} = 10\sqrt{6} - \frac{1}{5} \cdot 3\sqrt{6} - \sqrt{6} + 4\frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{12}{\sqrt{6}} = 9\sqrt{6} - \frac{3}{5}\sqrt{6} + 4\frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3} - \frac{12\sqrt{6}}{6} = 9\sqrt{6} - \frac{3}{5}\sqrt{6} + \frac{24\sqrt{6}}{15} - 2\sqrt{6} = 7\sqrt{6} - \frac{3}{5}\sqrt{6} + \frac{8}{5}\sqrt{6} = 7\sqrt{6} + \sqrt{6} = 8\sqrt{6}$. Rezultat pomnožimo s $\sqrt{6}$ in dobimo 48.
- A3.** Velikost kota $\sphericalangle BSC = 180 - 40^\circ = 140^\circ$, torej je velikost kota $\sphericalangle SCB = 20^\circ$. Trikotnik BCS je enakokrak, v katerem velja $|SC| = |SB|$. Ker je točka S razpolovišče stranice AB , je tudi $|SC| = |SA|$. Potemtakem je trikotnik ASC enakokrak z osnovnico AC . Velikost kota $\sphericalangle SAC = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$.
- A4.** Šest deklet skupaj tehta 360 kg. Ko se jim pridružita še Ana in Sonja, skupaj tehtajo 464 kg. Če x označimo, koliko tehta Ana, zapišemo enačbo $x - 8 + x = 104$. Rešitev enačbe je $x = 56$ kg.
- A5.** Označimo z m število modrih bonbonov, z r pa število rdečih bonbonov. Iz besedila lahko zapišemo zvezo: $0,6m = 0,3r$, torej je $r = 2m$ oziroma rdečih bonbonov je dvakrat toliko kot modrih. Od tod sledi, da modri bonboni predstavljajo $\frac{1}{3}$ vseh.
- A6.** Ker je $x^2 > x$, je $x > 1$ ali pa $x < 0$. Prva možnost odpade, saj bi tedaj moralo veljati $x^3 > x^2$. Če bil $x < -1$, bi veljalo $x^3 < x$. Torej velja $-1 < x < 0$. Pravilen je odgovor D.
- A7.** Za decimalno vejico so zapisana vsa števila od 1 do 2018. Z enomestnimi števili zapišemo 9 decimalk, z dvomestnimi $90 \cdot 2 = 180$, s trimestnimi pa $900 \cdot 3 = 2700$ decimalk. Števila od 1000 do 2018 zapišemo z $(2018 - 999) \cdot 4 = 1019 \cdot 4 = 4076$ števki. Skupaj je to 6965 decimalk.
- A8.** Vsota dolžin vseh palčk je enaka obsegu kvadrata, zato mora biti deljiva s 4. Glede na ponujene odgovore dobimo naslednje vsote: 66, 78, 91, 105 in 120, kar pomeni, da lahko sestavi kvadrat iz 15 palčk.
- B1.** Širine pravokotnikov so enake $b, b-1, b-2, b-3$ ter $b-4$, torej je širina sestavljenega pravokotnika enaka $b + (b-1) + (b-2) + (b-3) + (b-4) = 5b - 10$. Njegov obseg pa je enak $o = 2a + 2(5b - 10) = 2a + 10b - 20$.
Iz dane ploščine kvadrata izračunamo dolžino njegove stranice: $a = 20$. Ker velja $a = 5b - 10$, sledi $b = 6$. Najmanjši pravokotnik ima zato dolžini stranic $a = 20$ in $b - 4 = 2$.

- B2.** Porabili so $816 : 24 = 34$ zabojev vode. Označimo z x število zabojev, ki jih je kupil Janez. Zapišemo enačbo $x + 4 + x = 34$, katere rešitev je 15. Janeze je kupil $24 \cdot 15 = 360$ plastenkov vode, torej je založil $360 \cdot 0,3 = 108$ €.
- B3.** V sodu je $\frac{3}{5} \cdot 200 = 120$ litrov soka, ki vsebuje $\frac{60}{100} \cdot 120 = 72$ litrov sadnega deleža. Če bi sod do vrha napolnili z vodo, bi dobili 200 litrov soka z 72 litri sadnega deleža. Torej bi bilo v soku $\frac{72}{200} = \frac{36}{100} = 36\%$ sadnega deleža. Naj bo x količina soka, ki jo Manca nadomesti z vodo. Količina sadnega deleža v $120 - x$ litrih soka je enaka $\frac{60}{100} \cdot (120 - x)$. V razredčenem soku pa je $\frac{20}{100} \cdot 120 = 24$ litrov sadnega deleža. Dobimo enačbo $0,6 \cdot (120 - x) = 24$, katere rešitev je $x = 80$. Torej je odlila 80 litrov soka.

Rešitve za 9. razred

- A1.** Aritmetična sredina bo najmanjša v primeru, ko Jure na tablo zapiše le števila 1, 2 ali 3. Ker je modus enak 3, je enk oziroma dvojk največ 5. Skupno število enk in dvojk je $15 - 6 = 9$. Torej bo aritmetična sredina najmanjša v primeru, ko je Jure na tablo zapisal 5 enk in 4 dvojke. Le ta je enaka $\frac{5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3}{15} = \frac{31}{15}$.
- A2.** Trikotnik ABC je pravokoten s pravim kotom v oglišču A . Trikotniki ABC , TAC in TBA so si podobni. S primerjavo prvega in drugega zapišemo razmerje $|CT| : |AC| = |AC| : |BC|$ oziroma $|CT| : 4 = 4 : 5$. Torej je $|CT| = \frac{16}{5}$. Za prvi in tretji trikotnik lahko zapišemo razmerje $|TB| : |AB| = |AB| : |BC|$ oziroma $|TB| : 3 = 3 : 5$. Od tod je $|TB| = \frac{9}{5}$. Iskano razmerje je enako $9 : 16$.
- 
- A3.** V danem izrazu izračunamo levo stran in dobimo $a^2 - 31a + 58 = 89$. Preoblikujemo ga v $a^2 = 31 + 31a$, izpostavimo 31 in zapišemo $\frac{a^2}{a+1} = 31$.
- A4.** Naj bo a dolžina prve katete danega trikotnika. Dolžina druge katete je enaka $a - 10$, dolžina hipotenuze pa $a + 10$. Upoštevamo Pitagorov izrek in dobimo enačbo $a^2 + (a - 10)^2 = (a + 10)^2$. Preoblikujemo jo v $a(a - 40) = 0$. Torej sta kateti dolgi 40 cm in 30 cm, ploščina trikotnika pa je enaka 600 cm^2 oziroma 6 dm^2 .
- A5.** Zapišimo ploščine mejnih ploskev $S_1 = ab = 2 \text{ m}^2$, $S_2 = bc = 3 \text{ m}^2$ in $S_3 = ac = 6 \text{ m}^2$. Pomnožimo vse tri enakosti in dobimo $a^2 b^2 c^2 = 6^2$. Od tod je prostornina enaka $V = abc = 6 \text{ m}^3$.
- A6.** Število a^b mora biti čim manjše, število c^d pa čim večje. Drugo število je zato zagotovo pozitivno, kar velja le v primerih $d = -2$ ali $d = -4$. Po velikosti primerjajmo števila $(-1)^{-2} = 1$, $(-1)^{-4} = 1$, $(-3)^{-2} = \frac{1}{9}$, $(-3)^{-4} = \frac{1}{81}$, $(-4)^{-2} = \frac{1}{16}$ in $(-2)^{-4} = \frac{1}{16}$. Torej je $c = -1$. Prvo število bo čim manjše, če bo negativno. To se zgodi, če je b liho število in zato je $b = -3$. Primerjamo med sabo še števili $(-2)^{-3} = -\frac{1}{8}$ in $(-4)^{-3} = -\frac{1}{64}$. Sledi, da je $a = -2$. Iskani zmnožek števil je enak $bd = -3 \cdot (-4) = 12$.
- A7.** Zapišemo Pitagorov izrek za višino pravilne enakorobe štiristrane piramide: $v_1^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$. Piramida je zato visoka $v_1 = 3\sqrt{2} \text{ cm}$. Prostornina razporejenega voska je enaka prostornini kvadra: $V_2 = a^2 v_2 = 36v_2$, kjer je v_2 višina, do katere sega vosek. Prostornini piramide in kvadra sta enaki, zato velja $\frac{36v_1}{3} = 36v_2$. Torej je $v_2 = \sqrt{2} \text{ cm}$.

- A8. Absolutne razlike pik pri metu dveh kock so lahko: 0, 1, 2, 3, 4 in 5. Število vseh možnih izidov je pri metu dveh kock enako 36. Zanima nas le $\frac{2}{3} \cdot 36 = 24$ možnosti. Razlika 0 se pojavi v šestih metih, 1 v desetih, 2 v osmih. Skupaj se vse tri pojavijo v 24 metih, torej je $a > 2$ oziroma $a = 3$.
- B1. Naj bo n število stranic večkotnika. Ker je število diagonal enako $\frac{n(n-3)}{2}$, zapišemo enačbo $\frac{n(n-3)}{2} + 2n = 55$. Preoblikujemo jo v $n(n+1) = 110 = 10 \cdot 11$. Edina možnost za $n = 10$. Vsota notranjih kotov je enaka $(n-2) \cdot 180^\circ = 8 \cdot 180^\circ = 1440^\circ$.
- B2. Dolžina hipotenuze $|AB|$ v trikotniku ABC je enaka $c^2 = 6^2 + 2^2 = 40$ oziroma $c = 2\sqrt{10}$ cm. Izračunamo njegovo ploščino $S = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6$ cm². Ploščina je enaka tudi $S = \frac{c \cdot v}{2}$, kjer je v višina trikotnika. Torej je višina enaka $v = \frac{2 \cdot S}{c} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$. Trikotnik ADC je enakokrak z osnovnico AD . Njegova višina je enaka višini trikotnika ABC . Uporabimo Pitagorov izrek za dolžino daljice AN , kjer je točka N nožišče višine na stranico AD in hkrati tudi njeno razpolovišče: $|AN|^2 = 2^2 - \left(\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)^2 = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$. Dolžina stranice $|AD| = 2 \cdot |AN| = \frac{2\sqrt{10}}{5}$. Razmerje $|AD| : |AB| = \frac{2\sqrt{10}}{5} : 2\sqrt{10} = \frac{1}{5} : 1 = 1 : 5$.



- B3. Naj bo n število piškotov v eni škatli, število naročenih škatel pa $\underline{a} \underline{b}$. Razlika med naročenim številom in spakiranim je $n(\underline{a} \underline{b} - \underline{b} \underline{a})$ oziroma $n(10a + b - (10b + a)) = n(9a - 9b) = 9n(a - b)$. Razcepimo število 4248 (najprej ga delimo z 9) in dobimo $4248 = 9 \cdot 8 \cdot 59$ oziroma $n(a - b) = 8 \cdot 59$. Torej je n lahko samo 59 in $a - b = 8$, kar velja samo v primeru $a = 9$ in $b = 1$. Naročili so 91 škatel piškotov.

Rešitve 16. tekmovanja v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike za srednje šole – državno tekmovanje

Rešitve 1. skupine: Poslovna matematika

1. NALOGA

a)

Izračun števila pekov (ponedeljek) = $12 \cdot 3 = \underline{36 \text{ pekov}}$

Izračun števila pekov (torek) = $36 - \left(\frac{1 \cdot 36}{3}\right) = \underline{24 \text{ pekov}}$

36 pekov	1.840 kg	100 %
↑	↑	↑
24 pekov	x kg	90 %

$$x = \frac{1.840 \times 24 \times 90}{36 \times 100} = \underline{1.104 \text{ kg}}$$

Odg.: V torek bodo spekli 1.104 kg kruha in peciva.

b)

$$\text{Izračun ponedeljkeve količine na kombi} = \frac{1 \cdot 1840}{2} = \underline{\underline{920 \text{ kg}}}$$

$$\text{Izračun količine kruha in peciva}_{(\text{sreda})} = (1.840 + \frac{70 \cdot 1840}{100}) = \underline{\underline{3.128 \text{ kg}}} \text{ ali } (1.840 \cdot 1,7) = \underline{\underline{3.128 \text{ kg}}}$$

$$\text{Izračun sredine količine na kombi} = \frac{3.128}{4} = \underline{\underline{782 \text{ kg}}}$$

2. NALOGA

a)

$$a + b + c + d = 40.000,00$$

$$a : b : c : d = 12.000,00 : 9.600,00 : 14.400,00 : 12.000,00 : 2.400,00$$

$$5 : 4 : 6 : 5$$

$$5x + 4x + 6x + 5x = 40.000,00$$

$$20x = 40.000,00$$

$$\underline{\underline{x = 2.000,00}}$$

$$\text{Arh} = 5x = \underline{\underline{10.000,00 \text{ EUR}}}$$

$$\text{Ban} = 4x = \underline{\underline{8.000,00 \text{ EUR}}}$$

$$\text{Cot} = 6x = \underline{\underline{12.000,00 \text{ EUR}}}$$

$$\text{Dimc} = 5x = \underline{\underline{10.000,00 \text{ EUR}}}$$

b)

$$a + b + c + d = 40.000,00$$

$$a : b : c : d = \frac{1}{54000} : \frac{1}{72000} : \frac{1}{36000} : \frac{1}{108000} / * 216000$$

$$a : b : c : d = 4 : 3 : 6 : 2$$

$$4x + 3x + 6x + 2x = 40.000,00$$

$$15x = 40.000,00$$

$$\underline{\underline{x = 2.666,6666666}}$$

$$\text{Arh} = 4x = \underline{\underline{10.666,67 \text{ EUR}}}$$

$$\text{Ban} = 3x = \underline{\underline{8.000,00 \text{ EUR}}}$$

$$\text{Cot} = 6x = \underline{\underline{16.000,00 \text{ EUR}}}$$

$$\text{Dimc} = 2x = \underline{\underline{5.333,33 \text{ EUR}}}$$

c)

$$a + b + c + d = 40.000,00$$

$$a : b : c : d = (5 \cdot 4) : (4 \cdot 3) : (6 \cdot 6) : (5 \cdot 2)$$

$$20 : 12 : 36 : 10 / (:2)$$

$$10 : 6 : 18 : 5$$

$$39x = 40.000,00$$

$$\underline{\underline{x = 1.025,641026}}$$

$$\text{Arh} = 10x = \underline{\underline{10.256,41 \text{ EUR}}}$$

$$\text{Ban} = 6x = \underline{\underline{6.153,85 \text{ EUR}}}$$

$$\text{Cot} = 18x = \underline{\underline{18.461,54 \text{ EUR}}}$$

$$\text{Dimc} = 5x = \underline{\underline{5.128,20 \text{ EUR}}}$$

d)

$$a + b + c + d = 40.000,00$$

Arh	1,2b	1,2 x	12.000,00 EUR
Ban	x	x	10.000,00 EUR
Cot	0,6a	0,72 x	7.200,00 EUR
Dimc	1,5c	1,08 x	10.800,00 EUR

$$1,2x + x + 0,72x + 1,08x = 40.000,00$$

$$4x = 40.000,00$$

$$\underline{\underline{x = 10.000,00}}$$

e)

Arh = 10.256,41 EUR
Cot = 18.461,54 EUR
 Razlika = 8.205,13 EUR

X %	8.205,13 EUR
10.256,41 EUR	100 %

$$X = \frac{8.205,13 \cdot 100}{10.256,41} = \underline{\underline{80,00 \%}}$$

Odg.: Kmetija Cot dobi za 80 % **več** sredstev kot kmetija Arh.

3. NALOGA

a)

C = 81.000,00 EUR

- 13 % pocenitev

C₁ = **70.470,00 EUR**

+ x % podražitev (Izračun*)

C₂ = **108.898,61 EUR**

+ 15 % podražitev

C₃ = **125.233,40 EUR**

+ stroški dodatnih storitev = 2.650,00 EUR

C₄ = 127.883,40 EUR

Izračun*

C₁ = 70.470,00 EUR

C₂ = 108.898,61 EUR

d = 38.428,61 EUR

X %	38.428,61 EUR
70.470,00 EUR	100 %

$$X = \frac{38.428,61 \cdot 100}{70.470,00} = \underline{\underline{54,53 \%}}$$

b)

C = 81.000,00 EUR

C₃ = 125.233,40 EUR

d = 44.233,40 EUR ali $((0,87 \cdot 1,5453 \cdot 1,15) - 1) \cdot 100 = 54,61 \%$

X %	44.233,40 EUR
81.000,00 EUR	100 %

$$X = \frac{44.233,40 \cdot 100}{81.000,00} = \underline{\underline{54,61 \%}}$$

Odg.: Skupna podražitev je bila 54,61 %.

c)

X %	2.650,00 EUR
125.233,40 EUR	100 %

$$X = \frac{2.650,00 \cdot 100}{125.233,40} = \underline{\underline{2,12 \%}}$$

d)

$$81.000,00 * r' = 95.000,00$$

$$81.000,00 * \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 = 95.000,00$$

$$p = \left(\sqrt[3]{\frac{95.000,00}{81.000,00}} - 1\right) * 100$$

$$\underline{\underline{p = 5,46 \%}}$$

4. NALOGA

a)

$$G_0 = 55.680,00 \text{ EUR}$$

$$G_n = 55.680,00 * 1,75 = 97.440,00 \text{ EUR}$$

$$n = 11,5 \text{ let}$$

$$\underline{m = 2}$$

$$p = x \%$$

$$G_n = G_0 * r^{(n*m)}$$

$$r' = \sqrt[n*m]{\frac{G_n}{G_0}}$$

$$r' = \sqrt[23]{\frac{97440}{55680}}$$

$$\underline{\underline{r' = 1,024629538}}$$

$$p = (r' - 1) * 100 * m = (r' - 1) * 200 = \underline{\underline{4,93 \%}}$$

b)

$$G_0 = 55.680,00 \text{ EUR}$$

$$p = 4 \%$$

$$G_n = 55.680,00 * 1,1 = 61.248,00 \text{ EUR}$$

$$\underline{m = 365}$$

$$n = x \text{ let, dni}$$

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{4}{100} = \underline{1,04}$$

$$G_n = G_0 * r^n$$

$$n = \frac{\log \frac{G_n}{G_0}}{\log r} = \frac{\log \left(\frac{61.248,00}{55.680,00}\right)}{\log 1,04} = \underline{\underline{2,43 \text{ let}}} \rightarrow \text{tj. 2 leti in 157 dni}$$

c)

$$G_0 = 55.680,00 \text{ EUR}$$

$$p = 4 \%$$

$$n = 5 \text{ let}$$

$$\underline{m = 4}$$

$$G_n = x \text{ EUR}$$

$$p' = \frac{p}{m} = \frac{4}{4} = 1 \%$$

$$r' = 1 + \frac{p'}{100} = 1 + \frac{1}{100} = \underline{1,01} \quad \text{ali} \quad r' = 1 + \frac{p'}{100*m} = 1 + \frac{4}{100*4} = 1,01$$

$$G_n = G_0 * r^{(n*m)}$$

$$G_n = 55.680,00 * 1,01^{(5*4)} = \underline{\underline{67.940,18 \text{ EUR}}}$$

Rešitve 2. skupine: Statistika

1. NALOGA

a)

Tabela 1: Največji proizvajalci čokolade na svetu po vrednosti prodaje in strukturnih odstotkih v letu 2014

Proizvajalec	Prodaja v milijonih USD	Strukturni delež v %
Mars Inc (ZDA)	18.478	24,47
Mondelēz International (ZDA)	14.350	19,00
Ferrero Group (Luksemburg/Italija)	10.911	14,45
Nestlé SA (Švica)	10.451	13,84
Meiji Co Ltd (Japonska)	9.818	13,00
Hershey Foods Corp (ZDA)	7.483	9,91
Chocoladenfabriken Lindt & Sprüngli AG (Švica)	4.021	5,33
Skupaj	75.512	100,00

Vir: <https://sl.wikipedia.org/wiki/Čokolada>

b)

Tabela 3: Povprečne hranilne vrednosti posameznih sestavin v 270-gramski tablici mlečne čokolade Milka

Povprečna hranilna vrednost na 270 g:	270 g
Maščobe	78,30
Ogljikovi hidrati	159,30
Prehranske vlaknine	4,86
Beljakovine	17,01
Sol	1,08
Ostalo	9,45

2. NALOGA

a)

$$K = \frac{\text{število iskalcev zaposlitve}}{\text{število zaposlenih}} * 1000$$

1. četrtnje K = 3,03 iskalca zaposlitve/1000 zaposlenih
2. četrtnje K = 3,43 iskalca zaposlitve/1000 zaposlenih
3. četrtnje K = 14,01 iskalca zaposlitve/1000 zaposlenih

b)

$$17 = \frac{\text{št.iskalcev zaposlitve}}{\text{št.zaposlenih}} \times 1000$$

$$17 = \frac{107}{\text{št.zaposlenih}} \times 1000$$

Število zaposlenih je 6294.

c)

$$\text{1.polletje: } K = \frac{\text{št.tujih turistov}}{\text{št. vseh turistov}} \cdot 100 = \frac{1598}{2350} \cdot 100 = 68 \text{ tujih turistov na } 100 \text{ turistov}$$

$$\text{2.polletje: } K = \frac{\text{št.tujih turistov}}{\text{št. vseh turistov}} \cdot 100 = \frac{15}{125} \cdot 100 = 12 \text{ tujih turistov na } 100 \text{ turistov}$$

1.polletje:

$$K = \frac{\text{št. tujih turistov}}{\text{št. domačih turistov}} \cdot 100 = \frac{1598}{752} \cdot 100 = 212,5 \text{ tujih turistov na } 100 \text{ domačih turistov}$$

2.polletje:

$$K = \frac{\text{št. tujih turistov}}{\text{št. domačih turistov}} \cdot 100 = \frac{15}{110} \cdot 100 = 13,64 \text{ tujih turistov na } 100 \text{ domačih turistov}$$

3. NALOGA

a)

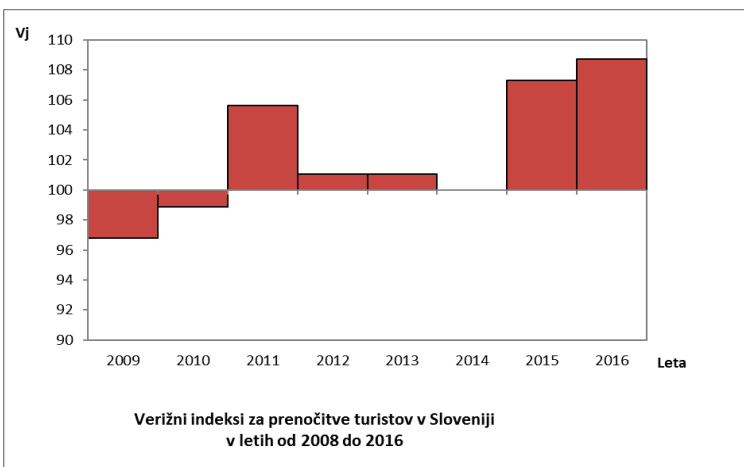
Tabela 5: Prihodi tujih turistov po državah v Sloveniji v letu 2016

Država	Število prihodov tujih turistov
Italija	510.000
Avstrija	300.000
Nemčija	300.000
Hrvaška	150.000
Republika Koreja	120.000

b)

Tabela 6: Stopnje rasti za prenočitve turistov v Sloveniji v letih od 2008 do 2016

Leto	Stopnje rasti za prenočitve turistov	V_i	Število prenočitev turistov v milijonih
2008	-	-	9,3
2009	-3,23	96,77	9,0
2010	-1,11	98,89	8,9
2011	5,62	105,62	9,4
2012	1,06	101,06	9,5
2013	1,05	101,05	9,6
2014	0	100,00	9,6
2015	7,29	107,29	10,3
2016	8,74	108,74	11,2



4. NALOGA

a)

Tabela 7: Frekvenčna porazdelitev metov po številu pik pri igri človek ne jezi se

Število padlih pik	Absolutna frekvenca f_i	f_j %	Ločne stopinje
1 pika	35	17,5	63
2 piki	25	12,5	45
3 pike	40	20,0	72
4 pike	25	12,5	45
5 pik	30	15,0	54
6 pik	45	22,5	81
Skupaj	200	100,0	360

b)

$45/200 \cdot 100 = 22,5 \%$ metov

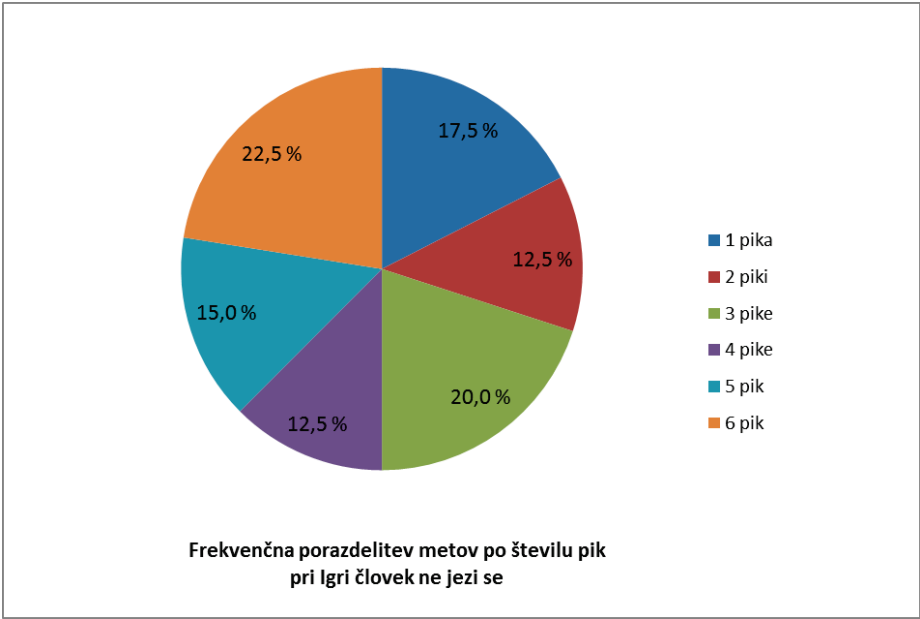
c)

Najpogostejše število vrženih pik je bilo 6 pik, vrženih je bilo 45-krat.

d)

$$M = \frac{35 \cdot 1 + 25 \cdot 2 + 40 \cdot 3 + 25 \cdot 4 + 30 \cdot 5 + 45 \cdot 6}{200} = 3,6 \text{ pik}$$

e)



Rešitve tekmovanja v znanju finančne matematike in statistike - državno tekmovanje

1. NALOGA

Skupina delničarjev	Število delnic	Lastniški delež v %
domače banke	708 936	32,52
tuje banke	353 378	16,21
Slovenska družba, d.d.	878 976	40,32
fizične osebe (domače in tuje)	183 556	8,42
lastne delnice	55 154	2,53
Skupaj	2 180 000	100,00

a)

V prvem stolpcu je manjkajoča postavka *lastne delnice*.

Delež delnic, ki jih imajo v lasti domače banke, lahko dobimo s križnim računom. Upoštevamo, da 878 976 delnic Slovenske družbe predstavlja 40,32 % lastniški delež, zato 708 936 delnic, ki so v lasti domačih bank, predstavlja lastniški delež

$$\frac{708\,936 \cdot 40,32\%}{878\,976} = 32,52\%.$$

Delež delnic, ki jih imajo v lasti tuje banke, določimo tako, da je vsota deležev enaka 100 %. Lastniški delež tujih bank znaša 16,21 %.

Število delnic, ki jih imajo v lasti tuje banke, dobimo s križnim računom

$$\frac{16,21\% \cdot 878\,976}{40,32\%} = 353\,378.$$

Skupno število delnic je zato enako 2 180 000.

b)

Največji delež ima v lasti Slovenska družba.

c)

Med delničarji je $\frac{708\,936}{118\,156} = 6$ domačih bank.

Med delničarji je $9 - 6 = 3$ tujih bank.

V povprečju ima vsaka tuja banka $\frac{353\,378}{3} = 117\,792,67$ delnice.

Tuje banke imajo v povprečju v lasti manj delnic kot domače banke.

d)

Lastniški delež domačih bank se je zvišal za 12,7 odstotne točke, če so skupaj kupile 12,7 % vseh delnic podjetja Rombon.

Domače banke so kupile $2\,180\,000 \cdot 12,7\% = 276\,860$ delnic.

Tuje banke so kupile $500\,310 - 276\,860 = 223\,450$ delnic.

Po transakciji imajo tuje banke v lasti $223\,450 + 353\,378 = 576\,828$ delnic, kar je $\frac{576\,828}{2\,180\,000} = 26,46\%$ vseh delnic.

Lastniški delež Slovenske družbe se je (absolutno) znižal za $\frac{500310}{2180000} = 22,95\%$, torej za 22,95 odstotnih točk.

e)

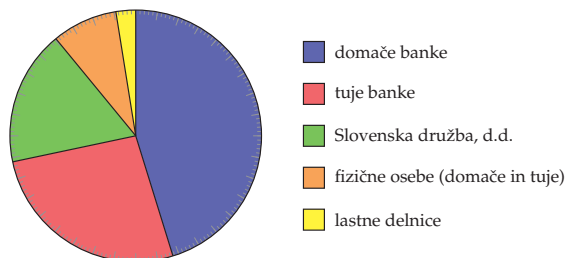
Nov delež domačih bank znaša $32,52\% + 12,7\% = 45,22\%$, kar v krožnem diagramu predstavimo s kotom $45,22\% \cdot 360^\circ \approx 163^\circ$.

Nov delež tujih bank znaša $26,46\%$, kar v diagramu predstavimo s kotom $\approx 95^\circ$.

Nov delež Slovenske družbe znaša $40,32\% - 22,95\% = 17,37\%$, kar v diagramu predstavimo s kotom $\approx 63^\circ$.

Delež fizičnih oseb znaša $8,42\%$, kar v diagramu predstavimo s kotom $\approx 30^\circ$.

Delež lastnih delnic znaša $2,53\%$, kar v diagramu predstavimo s kotom $\approx 9^\circ$.



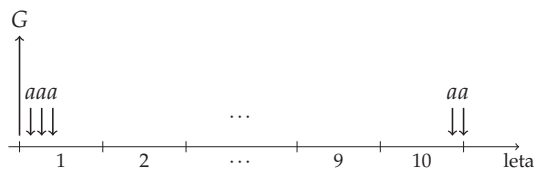
2. NALOGA

a)

Danes prejmemo glavnico kredita $G = 50\,000$ EUR.

Dolg je poplačan v 120 obrokih, višino posameznega obroka označimo z a .

Denarne tokove kredita prikazuje spodnja shema.



Mesečni obrestni faktor je $r = \sqrt[12]{1 + \frac{p}{100}} = \sqrt[12]{1,04}$.

Redukcijski termin postavimo na trenutek zadnjega obroka.

Z načelom ekvivalence glavnice dobimo

$$Gr^{120} = ar^{119} + ar^{118} + ar^{117} + \dots + ar + a$$

$$Gr^{120} = a(r^{119} + r^{118} + \dots + r + 1)$$

$$Gr^{120} = a \cdot \frac{r^{120} - 1}{r - 1}$$

$$a = Gr^{120} \cdot \frac{r - 1}{r^{120} - 1}$$

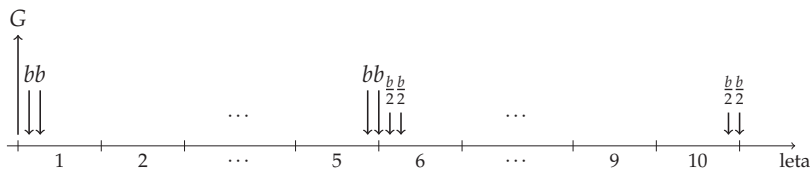
$$a = 50\,000 \cdot 1,04^{10} \cdot \frac{\sqrt[12]{1,04} - 1}{1,04^{10} - 1}$$

$$a = 504,53 \text{ EUR}$$

Posamezen obrok znaša 504,53 EUR.

b)

Višino prvega obroka označimo z b . Zadnji obrok višine b je plačan ob koncu 5. leta. Denarne tokove prikazuje spodnja shema.



Z načelom ekvivalence glavnice dobimo

$$Gr^{120} = br^{119} + br^{118} + \dots + br^{61} + br^{60} + \frac{b}{2}r^{59} + \frac{b}{2}r^{58} + \dots + \frac{b}{2}r + \frac{b}{2}$$

$$Gr^{120} = br^{60}(r^{59} + r^{58} + \dots + r + 1) + \frac{b}{2}(r^{59} + r^{58} + \dots + r + 1)$$

$$Gr^{120} = b(r^{60} + \frac{1}{2}) \frac{r^{60} - 1}{r - 1}$$

$$b = Gr^{120} \cdot \frac{r - 1}{(r^{60} - 1)(r^{60} + \frac{1}{2})}$$

$$b = 50\,000 \cdot 1,04^{10} \cdot \frac{\sqrt[12]{1,04} - 1}{(1,04^5 - 1)(1,04^5 + \frac{1}{2})}$$

$$b = 651,48 \text{ EUR}$$

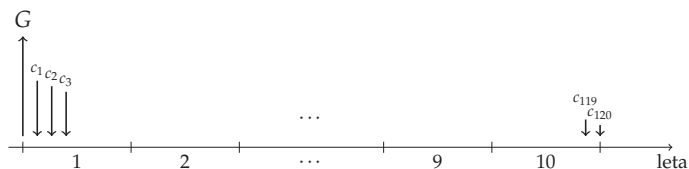
Prvih 60 obrokov znaša 651,48 EUR, zadnjih 60 pa 325,74 EUR.

c)

Višino prvega obroka označimo s $c_1 = c$.

Vsak naslednji obrok je $x = 0,99$ -kratnik prejšnjega: drugi obrok je $c_2 = cx$, tretji obrok je $c_3 = cx^2$, ..., zadnji je $c_{120} = cx^{119}$.

Denarne tokove prikazuje spodnja shema.



Z načelom ekvivalence glavnice dobimo

$$Gr^{120} = c_1r^{119} + c_2r^{118} + \dots + c_{119}r + c_{120}$$

$$Gr^{120} = cr^{119} + cxr^{118} + \dots + cx^{118}r + cx^{119}$$

$$Gr^{120} = cx^{119} \left(\left(\frac{r}{x} \right)^{119} + \left(\frac{r}{x} \right)^{118} + \dots + \frac{r}{x} + 1 \right)$$

$$Gr^{120} = cx^{119} \cdot \frac{\left(\frac{r}{x} \right)^{120} - 1}{\frac{r}{x} - 1}$$

$$c = Gr^{120} \cdot \frac{\frac{r}{x} - 1}{x^{119} \left(\left(\frac{r}{x} \right)^{120} - 1 \right)}$$

$$c = 50\,000 \cdot 1,04^{10} \cdot \frac{\frac{\sqrt[12]{1,04}}{0,99} - 1}{0,99^{119} \left(\left(\frac{\sqrt[12]{1,04}}{0,99} \right)^{120} - 1 \right)}$$

$$c = 831,95 \text{ EUR}$$

Prvi obrok znaša 831,95 EUR, zadnji pa $cx^{119} = 831,95 \cdot 0,99^{119} = 251,59 \text{ EUR}$.

3. NALOGA

a)

Označimo nominalni vrednosti obveznic z $N = 1000 \text{ EUR}$, ceno enoletne obveznice s $P_1 = 969 \text{ EUR}$ ter ceno dveletne obveznice s $P_2 = 1015,50 \text{ EUR}$. Posamezen kupon kuponske obveznice znaša $C = 0,05 \cdot 1000 = 50 \text{ EUR}$.

S pomočjo enoletne obveznice določimo obrestno mero $R(0, 1)$.

S formulo za vrednotenje obveznice dobimo

$$P_1 = N \cdot D(0, 1) = \frac{N}{1 + R(0, 1)} \Rightarrow R(0, 1) = \frac{N}{P_1} - 1 = \frac{1000}{969} - 1 = 3,20 \, \%$$

Z dveletno obveznico nato določimo še obrestno mero $R(0, 2)$.

$$P_2 = C \cdot D(0, 1) + (C + N)D(0, 2) = \frac{C}{1 + R(0, 1)} + \frac{N + C}{(1 + R(0, 2))^2}$$

$$R(0, 2) = \sqrt{\frac{N + C}{P_2 - \frac{C}{1 + R(0, 1)}}} - 1 = \sqrt{\frac{1000 + 50}{1015,5 - \frac{50}{1 + 0,032}}} - 1 = 4,20 \, \%$$

Iz sistema

$$R(0, 1) = k + n = 0,0320$$

$$R(0, 2) = 2k + n = 0,0420$$

dobimo neznana parametra $k = 0,0100 = 1,00 \, \%$ ter $n = 0,0220 = 2,20 \, \%$.

b)

Če se časovna struktura obrestne mere ne spremeni, bo čez eno leto veljalo

$$R(1, 2) = R(0, 2 - 1) = R(0, 1) = 3,20 \, \%.$$

Zaradi nespremenjenih obrestnih mer bo cena nove enoletne brezcuponske obveznice z nominalno vrednostjo 1000 EUR ob izdaji znašala 969 EUR.

Investitor danes za (že izdano) brezcuponsko obveznico plača 969 EUR in čez eno leto prejme nominalno vrednost 1000 EUR.

Z njo kupi $n = \frac{1000}{969} = 1,032$ nove brezcuponske obveznice.

Ob dospetju nove brezcuponske obveznice prejme $1,032 \cdot 1000 = 1032 \text{ EUR}$.

Ustvarjen donos je $1032 - 969 = 63 \text{ EUR}$, donosnost pa $\frac{63}{969} = 0,0650 = 6,50 \, \%$.

c)

Investitor danes kupi kuponsko obveznico za 1015,50 EUR.

Čez eno leto prejme kupon v višini 50 EUR in z njim kupi $m = \frac{50}{969} = 0,052$ nove brezkuponske obveznice.

Čez dve leti prejme 1050 EUR iz kuponske obveznice ter $0,052 \cdot 1000 = 52$ EUR iz nove brezkuponske obveznice. Skupaj prejme 1102 EUR.

Ustvarjen donos je $1102 - 1015,50 = 86,50$ EUR, donosnost pa $\frac{86,50}{1015,50} = 0,0852 = 8,52\%$.

d)

Naj bo x število brezkuponskih obveznic ter y število kuponskih obveznic v investitorjevem portfelju. Ker želi investirati 15 000 EUR, mora veljati

$$\begin{aligned}P_1x + P_2y &= 15\,000, \\969x + 1015,5y &= 15\,000.\end{aligned}$$

Ker želi ustvariti 7 % donosnost, mora portfelj čez dve leti izplačati

$$15\,000 \cdot 1,07 = 16\,050 \text{ EUR.}$$

Uporabimo končni investicijski vrednosti iz nalog b) in c) in dobimo enačbo

$$1032x + 1102y = 16\,050.$$

Rešitev sistema je $x = 11,653$ brezkuponskih obveznic in $y = 3,651$ kuponskih obveznic.

4. NALOGA

a)

Za premijo evropske prodajne opcije na delnico (brez dividend) mora veljati

$$\max\{K(1+R)^{-T} - S_0, 0\} \leq p_0^E \leq K(1+R)^{-T}.$$

Opcija je imela do zapadlosti še 9 mesecev, to je $T = \frac{3}{4}$ leta. Obrestna mera je bila $R = 0,018$, trenutna cena delnice $S_0 = 18,11$ EUR in izvršilna cena v opciji $K = 18,75$ EUR. Dobimo

$$\begin{aligned}\max\{18,75 \cdot 1,018^{-3/4} - 18,11; 0\} &\leq p_0^E \leq 18,75 \cdot 1,018^{-3/4}, \\ \max\{0,39; 0\} &\leq p_0^E \leq 18,50.\end{aligned}$$

Za premijo je moralo veljati

$$0,39 \text{ EUR} \leq p_0^E \leq 18,50 \text{ EUR.}$$

b)

Za premijo evropske nakupne opcije na delnico (brez dividend) mora veljati:

$$\max \{S_t - K(1 + R)^{-(T-t)}, 0\} \leq c_t^E \leq S_t.$$

Tri mesece po času 0 velja $t = \frac{1}{4}$, čas do dospetja $T = \frac{3}{4}$ pa je $T - t = \frac{1}{2}$ leta. Cena delnice je $S_{1/4} = 18,61$ EUR. Dobimo

$$\begin{aligned} \max \{18,61 - 18,75 \cdot 1,018^{-1/2}; 0\} &\leq c_{1/4}^E \leq 18,61, \\ \max \{0,03; 0\} &\leq c_{1/4}^E \leq 18,61. \end{aligned}$$

Za premijo mora tako veljati

$$0,03 \text{ EUR} \leq c_{1/4}^E \leq 18,61 \text{ EUR}.$$

Ker trenutna premija leži na tem intervalu, arbitraža ni možna.

c)

Preverimo lahko veljavnost neenakosti za premijo prodajne opcije ter paritetno enakost.

Za premijo evropske prodajne opcije na delnico (brez dividend) mora veljati

$$\max \{K(1 + R)^{-(T-t)} - S_t, 0\} \leq p_t^E \leq K(1 + R)^{-(T-t)}.$$

Tako dobimo omejitve

$$0 \leq p_t^E \leq 18,58,$$

ki ni kršena.

Premiji evropske nakupne in prodajne opcije povezuje paritetna enakost

$$p_t + S_t = c_t + K(1 + R)^{-(T-t)}.$$

Ta ne velja, saj je

$$p_{1/4}^E + S_{1/4} = 24,46 \neq 25,69 = c_{1/4}^E + K(1 + R)^{-1/2}.$$

Torej je možna arbitraža.

Na trgu velja

$$p_{1/4}^E + S_{1/4} < c_{1/4}^E + K(1 + R)^{-1/2},$$

torej

$$c_{1/4}^E + K(1 + R)^{-1/2} - p_{1/4}^E - S_{1/4} > 0.$$

Ena možna arbitražna strategija je naslednja:

- Čas $t = \frac{1}{4}$ (danes).
 - Kupimo delnico podjetja BCD, d.d.,
 - kupimo prodajno opcijo,
 - prodamo nakupno opcijo,
 - sposodimo si $L = 17,35$ EUR za pol leta.

Neto denarni tok te strategije je 0, saj je

$$-S_{1/4} - p_{1/4}^E + c_{1/4}^E + L = -18,61 - 5,85 + 17,35 + 7,11 = 0.$$

- Čas $t = \frac{3}{4}$ (zapadlost opcij).
 - Prodamo delnico,
 - izvršimo prodajno opcijo, če se izplača,
 - izplačamo nakupno opcijo, če je potrebno,
 - vrnemo denar z obrestmi.

Ob zapadlosti opcij je neto denarni tok

$$\begin{aligned}
 S_{3/4} + P_{3/4} - C_{3/4} - L(1 + R)^{1/2} &= \\
 &= S_{3/4} + \max\{K - S_{3/4}, 0\} - \max\{S_{3/4} - K, 0\} - L(1 + R)^{1/2} = \\
 &= S_{3/4} + \max\{K - S_{3/4}, 0\} - \max\{S_{3/4} - K, 0\} - K + K - L(1 + R)^{1/2} = \\
 &= \max\{K, S_{3/4}\} - \left(\max\{S_{3/4} - K, 0\} + K \right) + K - L(1 + R)^{1/2} = \\
 &= \max\{K, S_{3/4}\} - \max\{S_{3/4}, K\} + K - L(1 + R)^{1/2} = \\
 &= K - L(1 + R)^{1/2} = 18,75 - 17,51 = 1,24 \text{ EUR}.
 \end{aligned}$$

Arbitražni zaslužek ob zapadlosti opcij tako znaša 1,24 EUR.

Druga možna arbitražna strategija je naslednja:

- Čas $t = \frac{1}{4}$ (danes).
 - Prodamo nakupno opcijo,
 - sposodimo si $K(1 + R)^{-1/2} = 18,75 \cdot 1,018^{-1/2} = 18,58$ EUR za pol leta.
 - kupimo prodajno opcijo,
 - kupimo delnico podjetja BCD, d.d.

Neto denarni tok te strategije je

$$c_{1/4}^E + K(1 + R)^{-1/2} - p_{1/4}^E - S_{1/4} = 7,11 + 18,58 - 5,85 - 18,61 = 1,23 \text{ EUR} > 0.$$

- Čas $t = \frac{3}{4}$ (zapadlost opcij).
 - Izplačamo nakupno opcijo, če je potrebno,
 - vrnemo denar z obrestmi.
 - izvršimo prodajno opcijo, če se izplača,
 - prodamo delnico.

Ob zapadlosti opcij je neto denarni tok

$$\begin{aligned}
 -C_{3/4} - K + P_{3/4} + S_{3/4} &= -\max\{S_{3/4} - K, 0\} - K + \max\{K - S_{3/4}, 0\} + S_{3/4} = \\
 &= -\left(\max\{S_{3/4} - K, 0\} + K \right) + \max\{K - S_{3/4}, 0\} + S_{3/4} = \\
 &= -\max\{S_{3/4}, K\} + \max\{K, S_{3/4}\} = 0.
 \end{aligned}$$

Arbitražni zaslužek je ostvarjen v času $t = \frac{1}{4}$ in znaša 1,23 EUR.