Tekmovanja

9. tekmovanje v znanju astronomije za Dominkova priznanja – državno tekmovanje

Naloge za 7. razred

A1. V Sloveniji je vidna polna Luna. Katero Lunino meno vidijo takrat v Južni Afriki?

(**A**) Mlaj. (**B**) Ščip. (**C**) Prvi krajec. (**D**) Zadnji krajec.

A2. Nočno nebo opazuješ v kraju na Zemljinem ekvatorju. Katero od naštetih ozvezdij boš tekom leta lahko videl v zenitu?

(**A**) Veliki medved. (**B**) Kasiopeja. (**C**) Orion. (**D**) Kentaver.

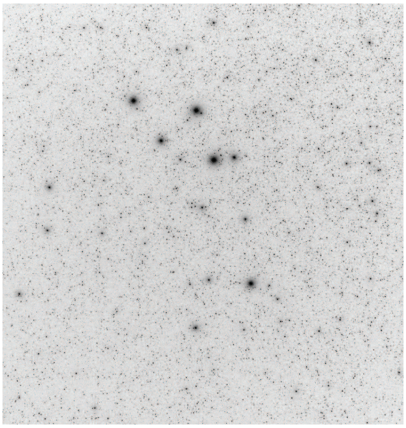
A3. Katero ozvezdje je na sliki? Fotografija je negativ.

(**A**) Lira.

(**B**) Perzej.

(**C**) Vodna kača.

(**D**) Delfin.



A4. Ceres so astronomi nekoč uvršali med asteroide, danes pa to telo uvrščajo med

(**A**) male planete;

(**B**) pritlikave planete.

(**C**) komete;

(**D**) lune;

A5. Jupiter je v opoziciji s Soncem. Katera izjava drži?

(**A**) Sonce zahaja, Jupiter vzhaja.

(**B**) Jupiter je na nebu v neposredni bližini Sonca, zato ga ni mogoče videti.

(**C**) Jupiter je takrat najbolj oddaljen od Zemlje.

(**D**) Jupiter vzhaja okoli polnoči.

A6. Kako si po oddaljenosti od Jupitra sledijo njegove štiri velike (Galilejeve) lune?

(**A**) Kalisto, Io, Evropa, Ganimed. (**B**) Evropa, Io, Kalisto, Ganimed.

(**C**) Io, Ganimed, Evropa, Kalisto. (**D**) Io, Evropa, Ganimed, Kalisto.

A7. Neka zvezda je bistveno hladnejša od Sonca. Kakšne barve je?

(**A**) Modre. (**B**) Rdeče.

(**C**) Vijolične. (**D**) Bele.

A8. Kaj je planetarna meglica?

(**A**) Ostanek materiala okoli mlade zvezde, ki se še oblikuje v planete.

(**B**) Hladen medzvezdni oblak prahu in plina.

(**C**) Oblak snovi, ki ga je v okolico izvrgla zvezda v zadnjih fazah življenja.

(**D**) Meglica, ki obdaja plinaste planete.

A9. V naši Galaksiji je približno

(**A**) 1 do 4 milijarde zvezd; (**B**) 10 do 40 milijard zvezd;

(**C**) 100 do 400 milijard zvezd; (**D**) 1000 do 4000 milijard zvezd.

A10. Refraktor je teleskop, ki ima

(**A**) za objektiv lečo ali sistem leč;

(**B**) za objektiv konkavno zrcalo;

(**C**) za objektiv konveksno zrcalo;

(**D**) za objektiv kombinacijo leč in zrcala.

B1. Z vrtljivo zvezdno karto odgovori na vprašanja.

A Kdaj vzide zvezda Rigel 10. februarja?

B Koliko časa je v naših krajih Sonce 31. januarja pod obzorjem?

C Z vrtljivo zvezdno karto oceni največjo in najmanjšo višino zvezde Mizar nad severno točko obzorja. Vrednosti zapiši v stopinjah.

D V ozvezdju Orion sta svetli zvezdi Betelgeza in Rigel.
Katera od teh zvezd je vidna s severnega pola Zemlje? Obkroži.

Betelgeza Rigel obe nobena

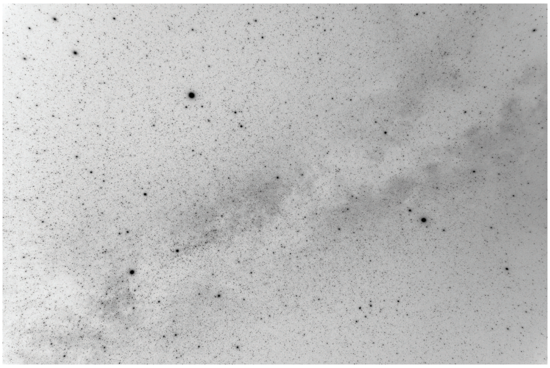
Katera od teh zvezd je vidna z južnega pola Zemlje? Obkroži.

Betelgeza Rigel obe nobena

B2. Naštej 5 ozvezdij, skozi katera gre ekliptika.

B3. Na sliki je prehod Mednarodne vesoljske postaje (MVP) pred Luno, ki jo je z Zemlje posnel amaterski astronom Ed Morana. Na podlagi posnetka izračunaj oddaljenost MVP od opazovalca. Premer kraterja Tycho, ki je lepo viden na fotografiji, D = 86 km (označeno na sliki). Oddaljenost Lune v trenutku nastanka posnetka je bila 360000 km.
Dolžina MVP d = 73 metrov (označeno na sliki).

B4. Na fotografiji (negativ) obkroži in zraven pripiši imena zvezd, ki tvorijo asterizem Poletni trikotnik.



B5. Venera je za opazovalca na Zemlji v največji elongaciji od Sonca. Koliko časa takrat potuje radijski signal od Zemlje do Venere? Nalogo reši z risanjem in merjenjem. Predpostavi, da se Venera in Zemlja okoli Sonca gibljeta po krožnih orbitah s polmeroma r_v = 0,72 astronomske enote, r_z = 1 astronomska enota. Hitrost radijskih valov c = 300000 km/s.

Naloge za 8. razred

A1. V Sloveniji je vidna polna Luna. Katero Lunino meno vidijo takrat v Južni Afriki?

(**A**) Mlaj. (**B**) Ščip. (**C**) Prvi krajec. (**D**) Zadnji krajec.

A2. Nočno nebo opazuješ v kraju na Zemljinem ekvatorju. Katero od naštetih ozvezdij boš tekom leta lahko videl v zenitu?

(**A**) Veliki medved. (**B**) Kasiopeja. (**C**) Orion. (**D**) Kentaver.

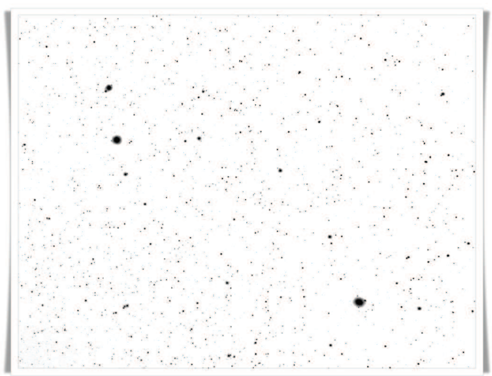
A3. Kateri asterizem je na sliki? Fotografija je negativ.

(**A**) Mali voz.

(**B**) Veliki voz.

(**C**) Gostosevci.

(**D**) Delfin.



A4. Ceres so astronomi nekoč uvršali med asteroide, danes pa to telo uvrščajo med

(**A**) male planete;

(**B**) komete;

(**C**) lune;

(**D**) pritlikave planete.

A5. Jupiter je v opoziciji s Soncem. Katera izjava drži?

(**A**) Sonce zahaja, Jupiter vzhaja.

(**B**) Jupiter je na nebu v neposredni bližini Sonca, zato ga ni mogoče videti.

(**C**) Jupiter je takrat najbolj oddaljen od Zemlje.

(**D**) Jupiter vzhaja okoli polnoči.

A6. Kako si po oddaljenosti od Jupitra sledijo njegove štiri velike (Galilejeve) lune?

(**A**) Kalisto, Io, Evropa, Ganimed. (**B**) Evropa, Io, Kalisto, Ganimed.

(**C**) Io, Ganimed, Evropa, Kalisto. (**D**) Io, Evropa, Ganimed, Kalisto.

A7. Od Sonca najbolj oddaljeno območje Osončja imenujemo

(**A**) Kuiperjev pas; (**B**) Oortov oblak;

(**C**) glavni asteroidni pas; (**D**) heliopavza.

A8. Kaj je planetarna meglica?

(**A**) Ostanek materiala okoli mlade zvezde, ki se še oblikuje v planete.

(**B**) Hladen medzvezdni oblak prahu in plina.

(**C**) Oblak snovi, ki ga je v okolico izvrgla zvezda v zadnjih fazah življenja.

(**D**) Meglica, ki obdaja plinaste planete.

A9. V naši Galaksiji je približno

(**A**) 1 do 4 milijarde zvezd; (**B**) 10 do 40 milijard zvezd;

(**C**) 100 do 400 milijard zvezd; (**D**) 1000 do 4000 milijard zvezd.

A10. Na lovskem dvogledu piše – 10x50. Kaj pomeni ta oznaka?

(**A**) To pomeni, da je povečava dvogleda 10-kratna, premer vsake od leč objektiva pa 50 mm.

(**B**) To pomeni, da je povečava dvogleda 10-kratna, skupni premer leč objektiva pa 50 mm.

(**C**) To pomeni, da je povečava dvogleda 50-kratna, premer vsake od leč objektiva pa 10 cm.

(**D**) To pomeni, da je povečava dvogleda 50-kratna, skupni premer leč objektiva pa 10 cm.

B1. Z vrtljivo zvezdno karto odgovori na vprašanja.

A Kdaj vzide zvezda Rigel 10. februarja?

B Koliko časa je v naših krajih Sonce 31. januarja pod obzorjem?

C Z vrtljivo zvezdno karto oceni največjo in najmanjšo višino zvezde Mizar nad severno točko obzorja. Vrednosti zapiši v stopinjah.

D V ozvezdju Orion sta svetli zvezdi Betelgeza in Rigel.

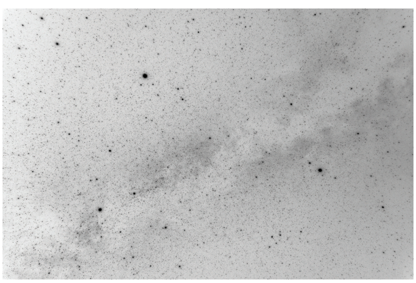
Katera od teh zvezd je vidna s severnega pola Zemlje? Obkroži.

Betelgeza Rigel obe nobena

Katera od teh zvezd je vidna z južnega pola Zemlje? Obkroži.

Betelgeza Rigel obe nobena

B2. Na fotografiji (negativ) obkroži in zraven pripiši imena zvezd, ki tvorijo asterizem Poletni trikotnik.



B3. Izračunaj, s kolikšno hitrostjo se giblje Zemlja okoli Sonca? Rezultat izrazi v enotah km/s. Predpostavi, da se Zemlja giblje po krožni orbiti. 1 astronomska enota = 150 milijonov kilometrov.

B4. Astronomska noč se začne, ko je središče Sonca 18 stopinj pod obzorjem. Izračunaj, koliko časa mine med zaidom središča Sonca in začetkom astronomske noči za opazovalca v kraju na ekvatorju na dan enakonočja. Kraj se nahaja na nadmorski višini 0 metrov. Učinke ozračja (refrakcija) zanemari.

B5. Za opazovalca na Marsu je navidezni premer ploskvice Sonca na nebu za 33 % manjši kot za opazovalca na Zemlji. Izračunaj, koliko časa potuje svetloba od Sonca do Marsa. 1 astronomska enota = 150 milijonov kilometrov, hitrost svetlobe c = 300000 km/s.

Naloge za 9. razred

A1. V Sloveniji je vidna polna Luna. Katero Lunino meno vidijo takrat v Južni Afriki?

(**A**) Mlaj. (**B**) Ščip. (**C**) Prvi krajec. (**D**) Zadnji krajec.

A2. Nočno nebo opazuješ v kraju na Zemljinem ekvatorju. Katero od naštetih ozvezdij boš tekom leta lahko videl v zenitu?

(**A**) Veliki medved. (**B**) Kasiopeja. (**C**) Orion. (**D**) Kentaver.

A3. Čarovnik ugasne Sonce. Približno čez koliko časa bi ugasnilo tudi na našem nebu?

(**A**) Čez 50 sekund. (**B**) Čez 500 sekund.

(**C**) Čez 5 minut. (**D**) V istem trenutku kot ga je ugasnil čarovnik.

A4. Ceres so astronomi nekoč uvršali med asteroide, danes pa to telo uvrščajo med

(**A**) male planete; (**B**) komete; (**C**) lune; (**D**) pritlikave planete.

A5. Jupiter je v opoziciji s Soncem. Katera izjava drži?

(**A**) Sonce zahaja, Jupiter vzhaja.

(**B**) Jupiter je na nebu v neposredni bližini Sonca, zato ga ni mogoče videti.

(**C**) Jupiter je takrat najbolj oddaljen od Zemlje.

(**D**) Jupiter vzhaja okoli polnoči.

A6. Kako si po oddaljenosti od Jupitra sledijo njegove štiri velike (Galilejeve) lune?

(**A**) Kalisto, Io, Evropa, Ganimed. (**B**) Evropa, Io, Kalisto, Ganimed.

(**C**) Io, Ganimed, Evropa, Kalisto. (**D**) Io, Evropa, Ganimed, Kalisto.

A7. Kakšne vrste je naša Galaksija?

(**A**) Eliptična. (**B**) Spiralna. (**C**) Spiralna s prečko. (**D**) Nepravilna.

A8. Kaj je planetarna meglica?

(**A**) Ostanek materiala okoli mlade zvezde, ki se še oblikuje v planete.

(**B**) Hladen medzvezdni oblak prahu in plina.

(**C**) Oblak snovi, ki ga je v okolico izvrgla zvezda v zadnjih fazah življenja.

(**D**) Meglica, ki obdaja plinaste planete.

A9. Neka vrsta zvezd se obnaša nadvse čudno. Te zvezde se periodično napihujejo in krčijo. Kako se imenujejo te zvezde?

(**A**) Kvazarji. (**B**) Kefeide. (**C**) Nove. (**D**) Supernove.

A10. Na lovskem dvogledu piše – 10x50. Kaj pomeni ta oznaka?

(**A**) To pomeni, da je povečava dvogleda 10-kratna, premer vsake od leč objektiva pa 50 mm.

(**B**) To pomeni, da je povečava dvogleda 10-kratna, skupni premer leč objektiva pa 50 mm.

(**C**) To pomeni, da je povečava dvogleda 50-kratna, premer vsake od leč objektiva pa 10 cm.

(**D**) To pomeni, da je povečava dvogleda 50-kratna, skupni premer leč objektiva pa 10 cm.

B1. Z vrtljivo zvezdno karto odgovori na vprašanja.

A Kdaj vzide zvezda Rigel 10. februarja?

B Koliko časa je v naših krajih Sonce 31. januarja pod obzorjem?

C Z vrtljivo zvezdno karto oceni največjo in najmanjšo višino zvezde Mizar nad severno točko obzorja. Vrednosti zapiši v stopinjah.

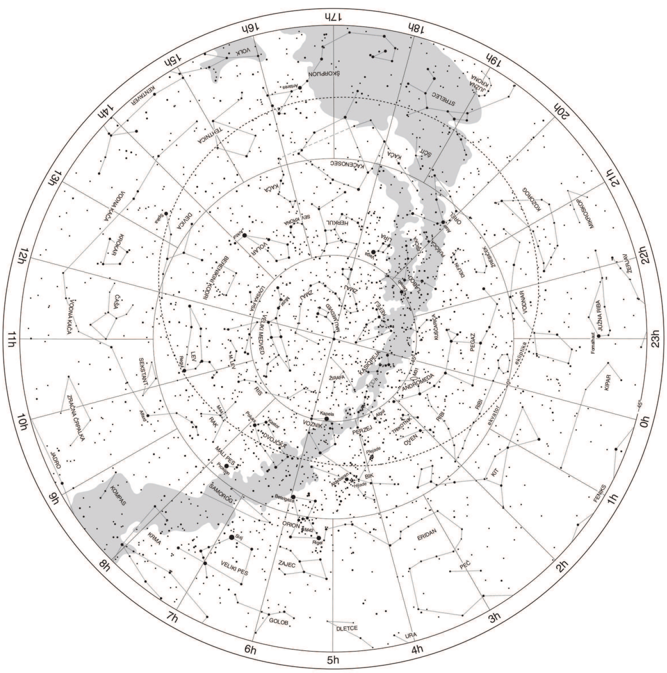
D V ozvezdju Orion sta svetli zvezdi Betelgeza in Rigel.
Katera od teh zvezd je vidna s severnega pola Zemlje? Obkroži.

Betelgeza Rigel obe nobena

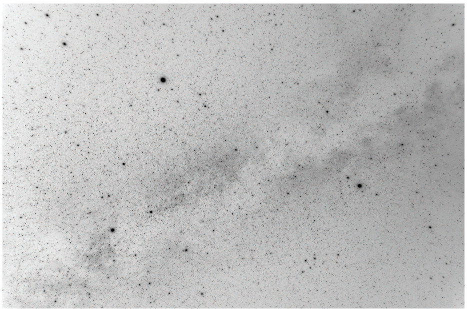
Katera od teh zvezd je vidna z južnega pola Zemlje? Obkroži.

Betelgeza Rigel obe nobena

B2. Z načrtovanjem poišči na zvezdni karti severni pol ekliptike.



B3. Na fotografiji (negativ) obkroži in zraven pripiši imena zvezd, ki tvorijo asterizem Poletni trikotnik.



B4. Na sliki je prehod Mednarodne vesoljske postaje (MVP) pred Luno, ki jo je z Zemlje posnel amaterski astronom Ed Morana. Na podlagi posnetka izračunaj oddaljenost MVP od opazovalca. Premer kraterja Tycho, ki je lepo viden na fotografiji, D = 86 km (označeno na sliki). Oddaljenost Lune v trenutku nastanka posnetka je bila 360000 km.
Dolžina MVP d = 73 metrov (označeno na sliki).

B5. Izračunaj, s kolikšno hitrostjo se giblje Zemlja okoli Sonca? Rezultat izrazi v enotah km/s. Predpostavi, da se Zemlja giblje po krožni orbiti. 1 astronomska enota = 150 milijonov kilometrov.

Naloge za srednje šole

A1. V Sloveniji je vidna polna Luna. Katero Lunino meno vidijo takrat v Južni Afriki?

(**A**) Mlaj. (**B**) Ščip. (**C**) Prvi krajec. (**D**) Zadnji krajec.

A2. Ali lahko Luna v 21. stoletju okultira zvezdo Sirij?

(**A**) Da, a je okultacija vidna le na južni polobli.

(**B**) Da, a je okultacija vidna le iz ekvatorialnega pasu.

(**C**) Ne.

(**D**) Da, okultacija bo vidna le s severne poloble.

A3. Jupiter je v opoziciji s Soncem. Katera izjava drži?

(**A**) Sonce zahaja, Jupiter vzhaja.

(**B**) Jupiter je na nebu v neposredni bližini Sonca, zato ga ni mogoče videti.

(**C**) Jupiter je takrat najbolj oddaljen od Zemlje.

(**D**) Jupiter vzhaja okoli polnoči.

A4. Ceres so astronomi nekoč uvršali med asteroide, danes pa to telo uvrščajo med

(**A**) male planete; (**B**) komete; (**C**) lune; (**D**) pritlikave planete.

A5. Čarovnik ugasne Sonce. Približno čez koliko časa bi ugasnilo tudi na našem nebu?

(**A**) Čez 50 sekund. (**B**) Čez 500 sekund.

(**C**) Čez 5 minut. (**D**) V istem trenutku kot ga je ugasnil čarovnik.

A6. Kako si po oddaljenosti od Jupitra sledijo njegove štiri velike (Galilejeve) lune?

(**A**) Kalisto, Io, Evropa, Ganimed. (**B**) Evropa, Io, Kalisto, Ganimed.

(**C**) Io, Ganimed, Evropa, Kalisto. (**D**) Io, Evropa, Ganimed, Kalisto.

A7. Katera izjava drži?

(**A**) Sonce se bo s časoma spremenilo v rjavo pritlikavko.

(**B**) Sonce se bo s časoma spremenilo v rdečo orjakinjo.

(**C**) Sonce se bo s časoma spremenilo v rdečo pritlikavko.

(**D**) Sonce se bo s časoma spremenilo v pulzar.

A8. Kaj je planetarna meglica?

(**A**) Ostanek materiala okoli mlade zvezde, ki se še oblikuje v planete.

(**B**) Hladen medzvezdni oblak prahu in plina.

(**C**) Oblak snovi, ki ga je v okolico izvrgla zvezda v zadnjih fazah življenja.

(**D**) Meglica, ki obdaja plinaste planete.

A9. Zakaj ima radijski teleskop enakega premera kot teleskop za vidno svetlobo (optični teleskop) manjšo teoretično ločljivost?

(**A**) Ker je valovna dolžina radijskih valov bistveno daljša od valovne dolžine vidne svetlobe.

(**B**) Izjava ne drži, saj je ločljivost radijskega in optičnega teleskopa, ki imata enak premer, enaka.

(**C**) Ker je valovna dolžina radijskih valov bistveno krajša od valovne dolžine vidne svetlobe.

(**D**) Ker je ozračje samo deloma prepustno za radijske valove.

A10. Na lovskem dvogledu piše – 10x50. Kaj pomeni ta oznaka?

(**A**) To pomeni, da je povečava dvogleda 10-kratna, premer vsake od leč objektiva pa 50 mm.

(**B**) To pomeni, da je povečava dvogleda 10-kratna, skupni premer leč objektiva pa 50 mm.

(**C**) To pomeni, da je povečava dvogleda 50-kratna, premer vsake od leč objektiva pa 10 cm.

(**D**) To pomeni, da je povečava dvogleda 50-kratna, skupni premer leč objektiva pa 10 cm.

B1. Z vrtljivo zvezdno karto odgovori na vprašanja.

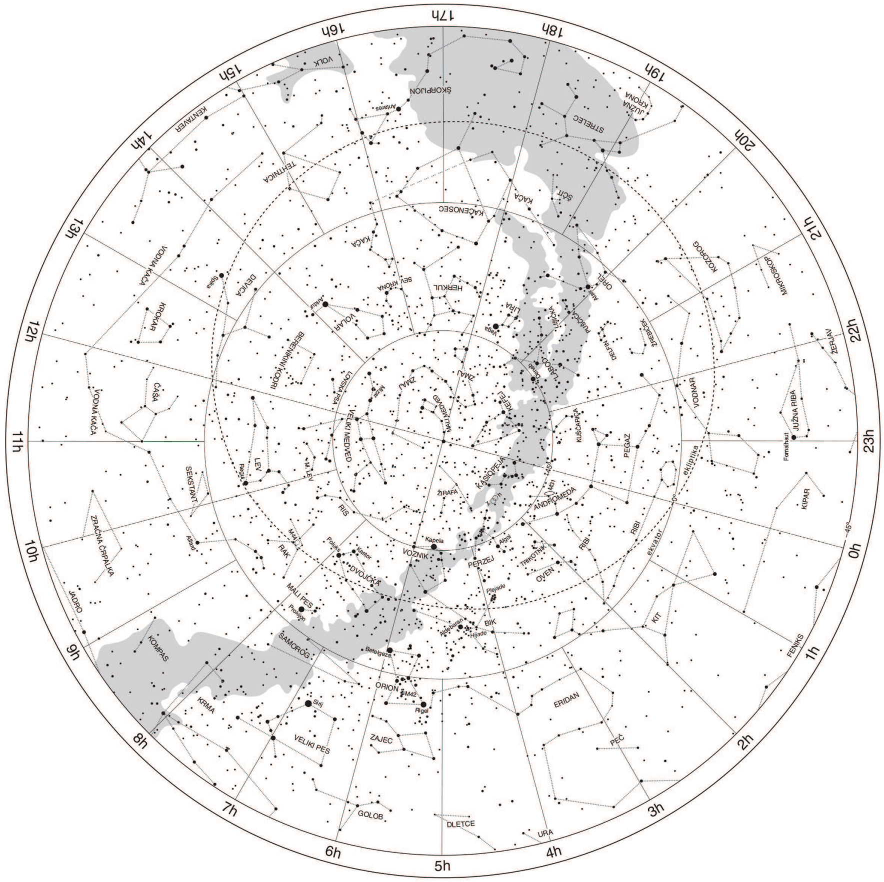
A Neka zvezda je na nebesnem ekvatorju, njena rektascenzija pa je približno 13 h 35 min. Kdaj ta zvezda zaide 6. januarja?

B Koliko časa je v naših krajih Sonce 31. januarja pod obzorjem?

C Z vrtljivo zvezdno karto oceni največjo in najmanjšo višino zvezde Mizar nad severno točko obzorja.

D Kdaj je Sirij 6. januarja v spodnji kulminaciji?

B2. Z načrtovanjem poišči na zvezdni karti severni pol ekliptike.



B3. Pluton je v periheliju od Sonca oddaljen 29,66 a.e., v afeliju pa 49,31 a.e. Izračunaj razmerje orbitalnih hitrosti Plutona v periheliju in afeliju.

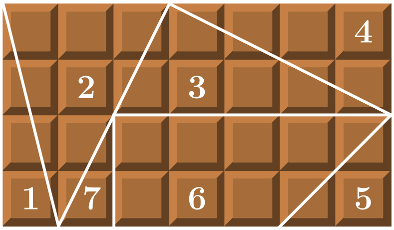
B4. Brahejeva supernova je na nebu zasvetila 6. novembra 1572. Njen največji navidezni sij je bil -4 magnitude. Keplerjeva supernova je na nebu zasvetila 9. oktobra 1604. Njen največji navidezni sij je bil -2,5 magnitude. Ugotovi, katera supernova je v vesolju zasvetila prej in izračunaj, koliko časa prej je eksplodirala kot druga. Predpostavi, da je bil maksimalni absolutni sij obeh supernov -19,5 magnitude. Medzvezdno ekstinkcijo in vplive ozračja zanemari.

B5. Astronomi so odkrili zvezdo, ki je izbruhala snov v obliki tankega krožnega kolobarja z navideznim premerom 2 kotni sekundi. Opazili so tudi, da zvezda sij spreminja v nepravilnih časovnih presledkih, pri čemer se 400 minut po spremembi sija zvezde spremeni tudi sij kolobarja. Očitno je, da svetloba zvezde interagira s snovjo v kolobarju, ki posledično tudi zasije. Predpostavi, da je zvezda v središču kolobarja in izračunaj njeno oddaljenost od Zemlje v parsekih. Hitrost svetlobe c = 300000 km/s.

62. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje

Naloge za 1. letnik

A1. Bratje Jure, Klemen, Luka, Miha in Nace so kupili čokolado. Ko so jo odvili, so ugotovili, da je zlomljena na 7 kosov (glej sliko), zato so si teh 7 kosov med sabo razdelili. Jure je pojedel največji kos čokolade. Klemen in Luka sta pojedla enako količino čokolade, toda Klemen je pojedel 3 kose, Luka pa le 1 kos. Miha je pojedel $\frac{1}{7}$ celotne čokolade. Preostanek čokolade je pojedel Nace. Kateri kos čokolade na sliki je pojedel Nace?

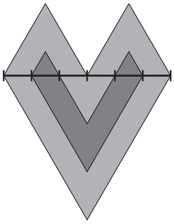


(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

A2. Za realno število a velja $a^2 - \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}$. Koliko je vrednost izraza $a^3 - \frac{1}{2}a$?

(A) $-\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** 4 **(E)** $\frac{1}{8}$

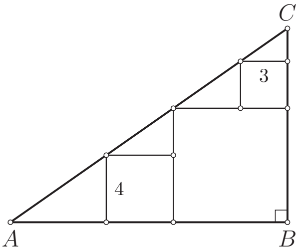
A3. Vodoravna daljica na sliki je razdeljena na 6 enako dolgih delov, vsi trikotniki na sliki pa so enakostranični. Celotna figura na sliki je osenčena z dvema barvama; svetlo sivo in temno sivo. Kolikšen delež ploščine celotne figure je osenčen s temno sivo barvo?



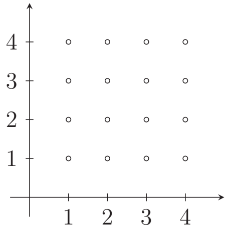
(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{2}{9}$ **(C)** $\frac{5}{21}$ **(D)** $\frac{6}{25}$ **(E)** $\frac{7}{27}$

B1. Poišči vsa praštevila p, q in r, ki rešijo enačbo $r^4 = pq + 4$.

B2. V pravokotni trikotnik ABC s pravim kotom pri B včrtamo tri kvadrate, kot to prikazuje slika. Stranici manjših dveh kvadratov sta dolgi 3 oziroma 4 enote. Izračunaj dolžino stranice AC trikotnika ABC.

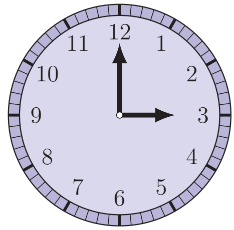


B3. Na celoštevilski mreži je označenih 16 točk (glej sliko). Največ koliko izmed teh točk lahko pobarvamo rdeče, tako da nobene tri rdeče točke ne bodo ležale na isti premici?



Naloge za 2. letnik

A1. Ko ura s kazalcema pokaže 3.00, urni in minutni kazalec oklepata kot $90°$ (glej sliko). Čez koliko minut po 3.00 bosta kazalca na uri spet oklepala kot $90°$?



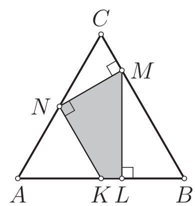
(**A**) $31\frac{7}{11}$ (**B**) $31\frac{8}{13}$ (**C**) $32\frac{8}{11}$ (**D**) $32\frac{9}{13}$ (**E**) $33\frac{6}{11}$

A2. Naj bosta a in b naravni števili, za kateri velja $2^a - 2^b = 240$. Koliko je vrednost izraza $a + b$?

(**A**) 8 (**B**) 11 (**C**) 13 (**D**) 16

(**E**) Nič od naštetega.

A3. Ploščina enakostraničnega trikotnika ABC je enaka $32\ \mathrm{cm}^2$. Točka N je središče stranice AC. Premici NM in BC sta pravokotni, premici ML in AB sta pravokotni ter premici KN in NM sta pravokotni (glej sliko). Koliko kvadratnih centimetrov je ploščina štirikotnika $KLMN$?



(**A**) 10 (**B**) 11 (**C**) 12 (**D**) 15 (**E**) 16

B1. Poišči vsa realna števila x, ki rešijo enačbo

$$\sqrt[3]{x+1} + \frac{6 - 6\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt[6]{x+1}} = 1.$$

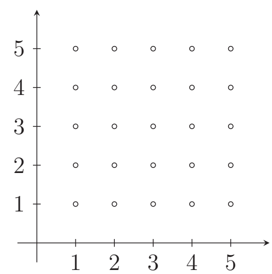
B2. Naj bo AB premer krožnice $\mathcal{K}$, očrtane tetivnemu štirikotniku $ABCD$. Premici AD in BC se sekata v točki E, tangenti na krožnico $\mathcal{K}$ v točkah C in D pa se sekata v točki F. Dokaži, da sta premici EF in AB pravokotni.

B3. Na celoštevilski mreži je označenih 25 točk (glej sliko). Nekatere izmed teh točk želimo pobarvati rdeče, tako da nobene tri rdeče točke ne bodo ležale na isti premici.

(a) Dokaži, da lahko pobarvamo 8 točk.

(b) Dokaži, da ne moremo pobarvati 11 točk.

(c) Ali lahko pobarvamo 9 točk?



Naloge za 3. letnik

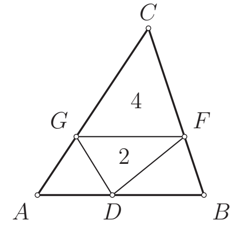
A1. Koliko je takih trimestnih naravnih števil, pri katerih se poljubni dve števki razlikujeta za vsaj 4?

(**A**) 10 (**B**) 15 (**C**) 18 (**D**) 20 (**E**) 21

A2. Če polinom $p(x)$ delimo s polinomom $x - 18$, je ostanek pri deljenju enak 20. Če polinom $p(x)$ delimo s polinomom $x - 20$, je ostanek pri deljenju enak 18. Koliko je ostanek pri deljenju, če polinom $p(x)$ delimo s polinomom $(x - 20)(x - 18)$?

(**A**) 2018 (**B**) $-x - 2$ (**C**) $x + 2$ (**D**) $-x + 38$ (**E**) $x + 38$

A3. Na stranicah AB, BC in CA trikotnika ABC zaporedoma ležijo točke D, F in G, tako da sta premici FG in AB vzporedni (glej sliko). Ploščini trikotnikov GFC in GFD sta zaporedoma enaki 4 cm^2 in 2 cm^2. Koliko kvadratnih centimetrov je ploščina trikotnika ABC?



(**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 12 (**D**) 16
(**E**) Nemogoče je določiti.

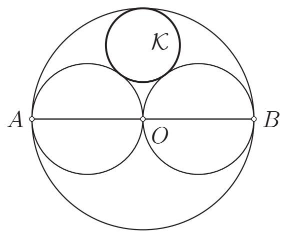
B1. Poišči vsa praštevila p, q in r, za katera ima polinom $f(x) = x^3 - px^2 + qx - r^2$ same racionalne ničle.

B2. V trikotniku ABC velja $\sphericalangle BAC = \frac{\pi}{3}$ in $|AB|^2 = |AC|^2 + |AC| \cdot |BC|$. Določi velikosti ostalih dveh notranjih kotov trikotnika ABC.

B3. Taja in Lili igrata igro, pri kateri je na mizi postavljenih 10 kroglic, oštevilčenih z naravnimi števili od 1 do 10. V prvi potezi igre Taja izbere naravno število n, nato pa dekleti izmenjaje z mize jemljeta vsaka po eno kroglico, dokler kroglic ne zmanjka. Prvo kroglico z mize vzame Lili, zadnjo pa Taja. Zmaga tista, katere vsota števil na vseh njenih kroglicah je bližja številu n. Katero dekle ima zmagovito strategijo?

Naloge za 4. letnik

A1. Daljica AB je dolga 20 cm, točka O pa je njeno razpolovišče. Krožnica $\mathcal{K}$ se od zunaj dotika krožnic s premeroma AO in BO ter od znotraj dotika krožnice s premerom AB (glej sliko). Koliko centimetrov je polmer krožnice $\mathcal{K}$?

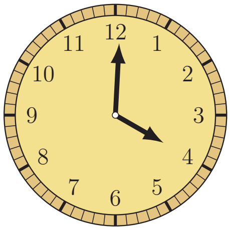


(**A**) $\frac{5}{2}$ (**B**) $\frac{10}{3}$ (**C**) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (**D**) $\sqrt{5}$ (**E**) $2\sqrt{5}$

A2. Koliko je takih trimestnih naravnih števil, pri katerih se poljubni dve števki razlikujeta za vsaj 3?

(**A**) 80 (**B**) 88 (**C**) 92 (**D**) 100 (**E**) 648

A3. V nekem trenutku kmalu po 4. uri urni in minutni kazalec na uri oklepata kot $119°$ (glej sliko). Koliko stopinj je velik kot, ki ga kazalca na uri oklepata natanko 1 uro in 20 minut po tem trenutku?



(**A**) 30 (**B**) 39 (**C**) 41 (**D**) 43 (**E**) 45

B1. Na krožnici s polmerom r naključno izberemo dve točki. Kolikšna je verjetnost dogodka, da sta izbrani točki oddaljeni za več kot $\sqrt{2}r$ in manj kot $\sqrt{3}r$?

B2. Naj bo T težišče trikotnika ABC in D razpolovišče stranice BC. Premice AT, BT in CT naj drugič sekajo trikotniku ABC očrtano krožnico zaporedoma v točkah P, Q in R. Denimo, da je $|AD| = \frac{\sqrt{3}}{2}|AC|$. Dokaži, da je trikotnik PQR enakokrak.

B3. Jure in Miha igrata igro z dvema posodama s kroglicami, v kateri poteze izvajata izmenično. Na začetku igre je v beli posodi m kroglic, v črni pa n kroglic. V vsaki potezi igralec bodisi odstrani eno kroglico iz ene od posod ali pa prestavi eno kroglico iz bele v črno posodo. Zmaga tisti igralec, ki odstrani zadnjo kroglico iz posod. V odvisnosti od m in n določi, kdo ima zmagovito strategijo, če je prvi na potezi Jure.

56. fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije – regijsko tekmovanje

Skupina I

1. Dve pokončni valjasti posodi s premeroma 10 cm in 20 cm, ki sta na dnu povezani z ozko kratko cevko, napolnimo s 50 L kapljevine z gostoto 1200 kg/m^3. Na gladini kapljevine v vsaki posodi je lahek pomičen pokrov, ki dobro tesni in je gibljiv v navpični smeri brez trenja. Prostornina vezne cevke na dnu je zanemarljiva.

   a) Do kolikšne višine sega kapljevina v vsaki posodi?
   b) Na pokrov ožje posode položimo utež za 2 kg. Kolikšna mora biti masa uteži na pokrovu širše posode, da bo kapljevina v obeh posodah segala enako visoko?
   c) Utež v širši posodi odstranimo, v ožji na pokrovu ostane dvokilogramska utež. Za koliko se razlikujeta višini gladin v posodah?
   d) Za koliko se razlikujeta višini gladin, če je na vsakem pokrovu dvokilogramska utež?
   e) Za koliko je v primeru d) tlak na dnu ožje posode večji od zunanjega zračnega tlaka?

2. Voziček z maso 5,0 kg trči s hitrostjo 10,0 m/s v mirujoč voziček z maso 20,0 kg. Med vozičkoma je lahka vzmet s prožnostnim koeficientom $4{,}0 \cdot 10^4$ N/m. Poseben mehanizem poskrbi, da ostaneta vozička po trku sprijeta, vzmet pa skrčena. Vozička se gibljeta premo po vodoravnem tiru.

   a) Kolikšna je hitrost vozičkov po trku?
   b) Kolikšna je skupna kinetična energija vozičkov po trku?
   c) Za koliko je po trku vzmet skrčena?
   d) V nekem trenutku se vzmet sproži in vozička se ločita. Kolikšen delež prožnostne energije vzmeti se spremeni v kinetično energijo vozičkov, če lažji voziček po ločitvi obmiruje?
   e) Kolikšen pa bi bil ta delež, če bi se po ločitvi vozička gibala z nasprotno enakima hitrostma?

3. Anica obesi utež na strop z lahko neraztegljivo nitjo z dolžino 200 cm. Ko utež miruje, je 50 cm nad tlemi. Anica utež odkloni, da je kot med nitjo in navpičnico 30°, in jo nato spusti. Ko je utež v najnižji legi, se nit pretrga.

   a) Kolikšna je hitrost uteži v trenutku, ko se nit pretrga?
   b) Kolikšen je domet uteži?

   Anico zanima, kolikšno silo zdrži nit, zato eno krajišče drži v roki in s silomerom vleče drugo krajišče, dokler se nit ne pretrga. Po več meritvah ugotovi, da se nit vsakič pretrga pri sili 10 N.

c) Kolikšna je masa uteži, ki jo je v primeru a) obesila na nit?

d) Anica priveže na enako nit z enako dolžino veliko lažjo utež in jo odkloni, da je nit spet nagnjena od navpičnice za 30°. S kolikšno začetno hitrostjo mora Anica pognati utež, da se utež na drugi strani ravno dotakne stropa?

e) Če bi imela utež iz primera d) dovolj veliko maso, bi se nit med gibanjem uteži pretrgala in utež bi padla na tla. Kolikšno maso bi morala imeti utež, da bi bil domet uteži največji?

Skupina II

1. Z dvorišča vzamemo kup umazanega snega, ki ga sestavljajo pesek, voda in ledeni kristali. Masa mešanice je 2,20 kg. Mešanico damo v lonec s prostornino 4,00 L. Ko k mešanici v loncu dolijemo 2,06 L tople vode, je lonec do roba poln, v njem sta le tekoča voda in pesek. Gostota peska je 2,30 kg/L.

   a) Kolikšna je bila masa peska v mešanici?

   b) Kolikšna je bila skupna masa tekoče vode in ledenih kristalčkov snega v mešanici?

   Temperatura vode, ki smo jo dolivali v lonec, je bila 35,0 °C, končna temperatura vsebine lonca je 4,0 °C. Specifična talilna toplota ledu je 334 kJ/kg, specifična toplota peska je 900 J/kgK. Toploto, potrebno za segrevanje lonca, zanemari.

   c) Koliko toplote je voda, ki smo jo dolili v lonec, oddala mešanici?

   d) Kolikšna je bila masa ledenih kristalčkov snega v mešanici snega, vode in peska?

2. Trije kondenzatorji so vsi sestavljeni iz enakih bakrenih kvadratnih plošč z robom z dolžino 5,0 cm, med ploščami je zrak. Razdalje med ploščami v posameznem kondenzatorju so po vrsti $d_1 = 1{,}5$ mm za kondenzator C_1, $d_2 = 1{,}9$ mm za kondenzator C_2 in $d_3 = 2{,}0$ mm za kondenzator C_3. Kondenzatorja C_1 in C_2 vežemo zaporedno na vir enosmerne napetosti 2000 V.

   a) Kolikšna sta napetost med ploščama in naboj na kondenzatorju C_1 in na kondenzatorju C_2?

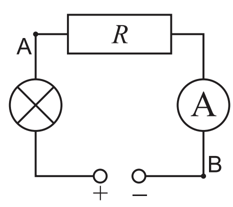
   b) V vezje dodatno vežemo vzporedno h kondenzatorjema C_1 in C_2 tretji kondenzator C_3. Kolikšna je jakost električnega polja v vsakem od kondenzatorjev C_1, C_2 in C_3?

   Vsi trije kondenzatorji imajo poseben mehanizem, s katerim lahko razdaljo med ploščama vsakega kondenzatorja enakomerno spreminjamo. V nekem trenutku sprožimo mehanizem vseh treh kondenzatorjev, da se razdalja med ploščama vsakega manjša s hitrostjo 1,0 mm/min.

   c) Kolikšne so po 30 s napetosti med ploščama kondenzatorjev C_1, C_2 in C_3?

   d) Ko električna poljska jakost preseže 3000 V/mm, v zraku pride do preboja. V katerem kondenzatorju in koliko časa po sprožitvi mehanizma pride do preboja?

3. V vezju na sliki je napetost na žarnici 3 V, gonilna napetost vira 6 V in tok skozi ampermeter 40 mA.

   a) Kolikšna sta upor žarnice R_z in upor upornika R?

   b) S kolikšno močjo sveti žarnica?

   c) S kolikšno močjo bi svetila žarnica, če bi imela konstantni upor R_z in bi jo priključili neposredno na vir?

   V resnici je upor žarnice v opazovanem območju tokov linearno odvisen od toka skozi žarnico: $R_z(I) = R_0 + kI$, kjer sta R_0 in k konstanti. Ko med točki A in B vežemo dodatni upornik z

V resnici je upor žarnice v opazovanem območju tokov linearno odvisen od toka skozi žarnico: $R_z(I) = R_0 + kI$, kjer sta R_0 in k konstanti. Ko med točki A in B vežemo dodatni upornik z uporom R, teče skozi ampermeter tok 24 mA.

d) Kolikšen je v tej vezavi upor žarnice in s kolikšno močjo sveti?

e) Kolikšni sta vrednosti konstant R_0 in k?

f) S kolikšno močjo sveti žarnica, ko jo priključimo neposredno na vir?

Skupina III

1. Dve enaki stanovanjski sobi dimenzij 5 m krat 10 m skupaj tvorita kvadratni tloris hiše s stranico 10 m. Štiri enake zunanje stene so debele 20 cm, zunanja temperatura je 0 °C. Debelina notranje stene med sobama ni znana. Ko v vsako od sob postavimo po en grelec, je temperatura v obeh sobah enaka 16 °C. Grelca imata enako moč. Toplotni tok skozi strop in tla zanemari.

   a) Kolikšna je moč vsakega grelca, če je višina stropa v sobah 2,5 m in toplotna prevodnost vseh zunanjih in notranjih sten 0,5 W/m · K?

   Stanovalca prve sobe zebe, zato vzame grelec iz druge sobe in ga vklopi poleg svojega grelca v prvi sobi. Temperatura v prvi sobi se po dolgem času povzpne na prijetnih 22 °C.

   b) Kolikšna je po dolgem času temperatura v drugi sobi?

   c) Kako debela je stena med sobama?

2. Fotografiramo s preprostim fotoaparatom z objektivom iz ene same zbiralne leče, ki je simetrična in ima oba krivinska radija enaka 40,0 mm. Lomni količnik stekla je odvisen od valovne dolžine svetlobe. V območju vidne svetlobe je dovolj dober linearni približek $n(\lambda) = n_0 - k\lambda$, kjer je $n_0 = 1{,}540$ in $k = 3{,}80 \cdot 10^{-2}/\mu\text{m}$. Fotografirati želimo dva napisa, enega v rdeči in drugega v modri barvi, od katerih se v največjem deležu po vrsti odbijata svetlobi z valovnima dolžinama 650 nm in 450 nm. Rdeči napis fotografiramo na razdalji 50,0 cm pred objektivom, elektronika v fotoaparatu nastavi objektiv na tako razdaljo od svetlobnega senzorja v fotoaparatu, da je napis na senzorju fotoaparata oster. Zaslonka (to je vstopna odprtina objektiva, skozi katero svetloba vstopa v fotoaparat) je nastavljena na premer 4,00 mm.

   a) Kolikšna sta lomni količnik stekla leče in goriščna razdalja leče za rdečo svetlobo?

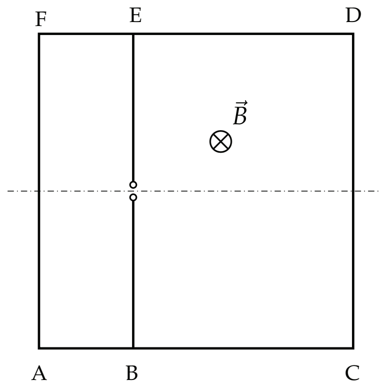
   b) Kolikšna je razdalja med lečo in svetlobnim senzorjem?

   c) Na kolikšni razdalji za lečo nastane ostra slika modrega napisa, ko je ta na enaki oddaljenosti 50,0 cm od objektiva kot rdeči napis?

   d) V krog s kolikšnim polmerom se preslika modra točka na optični osi objektiva, ko je 50,0 cm pred objektivom? Senzor fotoaparata ima 4000×3000 točk in je velikosti 8,00 mm $\times$ 6,00 mm. Približno koliko točk na fotografiji prekrije svetloba iz modre točke?

   e) Na kolikšno razdaljo pred objektiv moramo postaviti modri napis, da bosta oba napisa na fotografiji ostra?

3. Kvadratni okvir s stranico 10 cm deli dodatna prečna žica EB v razmerju $\overline{AB} : \overline{BC} = 3 : 7$. Vse žice imajo enak presek. V prečni žici je vgrajen majhen vir z napetostjo 3,0 V. Okvir je prosto vrtljiv okoli vodoravne osi, ki okvir razpolavlja. Postavimo ga v vodoravno magnetno polje z gostoto 1,0 T, tako da je polje pravokotno na os (glej sliko). Meter žice ima upor 1,0 Ω in maso 100 g.



   a) Kolikšen tok teče v odseku AB in kolikšen v odseku BC?

   b) V ravnovesni legi leži okvir v navpični ravnini. Na skici označi polariteto vira (+ in −), da bo okvir v stabilni ravnovesni legi pri usmerjenosti magnetnega polja v list, kot kaže slika.

   c) Za primer b) izračunaj velikosti magnetnih sil, ki delujejo na odseke žic AB, BC, DE in EF, in smer vsake sile označi na skici.

   d) Kolikšen navor deluje na okvir, če okvir zasučemo za kot 30° iz ravnovesne lege?

   e) Določi frekvenco majhnih nihanj okvira okoli ravnovesne lege. Prispevek vira k vztrajnostnemu momentu okvira je zanemarljiv.

Rešitve 9. tekmovanja v znanju astronomije za Dominkova priznanja – državno tekmovanje

Rešitve naloge za 7. razred

A1. (B) Ščip ali polna Luna. V istem trenutku je povsod z Zemlje, kjer je Luna nad obzorjem, vidna ista Lunina mena.

A2. (C) Orion. Orion je namreč na nebesnem ekvatorju, ki gre v krajih na ekvatorju skozi Zenit.

A3. (D) Delfin.

A4. (B) Ceres danes uvrščamo med pritlikave planete.

A5. (A) Sonce zahaja, Jupiter vzhaja. Ko je Jupiter v opoziciji, je na nasprotni strani neba od Sonca.

A6. (D) Io, Evropa, Ganimed, Kalisto.

A7. (B) Hladnejše zvezde so rdeče.

A8. (C) Planetarna meglica je oblak snovi, ki ga je v okolico izvrgla zvezda v zadnjih fazah življenja.

A9. (C) V naši Galaksiji je približno 100 do 400 milijard zvezd

A10. (A) Refraktor je teleskop, ki ima za objektiv lečo ali sistem leč.

B1.

A Rigel 10. februarja vzide ob **14.30**. Kot pravilni veljajo odgovori v intervalu med **14.10** in **14.50**.

B Sonce 31. januarja vzide pa ob **7.30** in zaide ob **16.50**. Čas, ko je na ta dan Sonce pod obzorjem t = 7 h 30 min + (24 h - 16 h 50 min) = 7 h 30 min + 7 h 10 min = 14 h 40 min. **Sonce je 31. januarja 14 h 40 min pod obzorjem.** Kot pravilni veljajo odgovori v intervalu med **14 h 20 min** in **15 h 00 min**.

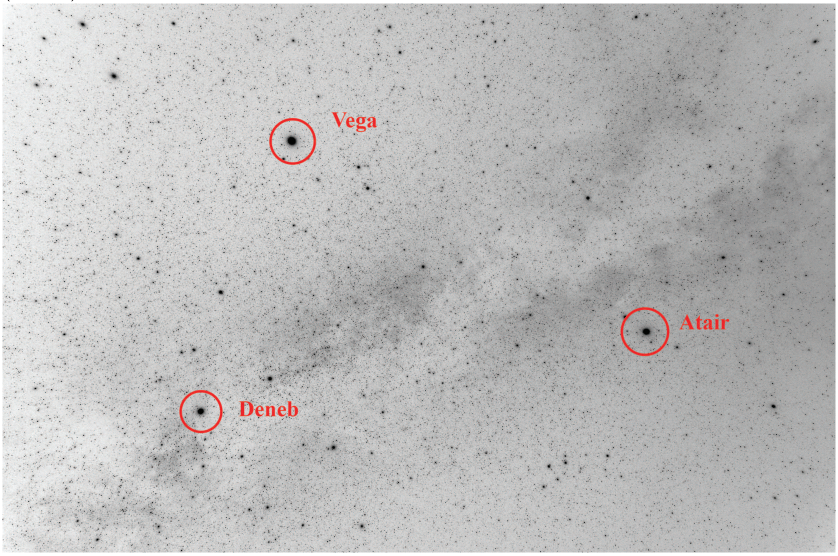
C
Največja višina zvezde Mizar: 80°.
D
S severnega pola je vidna le zvezda Betelgeza, ker je severno od nebesnega ekvatorja.

Z južnega pola je vidna le zvezda Rigel, ker je južno od nebesnega ekvatorja.

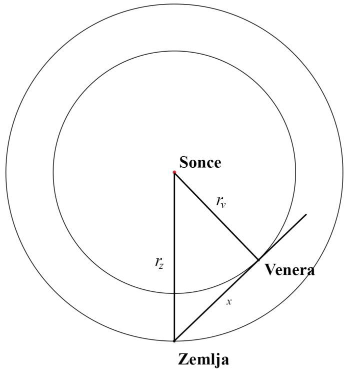
B2.
Ozvezdja, skozi katera gre ekliptika, so: Ribi, Oven, Bik, Dvojčka, Rak, Lev, Devica, Tehtnica, Škorpijon, Kačenosec, Strelec, Kozorog, Vodnar.

B3.
Premer kraterja Tycho D = 86 km.
Dolžina MVP d = 73 m.
Oddaljenost Lune od opazovalca l = 360000 km.
Iščemo oddaljenost MVP od opazovalca x.
Na sliki izmerimo d in D v milimetrih:
d = 8 mm,
D = 12 mm.
Razmerje zornih kotov MVP in kraterja je:
D/d = 12/8.
Sklepamo:
8/12 $D/l = d/x$
Iz tega izrazimo iskano oddaljenost x.
x = 12/8 l d/D = 458000 m

B4.
Na sliki so obkrožene tri zvezde, ki tvorijo asterizem Poletni trikotnik: Vega, Deneb in Atair (Altair).



B5.
Oddaljenost Venere od Sonca r_v = 0,72 astronomske enote.
Oddaljenost Zemlje od Sonca r_z = 1 astronomska enota.
Hitrost radijskih valov c = 300000 km/s.
Pri reševanju si pomagamo z načrtovanjem. Izberemo lego Sonca, ki predstavlja središče orbit Venere in Zemlje - krožnic s polmerom, ki je v merilu pravih vrednosti r_v in r_z.



Na krožnici, ki označuje orbito Zemlje, izberemo lego Zemlje. Ko je Venera v največji elongaciji od Sonca, je zvezdnica med Zemljo in Venero tangetna na orbito Venere. Iz točke, ki predstavlja Zemljo, potegnemo tangento na orbito Venere. Razdaljo med Zemljo in Venero v tej legi označimo z x. To je razdalja, ki jo bo prepotoval radijski signal od Zemlje do Venere.
Na skici izmerimo x in ga izrazimo v merilu astronomska enota:
x = 0,72 astronomske enote.
Če hočemo oddaljenost x pretvoriti v km, moramo vedeti, koliko znaša 1 astronomska enota = 150 000 000 km.
Sledi:
x = 0,72 · 150 000 000 km = 108 000 000 km.
Čas t, ki ga potrebuje radijski signal za pot x:
$t = x/c$ = 360 s.

Rešitve naloge za 8. razred

A1. (B) Ščip ali polna Luna. V istem trenutku je povsod z Zemlje, kjer je Luna nad obzorjem, vidna ista Lunina mena.

A2. (C) Orion. Orion je namreč na nebesnem ekvatorju, ki gre v krajih na ekvatorju skozi Zenit.

A3. (A) Mali voz.

A4. (D) Ceres danes uvrščamo med pritlikave planete.

A5. (A) Sonce zahaja, Jupiter vzhaja. Ko je Jupiter v opoziciji, je na nasprotni strani neba od Sonca.

A6. (D) Io, Evropa, Ganimed, Kalisto.

A7. (B) Oortov oblak.

A8. (C) Planetarna meglica je oblak snovi, ki ga je v okolico izvrgla zvezda v zadnjih fazah življenja.

A9. (C) V naši Galaksiji je približno 100 do 400 milijard zvezd

A10. (A) Povečava daljnogleda je 10-kratna, premer vsakega od objektivov pa 50 mm.

B1.
A Rigel 10. februarja vzide ob **14.30**. Kot pravilni veljajo odgovori v intervalu med **14.10** in **14.50**.

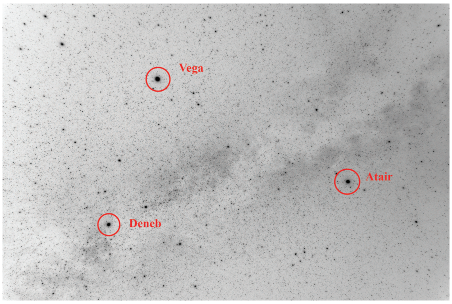
B Sonce 31. januarja vzide pa ob **7.30** in zaide ob **16.50**. Čas, ko je na ta dan Sonce pod obzorjem t = 7 h 30 min + (24 h - 16 h 50 min) = 7 h 30 min + 7 h 10 min = 14 h 40 min. **Sonce je 31. januarja 14 h 40 min pod obzorjem.** Kot pravilni veljajo odgovori v intervalu med **14 h 20 min** in **15 h 00 min**.

C
Največja višina zvezde Mizar: 80°.
Najmanjša višina zvezde Mizar: 12°.

D
S severnega pola je vidna le zvezda Betelgeza, ker je severno od nebesnega ekvatorja.

Z južnega pola je vidna le zvezda Rigel, ker je južno od nebesnega ekvatorja.

B2.
Na sliki so obkrožene tri zvezde, ki tvorijo asterizem Poletni trikotnik: Vega, Deneb in Atair (Altair).



B3.
Predpostavimo, da se Zemlja okoli Sonca giblje po krožni orbiti.
Vemo, da je Zemlja od Sonca oddaljena 1 astronomsko enoto, zato je polmer orbite r = 1 a.e.
Vemo tudi, da Zemlja naredi en obhod okoli Sonca v času t_0 = 1 leto = 365,25 dneva = 365,25 · 24 · 3600 s = 31557600 s.
V tem času naredi pot $s = 2\,\pi\,r$.
Hitrost v, s katero se giblje Zemlja: $v = s/t_0 = 2\,\pi\,r\ /\ t_0 = 2\,\pi$ 150 000 000 km / 31557600 s = 29,9 km/s.

B4.
Sonce je na dan enakonočja na nebesnem ekvatorju. V kraju na ekvatorju zahaja pravokotno na obzorje. Če zanemarimo gibanje Zemlje okoli Sonca, potem Sonce v 24 urah na nebu opiše poln krog 360°. To pomeni, da Sonce potuje po nebu s hitrostjo
ω = 360°/24 h = 15°/h.
Zanima nas, v kolikšnem času t bo Sonce naredilo 18° pod obzorjem:
$t = 18°/\omega$ = 18/15 h = 1,2 h = 1 h 12 min.

B5.
Oddaljenost Zemlje od Sonca r_z = 1 astronomska enota.
Hitrost svetlobe c = 300000 km/s.
Navidezni premer Sonca na Marsu D_m = 0,67 D_z, kjer je D_z navidezni premer Sonca na Zemlji.
Najprej moramo poiskati odaljenost Marsa od Sonca r_m.
Sklepamo:
$D_S/r_z = 1/0{,}67\ D/r_m$,
kjer je D pravi premer Sonca. Za oddaljenost Marsa od Sonca tako dobimo:
$r_m = r_z/0{,}67$ = 1,49 a.e. = 1,49 · 150 000 000 km = 223 500 000 km.

Svetloba od Sonca do Marsa potuje čas $t = r_m/c$ = 223 500 000 km / 300000 km/s = 745 s.

Rešitve naloge za 9. razred

A1. (B) Ščip ali polna Luna. V istem trenutku je povsod z Zemlje, kjer je Luna nad obzorjem, vidna ista Lunina mena.

A2. (C) Orion. Orion je namreč na nebesnem ekvatorju, ki gre v krajih na ekvatorju skozi Zenit.

A3. (B) Čez 500 sekund. Razdalja med Soncem in Zemljo je približno 150 000 000 km. Za to pot potrebuje svetloba, katere hitrost je 300000 km/s, 500 sekund.

A4. (D) Ceres danes uvrščamo med pritlikave planete.

A5. (A) Sonce zahaja, Jupiter vzhaja. Ko je Jupiter v opoziciji, je na nasprotni strani neba od Sonca.

A6. (D) Io, Evropa, Ganimed, Kalisto.

A7. (C) Naša Galaksija je spiralna galaksija s prečko.

A8. (C) Planetarna meglica je oblak snovi, ki ga je v okolico izvrgla zvezda v zadnjih fazah življenja.

A9. (B) Kefeide.

A10. (A) Povečava daljnogleda je 10-kratna, premer vsakega od objektivov pa 50 mm.

B1.

A Rigel 10. februarja vzide ob **14.30**. Kot pravilni veljajo odgovori v intervalu med **14.10** in **14.50**.

B Sonce 31. januarja vzide pa ob **7.30** in zaide ob **16.50**. Čas, ko je na ta dan Sonce pod obzorjem t = 7 h 30 min + (24 h - 16 h 50 min) = 7 h 30 min + 7 h 10 min = 14 h 40 min. **Sonce je 31. januarja 14 h 40 min pod obzorjem.** Kot pravilni veljajo odgovori v intervalu med **14 h 20 min** in **15 h 00 min**.

C

Največja višina zvezde Mizar: 80°.

Najmanjša višina zvezde Mizar: 12°.

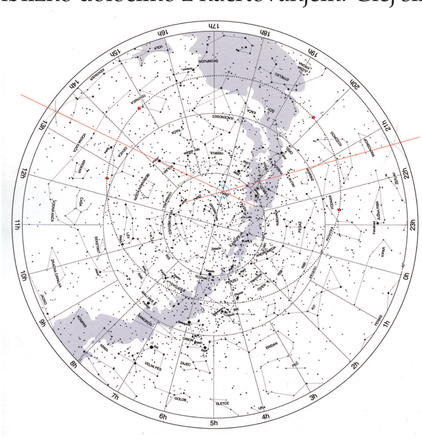
D

S severnega pola je vidna le zvezda Betelgeza, ker je severno od nebesnega ekvatorja.

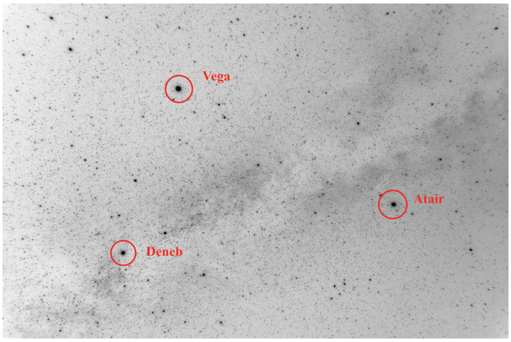
Z južnega pola je vidna le zvezda Rigel, ker je južno od nebesnega ekvatorja.

B2.

Ekliptika je na zvezdni karti krožnica, narisana s prekinjeno črto. Pol ekliptike je središče te krožnice, ki ga lahko približno določimo z načrtovanjem. Glej sliko.



B3.
Na sliki so obkrožene tri zvezde, ki tvorijo asterizem Poletni trikotnik: Vega, Deneb in Atair (Altair).



B4.
Premer kraterja Tycho D = 86 km.
Dolžina MVP d = 73 m.
Oddaljenost Lune od opazovalca l = 360000 km.
Iščemo oddaljenost MVP od opazovalca x.
Na sliki izmerimo d in D v milimetrih:
d = 8 mm,
D = 12 mm.
Razmerje zornih kotov MVP in kraterja je:
D/d = 12/8.
Sklepamo:
8/12 $D/l = d/x$
Iz tega izrazimo iskano oddaljenost x.
x = 12/8 l d/D = 458000 m

B5.
Predpostavimo, da se Zemlja okoli Sonca giblje po krožni orbiti.
Vemo, da je Zemlja od Sonca oddaljena 1 astronomsko enoto, zato je polmer orbite r = 1 a.e.
Vemo tudi, da Zemlja naredi en obhod okoli Sonca v času t_0 = 1 leto = 365,25 dneva = 365,25 · 24 · 3600 s = 31557600 s.
V tem času naredi pot $s = 2\,\pi\,r$.
Hitrost v, s katero se giblje Zemlja: $v = s/t_0 = 2\,\pi\,r\ /\ t_0 = 2\,\pi$ 150 000 000 km / 31557600 s = 29,9 km/s.

Rešitve naloge za srednje šole

A1. (B) Ščip ali polna Luna. V istem trenutku je povsod z Zemlje, kjer je Luna nad obzorjem, vidna ista Lunina mena.

A2. (C) Ne, saj Sirij ni v bližini ekliptike.

A3. (A) Sonce zahaja, Jupiter vzhaja. Ko je Jupiter v opoziciji, je na nasprotni strani neba od Sonca.

A4. (D) Ceres danes uvrščamo med pritlikave planete.

A5. (B) Čez 500 sekund. Razdalja med Soncem in Zemljo je približno 150 000 000 km. Za to pot potrebuje svetloba, katere hitrost je 300000 km/s, 500 sekund.

A6. (D) Io, Evropa, Ganimed, Kalisto.

A7. (B) Sonce se bo s časoma spremenilo v rdečo orjakinjo.

A8. (C) Planetarna meglica je oblak snovi, ki ga je v okolico izvrgla zvezda v zadnjih fazah življenja.

A9. (A) Ločljivost je obratno sorazmerna z valovno dolžino.

A10. (A) Povečava daljnogleda je 10-kratna, premer vsakega od objektivov pa 50 mm.

B1.

A Ta zvezda je v ozvezdju Device in 6. januarja zaide ob **12.30**. Kot pravilni veljajo odgovori v intervalu med **12.10** in **12.50**.

B Sonce 31. januarja vzide pa ob **7.30** in zaide ob **16.50**. Čas, ko je na ta dan Sonce pod obzorjem t = 7 h 30 min + (24 h - 16 h 50 min) = 7 h 30 min + 7 h 10 min = 14 h 40 min. **Sonce je 31. januarja 14 h 40 min pod obzorjem.** Kot pravilni veljajo odgovori v intervalu med **14 h 20 min** in **15 h 00 min**.

C

Največja višina zvezde Mizar: 80°.

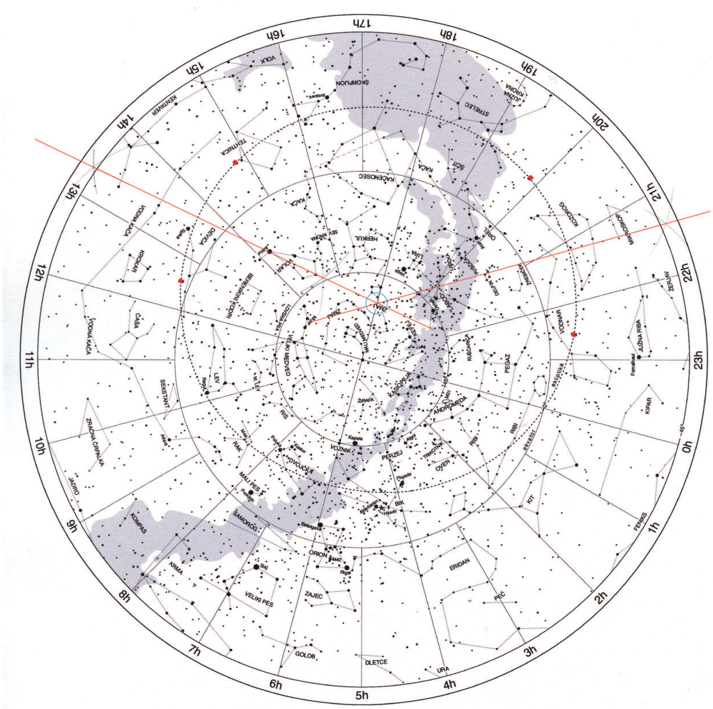
Najmanjša višina zvezde Mizar: 12°.

D

Sirij je 6. januarja v spodnji kulminaciji ob **11.45**. Kot pravilni veljajo odgovori v intervalu med **11.25** in **12.05**.

B2.

Ekliptika je na zvezdni karti krožnica, narisana s prekinjeno črto. Pol ekliptike je središče te krožnice, ki ga lahko približno določimo z načrtovanjem. Glej sliko.



B3.

Oddaljenost Plutona od Sonca v periheliju r_P = 29,66 a.e.
Oddaljenost Plutona od Sonca v afeliju r_A = 49,31 a.e.
Za gibanje planeta, v našem primeru Plutona velja, da se vrtilna količina ohranja, zato lahko vrtilno količino Plutona v periheliju izenačimo s tisto v afeliju: $mv_Pr_P = mv_Ar_A$,
kjer je m masa Plutona.
Iz te enačbe enostavno dobimo razmerje med hitrosti:
$v_P/v_A = r_A/r_P$ = 49,31/29,66 = 1,66.

B4.

Absolutna magnituda supernov M = -19,5.
Navidezna magnituda Brahejeve supernove m_B = -4.
Navidezna magnituda Keplerjeve supernove m_K = -2,5.

Zapišimo definicjo absolutne magnitude:
M = m - 5$\log d$ + 5, kjer je d oddaljenost vesoljskega telesa v parsekih. Iz enačbe izrazimo oddaljenost d in jo izračunamo za obe supernovi d_B in d_K: $\log d = (m + 5 - M)/5$.

$d = 10^{(m+5-M)/5}$.

$d_B = 10^{(-4+5+19{,}5)/5}$ = 12589 pc.
$d_K = 10^{(-2{,}5+5+19{,}5)/5}$ = 25119 pc.

Vidimo, da je Keplerjeva supernova približno dvakrat dlje kot Brahejeva. Razdalje do teh supernov so tako velike, da je časovni zamik 32 let, s katerim je njuna svetloba prišla do Zemlje, skoraj zanemarljiv. Ker je njuna svetloba prišla skoraj sočasno do Zemlje, je očitno, da je prej eksplodirala bolj oddaljena Keplerjeva supernova.
Izračunajmo razliko njunih razdalj d in jo pretvorimo v svetlobna leta, da bo enostavneje izračunati časovni zamik eksplozij teh supernov. 1 pc = 3,26 svetlobnega leta.
d = 25119 pc - 12589 pc = 12530 pc = 3,26 · 12530 sv. let = 40850 sv. let.

Iz tega izračunamo, da je Keplerjeva supernova zasvetila približbo 40850 let pred Brahejevo. Leto gor ali dol, če štejemo še časovni zamik prihoda njune svetlobe na Zemljo.

B5.

Navidezni premer kolobarja na nebu D_n = 2″oz. kot pod katerim vidomo polmer kolobarja φ_n = 1″.
Časovni zamik med izbruhom na zvezdi in povečanjem sija kolobarjev Δt = 400 minut = 24000

s.
Hitrost svetlobe c = 300000 km/s = $3 \cdot 10^8$ m/s.

Iz časovnega zamika lahko izračunamo dejansko razdaljo r med zvezdo in kolobarjem, saj je to pot, ki jo svetloba prepotuje v Δt:
r = c Δt = $3 \cdot 10^8$ m/s · 24000 s = $7{,}2 \cdot 10^{12}$ m.
Ker vemo, da je kot, pod katerim vidimo polmer kolobar 1″, lahko izrazimo oddaljenost zvezde d_Z:
$\tan\varphi = r/d_Z$.
$d_Z = r/\tan\varphi = r\ /\ \varphi$ rad = $1{,}5 \cdot 10^{18}$ m.
Rezultat moramo izraziti še v parsekih. Spomnimo se, da je 1 parsek razdalja, s katere vidimo 1 a.e. pod kotom 1″. Torej: 1 pc = $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m / $\tan 1''$ = $3{,}1 \cdot 10^{16}$ m.
d_Z = $1{,}5 \cdot 10^{18}$ / $3{,}1 \cdot 10^{16}$ pc = 48 pc.

Rešitve 62. matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje

Rešitve nalog za 1. letnik

I/A1.

Tablica čokolade ima $4 \cdot 7 = 28$ kvadratnih koščkov. Naj bo en tak košček velik 1 kvadratno enoto. Tedaj je 7 kosov čokolade označenih na sliki po vrsti velikih $\frac{1 \cdot 4}{2} = 2$, $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$, $\frac{5 \cdot 2}{2} = 5$, $\frac{4 \cdot 2}{2} = 4$, $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2$, $2 \cdot \frac{3+5}{2} = 8$ in $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ kvadratno enoto. Torej je Jure pojedel kos s številko 6, Miha pa kos s številko 4. Izmed preostalih kosov čokolade so kosi s številkami 1, 5 in 7 skupaj veliki $2 + 2 + 1 = 5$ kvadratnih enot, kar je enako kot kos s številko 3. Torej je Klemen pojedel kose s številkami 1, 5 in 7, Luka pa je pojedel kos s številko 3. Ostane le kos s številko 2, ki ga je pojedel Nace.

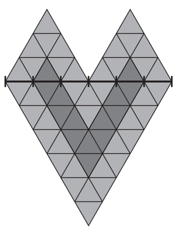
I/A2.

S pomočjo dane enakosti izračunamo

$$a^3 - \frac{1}{2}a = \left(a^3 - \frac{1}{2}a^2\right) + \left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a\right) - \frac{1}{4}a = a\left(a^2 - \frac{1}{2}a\right) + \frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{1}{2}a\right) - \frac{1}{4}a =$$
$$= \frac{1}{4}a + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a = \frac{1}{8}.$$

I/A3.

Figuro na sliki razdelimo na majhne skladne enakostranične trikotnike.



S preštevanjem teh enakostraničnih trikotnikov ugotovimo, da je s temno sivo barvo obarvanih $\frac{14}{54} = \frac{7}{27}$ ploščine celotne figure.

I/B1.

Enačbo preoblikujemo v $pq = r^4 - 4$ in desno stran razcepimo po formuli za razliko kvadratov, da dobimo

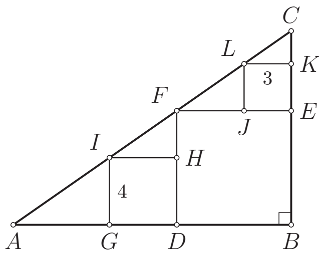
$$pq = (r^2 - 2)(r^2 + 2).$$

Obe števili $r^2 - 2$ in $r^2 + 2$ sta večji od 1, zato imamo le dve možnosti. Bodisi je $r^2 - 2 = p$ in $r^2 + 2 = q$ ali pa je $r^2 - 2 = q$ in $r^2 + 2 = p$.

Denimo, da velja prva možnost. Če je $r = 3$, tedaj sledi $p = 7$ in $q = 11$. Če pa je $r \neq 3$, tedaj ima število r^2 pri deljenju s 3 ostanek 1, zato je število $q = r^2 + 2$ deljivo s 3. Ker je q praštevilo, sledi $q = 3$ in $r = 1$, kar pa je protislovje, saj 1 ni praštevilo. V tem primeru je torej edina rešitvi $p = 7$, $q = 11$ in $r = 3$.

Drugo možnost, $r^2 - 2 = q$ in $r^2 + 2 = p$, obravnavamo podobno, da dobimo še rešitev $p = 11$, $q = 7$ in $r = 3$.

I/B2.



Označimo oglišča kvadratov, kot prikazuje slika. Trikotniki CKL, LJF, FHI in IGA so podobni trikotniki, zato velja

$$\frac{|CK|}{3} = \frac{3}{|JF|} = \frac{|FH|}{4} = \frac{4}{|AG|}. \tag{1}$$

Označimo dolžino stranice kvadrata $BEFD$ z x. Potem iz enakosti (1) sledi

$$3 \cdot 4 = |FH||JF| = (x-4)(x-3).$$

Ko slednjo enakost poenostavimo in delimo z x, dobimo $x = 7$. Torej je $|FH| = 3$ in $|FJ| = 4$. Iz enakosti (1) zato sledi $|CK| = \frac{3^2}{|JF|} = \frac{9}{4}$ in $|AG| = \frac{4^2}{|FH|} = \frac{16}{3}$. Od tod izračunamo

$$|AB| = |AG| + |GD| + |DB| = \frac{16}{3} + 4 + 7 = \frac{49}{3}$$

in

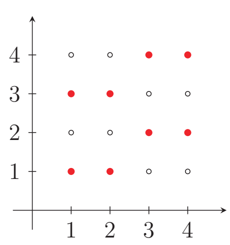
$$|BC| = |BE| + |EK| + |KC| = 7 + 3 + \frac{9}{4} = \frac{49}{4},$$

ter naposled še

$$|AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{\frac{49^2}{9} + \frac{49^2}{16}} = \sqrt{\frac{49^2(16+9)}{9 \cdot 16}} = \frac{49 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{245}{12}.$$

I/B3.

Ker izmed 4 točk, ki ležijo v isti vodoravni vrstici, lahko pobarvamo največ 2, lahko skupaj pobarvamo največ $4 \cdot 2 = 8$ točk. Da 8 točk tudi res lahko pobarvamo, prikazuje spodnja slika.



Rešitve nalog za 2. letnik

II/A1.

Kote bomo merili v smeri urinega kazalca. Ker se veliki kazalec premika hitreje, bosta kazalca spet oklepala kot 90° takrat, ko bo veliki kazalec za 90° prehitel mali kazalec. Tako je kot α, ki ga v tem času opiše veliki kazalec, za 180° večji od kota, ki ga v istem času opiše mali kazalec. Ko se veliki kazalec premakne za cel krog, se mali kazalec premakne za $\frac{1}{12}$ kroga, torej ko se veliki kazalec premakne za kot α, se mali kazalec premakne za kot $\frac{\alpha}{12}$. Od tod sledi $\alpha = \frac{\alpha}{12} + 180^\circ$, od koder izrazimo $\alpha = \frac{12}{11} \cdot 180^\circ$. Ker veliki kazalec v 1 minuti opiše kot $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$, bo kot α opisal v $\frac{\alpha}{6^\circ} = \frac{360}{11} = 32\frac{8}{11}$ minutah.

II/A2.

Očitno mora biti $a > b$. Enačbo preoblikujemo do $2^b(2^{a-b} - 1) = 2^4 \cdot 15$. Od tod sledi $b = 4$ in $2^{a-b} - 1 = 15$. Drugo enačbo preuredimo do $2^{a-b} = 16$ in sklepamo, da je $a - b = 4$. Od tod izračunamo še $a = 8$. Torej je $a + b = 12$ in pravilen odgovor je (**E**).

II/A3.

Označimo dolžino stranice enakostraničnega trikotnika ABC z a. Opazimo, da sta trikotnika NMC in MLB polovici enakostraničnih trikotnikov. Ker je N razpolovišče stranice, od tod po vrsti sledi $|NC| = \frac{a}{2}$, $|MC| = \frac{a}{4}$, $|BM| = \frac{3a}{4}$. Ker je $\sphericalangle ANK = 180^\circ - \sphericalangle KNM - \sphericalangle MNC = 60^\circ$, je trikotnik AKN enakokrak. Njegova stranica je enaka $\frac{1}{2}$ stranice trikotnika ABC, zato je njegova ploščina enak $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ploščine trikotnika ABC, to je $8\ \mathrm{cm}^2$. Podobno ugotovimo, da je ploščina trikotnika NMC enaka $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$ ploščine trikotnika ABC, to je $4\ \mathrm{cm}^2$, ploščina trikotnika MLB pa je enaka $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{32}$ ploščine trikotnika ABC, to je $9\ \mathrm{cm}^2$. Ploščina štirikotnika $KLMN$ je tako enaka $32-8-4-9 = 11\ \mathrm{cm}^2$.

II/B1.

V enačbo vpeljemo novo spremenljivko $z = \sqrt[6]{x+1}$, da dobimo $z^2 + \frac{6-6z^2}{z^3-z} = 1$, in ulomek na levi strani preoblikujemo $z^2 + \frac{-6(z^2-1)}{z(z^2-1)} = 1$. Od tod sklepamo, da z ne sme biti enak 0, 1 ali -1, saj sicer ulomek ne bi bil definiran, nato pa lahko ulomek okrajšamo, da dobimo enačbo $z^2 - \frac{6}{z} = 1$. Enačbo pomnožimo z z in poenostavimo do $z^3 - z - 6 = 0$. Izraz na levi strani enačbe razstavimo

$$z^3 - z - 6 = (z^3 - 8) - (z - 2) = (z-2)(z^2 + 2z + 4) - (z - 2) = (z-2)(z^2 + 2z + 3).$$

Ker je $z^2 + 2z + 3 = (z+1)^2 + 2 > 0$, je edina rešitev enačbe $z = 2$. Sledi $\sqrt[6]{x+1} = 2$, od koder izračunamo $x = 63$.

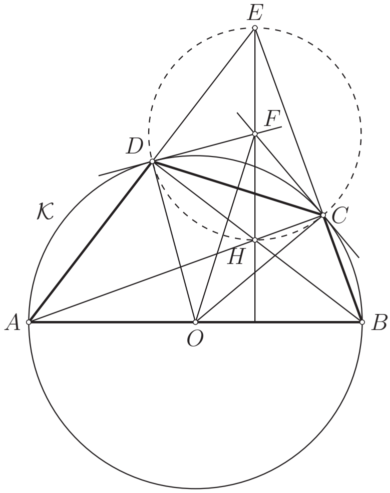
2. način. Kot v prvi rešitvi vpeljemo novo spremenljivko $z = \sqrt[6]{x+1}$, nato pa dobljeno enačbo $z^2 + \frac{6-6z^2}{z^3-z} = 1$ pomnožimo z $z^3 - z$ in preoblikujemo do $z^5 - 2z^3 - 6z^2 + z + 6 = 0$.

Nekoliko bolj se moramo potruditi, da levo stran podobno kot v prvi rešitvi razstavimo

$$\begin{aligned} z^5 - 2z^3 - 6z^2 + z + 6 &= z(z^4 - 2z^2 + 1) - 6(z^2 - 1) = z(z^2-1)^2 - 6(z^2 - 1) = \\ &= (z^2 - 1)(z^3 - z - 6) = (z-1)(z+1)(z-2)(z^2 + 2z + 3). \end{aligned}$$

Rešitve enačbe so tako $z = 1$, $z = -1$ in $z = 2$, saj je spet $z^2 + 2z + 3 > 0$. Prvi dve rešitvi odpadeta, ker v tem primeru ulomek v začetni enačbi za z ni definiran, rešitev $z = 2$ pa nam da $x = 63$.

II/B2.



Označimo $\alpha = \sphericalangle BAE$ in $\beta = \sphericalangle EBA$, in naj bo O središče krožnice $\mathcal{K}$. Potem je $\sphericalangle AEB = \pi - \alpha - \beta$. Zaradi tetivnosti štirikotnika $ABCD$ je $\sphericalangle DCB = \pi - \alpha$ in $\sphericalangle ADC = \pi - \beta$. Ker je $\sphericalangle OCB = \sphericalangle CBO = \beta$ in $\sphericalangle ADO = \sphericalangle OAD = \alpha$, sledi $\sphericalangle ODC = \sphericalangle DCO = \pi - \alpha - \beta$.

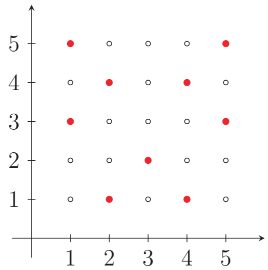
Naj bo S središče trikotniku CED očrtane krožnice. Po izreku o središčnem in obodnem kotu je $\sphericalangle DSC = 2\sphericalangle DEC = 2(\pi-\alpha-\beta)$, zato je $\sphericalangle CDS = \sphericalangle SCD = \frac{\pi - \sphericalangle DSC}{2} = \alpha+\beta-\frac{\pi}{2}$. Sledi $\sphericalangle ODS = \sphericalangle SCO = \sphericalangle SCD + \sphericalangle DCO = \frac{\pi}{2}$. Torej sta CS in DS tangenti na krožnico $\mathcal{K}$, kar pomeni, da je $S = F$, oziroma F je središče trikotniku CED očrtane krožnice.

Naj bo H višinska točka trikotnika ABE. Po Talesovem izreku sta AC in BD višini tega trikotnika, torej je H njuno presečišče. Prav tako po Talesovem izreku sledi, da je štirikotnik $CEDH$ tetiven in središče njemu očrtane krožnice leži na razpolovišču daljice EH. Pokazali smo že, da je točka F središče trikotniku CED očrtane krožnice, torej točke E, F in H ležijo na isti premici. Ker je EH višina trikotnika ABE na stranico AB, od tod sledi, da sta premici EF in AB pravokotni.

2. način. Privzemimo enake oznake kot v prvi rešitvi. Ker sta CF in DF tangenti na krožnico $\mathcal{K}$, je trikotnik DCF enakokrak z vrhom pri F, hkrati pa velja $\sphericalangle FCO = \sphericalangle ODF = \frac{\pi}{2}$. Iz štirikotnika $OCFD$ zato dobimo $\sphericalangle DFC = \pi - \sphericalangle COD$. Po izreku o središčnem in obodnem kotu je $\sphericalangle COD = 2\sphericalangle CAD$, torej je $\sphericalangle DFC = \pi - 2\sphericalangle CAD$. Po Talesovem izreku velja $\sphericalangle ACB = \frac{\pi}{2}$, zato je $\sphericalangle DEC = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle CAD$. Od tod sledi $\sphericalangle DFC = \pi - 2\sphericalangle CAD = 2\sphericalangle DEC$. Ker točki E in F ležita na istem bregu premice CD in je trikotnik CFD enakokrak z vrhom pri F, po izreku o središčnem in obodnem kotu sledi, da je F središče trikotniku CED očrtane krožnice. Dokaz dokončamo podobno kot v prvi rešitvi.

II/B3.

Spodnja slika prikazuje, da lahko pobarvamo ne le 8 ampak tudi 9 točk.



Ker izmed 5 točk, ki ležijo v isti vodoravni vrstici, lahko pobarvamo največ 2, lahko skupaj pobarvamo največ $5 \cdot 2 = 10$ točk. Torej 11 točk ne moremo pobarvati.

Rešitve nalog za 3. letnik

III/A1.

Obravnavajmo vse možnosti glede na prvo števko števila.

Če je prva števka števila enaka 1, tedaj moramo drugo in tretjo števko izbrati iz množice $\{5, 6, 7, 8, 9\}$. Imamo le dve možnosti, 59 in 95. Podobno, če je prva števka enaka 8, morata biti preostali dve iz množice $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Spet imamo le dve možnosti, 04 in 40.

Če je prva števka enaka 2, morata biti preostali dve iz množice $\{6, 7, 8, 9\}$, vendar se nobeni dve števili iz te množice ne razlikujeta za vsaj 4. Podobno ugotovimo, da prva števka ne more biti enaka 7 in tudi ne 3 ali 6.

Če je prva števka enaka 4, tedaj sta preostali dve lahko enaki 08, 80, 09 ali 90. Če je prva števka enaka 5, tedaj sta preostali dve lahko enaki 09, 90, 19 ali 91.

Če pa je prva števka enaka 9, moramo preostali dve izbrati iz množice $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, kar lahko storimo na 6 načinov, tj. $04, 40, 05, 50, 15, 51$.

Števil z iskano lastnostjo je torej $4 + 8 + 6 = 18$.

III/A2.

Iz podatkov sklepamo, da je $p(x) = (x - 18)r(x) + 20$ za nek polinom $r(x)$. Od tod sledi $p(18) = 20$. Podobno sklepamo, da je $p(20) = 18$. Naj bo $s(x)$ ostanek pri deljenju polinoma $p(x)$ z $(x - 20)(x - 18)$. Tedaj je $p(x) = (x - 20)(x - 18)t(x) + s(x)$ za nek polinom $t(x)$ in $s(x) = ax + b$ za neki realni števili a in b. Ker je $p(18) = 20$ in $p(20) = 18$, je tudi $s(20) = 18$ in $s(18) = 20$. Od tod sledi $20a + b = 18$ in $18a + b = 20$, od koder izračunamo $a = -1$ in $b = 38$. Torej je $s(x) = -x + 38$.

III/A3.

Trikotnika GFC in GDF imata enako osnovnico GF, njuni ploščini pa sta v razmerju $2 : 1$. Torej morata biti tudi dolžini njunih višin na stranico GF v razmerju $2 : 1$. Ker sta premici FG in AB vzporedni, je dolžina višine skozi C trikotnika ABC enaka vsoti dolžin prej omenjenih višin. Od tod sledi, da sta višini skozi C trikotnikov ABC in GFC v razmerju $3 : 2$. Ker sta si ta dva trikotnika podobna, je tudi $|AB| : |GF| = 3 : 2$. Ploščini trikotnikov ABC in GFC sta tako v razmerju $9 : 4$, zato je ploščina trikotnika ABC enaka 9 cm^2.

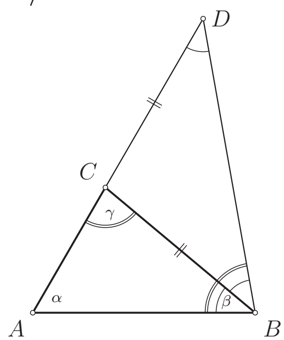
III/B1.

Ker ima polinom f celoštevilske koeficiente in vodilni koeficient enak 1, so vse njegove racionalne ničle v resnici celoštevilske. Če je x negativno število, potem je tudi $f(x) = x^3 - px^2 + qx - r^2$ negativno število, saj so vsi členi v tem primeru negativni. Torej polinom f nima negativnih ničel. Ker tudi 0 ni ničla polinoma f, sledi, da so vse tri njegove ničle naravna števila. Označimo jih z a, b in c.

Po Vietovih formulah je $a+b+c=p$, $ab+ac+bc=q$ in $abc=r^2$. Ker je r praštevilo, iz tretje enačbe sledi, da imamo le dve možnosti; bodisi sta dve ničli enaki r, tretja pa 1, ali pa sta dve ničli enaki 1, tretja pa r^2.

V prvem primeru je $q = ab+ac+bc = r(r+2)$, kar pa ni mogoče, saj $r(r+2)$ ni praštevilo. Torej sta dve ničli enaki 1, tretja pa r^2. Od tod dobimo $p = a+b+c = r^2+2$. Če število r ni deljivo s 3, potem je ostanek števila r^2 pri deljenju s 3 enak 1, zato je število $p = r^2+2$ deljivo s 3. To ni mogoče, saj je $p = r^2+2$ praštevilo, ki je očitno večje kot 3. Sledi, da je $r=3$, $p = r^2+2 = 11$ in $q = ab+ac+bc = 2r^2+1 = 19$, ničle polinoma $f(x) = x^3 - 11x^2 + 19x - 9$ pa so 1, 1 in 9.

III/B2.



Kote trikotnika ABC označimo kot običajno z α, β in γ, torej je $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Naj bo D taka točka na premici AC, da C leži med A in D in velja $|CD| = |CB|$. Pogoj naloge lahko preoblikujemo v

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|+|BC|}{|AB|} = \frac{|AC|+|CD|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AB|}.$$

Trikotnika ABC in ADB se torej ujemata v razmerju stranic in kotu $\sphericalangle BAD$ med njima, zato sta si podobna. Sledi $\sphericalangle ADB = \beta$ in $\sphericalangle DBA = \gamma$. Ker je trikotnik BCD enakokrak z vrhom v C, je $\sphericalangle DBC = \sphericalangle CDB = \beta$. Torej je

$$\gamma = \sphericalangle DBA = \sphericalangle DBC + \sphericalangle CBA = 2\beta.$$

Od tod sledi $\pi = \alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{3} + 3\beta$, zato je $\beta = \frac{2\pi}{9}$ in $\gamma = \frac{4\pi}{9}$.

2. način. Kote trikotnika ABC označimo kot običajno z α, β in γ. Po sinusnem izreku velja $\frac{|BC|}{\sin\alpha} = \frac{|AC|}{\sin\beta} = \frac{|AB|}{\sin\gamma}$, od koder izrazimo $|BC| = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}|AB|$ in $|AC| = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}|AB|$. Ko to vstavimo v enakost $|AB|^2 = |AC|^2 + |AC|\cdot|BC|$, dobimo

$$|AB|^2 = \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma}\cdot|AB|^2 + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2\gamma}\cdot|AB|^2.$$

Enakost okrajšamo z $|AB|^2$ in pomnožimo s $\sin^2\gamma$, da dobimo enakost $\sin^2\gamma = \sin^2\beta + \sin\alpha\sin\beta$, ki jo preuredimo v $\sin^2\gamma - \sin^2\beta = \sin\alpha\sin\beta$. S pomočjo faktorizacijskih formul in formul za dvojne kote levo stran preoblikujemo

$$\sin^2\gamma - \sin^2\beta = (\sin\gamma + \sin\beta)(\sin\gamma - \sin\beta) = 2\sin\frac{\gamma+\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\cos\frac{\gamma+\beta}{2} =$$

$$= \sin(\gamma+\beta)\sin(\gamma-\beta) = \sin(\pi-\alpha)\sin(\gamma-\beta) = \sin\alpha\sin(\gamma-\beta).$$

Torej velja $\sin\alpha\sin\beta = \sin\alpha\sin(\gamma-\beta)$. Po predpostavki je $\alpha = \frac{\pi}{3}$ oziroma $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$, zato sledi $\sin\beta = \sin(\gamma-\beta)$. Ker je $0 < \beta < \pi$ in $-\pi < \gamma - \beta < \pi$, imamo le dve možnosti; bodisi je $\gamma - \beta = \beta$ ali pa $\gamma - \beta = \pi - \beta$. V drugem primeru dobimo protislovje $\gamma = \pi$, torej je $\gamma - \beta = \beta$, oziroma $\gamma = 2\beta$. Hkrati je $\gamma + \beta = \pi - \alpha = \frac{2\pi}{3}$, torej je $3\beta = \frac{2\pi}{3}$. Sledi $\beta = \frac{2\pi}{9}$ in $\gamma = \frac{4\pi}{9}$.

3. način. Kote trikotnika ABC označimo kot običajno z α, β in γ. Po predpostavki je $|AB|^2 = |AC|^2 + |AC|\cdot|BC|$, po kosinusnem izreku pa velja $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 - 2|AC|\cdot|BC|\cos\gamma$. Iz obeh enakosti sledi $|BC|^2 = |AC|\cdot|BC|(1+2\cos\gamma)$ oziroma

$$|BC| = (1+2\cos\gamma)|AC|.$$

Ko to vstavimo v enakost $|AB|^2 = |AC|^2 + |AC|\cdot|BC|$, dobimo $|AB|^2 = (2+2\cos\gamma)|AC|^2$ oziroma

$$|AB| = \sqrt{2+2\cos\gamma}\cdot|AC|.$$

Če zapišemo še drugi kosinusni izrek $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB|\cdot|AC|\cos\alpha$, vanj vstavimo zgornji dve zvezi in upoštevamo predpostavko $\alpha = \frac{\pi}{3}$, dobimo

$$(1+2\cos\gamma)^2|AC|^2 = (2+2\cos\gamma)|AC|^2 + |AC|^2 - \sqrt{2+2\cos\gamma}\cdot|AC|^2.$$

Enakost okrajšamo z $|AC|^2$ in izrazimo člen s korenom

$$\begin{aligned}\sqrt{2+2\cos\gamma} &= 3 + 2\cos\gamma - (1+2\cos\gamma)^2 = 2 - 2\cos\gamma - 4\cos\gamma^2 = \\ &= (2+2\cos\gamma)(1-2\cos\gamma).\end{aligned} \tag{2}$$

Enakost sedaj kvadriramo, da dobimo $(2+2\cos\gamma) = (2+2\cos\gamma)^2(1-2\cos\gamma)^2$. Ker $\gamma \neq \pi$, je $2+2\cos\gamma \neq 0$, zato lahko enakost okrajšamo z $(2+2\cos\gamma)$, in desno stran preuredimo

$$\begin{aligned}1 &= (2+2\cos\gamma)(1-2\cos\gamma)^2 = 2 - 6\cos\gamma + 8\cos^3\gamma = 2 + 2(4\cos^3\gamma - 3\cos\gamma) = \\ &= 2 + 2\cos 3\gamma.\end{aligned}$$

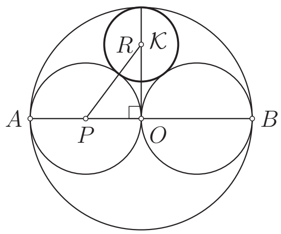
Sledi $\cos 3\gamma = -\frac{1}{2}$. Ker je $\alpha = \frac{\pi}{3}$, je $\gamma \leq \frac{2\pi}{3}$ oziroma $0 < 3\gamma \leq 2\pi$. Zato imamo dve rešitvi, $3\gamma = \frac{2\pi}{3}$ in $3\gamma = \frac{4\pi}{3}$, od koder dobimo $\gamma = \frac{2\pi}{9}$ in $\gamma = \frac{4\pi}{9}$. Ker je $0 < \frac{2\pi}{9} < \frac{\pi}{3}$, je $\frac{1}{2} < \cos\frac{2\pi}{9} < 1$. Torej je pri vrednosti $\gamma = \frac{2\pi}{9}$ desna stran enakosti (2) negativna, leva pa pozitivna, zato ta rešitev odpade. Rešitev $\gamma = \frac{4\pi}{9}$ pa je res rešitev, saj je v tem primeru $\gamma > \frac{\pi}{3}$ in zato $\cos\gamma < \frac{1}{2}$, torej sta obe strani enakosti (2) pozitivni. Od tod izračunamo še $\beta = \pi - \alpha - \gamma = \frac{2\pi}{9}$.

III/B3.

Pokazali bomo, da ima zmagovito strategijo Lili. Vsota števil vseh kroglic na mizi je enaka $\frac{10 \cdot 11}{2} = 55$. Torej bo na koncu vsota števil ene od deklet večja kot $\frac{55}{2} = 27\frac{1}{2}$, vsota števil druge pa manjša od $27\frac{1}{2}$, hkrati pa bosta obe vsoti od števila $27\frac{1}{2}$ enako oddaljeni. Če Taja v prvi potezi izbere naravno število n, ki je večje od $27\frac{1}{2}$, potem mora Lili le poskrbeti, da bo njena vsota na koncu večja od Tajine, saj bo tedaj večja kot $27\frac{1}{2}$ in s tem bližja številu n. To lahko Lili stori tako, da vsakič z mize vzame kroglico z največjo številko. Če pa Taja v prvi potezi izbere naravno število manjše od $27\frac{1}{2}$, lahko na podoben način zmaga Lili, če z mize vsakič vzame kroglico z najmanjšo številko.

Rešitve nalog za 4. letnik

IV/A1.



Označimo razpolovišče daljice AO s P, središče krožnice $\mathcal{K}$ pa z R. Polmer krožnice $\mathcal{K}$ označimo z r. Zaradi simetrije je premica RO pravokotna na premico AB. Torej po Pitagorovem izreku velja $|PO|^2 + |OR|^2 = |PR|^2$. Merjeno v centimetrih je $|PO| = 5$, $|OR| = 10 - r$ in $|PR| = 5 + r$, zato je $5^2 + (10 - r)^2 = (5 + r)^2$. Enačbo poenostavimo, da dobimo $30r = 100$. Torej je $r = \frac{10}{3}$ cm.

IV/A2.

Obravnavajmo vse možnosti glede na prvo števko števila.

Če je prva števka enaka 1, potem moramo drugo in tretjo števko izbrati iz množice šestih zaporednih števil $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, tako da se razlikujeta za vsaj 3. To lahko storimo na 12 načinov, tj. $47, 48, 49, 58, 59, 69, 74, 84, 85, 94, 95, 96$. Podobno, če je prva števka enaka 8, moramo drugo in tretjo števko izbrati iz množice šestih zaporednih števil $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. To lahko spet storimo na 12 načinov.

Če je prva števka enaka 2, moramo drugi dve izbrati iz množice petih zaporednih števil $\{5, 6, 7, 8, 9\}$, kar lahko storimo na 6 načinov. Podobno imamo 6 možnosti tudi, če je prva števka enaka 7.

Če je prva števka enaka 3, moramo drugi dve izbrati iz množice $\{0\} \cup \{6, 7, 8, 9\}$, kar lahko storimo na 10 načinov. Podobno, če je prva števka enaka 6, moramo drugi dve izbrati iz množice $\{9\} \cup \{0, 1, 2, 3\}$, kar spet lahko storimo na 10 načinov.

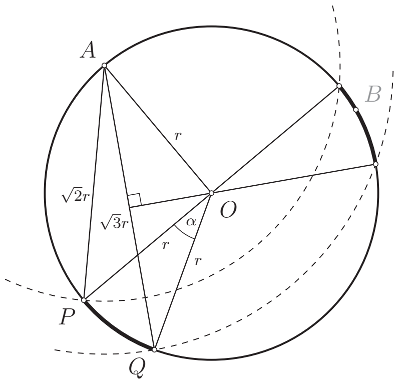
Če je prva števka enaka 4, moramo drugi dve izbrati iz množice $\{0, 1\} \cup \{7, 8, 9\}$, kar lahko storimo na 12 načinov. Podobno imamo 12 možnosti tudi, če je prva števka enaka 5.

Če pa je prva števka enaka 9, potem moramo preostali dve števki izbrati iz množice $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, kar lahko storimo na 20 načinov.

Števil z iskano lastnostjo je torej $24 + 12 + 20 + 24 + 20 = 100$.

kazalec v eni uri opiše kot $\frac{360°}{12} = 30°$, v eni minuti pa kot $\frac{30°}{60} = 0.5°$. V 1 uri in 20 minutah se torej premakne za kot $30° + 20 \cdot 0.5° = 40°$. Kot med kazalcema po 1 uri in 20 minutah je zato enak $119° + 40° - 120° = 39°$.

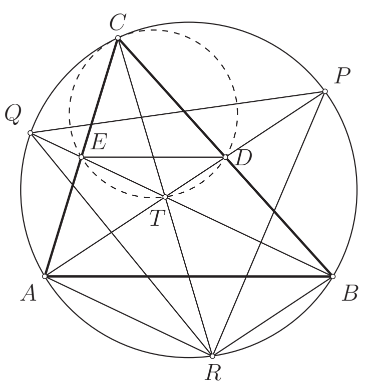
IV/B1.



Privzemimo oznake s slike, na kateri je prva izbrana točka na krožnici označena z A. Da bo razdalja med izbranima točkama večja od $\sqrt{2}r$ in manjša od $\sqrt{3}r$, mora druga izbrana točka B ležati na enem od dveh odebeljenih lokov na sliki. Verjetnost tega dogodka je enaka razmerju med skupno dolžino obeh odebeljenih lokov in obsegom cele krožnice. Ker sta odebeljena loka očitno enako dolga, je to razmerje enako $\frac{\alpha r+\alpha r}{2\pi r} = \frac{\alpha}{\pi}$.

Določiti moramo še velikost kota α. Hitro opazimo, da je trikotnik APO polovica kvadrata, saj je enakokrak in ima osnovnico za faktor $\sqrt{2}$ daljšo od obeh krakov. Od tod dobimo $\sphericalangle AOP = \frac{\pi}{2}$. Podobno opazimo, da višina na osnovnico enakokrakega trikotnika AQO ta trikotnik razdeli na dva pravokotna trikotnika, ki sta enaka polovici enakostraničnega trikotnika, saj imata hipotenuzo dolžine r in eno od katet dolžine $\frac{\sqrt{3}}{2}r$. Sledi, da je $\sphericalangle AOQ = \frac{2\pi}{3}$. Od tod izračunamo $\alpha = \sphericalangle AOQ - \sphericalangle AOP = \frac{\pi}{6}$. Verjetnost iskanega dogodka je torej enaka $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{6}$.

IV/B2.



Označimo dolžine stranic trikotnika ABC in njegove kote kot običajno. Naj bo E razpolovišče stranice AC. Potem je $|AE| = \frac{b}{2}$, $|AC| = b$ in po predpostavki $|AD| = \frac{\sqrt{3}}{2}b$. Ker težišče deli težiščnico v razmerju $2:1$, lahko izračunamo še $|AT| = \frac{2}{3}|AD| = \frac{1}{\sqrt{3}}b$. Torej je

$$\frac{|AE|}{|AT|} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|AD|}{|AC|}.$$

To pa pomeni, da sta si trikotnika ATE in ACD podobna, saj imata skupen kot $\sphericalangle DAC$. Torej je $\sphericalangle ETA = \sphericalangle ACD$, kar pomeni, da je štirikotnik $CETD$ tetiven. Sledi $\sphericalangle ATR = \sphericalangle DTC = \sphericalangle DEC = \alpha$, kjer smo upoštevali, da sta premici AB in DE vzporedni, saj sta D in E razpolovišči ustreznih stranic. Zaradi tetivnosti štirikotnika $ARBC$ velja $\sphericalangle TRA = \beta$, torej je $\sphericalangle RAT = \pi - \sphericalangle ATR - \sphericalangle TRA = \pi - \alpha - \beta = \gamma$. Iz tetivnosti zato sledi še $\sphericalangle RQP = \sphericalangle RAP = \gamma$. Podobno je $\sphericalangle RTB = \sphericalangle CTE = \sphericalangle CDE = \beta$ in $\sphericalangle BRT = \alpha$, zato velja $\sphericalangle TBR = \gamma$ in $\sphericalangle QPR = \sphericalangle QPR = \gamma$. Kota $\sphericalangle QPR$ in $\sphericalangle RQP$ sta tako oba enaka γ, kar pomeni, da je trikotnik PQR enakokrak z vrhom pri R.

2. način. Kot v prvi rešitvi ugotovimo, da je $|AT| = \frac{1}{\sqrt{3}}b$, $\frac{|AE|}{|AT|} = \frac{|AD|}{|AC|}$ in $\sphericalangle ETA = \sphericalangle ACD$. Zdaj lahko izračunamo

$$\sphericalangle BTP = \sphericalangle ETA = \sphericalangle ACD = \sphericalangle ACB = \sphericalangle TPB,$$

kjer smo v zadnji enakosti upoštevali enakost obodnih kotov nad lokom AB. Sledi, da je trikotnik BPT enakokrak in zato $|TB| = |PB|$.

V trikotnikih ATC in RTP je $\sphericalangle CTA = \sphericalangle RTP$ in $\sphericalangle ACT = \sphericalangle TPR$, torej sta si trikotnika podobna. Zato je $|RP| = \frac{|AC|\cdot|RT|}{|AT|} = |RT|\sqrt{3}$. Prav tako sta si trikotnika BTC in RTQ podobna, zato velja $|RQ| = \frac{|BC|\cdot|RT|}{|BT|} = \frac{|BC|\cdot|RT|}{|BP|}$, kjer smo upoštevali enakost $|BT| = |BP|$. Upoštevamo še podobnost trikotnikov ADC in BDP in dobimo $|BP| = \frac{|AC|\cdot|BD|}{|AD|} = \frac{|BC|}{\sqrt{3}}$. Sledi $|RQ| = |RT|\sqrt{3} = |RP|$.

3. način. Kot v drugem načinu ugotovimo, da je $|AT| = \frac{1}{\sqrt{3}}b$ in s pomočjo podobnosti trikotnikov ATC in RTP izračunamo $|RP| = |RT|\sqrt{3}$, s pomočjo podobnosti trikotnikov BTC in RTQ pa $|RQ| = \frac{|BC|\cdot|RT|}{|BT|}$.

S pomočjo dveh kosinusnih izrekov bomo pokazali, da je $|BT| = \frac{|BC|}{\sqrt{3}}$. To lahko naredimo na več načinov, eden od njih je naslednji: Po kosinusnem izreku v trikotniku ACD je

$$|BC| = 2|CD| = \sqrt{|AD|^2 + |AC|^2 - 2|AC|\cdot|AD|\cos\sphericalangle DAC} = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}\cos\sphericalangle DAC}|AC|.$$

Po kosinusnem izreku v trikotniku ATE in upoštevanju $|AT| = \frac{|AC|}{\sqrt{3}}$ pa je

$$|BT| = 2|ET| = 2\sqrt{|AT|^2 + |AE|^2 - 2|AT|\cdot|AE|\cos\sphericalangle DAC} = \sqrt{\frac{7}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3}\cos\sphericalangle DAC}|AC|.$$

Sledi $|BT| = \frac{|BC|}{\sqrt{3}}$ in iz enakosti $|RP| = |RT|\sqrt{3}$ in $|RQ| = \frac{|BC|\cdot|RT|}{|BT|}$ sledi $|RP| = |RQ|$.

IV/B3.

Pokazali bomo, da če sta obe števili m in n sodi, ima zmagovito strategijo Miha, če pa je vsaj eno od števil m in n liho, ima zmagovito strategijo Jure.

Denimo najprej, da sta m in n sodi. Tedaj lahko Miha vsakič ponovi Juretovo potezo, saj bo tako po vsaki njegovi potezi število kroglic v vsaki posodi sodo. Zadnjo kroglico bo v tem primeru odstranil Miha in tako zmagal igro.

Denimo sedaj, da je vsaj eno od števil m in n liho. Tedaj lahko Jure v svoji prvi potezi poskrbi, da bo po njegovi potezi v obeh posodah sodo mnogo kroglic. Če je m liho in n sodo, potem Jure odstrani kroglico iz bele posode. Če je m sodo in n liho, Jure odstrani kroglico iz črne posode. Če pa sta m in n obe lihi, potem Jure prestavi kroglico iz bele v črno posodo. V vseh naslednjih potezah lahko nato Jure ponavlja Mihove poteze. S to strategijo bo Jure odstranil zadnjo kroglico in zmagal.

Rešitve 56. fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije – regijsko tekmovanje

Rešitve skupine I

1. $2r_1 = 10$ cm, $2r_2 = 20$ cm, $V = 50$ L, $m = 2$ kg, $\rho = 1200$ kg/m^3.

   a) $S_1 = \pi r_1^2 = 78{,}5$ cm^2, $S_2 = \pi r_2^2 = 4S_1 = 314$ cm^2,

   Gladina v posodah sega do višine

$$h = \frac{V}{S_1 + S_2} = 127 \text{ cm}\,.$$

   b) Dodatna tlaka pod pokrovoma morata biti enaka:

$$\frac{mg}{S_1} = \frac{m_2 g}{S_2}\,, \qquad m_2 = m\,\frac{S_2}{S_1} = 8{,}0 \text{ kg}\,.$$

   c) Ključen razmislek pri tem in naslednjih vprašanjih je v ugotovitvi, da sta v ravnovesju tlaka na dnu obeh posod enaka. To pomeni, da morata biti enaka tudi tlaka v kapljevini na enakih višinah, merjenih od dna posode. Pri tem in naslednjem vprašanju izenačimo tlaka na višini gladine v ožji posodi.

   Hidrostatski tlak zaradi višinske razlike med širšo in ožjo posodo uravnovesi dodatni tlak zaradi uteži na pokrovu:

$$\frac{mg}{S_1} = \rho g \Delta h\,, \qquad \Delta h = \frac{m}{\rho S_1} = 21 \text{ cm}\,.$$

   d) V tem primeru upoštevamo še dodatni tlak zaradi uteži na pokrovu širše posode:

$$\frac{mg}{S_1} = \rho g \Delta h' + \frac{mg}{S_2}\,, \qquad \Delta h' = \frac{m}{\rho}\left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2}\right) = 16 \text{ cm}\,.$$

   e) Izenačimo tlaka na dnu ožje in širše posode; če s h_1 označimo višino kapljevine v ožji in s h_2 višino v širši posodi, velja

$$\rho g h_1 + \frac{mg}{S_1} = \rho g h_2 + \frac{mg}{S_2}\,.$$

   Pri d) smo že izračunali razliko višin, $h_2 - h_1 = \Delta h'$. Vsota prostornin kapljevine v ožji in širši posodi je enaka podani prostornini kapljevine:

$$V = S_1 h_1 + S_2 h_2 = S_1 h_1 + S_2(h_1 + \Delta h') = (S_1 + S_2)h\,,$$

   pri čemer smo v zadnjem koraku upoštevali enačbo pri a). Sledi

$$(S_1 + S_2)h_1 = (S_1 + S_2)h - S_2 \Delta h'\,, \qquad h_1 = h - \frac{S_2}{(S_1 + S_2)}\,\Delta h' = 115 \text{ cm}\,.$$

$$\Delta p = \rho g h_1 + \frac{mg}{S_1} = 13{,}5 \text{ kPa} + 2{,}5 \text{ kPa} = 16{,}0 \text{ kPa} \approx 16 \text{ kPa}\,.$$

   Do enakega rezultata pridemo, če računamo tlak v drugi posodi:

$$h_2 = h + \frac{S_1}{(S_1 + S_2)}\,\Delta h' = 131 \text{ cm}\,.$$

$$\Delta p = \rho g h_2 + \frac{mg}{S_2} = 15{,}4 \text{ kPa} + 0{,}6 \text{ kPa} = 16{,}0 \text{ kPa} \approx 16 \text{ kPa}\,.$$

2. $m_1 = 5{,}0$ kg, $m_2 = 20{,}0$ kg, $v_1 = 10$ m/s, $k = 4,0 \cdot 10^4$ N/m.

a) Ohrani se skupna gibalna količina obeh vozičkov:

$$m_1 v_1 + 0 = (m_1 + m_2)v\,, \qquad v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 2{,}0 \text{ m/s}\,.$$

b) Kinetična energija po trku:

$$W_{\text{kin}} = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = 50 \text{ J}\,.$$

c) Razlika kinetičnih energij pred in po trku se pretvori v prožnostno energijo vzmeti

$$\tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_1^2 - \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \tfrac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}v_1^2 = 200 \text{ J}\,,$$

$$x = \sqrt{\frac{m_1 m_2 v_1^2}{k(m_1 + m_2)}} = 10 \text{ cm}\,.$$

d) Ohrani se skupna gibalna količina

$$(m_1 + m_2)v = m_2 v_2 + 0\,, \qquad v_2 = \frac{(m_1 + m_2)v}{m_2} = 2{,}5 \text{ m/s}\,.$$

Sproščena energija vzmeti je enaka razliki kinetične energije na koncu in kinetične energije, izračunane pri b):

$$\Delta W = \tfrac{1}{2}m_2 v_2^2 - \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = 62{,}5 \text{ J} - 50 \text{ J} = 12{,}5 \text{ J}$$

in

$$\eta = \frac{\Delta W}{\frac{1}{2}kx^2} = 6{,}25\ \%\,.$$

e) Po sprostitvi vzmeti velja $v_2' = v'$ in $v_1' = -v'$ in iz ohranitve skupne gibalne količine sledi

$$(m_1 + m_2)v = m_2 v_2' + m_1 v_1' = (m_2 - m_1)v'\,, \qquad v' = \frac{(m_1 + m_2)v}{m_2 - m_1} = 3{,}3 \text{ m/s}\,.$$

Podobno kot pri d) sledi

$$\Delta W' = \tfrac{1}{2}m_1 {v_1'}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 {v_2'}^2 - \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)({v'}^2 - v^2) = 139 \text{ J} - 50 \text{ J} = 89 \text{ J}$$

in

$$\eta' = \frac{\Delta W'}{\frac{1}{2}kx^2} = 44\ \%\,.$$

3. $l = 200$ cm, $h = 50$ cm, $\varphi = 30°$, $F_0 = 10$ N.

a) Ko utež odmaknemo za kot φ, je ta dvignjena nad najnižjo točko za $\Delta h = l(1 - \cos\varphi)$. Hitrost izračunamo iz ohranitve vsote potencialne in kinetične energije

$$mgl(1 - \cos\varphi) = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \Longrightarrow \qquad v = \sqrt{2gl(1 - \cos\varphi)} = 2{,}29 \text{ m/s} \approx 2{,}3 \text{ m/s}.$$

b) Vodoravni met z višine h: $t = \sqrt{2h/g} = 0{,}3194$ s$\approx 0{,}32$ s. Od tu je domet d enak

$$d = vt = 2\sqrt{hl(1 - \cos\varphi)} = 0{,}732 \text{ m} \approx 73 \text{ cm}.$$

c) V najnižji točki mora rezultanta sil na utež, torej vsota sile niti F in sile teže mg, kazati proti osi vrtenja. Če naj se nit ne strga, mora veljati $F < F_0$ in mora biti hkrati rezultanta sil enaka centripetalni sili za kroženje s hitrostjo v po krožnici s polmerom l:

$$F - mg = m\frac{v^2}{l} \qquad \Longrightarrow \qquad mg + m\frac{v^2}{l} = F \leq F_0\,.$$

Nit se strga ob pogoju $F = F_0$, iz česar dobimo

$$m = \frac{F_0}{g(3 - 2\cos\varphi)} = 0{,}805 \text{ kg} \approx 800 \text{ g}.$$

d) Podobno kot v primeru a) uporabimo ohranitev vsote potencialne in kinetične energije, le da ima sedaj v začetni legi utež začetno hitrost v_0

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgl(1 - \cos\varphi) = mgl \qquad \Longrightarrow \qquad v_0 = \sqrt{2gl\cos\varphi} = 5{,}83 \text{ m/s} \approx 5{,}8 \text{ m/s}.$$

e) Z razmislekom ugotovimo, da bo domet maksimalen pri taki masi m_1, da se bo nit strgala, ko bo utež v najnižji točki. Razmislek gre takole. Če je $m < m_1$, se nit ne strga in "domet" je nič. Če je $m > m_1$, ima utež, ko se strga, manjšo hitrost kot v najnižji točki nihaja, ker ima še nekaj potencialne energije. Poleg tega ima hitrost komponento navzdol, kar pomeni, da je vodoravna komponenta hitrosti še manjša, čas leta pa približno enak, saj pada z le malo večje višine z majhno začetno komponento hitrosti navzdol. Rezultat je najbolj očiten za pretrg tik pred najnižjo lego, ko je drugačna predvsem smer hitrosti, začetna višina pa je skoraj enaka kot v najnižji točki in je zato očitno, da je domet manjši kot pri pretrgu niti v najnižji točki.

Račun je kratek, hitrost u v najnižji legi je enaka, kot da bi utež zanihala izpod stropa

$$u = \sqrt{2gl} \quad \text{in} \quad m_1 g + m_1\frac{u^2}{l} = F_0 \qquad \Longrightarrow \qquad m_1 = \frac{F_0}{3g} = 340 \text{ g}.$$

Rešitve skupine II

1. $m = 2{,}20$ kg, $V = 4{,}00$ L, $V_1 = 2{,}06$ L, $\rho_p = 2{,}30$ kg/L, $c_p = 900$ J/kgK,

   $q_t = 334$ kJ/kg, $T_1 = 35{,}0\,^\circ$C, $T_k = 4{,}0\,^\circ$C, $T_0 = 0\,^\circ$C.

   a) Maso peska m_p izračunamo iz podatkov o masah in volumnih v prvem delu naloge. Z m_s označimo maso ledenih kristalčkov snega, z m_v maso tekoče vode in z ρ_v gostoto tekoče vode. Ker je na koncu vsa voda staljena, zdaj še ne moremo ločiti vode in snega, zato obe masi pišemo skupaj v oklepaju, da se to bolje vidi. Velja

$$m = m_p + (m_v + m_s) \qquad \text{in} \qquad V - V_1 = V_p + V_{v+s} = \frac{m_p}{\rho_p} + \frac{(m_v + m_s)}{\rho_v}\,,$$

   kjer V_p označuje prostornino peska in V_{v+s} prostornino vode, ki je nastala iz tekoče vode in ledenih kristalčkov snega v mešanici, ko se je sneg stalil. Iz prve enačbe izrazimo $(m_v + m_s) = m - m_p$, vstavimo to v drugo enačbo in dobimo

$$m_p = \frac{m - \rho_v(V - V_1)}{\rho_p - \rho_v}\rho_p = 0{,}46 \text{ kg}.$$

   b) Iz prve enačbe dobimo $(m_v + m_s) = m - m_p = 1{,}74$ kg.

   c) Dolita topla voda se je ohladila s T_1 na T_k in oddala Q toplote

$$Q = \rho_v V_1 c_v (T_1 - T_k) = 268{,}212 \text{ kJ} \approx 268 \text{ kJ},$$

   kjer je c_v specifična toplota vode.

d) Toplota Q, ki jo odda topla voda, gre za taljenje snega z maso m_s, segrevanje vse vode v mešanici z maso $(m_v + m_s)$ in segrevanje peska z maso m_p. Mešanica ima na začetku temperaturo T_0, ker je v njej taleči se sneg. Dobimo

$$Q = m_s q_t + (m_v + m_s) c_v (T_k - T_0) + m_p c_p (T_k - T_0)$$

in od tu

$$m_s = \frac{Q - [(m_v + m_s)c_v + m_p c_p]\,(T_k - T_0)}{q_t} = 0{,}71055 \text{ kg} \approx 0{,}71 \text{ kg}.$$

2. $a = 5{,}0$ cm, $d_1 = 1{,}5$ mm, $d_2 = 1{,}9$ mm, $d_3 = 2{,}0$ mm, $U_0 = 2000$ V, $v = 1{,}0$ mm/min, $t_c = 30$ s, $E_0 = 3000$ V/mm.

a) Na zaporedno vezanih kondenzatorjih velja $e_1 = e_2$, torej

$$C_1 U_1 = C_2 U_2\,, \qquad \frac{\varepsilon_0 a^2 U_1}{d_1} = \frac{\varepsilon_0 a^2 U_2}{d_2}\,, \qquad \frac{U_1}{d_1} = \frac{U_2}{d_2}\,.$$

Padci napetosti se seštevajo, $U_1 + U_2 = U_0$. Iz obeh enačb sledi:

$$U_1 = \frac{d_1}{(d_1 + d_2)}\,U_0 = 880 \text{ V}\,, \qquad U_2 = \frac{d_2}{(d_1 + d_2)}\,U_0 = 1120 \text{ V}$$

in

$$e_1 = e_2 = \frac{\varepsilon_0 a^2\, U_1}{d_1} = \frac{\varepsilon_0 a^2 U_0}{d_1 + d_2} = 13 \text{ nAs}\,.$$

b) Za električni poljski jakosti na prvem in drugem kondenzatorju velja

$$E_1 = \frac{U_1}{d_1} = \frac{d_1 U_0}{d_1(d_1 + d_2)} = \frac{U_0}{(d_1 + d_2)} = 588 \text{ kV/m} \approx 590 \text{ kV/m}$$

in je enaka električni poljski jakosti v drugem kondenzatorju, $E_2 = E_1$. Tretji kondenzator je na napetosti vira in velja

$$E_3 = \frac{U_0}{d_3} = 1000 \text{ kV/m}\,.$$

c) Po 30 s se vse tri razdalje zmanjšajo za $\Delta d = v t_c = 0{,}5$ mm. Novi napetosti na C_1 in C_2 sta

$$U_1 = \frac{d_1 - \Delta d}{(d_1 + d_2 - 2\Delta d)}\,U_0 = 830 \text{ V}\,, \qquad U_2 = \frac{d_2 - \Delta d}{(d_1 + d_2 - 2\Delta d)}\,U_0 = 1170 \text{ V}\,,$$

na kondenzatorju C_3 pa se napetost ne spremeni.

d) Čas preboja t_1 v kondenzatorju C_1 določimo z zahtevo

$$E_0 = \frac{U_0}{d_1 + d_2 - 2 v t_1}\,, \qquad t_1 = \frac{1}{2v}\left(d_1 + d_2 - \frac{U_0}{E_0}\right) = 1{,}37 \text{ min} = 82 \text{ s}\,.$$

Kot smo ugotovili že pri b), je električna poljska v kondenzatorju C_2 enaka tisti v C_1, zato pride do preboja v obeh kondenzatorjih hkrati. V primeru C_3 pa velja

$$E_0 = \frac{U_0}{d_3 - v t_3}\,, \qquad t_3 = \frac{1}{v}\left(d_3 - \frac{U_0}{E_0}\right) = 1{,}33 \text{ min} = 80 \text{ s}\,.$$

Do preboja pride torej prej v kondenzatorju C_3, in sicer 1,33 minute (80 s) po sprožitvi mehanizma.

3. $U_z = 3$ V, $U_0 = 6$ V, $I_1 = 40$ mA, $I_2 = 24$ mA.

a) Skozi žarnico in upornik teče enak tok I_1, napetost na uporniku je $U_1 = U_0 - U_z = 3$ V. Upor žarnice je zaradi $U_z = U_1$ enak uporu upornika

$$R_z = \frac{U_z}{I_1} = \frac{U_0 - U_z}{I_1} = R = 75\ \Omega.$$

b) Moč je enaka produktu toka skozi žarnico in napetosti na žarnici

$$P_z = I_1 U_z = 120\ \text{mW}.$$

c) Podobno kot pri b) je moč produkt toka in napetosti, le da bi bil tok sedaj enak $I_c = U_0/R_z$, od koder dobimo

$$P_c = I_c U_0 = \frac{U_0}{R_z} U_0 = \frac{U_0^2}{R_z} = 480\ \text{mW}.$$

d) Tok skozi žarnico I_d je enak vsoti tokov skozi vsakega od dveh vzporedno vezanih upornikov $I_d = 2I_2 = 48$ mA. Napetost na žarnici U_d je enaka razliki napetosti vira in napetosti na vzporedno vezanih upornikih $U_d = U_0 - I_2 R = 4{,}2$ V. Upor žarnice je torej

$$R_d = \frac{U_d}{I_d} = \frac{U_0 - I_2 R}{2I_2} = \frac{4{,}2\ \text{V}}{48\ \text{mA}} = 87{,}5\ \Omega.$$

Žarnica sveti z močjo

$$P_d = I_d U_d = 201{,}6\ \text{mW} \approx 200\ \text{mW}.$$

e) Iz meritev z enim upornikom R in z dvema vzporedno vezanima upornikoma R dobimo dva para podatkov o uporu žarnice pri danem toku skozi žarnico: (I_a, R_a) in (I_d, R_d), kjer označimo z $R_a = 75\ \Omega$ in $I_a = 40$ mA po vrsti upor žarnice in tok skozi žarnico iz a) dela naloge. Neznana koeficienta v linearni odvisnosti $R_z(I) = R_0 + kI$ dobimo kot

$$k = \frac{R_d - R_a}{I_d - I_a} = \frac{12{,}5\ \Omega}{8\ \text{mA}} = 1562{,}5\ \Omega/\text{A} \approx 1{,}56\ \Omega/\text{mA}$$

in

$$R_0 = R_a - kI_a = R_d - kI_d = 12{,}5\ \Omega.$$

f) Postopamo podobno kot pri c) delu naloge, le s to razliko, da je upor žarnice odvisen od toka. Iz Ohmovega zakona dobimo kvadratno enačbo za tok

$$U_0 = IR_z(I) = I(R_0 + kI) \qquad \Longrightarrow \qquad kI^2 + R_0 I - U_0 = 0$$

z eno samo smiselno rešitvijo (v drugi rešitvi bi bil tok negativen)

$$I = -\frac{R_0}{2k} + \sqrt{\left(\frac{R_0}{2k}\right)^2 + \frac{U_0}{k}} = -4\ \text{mA} + 62{,}097\ \text{mA} = 58{,}097\ \text{mA} \approx 58\ \text{mA}.$$

Moč žarnice je

$$P_e = IU_0 = 348{,}6\ \text{mW} \approx 350\ \text{mW}.$$

Rešitve skupine III

1. $a = 10$ m, $D = 20$ cm, $h = 2{,}5$ m, $\lambda = 0{,}5$ W/m·K, $T = 16\,^\circ$C, $T_1 = 22\,^\circ$C, $T_0 = 0\,^\circ$C.

a) Toplota iz vsake sobe uhaja skozi tri zunaje stene z dolžinami $a/2$, a in $a/2$. Dobimo

$$j = \lambda\frac{T - T_0}{D} \qquad \text{in} \qquad S = h\left(\frac{a}{2} + a + \frac{a}{2}\right) = 2ah \qquad \Longrightarrow \qquad P = jS = 2ah\lambda\frac{T - T_0}{D} = 2\ \text{kW}.$$

b) Ko sta oba grelca v prvi sobi s temperaturo T_1, oddaja prva soba toploto, ki jo prejema od obeh grelcev, v sosednjo sobo s temperaturo T_2 skozi steno s površino ah in z neznano debelino d ter skozi iste tri zunanje stene kot prej. Energijska bilanca da

$$2P = 2ah\lambda\frac{T_1 - T_0}{D} + ah\lambda\frac{T_1 - T_2}{d}\ .$$

Podobno za drugo sobo brez grelcev velja, da prejema toploto skozi vmesno steno iz prve sobe in jo vso oddaja skozi tri zunanje stene. Energijska bilanca da

$$2ah\lambda\frac{T_2-T_0}{D}=ah\lambda\frac{T_1-T_2}{d}\ .$$

Iz druge enačbe izrazimo člen z neznano debelino stene d in ga nesemo v prvo enačbo. V prvo enačbo vstavimo še izraz za moč iz a) dela naloge in dobimo

$$4ah\lambda\frac{T-T_0}{D}=2ah\lambda\frac{T_1-T_0}{D}+2ah\lambda\frac{T_2-T_0}{D}$$

in od tu

$$2T=T_1+T_2 \qquad\Longrightarrow\qquad T_2=2T-T_1=10\,^\circ\mathrm{C}.$$

c) Iz enačbe za energijsko bilanco druge sobe izrazimo še debelino vmesne stene

$$2\,\frac{(2T-T_1)-T_0}{D}=\frac{T_1-(2T-T_1)}{d} \qquad\Longrightarrow\qquad d=\left(\frac{T_1-T}{2T-T_1-T_0}\right)D=12\ \mathrm{cm}.$$

2. $R=40{,}0$ mm, $n_0=1{,}540$, $k=3{,}80\cdot10^{-2}/\mu$m, $\lambda_1=650$ nm, $\lambda_2=450$ nm,
   $a=50{,}0$ cm, $r=2{,}00$ mm.

   a) Lomni količnik za rdečo svetlobo je $n_1=n_0-k\lambda_1=1{,}5153\approx1{,}515$. Od tu izračunamo goriščno razdaljo leče f_1 za rdečo barvo

$$\frac{1}{f_1}=(n_1-1)\frac{2}{R}=25{,}765\ \mathrm{m}^{-1} \qquad\Longrightarrow\qquad f_1=38{,}81\ \mathrm{mm}.$$

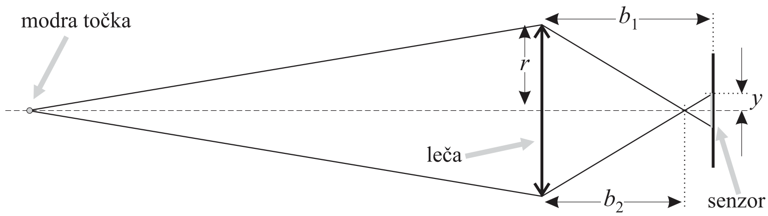
b) Iz enačbe leče in oddaljenosti napisa od leče a izračunamo, kje za lečo nastane ostra slika rdečega napisa

$$b_1=\frac{af_1}{a-f_1}=42{,}079\ \mathrm{mm}\approx42{,}1\ \mathrm{mm}.$$

c) Analogno kot pri a) delu naloge izračunamo lomni količnik $n_2=n_0-k\lambda_2=1{,}5229\approx1{,}523$ in goriščno razdaljo $f_2^{-1}=26{,}145\ \mathrm{m}^{-1}$ oziroma $f_2=38{,}25$ mm za modro svetlobo. Končno izračunamo še, kje za lečo nastane ostra slika modrega napisa

$$b_2=\frac{af_2}{a-f_2}=41{,}416\ \mathrm{mm}\approx41{,}4\ \mathrm{mm}.$$

d)



Modra točka na razdalji a pred lečo se preslika v točko na razdalji b_2 za lečo. Svetlobni senzor je na razdalji b_1 za lečo, zato se vsa svetloba, ki je vstopila skozi zaslonko s polmerom r, na senzorju razmaže v krog s polmerom y. Iz podobnih trikotnikov na sliki dobimo

$$\frac{r}{b_2}=\frac{y}{b_1-b_2} \qquad\Longrightarrow\qquad y=\left(\frac{b_1-b_2}{b_2}\right)r=31{,}98\ \mu\mathrm{m}\approx32\ \mu\mathrm{m}.$$

Iz podatkov o senzorju: 8,00 mm ustreza 4000 točkam oziroma 6,00 mm ustreza 3000 točkam izračunamo velikost točke x na senzorju $x = 2\ \mu$m. Modra točka se na senzorju razmaže v krog s površino $S = \pi y^2 \approx 3213\ \mu\text{m}^2$. To ustreza približno N točkam

$$N = \frac{\pi y^2}{x^2} = 803{,}2 \approx 800.$$

e) Spet uporabimo enačbo leče, a tokrat poznamo razdaljo med sliko modrega napisa in lečo, ki je tokrat enaka b_1, iščemo pa oddaljenost napisa od leče

$$a_2 = \frac{b_1 f_2}{b_1 - f_2} = 420{,}17\ \text{mm} \approx 420\ \text{mm}.$$

Modri napis mora biti torej 42 cm pred lečo oziroma 8 cm bližje fotoaparatu kot rdeči napis.

3. $a = 10$ cm, $l_{\text{AB}} = 3$ cm, $l_{\text{BC}} = 7$ cm, $R/l = 1\ \Omega/\text{m}$, $m/l = 100$ g/m, $B = 1$ T, $U = 3$ V, $\varphi = 30°$.

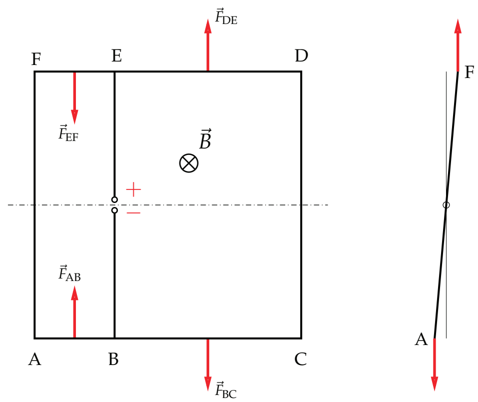
a) Upori odsekom merijo $R_1 = R_{\text{BCDE}} = 0{,}24\ \Omega$, $R_2 = R_{\text{BAFE}} = 0{,}16\ \Omega$, $R_n = R_{\text{BE}} = 0{,}10\ \Omega$. Vezje sestavljajo vzporedno vezana upornika z upori R_1 in R_2, zaporedno vezana z R_n na napetostni vir. Nadomestni upor vezja je

$$R = R_n + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = R_n + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 0{,}196\ \Omega.$$

Skozi izvir teče tok $I = U/R = 15{,}3$ A, ki se razveji v tokova $I_1 \equiv I_{\text{BCDE}}$ in $I_2 \equiv I_{\text{BAFE}}$ v razmerju R_2 proti R_1:

$$I_1 \equiv I_{\text{BC}} = \frac{R_2 I}{R_1 + R_2} = 6{,}1\ \text{A}\,, \qquad I_2 \equiv I_{\text{AB}} = \frac{R_1 I}{R_1 + R_2} = 9{,}2\ \text{A}\,.$$

b)



Na desni skici je prikazan stranski pogled na okvir, ko je le-ta zasukan za majhen kot iz ravnovesne lege. Lega je stabilna, saj prikazana dvojica sil zasuče okvir nazaj v mirovno lego. Če bi obrnili smer obeh sil, bi se okvir zavrtel za 180°. Zato mora biti rezultanta sil na spodnjo stranico usmerjena navzdol, kar pomeni, da mora biti sila na stranico BC, ki je večja od sile na stranico AB, tudi usmerjena navzdol. To pa pomeni, da teče tok v smeri od točke C proti B, od B proti E in od A proti B, torej je polariteta vira takšna, kot je prikazana na levi sliki.

c) Velikosti sil, označenih na sliki, so:

$$F_{\text{BC}} = F_{\text{DE}} = I_1 l_{\text{BC}} B = 0{,}429\ \text{N}\,, \qquad F_{\text{AB}} = F_{\text{EF}} = I_2 l_{\text{AB}} B = 0{,}276\ \text{N}\,.$$

d) Ročica je $\frac{1}{2}a$ in enaka za vse sile, izračunane pri c):

$$M = \tfrac{1}{2}a(F_{\text{BC}} + F_{\text{DE}} - (F_{\text{AB}} + F_{\text{EF}}))\sin\varphi = a(I_1 l_{\text{BC}} - I_2 l_{\text{AB}})B\sin\varphi = 7{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{Nm}\,.$$