

Tekmovanja

17. tekmovanje dijakov srednjih poklicnih šol v znanju matematike – državno tekmovanje

Naloge za 1. in 2. letnik

A1. Otroci so na Mojčini rojstnodnevni zabavi pojedli $\frac{2}{3}$ torte. Nato je Franci pojedel še $\frac{1}{4}$ ostanka torte. Kolikšen del torte je ostal?

- (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{11}{12}$

A2. V anketi so učitelje matematike vprašali, koliko let že poučujejo matematiko. Odgovore so ponazorili s prikazom s stolpci. Kolikšen odstotek učiteljev poučuje več kot 5 in ne več kot 15 let?

- (A) 15 (B) 30 (C) 40 (D) 55 (E) 70

A3. Vseh trimestnih števil, katerih vsota števk je enaka 5, je:

- (A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 16

A4. Osemnajst milijonov ljudi na svetu ima rojstni dan na isti dan. Koliko odstotkov je to, če vemo, da je na svetu približno 7,5 milijarde ljudi?

- (A) 0,002 (B) 0,024 (C) 0,24 (D) 2,4 (E) 24

A5. Točka S je središče kroga. Kot β je velik 240° . Kolikšna je razlika velikosti kotov $\beta - \alpha$?

- (A) 200° (B) 205° (C) 210° (D) 215° (E) 220°

A6. Katera izmed danih enačb določa najbolj strmo premico?

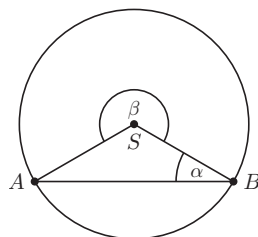
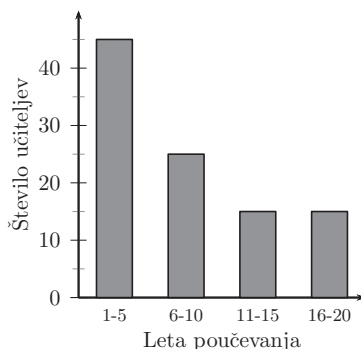
- (A) $y = -3x + 5$ (B) $y = 5x + \frac{1}{3}$ (C) $y = x - 3$
(D) $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ (E) $y = -\frac{1}{3}x + 8$

A7. Na ključavnici za zaklepanje kolesa lahko nastavimo 3-mestno kodo. Na vsakem izmed treh mest lahko izberemo eno izmed števk od 0 do 9. Največ koliko različnih kod lahko nastavimo?

- (A) 30 (B) 100 (C) 300 (D) 9^3 (E) 1000

A8. Če posodo napolnimo z vodo do vrha, tehta 17 kg, če pa jo z vodo napolnimo do polovice, tehta 9,5 kg. Koliko tehta prazna posoda?

- (A) 0,5 kg (B) 1 kg (C) 1,5 kg (D) 2 kg (E) 3 kg

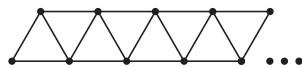


B1. Preglednica kaže število prodanih prenosnih telefonov v tednu.

Znamka	Ponedeljek	Torek	Sreda	Četrtek	Petek
Samsung	10	14	1	3	12
HTC	2	15	8	12	2
LG	2	4	0	0	3
Apple	1	0	3	6	2

- A. Katere znamke telefonov so v tem tednu prodali največ?
- B. Koliko telefonov so v tem tednu prodali povprečno na dan?
- C. Tedensko prodajo telefonov znamke Samsung ponazorite s tortnim (krožnim) prikazom.
- B2. Na parceli želimo strojno izvrtati valjasto vrtino premera 80 cm. Prvi meter vrtanja stane 10 evrov, vsak naslednji pa 4 evre več od predhodnega.
- A. Kako dolga je najdaljša toga žica, ki jo lahko po 1,5 m vrtanja spravimo v vrtino?
- B. Koliko stane izkop petega metra vrtine?
- C. Koliko bi plačali za 5 m globoko vrtino, če nam ob plačilu z gotovino priznajo 5 % popusta?

- B3. Zoja je imela 55 vžigalic dolžine 5 cm. Vse je porabila za oblikovanje niza enakostraničnih trikotnikov, kot prikazuje slika.



- A. Koliko enakostraničnih trikotnikov je v nizu, ki ga je oblikovala Zoja?
- B. Kateri geometrijski lik je oblikovala Zoja?
- C. Na kvadratni centimeter natančno izračunajte ploščino Zojinega lika.
- D. Kolikšna je razdalja med dvema najbolj oddaljenima ogliščema tega geometrijskega lika?
- E. Koliko vžigalic bi Zoja potrebovala za podoben niz z n enakostraničnimi trikotniki?

Naloge za 3. letnik

A1. Število $-\sqrt{5}$ je rešitev enačbe:

- (A) $\sqrt{x} = -5$ (B) $x^2 = \sqrt{5}$ (C) $x^2 + 5 = 0$ (D) $x^2 = -5$ (E) $x^2 = 5$

A2. Vseh trimestnih števil, katerih vsota števk je enaka 5, je:

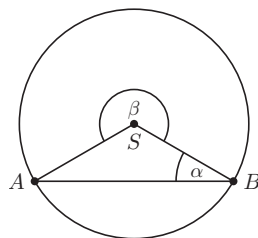
- (A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 16

A3. Osemnajst milijonov ljudi na svetu ima rojstni dan na isti dan. Koliko odstotkov je to, če vemo, da je na svetu približno 7,5 milijarde ljudi?

- (A) 0,002 (B) 0,024 (C) 0,24 (D) 2,4 (E) 24

A4. Točka S je središče kroga. Kot β je velik 240° . Kolikšna je razlika velikosti kotov $\beta - \alpha$?

- (A) 200° (B) 205° (C) 210° (D) 215° (E) 220°



A5. Dana je kvadratna funkcija $f(x) = x^2 - 9x + 20$. Katera trditev je pravilna?

- (A) Vsota obeh ničel funkcije je 20.
 (B) Graf funkcije seka ordinatno os v točki $(-9, 20)$.
 (C) Funkcija ima dve različni realni ničli.
 (D) Graf funkcije se dotika abscisne osi.
 (E) Vodilni koeficient je 9.

A6. Na ključavnici za zaklepanje kolesa lahko nastavimo 3-mestno kodo. Na vsakem izmed treh mest lahko izberemo eno izmed števk od 0 do 9. Največ koliko različnih kod lahko nastavimo?

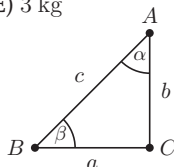
- (A) 30 (B) 100 (C) 300 (D) 9^3 (E) 1000

A7. Če posodo napolnimo z vodo do vrha, tehta 17 kg, če pa jo z vodo napolnimo do polovice, tehta 9,5 kg. Koliko tehta prazna posoda?

- (A) 0,5 kg (B) 1 kg (C) 1,5 kg (D) 2 kg (E) 3 kg

A8. Na sliki je pravokotni trikotnik. Katera izjava ni pravilna?

- (A) $a = c - (b + c)$ (B) $\sin \beta = \frac{a}{c}$ (C) $S = \frac{ab}{2}$
 (D) $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ (E) $\alpha + \beta = 90^\circ$



B1. Preglednica kaže število prodanih prenosnih telefonov v tednu.

Znamka	Ponedeljek	Torek	Sreda	Četrtek	Petek
Samsung	10	14	1	3	12
HTC	2	15	8	12	2
LG	2	4	0	0	3
Apple	1	0	3	6	2

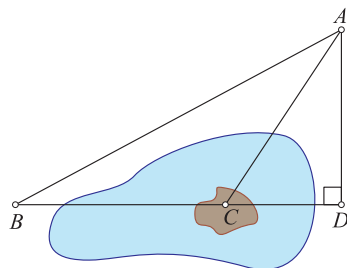
- A. Katere znamke telefonov so v tem tednu prodali največ?
 B. Koliko telefonov so v tem tednu prodali povprečno na dan?
 C. Tedensko prodajo telefonov znamke Samsung ponazorite s tortnim (krožnim) prikazom.

B2. Na parceli želimo strojno izvrtati valjasto vrtino premera 80 cm. Prvi meter vrtanja stane 10 evrov, vsak naslednji pa 4 evre več od predhodnega.

- A. Kako dolga je najdaljša toga žica, ki jo lahko po 1,5 m vrtanja spravimo v vrtino?
 B. Koliko stane izkop petega metra vrtine?
 C. Koliko bi plačali za 5 m globoko vrtino, če nam ob plačilu z gotovino priznajo 5 % popusta?

B3. Vila Luxa se nahaja na lokaciji C na otočku sredi jezera, Hiša Krasna pa na lokaciji B . Razdalja med točkama A in D je 10 km, $\angle CBA = \angle BAC = 28^\circ$.

- Koliko je velik kot $\angle CAD$?
- Koliko kilometrov je točka A oddaljena od točke C ? Izračunajte na dve decimalni natančno.
- Kolikšna je razdalja med Vilo Luxo in Hišo Krasno?



Tekmovanje v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike – šolsko tekmovanje

1. skupina: Poslovna matematika

1. naloga

V podjetju, ki proizvaja male gospodinjske aparate, imajo 80 strojev. Stroji delajo po 8 ur dnevno. V mesecu marcu (23 delovnih dni) izdelajo 120.000 aparatov.

- Odločili so se za nakup novih strojev, ki bodo za 12 % zmogljivejši. Koliko ur dnevno bi morali obratovati novi stroji v mesecu aprilu (20 delovnih dni), da bi izdelali 130.000 aparatov. Upoštevajte, da je bilo dobavljenih le 75 strojev.
- Koliko dni bi morali delati novi stroji, če bi dodatno dobavili še 5 novih strojev? Novi stroji bi delali po 6 ur na dan. Rezultat, ki ste ga izračunali, izrazite tudi v dnevih in urah.

2. naloga

- Razdelite 30.000 USD med štiri podjetnike, tako da:
 - 20 % celotnega zneska razdelite tako, da prejme vsak naslednji za 500 USD manj kot prejšnji;
 - $\frac{1}{2}$ celotnega zneska v razmerju 2 : 4 : 1 : 3;
 - ostanek celotnega zneska pa na enake dele.
 Koliko USD prejme vsak podjetnik?

- Četrty podjetnik se je odločil, da bo prejeti znesek razdelil trem najboljšim zaposlenim v podjetju po naslednjih kriterijih:
 - obratno sorazmerno z odsotnostjo – prvi 20 dni, drugi 40 dni, tretji 15 dni
 - premo sorazmerno s storilnostjo – prvi 500, drugi 200 in tretji 300 enot.

Koliko USD prejme vsak zaposleni?

3. naloga

- a) Na neki šoli je v 3. letnik vpisanih 82 dijakov. V 3. a-razredu, ki ima 28 dijakov, je bilo ob koncu leta uspešnih 25 dijakov, v 3. b, ki ima 30 dijakov, je bilo uspešnih 26 dijakov, v 3. c, ki ima 24 dijakov, sta bila dva dijaka neuspešna.

Kateri razred je bil najuspešnejši?

- b) V neko drugo srednjo šolo je 1. 9. vpisanih 640 dijakov. 5. septembra se je na to šola naknadno vpisalo še 5 dijakov, do 15. septembra pa še 2 dijaka. Koliko dijakov je na šoli 15. septembra? Koliko % dijakov se je naknadno vpisalo do 5. septembra? Kakšen je skupni % dijakov, ki so se vpisali naknadno?

4. naloga

Podjetje »Domača zelenjava« d. o. o. se ukvarja s pridelavo zelenjave. Zaradi povečanega povpraševanja po slovenski zelenjavi namerava podjetje zaposliti še dodatnega delavca. Za delo na polju mora to podjetje nabaviti nov traktor. Ker nimajo trenutno dovolj lastnih sredstev, jim je banka odobrila posojilo, ki se bo obrestovalo po 8,8-% anticipativni obrestni meri in po navadnem obrestnem računu.

- a) Kolikšna mora biti višina najetega posojila, ki ga bo podjetje vrnilo čez 8 mesecev, če potrebuje za nakup traktorja znamke Ursus 18.000,00 EUR?
- b) Ali bi podjetje z najetim posojilom v višini 20.000,00 EUR imelo dovolj denarja za nakup traktorja znamke Ford, ki stane 19.000,00 EUR?

2. skupina: Statistika

1. NALOGA

Tabela 1: **Dijaki po izobraževalnih programih v Sloveniji v letih 2008 in 2014**

Vrsta izobraževalnega programa	Leto	
	2008	2014
Nižje poklicno izobraževanje	370	361
Srednje poklicno izobraževanje	3.630	2.947
Srednje tehniško in drugo strokovno izobraževanje	8.484	7.711
Srednje splošno izobraževanje	8.519	6.774
Skupaj	21.003	17.793

Vir: Statistični urad RS

- a) Izračunajte strukturo dijakov po izobraževalnih programih in jo izrazite v odstotkih (na 1 decimalno mesto natančno).

Tabela 2: **Struktura dijakov po izobraževalnih programih Sloveniji v letih 2008 in 2014** (v odstotkih)

Vrsta izobraževalnega programa	Leto	
	2008	2014
Nižje poklicno izobraževanje		
Srednje poklicno izobraževanje		
Srednje tehniško in drugo strokovno izobraževanje		
Srednje splošno izobraževanje		
Skupaj		

- b) Razložite izračunano strukturo za leto 2014.
 c) Strukturo dijakov po izobraževalnih programih v letih 2008 in 2014 prikažite grafično s strukturnima stolpcema.
 d) Dopolnite besedilo.

V srednjem poklicnem izobraževanju se je število dijakov v letu 2014 glede na leto 2008 **povečalo/zmanjšalo** za _____ odstotkov.

2. NALOGA



Neka občina bo ob občinskem prazniku izdala bilten. V biltenu bodo objavili tudi nekaj statističnih podatkov o treh sosednjih regijah, ki so jih zbrali za ta namen in so prikazani v spodnji tabeli.

Tabela 3: **Površina, naselja, prebivalci in gospodinjstva v regijah Zelena, Rdeča in Bela**

Regija	Površina v km ²	Število naselij	Število prebivalcev	Število gospodinjstev
Zelena	352	61	22.557	6.487
Rdeča	268	114	25.238	7.450
Bela	169	33	17.543	5.353

Vir: Izmišljeni podatki

- a) Izračunajte gostoto prebivalcev za vse tri regije (*na dve decimalni mesti natančno*).
 b) Izračunajte število prebivalcev na gospodinjstvo za vse tri regije (*na dve decimalni mesti natančno*).
 c) Izračunajte število naselij na 100 km² za vse tri regije (*na dve decimalni mesti natančno*).

Rešitve:

Regija	a)	b)	c)
Zelena			
Rdeča			
Bela			

- d) V Zeleni regiji je bilo v preteklem letu 2.350 turistov, od tega 67 % tujih. Določite število tujih turistov na 100 vseh turistov *(na dve decimalni mesti natančno)*.

3. NALOGA

Smučarski skoki postajajo zadnja leta zaradi izjemnih dosežkov naših tekmovalcev vse bolj popularni. Med slovenskimi skakalci je trenutno najboljši Peter Prevc, ki je v sezoni 2015/16 dosegel rekordno število zmag v primerjavi z ostalimi tekmovalci.

Tabela 3: **Svetovni pokal - World Cup - vrstni red za moške v sezoni 2015/2016**

Uvrstitev (doseženo mesto)	Skakalec	Število zmag	Skupno število doseženih točk	
1.	 PREVC Peter	15	2.303	
2.	 FREUND Severin	3	1.490	
3.	 GANGNES Kenneth	1	1.348	
4.	 HAYBOECK Michael	3	1.301	
5.	 FORFANG Johann Andre	1	1.240	
6.	 KRAFT Stefan	1	1.006	
7.	 TANDE Daniel-Andre	1	985	
8.	 KASAI Noriaki	0	909	
9.	 FREITAG Richard	0	680	
10.	 FANNEMEL Anders	1	670	

Vir: http://www.mi-press.eu/si/sport/smucarski_skoki/svetovni_pokal/vrstni_red_-_moski

- a) S pomočjo ustreznih indeksov izračunajte, za koliko odstotkov več oz. manj točk so osvojili ostali tekmovalci v primerjavi s Petrom Prevcem. *(Rezultate zaokrožite na 1 decimalno mesto natančno in jih vpišite v prazni stolpec zgornje tabele.)*
- b) Severin Freund je osvojil za _____ odstotka **več/manj** točk, Kenneth Gangnes za _____ odstotka **več/manj** točk ter Michael Hayboeck za _____ odstotka **več/manj** točk kot Peter Prevc.

Tabela 5: **Pokal narodov - Nations Cup - vrstni red za moške v sezoni 2015/2016**

Uvrstitev (doseženo mesto)	Država	Skupno število doseženih točk		
1.	 Norveška	7.202		
2.	 Slovenija	5.760		
3.	 Nemčija	5.409		
4.	 Avstrija	4.652		
5.	 Japonska	3.088		

Vir: http://www.mi-press.eu/si/sport/smucarski_skoki/svetovni_pokal/vrstni_red_-_moski

- c) S pomočjo ustreznih indeksov izračunajte, za koliko odstotkov več oz. manj točk so osvojile ostale države v primerjavi s Slovenijo. *(Rezultate zaokrožite na 1 decimalno mesto natančno in jih vpišite v prazna stolpca v tabeli.)*
- d) Razložite rezultate pod točko c.

4. NALOGA

Na RIC-u so pripravili podatke o splošnem uspehu na poklicni maturi za programe srednjega strokovnega izobraževanja v spomladanskem roku 2016. Zaradi pomanjkanja črnila nekaj podatkov ni bilo vidnih:

Tabela 6: **Dijaki programov srednjega strokovnega izobraževanja po splošnem uspehu na poklicni maturi v spomladanskem roku 2016**

Število točk na PM	f_j		
8–10	242		
11–13	1.223		
14–16	1.803		
17–19	1.562		
20–22	701		
Skupaj	5.531		

Vir: Državni izpitni center

- a) Opredelite statistično populacijo, ki smo jo opazovali.
- b) Katera statistična spremenljivka je bila predmet opazovanja in katera vrsta statistične spremenljivke je bila?
- c) Izračunajte deleže dijakov po razredih in jih vnesite v tabelo zgoraj. (*Rezultate zaokrožite na 3 decimalna mesta natančno.*)
- d) Dopolnite besedilo.
- _____ odstotka dijakov je doseglo 17 točk ali več.
- _____ dijakov je doseglo do 16 točk.

Šolsko tekmovanje v znanju finančne matematike in statistike

1. Od maja 2016 do februarja 2017 smo spremljali ceno delnice A.

Podatki o povprečnih cenah delnice v evrih po posameznih mesecih v opazovanem obdobju so zbrani v drugi vrstici spodnje tabele. V nadaljnjih vrsticah so izračunana drseča povprečja cene delnice za petmesečna obdobja. S pojmom *drseča* poudarimo njihovo lastnost, da ob vsaki vključitvi novega podatka najstarejši podatek izključimo iz računa.

maj	jun.	jul.	avg.	sep.	okt.	nov.	dec.	jan.	feb.
19,80		18,60	9,80	11,80		15,00		12,80	14,80
15,00									
	13,00								
		11,00							
			11,60						

Rezultate v nalogi zaokroži na dve decimalni mesti.

a) Privzemi, da so meseci enako dolgi. Dopolni tabelo.

b) Prednost drsečih povprečij je, da izravnavajo gibanje oziroma volatilnost cen, kar nam omogoča, da lažje določimo trend v podatkih.

V dan koordinatni sistem nariši linijska diagrama mesečnih in drsečih povprečij za obdobje september 2016 – februar 2017. Pri tem vsako drseče povprečje prikaži pri zadnjem še vsebovanem mesecu; npr. prvo drseče povprečje 15,00 prikaži pri mesecu septembru.

c) Pravilo križanja priporoča, da delnico kupimo takrat, ko se njena cena povzpne za vsaj 10 % nad krivuljo drsečega povprečja, prodamo pa takrat, ko njena cena pade za vsaj 10 % pod to krivuljo. V nalogi odločitev sprejemamo na osnovi pravila križanja, trenutnega mesečnega povprečja in drsečega povprečja.

Ali je bilo v trenutku, ko smo določili mesečno povprečje in drseče povprečje za mesec november 2016, delnico A priporočljivo kupiti? Odgovor utemelji.

d) Kolikšna bo morala biti povprečna cena delnice A v marcu 2017, da bo ob njeni objavi priporočljivo delnico A prodati?

2. Babica Metka se je ob rojstvu vnuka odločila, da mu bo v času njegovega osnovnošolskega izobraževanja ob koncu vsakega šolskega leta podarila 300 EUR žepnine. Da bi lahko to odločitev izpolnila, že kmalu po vnukovem rojstvu, to je 24. junija, vloži v banko potreben denar. Prvo žepnino bo vnuku izplačala natanko 7 let po pologu, zadnjo pa 15 let po pologu. Banka za dolgoročne depozite ponuja letno obrestno mero 4 % z letnim obrestovanjem. Rezultate zaokroži na dve decimalni mesti.

a) Koliko denarja mora Metka vložiti v banko, da bo lahko poravnala vse žepnine?

b) Kolikšno je stanje na babičinem varčevalnem računu, ko vnuk zaključi peti razred, to je takoj po tem, ko mu izplača peto žepnino?

c) Takoj po izplačilu pete žepnine banka objavi, da bo dolgoročne varčevalce nagradila s povečanjem obrestne mere na 5 %. Kolikšen znesek lahko babica dvigne z varčevalnega računa, pa bo še vedno lahko izpolnila svojo odločitev?

3. V spodnji preglednici sta dani trenutni efektivni obrestni meri za enoletno in dveletno obdobje. Čas t do dospelja merimo v letih.

t	1	2
$R(0, t)$	2,00 %	3,55 %

Na trgu obstajata dve obveznici istega izdajatelja, obe imata nominalno vrednost 100 EUR. Prva je brezkuponska in ima dospelje čez eno leto, druga pa je kuponska z dospeljem čez dve leti in izplačuje letne kupone po 2 % kuponski obrestni meri, prvega čez natanko eno leto.

Rezultate v evrih v nalogi zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) Določi ceni obveznic v času 0.
- b) Brata Jan in Žan sta pravkar prejela vsak po 10 000 EUR. Ker prejetega denarja trenutno ne potrebujeta, ga bosta vložila v obveznici. Jan bo ves denar vložil v brezkuponsko obveznico, Žan pa ves denar v kuponsko obveznico. Koliko obveznic bosta kupila? Število posameznih obveznic zaokroži na celo število.
- c) Leto kasneje je podana efektivna obrestna mera $R(1, 2) = 3,80\%$. Jan po tej obrestni meri na banki za eno leto investira prejete nominalne vrednosti svojih obveznic, Žan pa kupone, ki so jih izplačale njegove obveznice. S kolikšnim zneskom razpolaga vsak od bratov v trenutku 2, ko zapadejo še dveletne obveznice?
- d) Kolikšna bi morala biti obrestna mera $R(1, 2)$, da bi brata ob koncu dveletnega obdobja razpolagala z enakima zneskoma?
4. Opcijsko strategijo nakupni metuljev korak sestavimo tako, da
- kupimo evropsko nakupno opcijo A z izvršilno ceno $K_1 = 20$ EUR,
 - kupimo evropsko nakupno opcijo C z izvršilno ceno $K_3 = 40$ EUR,
 - prodamo (izdamo) dve evropski nakupni opciji B z izvršilno ceno $K_2 = 30$ EUR.
- Vse naštete opcije imajo zapadlost T in so napisane na isto delnico.
- a) Nariši grafa izplačil opcij A in B ob zapadlosti v odvisnosti od takratne cene delnice S_T .
- b) Ob zapadlosti opcij je cena delnice enaka $S_T = 35$ EUR. Kolikšno je izplačilo nakupnega metuljevega koraka?
- c) Določi funkcijo izplačila nakupnega metuljevega koraka ob zapadlosti v odvisnosti od cene delnice S_T in nariši njen graf.

15. tekmovanje v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike – državno tekmovanje

1. skupina: Poslovna matematika

1. NALOGA

- a) Jeseni je bilo v 7 dneh v dolino privedenih 13.300 ovac, ki jih je spremljalo po 5 pastirjev na dan. Koliko ovac je bilo v naslednjih dveh tednih privedenih v dolino, če jih je spremljalo za 20 % več pastirjev kot prej, splošno število ovac pa se je zmanjšalo za 5 %? (1 teden = 7dni)
- b) Z zalogo hrane, ki so jo imeli na razpolago, so lahko v hlevih dnevno oskrbeli 1.905 ovac. Za koliko ovac bo naslednji dan zadostovala za $\frac{1}{5}$ večja zaloga hrane, če se predvideva za $\frac{1}{10}$ manjša poraba hrane?

2. NALOGA

V tovarni zdravil so iz skupnega denarnega sklada v višini 38.000,00 EUR razdelili denarne nagrade petim študentom, in sicer:

- a) $\frac{1}{4}$ celotnega sklada premo sorazmerno s povprečno oceno študija:
1. študent Miha ima ocene: 8, 8, 8, 9, 10
 2. študent Jernej ima ocene: 9, 9, 9, 9, 10
 3. študentka Ana ima ocene: 8, 8, 8, 10, 10
 4. študentka Ina ima ocene: 8, 8, 8, 8, 8
 5. študent Žan ima ocene: 9, 9, 9, 9, 8
- b) $\frac{1}{2}$ celotnega denarnega sklada obratno sorazmerno z višino štipendije:
1. študent Miha: 150,00 EUR
 2. študent Jernej: 200,00 EUR
 3. študentka Ana: 120,00 EUR
 4. študentka Ina: 300,00 EUR
 5. študent Žan: 300,00 EUR
- c) Ostanek od celotnega sklada pa so razdelili tako, da je bila podeljena ena prva nagrada, ena druga in tri tretje nagrade za prizadevnost študentov. Prva nagrada je za 700,00 EUR višja od druge nagrade, tretja nagrada pa je za 20 % nižja kot druga nagrada. Prvo nagrado je prejela Ana, drugo Ina, tretjo nagrado pa so prejeli Žan, Miha in Jernej.

Kolikšne skupne nagrade so prejeli posamezni študentje? Napiši odgovor v spodnjo razpredelnico.

Študent/ka	Kriterij A	Kriterij B	Kriterij C	Skupna nagrada
Miha				
Jernej				
Ana				
Ina				
Žan				
Skupaj				

3. NALOGA

- a) V tovarni avtomobilov »Avtek, d. d.« beležijo za leto 2016 povprečno 15-% mesečno zmanjšanje proizvodnje avtomobilov zaradi zmanjšanja povpraševanja na trgu. Koliko avtomobilov so proizvedli v tem podjetju pred zmanjšanjem proizvodnje, če so danes naredili 370 avtomobilov, današnje zmanjšanje proizvodnje pa je le polovica povprečnega mesečnega zmanjšanja proizvodnje avtomobilov?
- b) V mesecu novembru 2016 so v istem podjetju zabeležili 15,5-% zmanjšanje proizvodnje avtomobilov. 65 % je bilo zmanjšanja proizvodnje zaradi zmanjšanja povpraševanja na domačem trgu, ostalo pa je bilo zmanjšanje povpraševanja na tujem trgu. Kolikšen je % zmanjšanja proizvodnje zaradi zmanjšanja povpraševanja na domačem trgu in kolikšen je % zaradi zmanjšanja povpraševanja na tujem trgu v tem mesecu?
- c) 15. decembra 2016 so v tem istem podjetju proizvedli 360 avtomobilov rdeče in modre barve. Od teh je bilo 60 % rdečih, 25 % proizvedenih avtomobilov modre barve pa je imelo vgrajeno napravo za parkiranje. Koliko modrih avtomobilov z vgrajeno napravo za parkiranje je bilo proizvedenih ta dan?
- d) Koliko procentno zmanjšanje proizvodnje avtomobilov beležijo v tem podjetju na dan 15. december 2016?

4. NALOGA

Janez se je odločil varčevati. Na bančni račun je položil 450,00 EUR. Banka obrestuje vloge po 2,5-% letni dekurzivni obrestni meri in letni kapitalizaciji.

- a) Koliko denarja bo imel Janez na bančnem računu po 2 letih?
- b) K privarčevanemu znesku iz naloge a) Janez položi na varčevalni račun še 127,22 EUR. Dekurzivna obrestna mera se zviša za 0,5 odstotne točke. Banka pripisuje obresti mesečno pri relativnem izračunu obrestne mere. Koliko denarja ima Janez na bančnem računu po 5 letih varčevanja?
- c) Kolikšna bi morala biti letna dekurzivna obrestna mera, da bi se Janezova začetna vloga v 15 letih pri letnem pripisu obresti potrojila?

2. skupina: Statistika



1. NALOGA

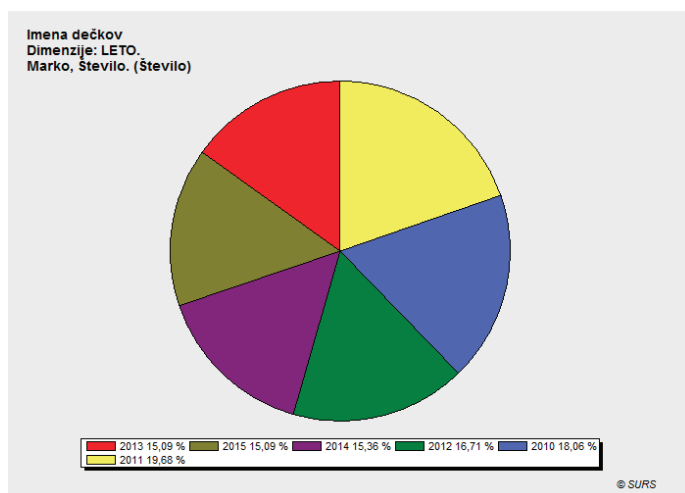
Imena ljudi se skozi čas spreminjajo. V preteklosti zelo pogosta imena pri nas, kot so Franc, Jožef, Ivan, Anton idr., se danes novorojenčkom skoraj ne podeljujejo več. Ime Marija, ki ga je npr. med leti 1951–1960 v Sloveniji dobilo še 12.498 novorojenk, je med leti 2010–2015 dobilo le 230 novorojenk (Vir: SURS). V zadnjih letih so modna popolnoma drugačna imena. V tabeli so prikazana najpogostejša imena, ki so jih dobili novorojenčki v letu 2015.

Tabela 1: Najpogostejša imena dečkov in deklic, rojenih v Sloveniji v letu 2015

	Ime dečka	Število dečkov	Ime deklice	Število deklic	P _j %
1	Luka	328	Ema	267	
2	Filip	254	Eva	259	
3	Nik	248	Zala	240	
4	Mark	222	Sara	220	
5	Žan	216	Lara	206	
6	Jakob	206	Nika	205	
7	Jaka	191	Julija	200	
8	Žiga	178	Ana	183	
9	David	168	Lana	176	
10	Anže	164	Mia	174	
Skupaj		2175		2130	

- a) Izračunajte strukturo **prvih petih najpogostejših** moških imen (Luka, Filip, Nik, Mark, Žan) v letu 2015 v odstotkih in rezultate vpišite v zgornjo tabelo. *(Rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti natančno.)*
- b) Kolikšen je strukturni delež petega najpogostejšega moškega imena med vsemi desetimi moškimi imeni? Kolikšen je strukturni delež petega najpogostejšega ženskega imena med vsemi desetimi ženskimi imeni? *(Rezultate zaokrožite na tri decimalna mesta natančno.)*
- Strukturni delež imena Žan med desetimi moškimi imeni je _____.
 - Strukturni delež imena Lara med desetimi ženskimi imeni je _____.
- c) Ali veste, da je moško ime Marko še vedno na skupno 5. mestu med najpogostejšimi imeni v Sloveniji? Po podatkih SURS-a je na dan 1. 1. 2016 živelo pri nas 17.164 oseb s tem imenom (Vir: <http://www.stat.si/lmenaRojstva/sl/FirstNames>).

Učitelj je dijakom pokazal strukturni krog števila novorojenčkov, ki so dobili ime Marko v letih od 2010 do 2015.



Slika 1: Struktura novorojenčkov z imenom Marko v Sloveniji v letih od 2010 do 2015

(Vir: <http://pxweb.stat.si/pxweb/Dialog/SaveShow.asp>)

- d) V spodnjo tabelo vpišite število dečkov z imenom Marko po posameznih letih. Iz tabele je razvidno, da je leta 2010 ime Marko dobilo 67 novorojenčkov. (Rezultate zaokrožite na cela števila.)

Tabela 2: Število živorojenih otrok z imenom Marko v letih od 2010 do 2015

Leto rojstva	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Število otrok	67					

Vir: SURS

2. NALOGA



1. julija 2016 je bila gostota prebivalstva v Sloveniji 101,8 prebivalca na km².

- a) Koliko prebivalcev je štela Slovenija na ta dan, če vemo, da je površina države 20.273 km²? (Rezultat zaokrožite na celo število.)
- b) Koliko zdravnikov naj bi imeli v Sloveniji, če odpade približno 2,5 zdravnika na 1000 prebivalcev? (Rezultat zaokrožite na celo število.)
- c) Dolžina državne meje znaša 1.382 km, od tega je 921 km kopenske, izračunane ločne stopinje za prikaz s krogom predstavljajo za rečno mejo 107,58 stopinje, ostalo je morska meja. Izračunajte strukturo državne meje po vrstah meje v odstotkih. (Rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti natančno.)

Vrsta meje	Dolžina meje v km	P, %	Ločne stopinje
Kopenska	921		
Rečna			107,58
Morska			
Skupaj	1382		

- d) Izračunano strukturo prikažite grafično s strukturnim krogom.

3. NALOGA



Tabela 3: Promet Luke Koper po mesecih v letu 2015

Mesec	V_j	Promet (v tonah)	
Januar	-		
Februar	80,26		
Marec	111,10		
April	126,07		
Maj	87,75		
Junij	94,22		
Julij	90,56		
Avgust	103,44	1,569.476,00	
September	110,25		
Oktober	90,70		
November	119,45		
December	91,15		

(Vir: <http://pxweb.stat.si/pxweb/Dialog/Saveshow.asp>, 27.11.2016)

- Izračunajte promet Luke Koper v letu 2015 po mesecih, če vemo, da je promet v avgustu 2015 znašal 1,569.476 ton. (Rezultate zaokrožite na dve decimalni mesti natančno in jih vpišite v zgornjo tabelo).
- Verižne indekse prikažite grafično.
- Koliko je znašala stopnja rasti prometa v mesecu juniju in kaj nam pove?
- Koliko ton je znašala vrednost prometa januarja 2016, če je bil koeficient dinamike v tem mesecu 1,21454?

4. NALOGA



V soboto, 26. 11. 2016, so na drugi tekmi 38. sezone svetovnega pokala v smučarskih skokih v finski Ruki v finale prišli trije slovenski skakalci. Jurij Tepeš je v prvi seriji skočil 124 metrov in zbral 112,9 točke, kar ga je vodilo na 19. mesto po prvem skoku. Veliko smolo z vetrom je imel starejši izmed bratov Prevc; tako je Peter skočil 129,5 metra in zbral 126,7 točke. Domen je pristal pri 131,5 metra in zbral 125,9 točke, kar ga je vodilo na 14. mesto, dve mesti za Petrom. V finalni seriji je veter krojil razplet, saj je nekaj sekund pihal vzgornjik, nekaj sekund pa veter v hrbet. Slednjega je dobil Tepeš, ki je pristal pri 79 metrih, kar ga je potisnilo na končno 30. mesto. Domen je v slabših pogojih pristal pri 128,5 metrih in skupno zbral 247,4 točke, kar ga je takoj po skoku privedlo na četrto mesto. Odlične pogoje je, sodeč po točkovnem odbitku, imel Peter, ki je s 135,5 metri prevzel vodstvo po svojem skoku. Skupno 261,4 točke ga je vodilo na končno sedmo mesto, potem ko so v težkih vetrovnih razmerah skakalci iz prve desetice naredili kar nekaj napak.

(Vir: <http://www.sloski.si/index.php?t=News&lang=sl&id=33831>; 27.11.2016)

- Koliko je znašalo povprečno število točk naše »trojke« po prvi seriji?
- Katera je bila tista razdalja v obeh serijah, od katere je bilo polovica skokov naših predstavnikov krajših?
- Kako imenujemo srednjo vrednost pod drugo točko?
- Zmagovalec Severin Freund je v prvi seriji skočil 146,0 metrov, v drugi pa 138,0 metrov ter skupaj zbral za 11,17 % točk več kot Peter Prevc. Koliko točk je na koncu imel zmagovalec?

Državno tekmovanje v znanju finančne matematike in statistike

1. V spodnji tabeli so prikazani podatki o številu upokojujencev, povprečni mesečni bruto pokojnini, razmerjem med številom zavarovancev in upokojujencev in odhodkih za pokojnine, merjenih v odstotkih bruto domačega proizvoda (BDP).

Leto	Število upokojujencev	Povprečna mesečna pokojnina v EUR	Razmerje zavarovanci : upokojujenci	Pokojnine v % BDP
2006	510.795	515,08	1,67	10,01
2007	518.805	538,89	1,69	9,54
2008	527.933	581,00	1,71	9,70
2009	538.455	597,27	1,66	10,67
2010	552.561	603,79	1,60	11,04
2011	569.951	605,08	1,53	11,22
2012	585.408	590,47	1,46	11,52
2013	602.311	588,55	1,38	11,84
2014	608.885	586,88	1,39	11,49
2015	612.018	571,53	1,43	10,88

Vir: Zavod za pokojninsko in invalidsko zavarovanje (ZPIZ)

- a) Koliko je znašala povprečna mesečna pokojnina v obdobju 2013-2015?
- b) V katerem letu v obdobju 2006-2015 je povprečna mesečna pokojnina prvič padla in za koliko odstotkov? Kako in za koliko odstotkov se je tedaj spremenila masa pokojnin (vsota vseh izplačanih pokojnin)?
- c) Privzemimo, da so v obdobju 2011-2015 povprečne mesečne pokojnine padale linearno. Koliko bi moral znašati konstantni letni padec pokojnin, da bi bila povprečna pokojnina v letu 2015 enaka dejanski vrednosti? Kolikšna bi morala biti pri takšnem letnem padcu povprečna pokojnina v letu 2014?
- d) Privzemimo, da so v obdobju 2011-2015 povprečne mesečne pokojnine padale s konstantno (negativno) letno stopnjo rasti. Kakšna bi morala biti letna stopnja rasti, da bi bila povprečna pokojnina v letu 2015 enaka dejanski vrednosti? Kolikšna bi morala biti pri tej stopnji rasti povprečna pokojnina v letu 2014?
- e) Izračunaj bruto domači proizvod za Slovenijo za leto 2015. Vrednost v milijardah evrov zaokroži na tri decimalna mesta.
2. V lasti imamo letovišče. Lotevamo se prenove, zato bomo pri banki najeli kredit v višini 500.000 EUR. Kredit bo izplačan 1. aprila 2017. Povrnili ga bomo v osmih letih s četrtletnimi obroki, ki zapadejo 1. julija, 1. oktobra, 1. januarja in 1. aprila vsako leto, prvi obrok 1. julija 2017, zadnji 1. aprila 2025. Banka uporablja četrtletno relativno obrestovanje in 6 % letno obrestno mero.

Rezultata zaokroži na dve decimalni mesti.

- a) Določi višino obrokov, če so vsi obroki enaki.
- b) Ker v času poletne in zimske sezone z letoviščem ustvarimo višje prihodke kot v spomladanskem in jesenskem obdobju, se z banko dogovorimo za odplačevanje dolga z neenakimi obroki, in sicer bosta aprilski in oktobrski obrok dvakratnika januarskega in julijskega obroka. Določi višini višjega (april, oktober) in nižjega (januar, julij) obroka.

3. Spodnja preglednica prikazuje trenutne efektivne obrestne mere pri zveznem obrestovanju za različna dospelja. Čas t merimo v letih.

t	0,5	1,0	1,5	2,0
$R(0, t)$	1,50 %	2,30 %	3,00 %	3,40 %

Na trgu obstajata dve obveznici istega izdajatelja, obe imata nominalno vrednost 100 EUR in dospelje čez leto in pol.

Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

- Prva kuponska obveznica izplačuje letne kupone po 3,55 % kuponski obrestni meri, naslednji bo izplačan čez natanko pol leta. Določi njeno ceno na trgu v času 0 (danes).
- Druga kuponska obveznica izplačuje polletne kupone, prvi bo izplačan čez natanko pol leta. Kolikšna je njena kuponska obrestna mera, če je njena cena na trgu danes 99,35 EUR?
- Pol leta kasneje so po izplačilu kuponov obeh obveznic znane naslednje efektivne obrestne mere pri zveznem obrestovanju

t	1,0	1,5	2,0
$R(0,5; t)$	1,40 %	R	2,40 %

Obveznica z letnimi kuponi iz a) je za 1 EUR dražja od obveznice s polletnimi kuponi iz

b). Določi neznano obrestno mero R .

- Kolikšno donosnost (v odstotkih) je ustvaril investitor, ki je v času 0 kupil ter pol leta kasneje prodal eno obveznico z letnimi kuponi?
4. Cena delnice podjetja danes znaša 20 EUR. Netvegana efektivna obrestna mera pri zveznem obrestovanju je 3,10 % za vsa dospelja. Uprava podjetja je objavila napoved, da bodo čez štiri mesece izplačevali dividende v višini 3 EUR na delnico.
- Banka je pripravljena brezplačno kupiti ali prodati terminski posel na delnico podjetja z ročnostjo čez pol leta. Določi izročitveno ceno v takšnem poslu, če na trgu ni možna arbitraža.
 - Kmalu za tem delničarji na skupščini niso podprli predloga uprave in so sprejeli povišanje dividende na 5 EUR na delnico. Kako in za koliko bi se morala spremeniti izročitvena cena v terminskem poslu, da na trgu še vedno ne bi bila možna arbitraža?
 - Banka se na sklep skupščine delničarjev še ni odzvala in je ohranila izročitveno ceno iz naloge a), zato je na trgu možna arbitraža. Pripravi arbitražno strategijo.

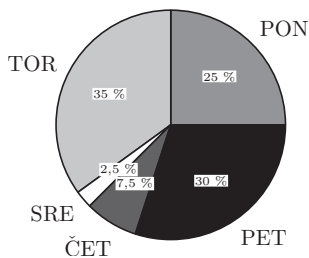
Rešitve 17. tekmovanja dijakov srednjih poklicnih šol v znanju matematike – državno tekmovanje

Rešitve nalog za 1. in 2. letnik

- A1. Otroci so najprej pojedli $\frac{2}{3}$ torte, ostala je $\frac{1}{3}$ torte. Franci je od te tretjine pojedel četrto, kar je $\frac{1}{12}$ torte. Ostalo je še $\frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$ torte.
- A2. V anketi je bilo zajetih 100 učiteljev. 40 učiteljev ima delovno dobo daljšo kot 5 let in krajšo od 15 let, kar predstavlja 40 % vseh učiteljev.
- A3. Petnajst trimestrnih števil ima vsoto števk enako 5. Ta števila so: 500, 401, 410, 104, 140, 311, 131, 113, 221, 212, 122, 320, 302, 230, 203.
- A4. $18 \cdot 10^6$ od $7,5 \cdot 10^9 = 0,0024$. To pomeni, da ima 0,24 % ljudi rojstni dan na isti dan.
- A5. Kot pri oglišču S enakokrakega trikotnika ABS je velik $360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$, kot α pa $\frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$. Razlika kotov $\beta - \alpha$ je enaka $240^\circ - 30^\circ = 210^\circ$.
- A6. Izmed danih enačb določa najbolj strmo premico enačba $y = 5x + \frac{1}{3}$.
- A7. Na vsakem mestu lahko izbiramo izmed deset števk, zato lahko nastavimo $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ različnih kod.
- A8. Po besedilu naloge lahko zapišemo sistem dveh enačb: $p + v = 17$ in $p + \frac{1}{2}v = 9,5$. Posoda p tehta 2 kg, voda v v njej pa 15 kg.

- B1. Največ prodanih telefonov je bilo blagovne znamke Samsung. V petih dneh je bilo prodanih 100 telefonov oz. v povprečju 20 na dan. Za prikaz podatkov s tortnim prikazom izdelamo preglednico:

	Samsung	Rel. frekv. [%]	Središčni kot [°]
PON	10	25	90
TOR	14	35	126
SRE	1	2,5	9
ČET	3	7,5	27
PET	12	30	108
Σ	40	100	360



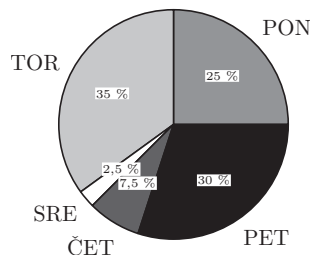
- B2. Toga palica je diagonalna osnega preseka valja s premerom 0,8 m in višino 1,5 m. Njeno dolžino izračunamo s Pitagorovim izrekom $d = \sqrt{0,8^2 + 1,5^2} = 1,7$ m. Izkop prvega metra stane 10 €, drugega metra 14 €, tretjega 18 €, četrtega 22 € in petega 26 €. Za 5 m globoko vrtino bomo plačali $10 + 14 + 18 + 22 + 26 = 90$ €, s priznanim popustom pa 85,50 €.
- B3. Zoja je iz 55 vžigalic sestavila trapez, ki ga sestavlja 27 enakostraničnih trikotnikov, vsak ima ploščino $\frac{5 \cdot 4,33}{2} = 10,825$ cm². Ploščina trapeza je $27 \cdot 10,825$ cm² = 292,275 cm² $\approx$ 292 cm². Najdlje sta oddaljeni krajišči osnovnice a , to je 70 cm. Za vsak nov trikotnik doda 2 vžigalici, razen za prvega, ko je porabila še eno dodatno. Za n trikotnikov je porabila $2n + 1$ vžigalic.

Rešitve nalog za 3. letnik

- A1.** Enačba $x^2 = 5$ ima rešitvi $x = \pm\sqrt{5}$, torej je število $-\sqrt{5}$ rešitev te enačbe.
- A2.** Petnajst trimesnih števil ima vsoto števk enako 5. Ta števila so: 500, 401, 410, 104, 140, 311, 131, 113, 221, 212, 122, 320, 302, 230, 203.
- A3.** $18 \cdot 10^6$ od $7,5 \cdot 10^9 = 0,0024$. To pomeni, da ima 0,24 % ljudi rojstni dan na isti dan.
- A4.** Kot pri oglišču S enakokrakega trikotnika ABS je velik $360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$, kot α pa $\frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$. Razlika kotov $\beta - \alpha$ je enaka $240^\circ - 30^\circ = 210^\circ$.
- A5.** Funkcija ima ničli $x = 5$ in $x = 4$, torej dve različni realni ničli.
- A6.** Na vsakem mestu lahko izbiramo izmed deset števk, zato lahko nastavimo $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ različnih kod.
- A7.** Iz besedila naloge lahko zapišemo sistem dveh enačb: $p + v = 17$ in $p + \frac{1}{2}v = 9,5$. Posoda p tehta 2 kg, voda v njej pa 15 kg.
- A8.** Izjava $\sin \beta = \frac{a}{c}$ ni pravilna.

- B1.** Največ prodanih telefonov je bilo blagovne znamke Samsung. V petih dneh je bilo prodanih 100 telefonov oz. v povprečju 20 na dan. Za prikaz podatkov s tortnim prikazom izdelamo preglednico:

	Samsung	Rel. frekv. [%]	Središčni kot [°]
PON	10	25	90
TOR	14	35	126
SRE	1	2,5	9
ČET	3	7,5	27
PET	12	30	108
Σ	40	100	360



- B2.** Toga palica je diagonalna osnega preseka valja s premerom 0,8 m in višino 1,5 m. Njeno dolžino izračunamo s Pitagorovim izrekom $d = \sqrt{0,8^2 + 1,5^2} = 1,7$ m. Izkop prvega metra stane 10 €, drugega metra 14 €, tretjega 18 €, četrtega 22 € in petega 26 €. Za 5 m globoko vrtino bomo plačali $10 + 14 + 18 + 22 + 26 = 90$ €, s priznanim popustom pa 85,50 €.
- B3.** Trikotnik BCA je enakokrak. Kot ACB je velik $180^\circ - 2 \cdot 28^\circ = 124^\circ$, zato je kot DCA velik 56° . Ker je trikotnik CDA pravokoten, je kot CAD velik 34° . Razdaljo $|AC|$ lahko izračunamo z $\cos 34^\circ = \frac{10}{|AC|}$ oz. $|AC| = 12,06$ km. Ker je trikotnik BCA enakokrak, velja $|BC| = |AC| = 12,06$ km.

Rešitve tekmovanja v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike – šolsko tekmovanje

Rešitve 1. skupine: Poslovna matematika

1a. naloga:

Rešitev:

80 strojev	8 ur	23 dni	120.000 aparatov	100 %
↓	↑	↓	↑	↓
75 strojev	x ur	20 dni	130.000 aparatov	112 %

$$\begin{aligned}X : 8 &= 80 : 75 \\&= 23 : 20 \\&= 130.000 : 120.000 \\&= 100 : 112\end{aligned}$$

$$X = \frac{8 \cdot 80 \cdot 23 \cdot 130.000 \cdot 100}{75 \cdot 20 \cdot 120.000 \cdot 112} = \underline{\underline{9,49 \text{ ure}}}$$

Odgovor:

Če bi delali na 75 novih strojih, ki bi bili za 12 % zmogljivejši, bi morali delati 20 dni po 9,49 ure, da bi izdelali 130.000 aparatov.

1b. naloga:

Rešitev:

80 strojev	8 ur	23 dni	120.000 aparatov	100 %
↓	↓	↑	↑	↓
80 strojev	6 ur	x dni	130.000 aparatov	112 %

$$\begin{aligned}X : 23 &= 80 : 80 \\&= 8 : 6 \\&= 130.000 : 120.000 \\&= 100 : 112\end{aligned}$$

$$X = \frac{23 \cdot 80 \cdot 8 \cdot 130.000 \cdot 100}{80 \cdot 6 \cdot 120.000 \cdot 112} = 29,66 \text{ dni} = 29 \text{ dni } 16 \text{ ur}$$

Odgovor:

Če bi delali na 80 strojih po 6 ur na dan, bi morali delati 29 dni in 16 ur.

2a. naloga:

Rešitev:

Podjetniki	1. delitev 20 % od 30.000 = 15.000		2. delitev $\frac{1}{2}$ od 30.000 = 15.000		3. delitev ostanek = 9.000	Skupaj v USD
	Deleži	Znesek	Deleži	Znesek	$x = \frac{9000}{4} = 2.250$	
A	x	2.250 \$	2x	3000 \$	2.250 \$	7.500 \$
B	x – 500	1.750 \$	4x	6000 \$	2.250 \$	10.000 \$
C	x – 1000	1.250 \$	1x	1500 \$	2.250 \$	5.000 \$
D	x – 1.500	750 \$	3x	4500 \$	2.250 \$	7.500 \$
	$4x - 3.000 = 6.000$ $x = 2.250$		$10 x = 15.000$ $x = 1.500$		9.000	30.000

2b. naloga:

Rešitev:

zaposleni	dnevi odsotnosti	storilnost	skupen ključ	Skupaj v USD
A	$\frac{1}{20}$ ali $20 : 5 = 4$ obratno $\frac{1}{4}$	500	125 x	3.750 1T
B	$\frac{1}{40}$ ali $40 : 5 = 8$ obratno $\frac{1}{8}$	200	25 x	750 1T
C	$\frac{1}{15}$ ali $15 : 5 = 3$ obratno $\frac{1}{3}$	300	100 x	3.000 1T
				7.500

$$125 : 25 : 100 \quad /25$$

$$5 x + 1 x + 4 x = 7500$$

$$\underline{x = 750}$$

ali

$$125 x + 25 x + 150 x = 7.500$$

$$\underline{x = 25}$$

3a. naloga:

Rešitev:

Razred	vsi dijaki	uspešni dijaki	uspešnost razreda
3. a	28	25	89,29 %
3. b	30	26	86,67 %
3. c	24	22	91,67 %

Odgovor: Najuspešnejši razred je 3. C

3b. naloga:

Rešitev:

$$15. \text{ septembra} = 640 + 5 + 2 = 647$$

$$\% \text{ naknadno vpisanih do 5. septembra} \quad 5 / (640 + 5) \times 100 = 0,775 \% = 0,78 \%$$

$$\text{SKUPNI } \% \text{ naknadno vpisanih na dan 15.sept.} = 7/647 \times 100 = 1,08 \%$$

4a. naloga:

Rešitev:

$$G = 18.000,00 \text{ EUR}$$

$$p = 8,8 \%$$

$$m = 8 \text{ mesecev}$$

$$G = ? \text{ EUR}$$

$$G^- = G - \frac{G \cdot p \cdot m}{1200}$$

$$G = \frac{1200 \times G^-}{1200 - p \cdot m} = \frac{1200 \times 18.000,00}{1200 - 8,8 \times 8} = \underline{\underline{19.121,81 \text{ EUR}}}$$

4b. naloga:

Rešitev:

$$G = 20.000,00 \text{ EUR}$$

$$p = 8,8 \%$$

$$m = 8 \text{ mesecev}$$

$$G^- = ? \text{ EUR}$$

$$G^- = G - \frac{G \cdot p \cdot m}{1200}$$

$$\begin{aligned} G^- &= G \cdot \left(\frac{1200 - p \cdot m}{1200} \right) = 20.000,00 \cdot \left(\frac{1200 - 8,8 \times 8}{1200} \right) \\ \text{ali} &= 20.000,00 - \left(\frac{20.000,00 \times 8,8 \times 8}{1200} \right) \\ \text{ali} &= 20.000,00 \cdot \left(1 - \frac{8,8 \times 8}{1200} \right) \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{G^- = 18.826,67 \text{ EUR}}}$$

Odgovor:

Najeto posojilo ob danih pogojih v višini 20.000,00 EUR ne bi zadostovalo za nakup novega traktorja, saj bi manjkalo 173,33 EUR.

Rešitve 2. skupine: Statistika

1a. naloga:

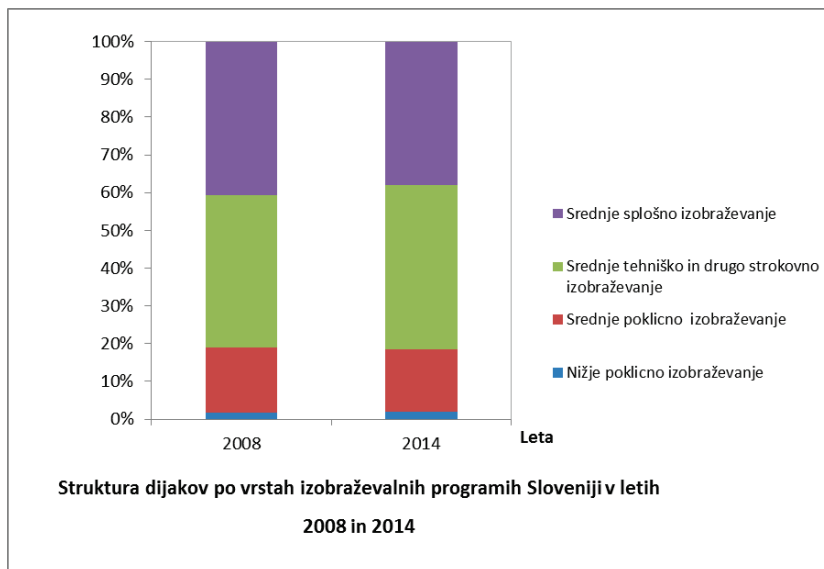
Tabela 2: **Struktura dijakov po izobraževalnih programih Sloveniji v letih 2008 in 2014** (v odstotkih)

Vrsta izobraževalnega programa	Leto	
	2008	2014
Nižje poklicno izobraževanje	1,8	2,0
Srednje poklicno izobraževanje	17,3	16,6
Srednje tehniško in drugo strokovno izobraževanje	40,4	43,3
Srednje splošno izobraževanje	40,6	38,1
Skupaj	100,0	100,0

1b. naloga:

V letu 2014 je 2 odstotka dijakov obiskovalo programe nižjega poklicnega izobraževanja, 16,6 odstotka dijakov je obiskovalo programe srednjega poklicnega izobraževanja, največ dijakov je obiskovalo programe srednjega tehniškega in drugega strokovnega izobraževanja, in sicer 43,3 odstotka dijakov, programe srednjega splošnega izobraževanja pa je obiskovalo 38,1 odstotka dijakov.

1c. naloga:



1d. naloga:

V srednjem poklicnem izobraževanju se je število dijakov v letu 2014 glede na leto 2008 **povečalo/zmanjšalo** za **18,82** odstotkov.

Izračun:

$$I_{2014/2008} = \frac{2947}{3630} \cdot 100 = 81,18$$

$$D_{2014/2008} \% = 81,18 - 100 = -18,82 \%$$

2a. naloga:

$$Gostota\ prebivalstva = \frac{\text{število prebivalcev}}{\text{površina}}$$

2b. naloga:

$$K_1 = \frac{\text{število prebivalcev}}{\text{število gospodinjstev}}$$

2a. naloga:

$$K_2 = \frac{\text{število naselij}}{\text{površina}} \cdot 100$$

2. naloga:

Rešitve:

Regija	a)	b)	c)
Zelena	64,08	3,48	17,33
Rdeča	94,17	3,39	42,54
Bela	103,80	3,28	19,53

2d. naloga:

Št. tujih turistov: 1575

$$K_3 = \frac{\text{število tujih turistov}}{\text{število vseh turistov}} \cdot 100 = \frac{1575}{2350} \cdot 100 =$$

67,02 tujih turistov na 100 vseh turistov

3a. naloga:

Tabela 3: **Svetovni pokal - World Cup - vrstni red za moške v sezoni 2015/2016**

Uvrstitev (doseženo mesto)	Skakalec	Število zmag	Skupno število doseženih točk	I _j /Prevc
1.	 PREVC Peter	15	2.303	100,0
2.	 FREUND Severin	3	1.490	64,7
3.	 GANGNES Kenneth	1	1.348	58,5
4.	 HAYBOECK Michael	3	1.301	56,5
5.	 FORFANG Johann Andre	1	1.240	53,8
6.	 KRAFT Stefan	1	1.006	43,7
7.	 TANDE Daniel-Andre	1	985	42,8
8.	 KASAI Noriaki	0	909	39,5
9.	 FREITAG Richard	0	680	29,5
10.	 FANNEMEL Anders	1	670	29,1

Vir: http://www.mi-press.eu/si/sport/smucarski_skoki/svetovni_pokal/vrstni_red_-_moski

3b. naloga:

b) Severin Freund je osvojil za **35,3** odstotka **več/manj** točk, Kenneth Gangnes za **41,5** odstotka **veča/manj** točk ter Michael Hayboeck za **43,5** odstotka **več/manj** točk kot Peter Prevc.

3c. naloga:

Tabela 5: Pokal narodov - Nations Cup - vrstni red za moške v sezoni 2015/2016

Uvrstitev (doseženo mesto)	Država	Skupno število doseženih točk	I _j /SLO	D _j /SLO v %
1.	 Norveška	7.202	125,0	25,0
2.	 Slovenija	5.760	100,0	-
3.	 Nemčija	5.409	93,9	-6,1
4.	 Avstrija	4.652	80,8	-19,2
5.	 Japonska	3.088	53,6	-46,4

Vir: http://www.mi-press.eu/si/sport/smucarski_skoki/svetovni_pokal/vrstni_red_-_moski

3d. naloga:

Norveška je dosegla za 25 odstotkov več točk kot Slovenija, Nemčija je dosegla za 6 odstotkov manj točk, Avstrija za 19,2 odstotka manj točk in Japonska za 46,4 odstotka manj točk v primerjavi s Slovenijo.

4a. naloga:

Statistična populacija:

Dijaki programov srednjega strokovnega izobraževanja po splošnem uspehu na poklicni maturi v spomladanskem roku 2016.

4b. naloga:

Statistična spremenljivka: splošni uspeh (v točkah)

Vrsta statistične spremenljivke: številska, diskretna sprem.

4c. naloga:

Tabela 6: **Dijaki programov srednjega strokovnega izobraževanja po splošnem uspehu na poklicni maturi v spomladanskem roku 2016**

Število točk na PM	f _j	f _j ^o	F _j
8–10	242	0,044	242
11–13	1.223	0,221	1.465
14–16	1.803	0,326	3.268
17–19	1.562	0,282	4.830
20–22	701	0,127	5.531
Skupaj	5.531	1,000	

Vir: Državni izpitni center

4d. naloga:

40,9 odstotka dijakov je doseglo 17 točk ali več.

3.268 dijakov je doseglo do 16 točk.

Rešitve šolskega tekmovanja v znanju finančne matematike in statistike

1a. naloga:

Rešitev

V tabeli so podatki, ki jih je potrebno izračunati, zapisani z **modro**.

Povprečna cena delnice junija je

$$5 \cdot 15 - (19,8 + 18,6 + 9,8 + 11,8) = 15,00 \text{ EUR.}$$

Povprečna cena delnice oktobra je

$$5 \cdot 13 - (15 - 18,6 - 9,8 - 11,8) = 9,80 \text{ EUR.}$$

Tretje drseče povprečje je

$$\frac{18,6 + 9,8 + 11,8 + 9,8 + 15}{5} = 13,00 \text{ EUR.}$$

Povprečna cena delnice decembra je

$$5 \cdot 11 - (9,8 - 11,8 - 9,8 - 15) = 8,60 \text{ EUR.}$$

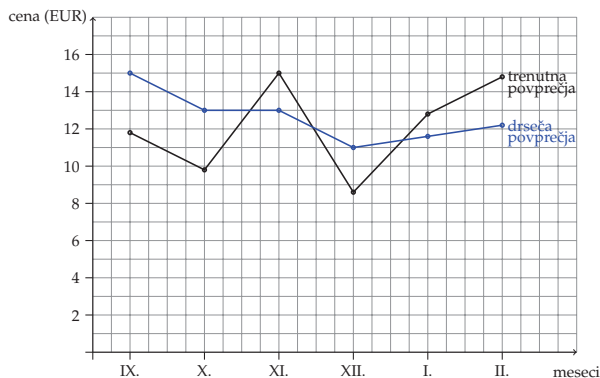
Šesto drseče povprečje je

$$\frac{9,8 + 15 + 8,6 + 12,8 + 14,8}{5} = 12,20 \text{ EUR.}$$

maj	jun.	jul.	avg.	sep.	okt.	nov.	dec.	jan.	feb.
19,80	15,00	18,60	9,80	11,80	9,80	15,00	8,60	12,80	14,80
15,00									
	13,00								
		13,00							
			11,00						
				11,60					
					12,20				

1b. naloga:

Rešitev:



1c. naloga:

Rešitev

Drseče povprečje za mesec november je bilo 13,00 EUR.

Meja, pri kateri je bil priporočljiv nakup, je bila

$$1,1 \cdot 13 = 14,30 \text{ EUR.}$$

Takratno mesečno povprečje je bilo 15,00 EUR.

Ker je $15 > 14,30$, je bilo delnico priporočljivo kupiti.

1d. naloga:

Rešitev

Označimo povprečno ceno v marcu z x , drseče povprečje bo zato

$$\frac{15 + 8,6 + 12,8 + 14,8 + x}{5}.$$

Veljati mora

$$x < \frac{15 + 8,6 + 12,8 + 14,8 + x}{5} \cdot 0,9,$$

$$5x < (15 + 8,6 + 12,8 + 14,8 + x) \cdot 0,9,$$

$$x < \frac{(15 + 8,6 + 12,8 + 14,8) \cdot 0,9}{4,1} = 11,24.$$

Povprečna cena v marcu mora biti nižja od 11,24 EUR.

2a. naloga:

Rešitev

Letna obrestna mera je $p\% = 4\%$, letni obrestni faktor je $r = 1,04$.

Letno izplačilo je $a = 300$ EUR. Iščemo začetni vložek G .

Denarne tokove po letih prikazuje spodnja shema.



Redukcijski termin postavimo na trenutek vplačila glavnice.

Z načelom ekvivalence glavnice dobimo

$$G = \frac{a}{r^7} + \frac{a}{r^8} + \dots + \frac{a}{r^{14}} + \frac{a}{r^{15}},$$

$$G = \frac{a}{r^{15}}(r^8 + r^7 + \dots + r + 1),$$

$$G = \frac{a}{r^{15}} \cdot \frac{r^9 - 1}{r - 1},$$

$$G = \frac{300}{1,04^{15}} \cdot \frac{1,04^9 - 1}{1,04 - 1},$$

$$G = 1762,88 \text{ EUR.}$$

Metka mora v banko vložiti 1762,88 EUR.

2b. naloga:

Rešitev

Stanje na varčevalnem računu je enako trenutni vrednosti še ne izplačanih žepnin:

$$\begin{aligned}G_1 &= \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r^3} + \frac{a}{r^4}, \\G_1 &= \frac{a}{r^4}(r^3 + r^2 + r + 1), \\G_1 &= \frac{a}{r^4} \cdot \frac{r^4 - 1}{r - 1}, \\G_1 &= \frac{300}{1,04^4} \cdot \frac{1,04^4 - 1}{1,04 - 1}, \\G_1 &= 1\,088,97 \text{ EUR.}\end{aligned}$$

Stanje na računu po izplačilu pete žepnine je 1 088,97 EUR.

2c. naloga:

Rešitev

Novi letni obrestni faktor enak $r_1 = 1,05$.

Da bo babica lahko izplačala vse žepnine, mora na varčevalnem računu imeti

$$\begin{aligned}G_2 &= \frac{a}{r_1} + \frac{a}{r_1^2} + \frac{a}{r_1^3} + \frac{a}{r_1^4}, \\G_2 &= \frac{a}{r_1^4}(r_1^3 + r_1^2 + r_1 + 1), \\G_2 &= \frac{a}{r_1^4} \cdot \frac{r_1^4 - 1}{r_1 - 1}, \\G_2 &= \frac{300}{1,05^4} \cdot \frac{1,05^4 - 1}{1,05 - 1}, \\G_2 &= 1\,063,79 \text{ EUR.}\end{aligned}$$

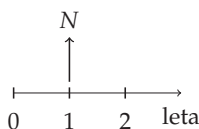
Babica lahko dvigne $G_1 - G_2 = 25,18$ EUR.

3a. naloga:

Rešitev

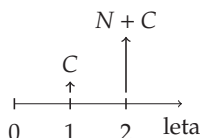
Ceni obveznic dobimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov.

Brezkuponska obveznica izplača nominalno vrednost $N = 100$ EUR čez eno leto.



$$P_1 = N \cdot D(0, 1) = \frac{N}{1 + R(0, 1)} = \frac{100}{1 + 0,02} = 98,04 \text{ EUR}$$

Kuponska obveznica izplača kupona $C = 0,02 \cdot 100 = 2$ EUR čez eno in dve leti ter nominalno vrednost $N = 100$ EUR čez dve leti.



$$P_2 = C \cdot D(0, 1) + (N + C) \cdot D(0, 2)$$

$$P_2 = \frac{C}{1 + R(0, 1)} + \frac{N + C}{(1 + R(0, 2))^2}$$

$$P_2 = \frac{2}{1 + 0,02} + \frac{102}{(1 + 0,0355)^2}$$

$$P_2 = 97,09 \text{ EUR}$$

3b. naloga:

Rešitev

Jan bo kupil $\frac{10\,000}{98,04} = 102$ brezkuponski obveznici.

Žan bo kupil $\frac{10\,000}{97,09} = 103$ kuponske obveznice.

3c. naloga:

Rešitev

Jan v trenutku $t = 1$ prejme nominalne vrednosti v skupnem znesku

$$M_1 = 102 \cdot 100 = 10\,200 \text{ EUR.}$$

Znesek položi na banko in leto kasneje razpolaga z

$$M_1(1 + R(1, 2)) = 10\,200(1 + 0,038) = 10\,587,60 \text{ EUR.}$$

Žan v trenutku $t = 1$ prejme kupone v skupni višini

$$M_2 = 103 \cdot 2 = 206 \text{ EUR,}$$

ki jih položi na banko. Leto kasneje razpolaga z

$$M_2(1 + R(1, 2)) = 206(1 + 0,038) = 213,83 \text{ EUR.}$$

Hkrati prejme še druge kupone in nominalne vrednosti dveletnih obveznic v skupni višini

$$M_3 = 103 \cdot (100 + 2) = 10\,506 \text{ EUR.}$$

Skupaj ima 10 719,83 EUR.

3d. naloga:

Rešitev

Jan v trenutku $t = 2$ razpolaga z $M_1(1 + R(1, 2)) = 10\,200(1 + R(1, 2))$ EUR.

Žan v trenutku $t = 2$ razpolaga z $M_2(1 + R(1, 2)) + M_3 = 206(1 + R(1, 2)) + 10\,506$ EUR.

Izenačimo zneska

$$10\,200(1 + R(1, 2)) = 206(1 + R(1, 2)) + 10\,506$$

$$9994(1 + R(1, 2)) = 10\,506$$

$$1 + R(1, 2) = \frac{10\,506}{9994}$$

$$R(1, 2) = \frac{10\,506}{9994} - 1$$

$$R(1, 2) = 5,12\%$$

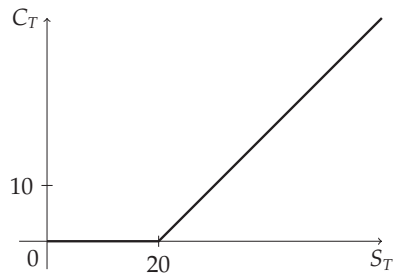
Obrestna mera mora biti 5,12 %.

4a. naloga:

Rešitev

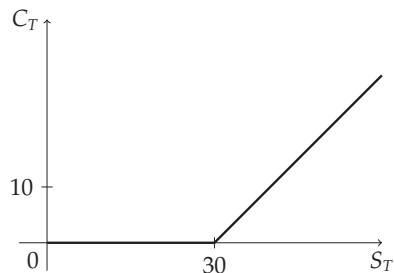
Izplačilo opcije A je odsekoma linearna funkcija $\max\{S_T - K_1, 0\} = \max\{S_T - 20, 0\}$.

Izplačilo opcije A



Izplačilo opcije B je odsekoma linearna funkcija $\max\{S_T - K_2, 0\} = \max\{S_T - 30, 0\}$ in je neodvisno od tega, ali smo opcijo kupili ali prodali.

Izplačilo opcije B



4b. naloga:

Rešitev

Opciji A in B se splačata, opcija C pa se ne splača.

Izvršimo opcijo A in dobimo $S_T - K_1 = 35 - 20 = 15$ EUR.

Kupec opcij B opciji izvrši, plačati mu moramo $2 \cdot (S_T - K_2) = 2 \cdot (35 - 30) = 10$ EUR

Denarnih tokov iz opcije C ni.

Naše skupno izplačilo je $15 - 10 = 5$ EUR.

4c. naloga:

Rešitev

Izplačilo opcije A je

$$\max\{S_T - K_1, 0\} = \max\{S_T - 20, 0\} = \begin{cases} 0; & S_T \leq 20 \\ S_T - 20; & S_T > 20 \end{cases}.$$

Opcija je na meji pri $S_T = 20$ EUR. Izplačilo (terjatev) opcij B je

$$-2 \cdot \max\{S_T - K_2, 0\} = -2 \cdot \max\{S_T - 30, 0\} = \begin{cases} 0; & S_T \leq 30 \\ -2 \cdot (S_T - 30); & S_T > 30 \end{cases}.$$

Opciji sta na meji pri $S_T = 30$ EUR. Izplačilo opcije C je

$$\max\{S_T - K_3, 0\} = \max\{S_T - 40, 0\} = \begin{cases} 0; & S_T \leq 40 \\ S_T - 40; & S_T > 40 \end{cases}.$$

Opcija je na meji pri $S_T = 40$ EUR.

Izplačilo portfelja X_T določimo z obravnavo na štirih intervalih. Delilne točke lahko umestimo v levi ali desni interval.

- Če je cena delnice ob zapadlosti opcij $S_T \leq 20$, se ne splača nobena od opcij in izplačilo koraka je $X_T = 0$.
- Če je cena delnice ob zapadlosti opcij $20 < S_T \leq 30$, se splača samo opcija A in dobimo izplačilo

$$X_T = S_T - 20$$

- Če je cena delnice ob zapadlosti opcij $30 < S_T \leq 40$, se splačata opciji A in B. Z izvršitvijo opcije A dobimo izplačilo v višini $S_T - 20$, kupcu opcij B pa plačamo $2 \cdot (S_T - 30) = 2S_T - 60$. Ostane nam izplačilo

$$X_T = S_T - 20 - 2S_T + 60 = 40 - S_T.$$

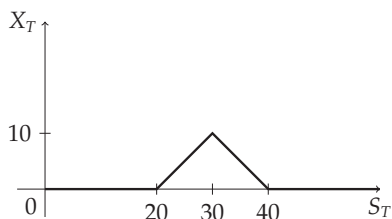
- Če je cena delnice ob zapadlosti opcij $S_T > 40$, se splačajo vse opcije. Z izvršitvijo opcije A dobimo izplačilo v višini $S_T - 20$, z izvršitvijo opcije C dobimo izplačilo $S_T - 40$. Kupcu opcij B plačamo $2 \cdot (S_T - 30) = 2S_T - 60$. Ostane nam izplačilo

$$X_T = S_T - 20 + S_T - 40 - 2S_T + 60 = 0.$$

Izplačilo metuljevega koraka X_T ob zapadlosti opcij je

$$X_T = \begin{cases} 0; & S_T \leq 20 \\ S_T - 20; & 20 < S_T \leq 30 \\ 40 - S_T; & 30 < S_T \leq 40 \\ 0; & 40 < S_T \end{cases}$$

Izplačilo nakupnega metuljevega koraka



Rešitve 15. tekmovanja v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike – državno tekmovanje

Rešitve 1. skupine: Poslovna matematika

1a. naloga.

Izračun števila pastirjev = $5 \cdot (1 + \frac{20}{100}) = 6$ pastirjev na dan ali $5 \times 1,20 = 6$
 Zmanjšanje splošnega števila ovc = $(100 - 5) \% = 95 \%$

7 dni	13.300 ovac	5 pastirjev	100 %
↑	↑	↑	↑
14 dni	x ovac	6 pastirjev	95 %

$$x = \frac{13.300 \times 14 \times \frac{6 \times 95}{100}}{7 \times 5 \times 100} = \underline{\underline{30.324 \text{ ovac}}}$$

Odg.: V naslednjih dveh tednih so v dolino prepeljali 30.324 ovac.

1b. naloga.

Izračun zaloge hrane $(100 + \frac{1 \cdot 100}{5}) \% = 120 \%$ ali $\frac{1}{5} = 20 \%$ $(100 + 20) \% = 120 \%$

Izračun porabe = $(100 - \frac{1 \cdot 100}{10}) \% = (100 - 10) \% = 90 \%$ ali $\frac{1}{10} = 10 \%$ $(100 - 10) \% = 90 \%$

100-% zaloge	1.905 ovac	100-% poraba
↑	↑	↓
120-% zaloge	X ovac	90-% poraba

$$x = \frac{1905 \times 120 \times 100}{100 \times 90} = \underline{\underline{2.540 \text{ ovac}}} \text{ (Odgovor: Zaloge bo zadostovala za 2.540 ovac.)}$$

2a. naloga.

Rešitev:

1. študent ima ocene: 8, 8, 8, 9, 10 povprečje = $\frac{43}{5} = 8,6$
2. študent ima ocene: 9, 9, 9, 9, 10 povprečje = $\frac{46}{5} = 9,2$
3. študent ima ocene: 8, 8, 8, 10, 10 povprečje = $\frac{44}{5} = 8,8$
4. študent ima ocene: 8, 8, 8, 8, 8 povprečje = $\frac{40}{5} = 8,0$
5. študent ima ocene: 9, 9, 9, 9, 8 povprečje = $\frac{44}{5} = 8,8$

$$\frac{1}{4} \text{ od } 38.000,00 = 9.500,00 \text{ EUR}$$

$$a + b + c + d + e = 9.500,00$$

$$a : b : c : d : e = 8,6 : 9,2 : 8,8 : 8,0 : 8,8 \quad / \times 10 \quad / : 2$$

$$8,6x + 9,2x + 8,8x + 8,0x + 8,8x = 9.500,00$$

$$43,4x = 9.500,00$$

$$\underline{x = 218,8940092}$$

ali

$$43x + 46x + 44x + 40x + 44x = 9.500,00 \text{ (urejeno razmerje)}$$

$$217x = 9.500,00$$

$$\underline{x = 43,77880184} \quad \text{in podobne pravilne rešitve}$$

$$a = 8,6x = 1.882,49 \text{ EUR}$$

$$b = 9,2x = 2.013,82 \text{ EUR}$$

$$c = 8,8x = 1.926,27 \text{ EUR}$$

$$d = 8,0x = 1.751,15 \text{ EUR}$$

$$e = 8,8x = 1.926,27 \text{ EUR}$$

$$\text{Skupaj} = 9.500,00 \text{ EUR}$$

2b. naloga.

Rešitev:

$$\frac{1}{2} \text{ od } 38.000,00 = 19.000,00 \text{ EUR}$$

$$a + b + c + d + e = 19.000,00$$

$$a : b : c : d : e = \frac{1}{150} : \frac{1}{200} : \frac{1}{120} : \frac{1}{300} : \frac{1}{300} \quad / * 600$$

$$a : b : c : d : e = 4 : 3 : 5 : 2 : 2$$

$$a = 4x = 4.750,00 \text{ EUR}$$

$$b = 3x = 3.562,50 \text{ EUR}$$

$$c = 5x = 5.937,50 \text{ EUR}$$

$$d = 2x = 2.375,00 \text{ EUR}$$

$$e = 2x = 2.375,00 \text{ EUR}$$

$$\text{Skupaj} = 19.000,00 \text{ EUR}$$

$$4x + 3x + 5x + 2x + 2x = 19.000,00$$

$$16x = 19.000,00$$

$$\underline{x = 1.187,5}$$

2c. naloga.

Rešitev:

$$\text{Ostanek} = 38.000,00 - 9.500,00 - 19.000,00 = 9.500,00$$

$$a + b + c + d + e = 9.500,00$$

$$c = x + 700,00$$

$$\Rightarrow 2000,00 + 700,00 = \underline{2.700,00 \text{ EUR}} = 1. \text{ nagrada}$$

$$d = x$$

$$\Rightarrow \underline{2000,00 \text{ EUR}} = 2. \text{ nagrada}$$

$$(a+b+e) = 3x \cdot \frac{80}{100} = \frac{240x}{100} \Rightarrow \frac{240 \cdot 2000}{100} = 4800,00 : 3 = \underline{1.600,00 \text{ EUR}} = \text{tri } 3. \text{ nagrade}$$

$$(x + 700,00) + x + 2,4x = 9.500,00$$

$$4,4x + 700,00 = 9.500,00$$

$$\underline{x = 2.000,00}$$

Študent/ka	Kriterij A v EUR	Kriterij B v EUR	Kriterij C v EUR	Skupna nagrada v EUR
Miha (a)	1.882,49	4.750,00	1.600,00	8.232,49
Jernej (b)	2.013,82	3.562,50	1.600,00	7.176,32
Ana (c)	1.926,27	5.937,50	2.700,00	10.563,77
Ina (d)	1.751,15	2.375,00	2.000,00	6.126,15
Zan (e)	1.926,27	2.375,00	1.600,00	5.901,27
	9.500,00	19.000,00	9.500,00	38.000,00

3a. naloga.

Rešitev:

$p_1 = 15\%$ (povprečno mesečno zmanjšanje proizvodnje avtomobilov)

$C = ?$

$C = 370$...ustreza ..(100 – 7,5) % = 92,5 %

$p_2 = \frac{1}{2}$ od 15 % = 7,5 %

92,5 % 370 avtomobilov

100 % x avtomobilov

$$x = \frac{370 \cdot 100}{92,5} = \underline{400 \text{ avtomobilov}}$$

ALI: $C = C \cdot 0,925$

$$C = \frac{C}{0,925} = \frac{370}{0,925} = \underline{400 \text{ avtomobilov}}$$

3b. naloga.

Rešitev:

$C = p = 15,5\%$ (celotno zmanjšanje v novembru)... ustreza ...100 %

$p_1 = 65\%$ (zmanjšanje domači trg)

$p_2 = (100 - 65)\% = 35\%$ (zmanjšanje tuji trg)

100 %15,5 %

ali $15,5 \times 0,65 = 10,075 \% = 10,08 \%$

65 % x %

$$x = \frac{15,5 \cdot 65}{100} = 10,075 \% = \underline{10,08 \%}$$

100 % 15,5 %

ali $15,5 \times 0,35 = 5,425 \% = 5,43 \%$

35 % x %

$$x = \frac{15,5 \cdot 35}{100} = 5,425 \% = \underline{5,43 \%}$$

3c. naloga.

Rešitev:

$C = 360$ (vsi proizvedeni avtomobili na dan 15. december)

$$p = 60 \% \text{ (rdeči)} \quad d_R = \frac{C \cdot p}{100} = \frac{360 \cdot 60}{100} = \underline{\underline{216 \text{ vseh rdečih}}}$$

$$d_M = 360 - 216 = \underline{\underline{144 \text{ vseh modrih}}}$$

$$C_{(\text{modri})} = 144$$

$p = 25 \% \text{ (modri z vgrajeno napravo)}$

$$d = \frac{C \cdot p}{100} = \frac{144 \cdot 25}{100} = \underline{\underline{36 \text{ modrih avtomobilov z vgrajeno napravo za parkiranje}}}$$

3d. naloga.

Rešitev:

$C = 400$ avtomobilov ustreza 100 %

$C - d = 360$ avtomobilov

$$\text{ali } 360/400 = 0,90 \times 100 = 90 \%$$

$$d = 400 - 360 = 40 \text{ avtomobilov}$$

$$(100 \% - 90 \%) = \underline{\underline{10 \%}}$$

$$p = x \%$$

$$100 \% \dots\dots\dots 400 \text{ avtomobilov}$$

$$x \% \dots\dots\dots 40 \text{ avtomobilov}$$

$$x = \frac{100 \cdot 40}{400} = \underline{\underline{10 \%}}$$

4a. naloga.

Rešitev:

$$G_0 = 450,00 \text{ EUR}$$

$$p = 2,5 \%$$

$$n = 2 \text{ leti}$$

$$m = 1$$

$$G_n = x \text{ EUR}$$

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{2,5}{100} = \underline{\underline{1,025}}$$

$$G_n = G_0 \times r^n$$

$$G_n = 450,00 \times 1,025^2 = \underline{\underline{472,78 \text{ EUR}}}$$

4b. naloga.

Rešitev:

$$G_0 = 472,78 + 127,22 = 600,00 \text{ EUR}$$

$$p = 3 \% (2,5 + 0,5)$$

$$n = 5 \text{ let}$$

$$m = 12$$

$$G_n = x \text{ EUR}$$

$$p' = \frac{p}{m} = \frac{3 \%}{12} = 0,25 \%$$

$$r' = 1 + \frac{p'}{100} = 1 + \frac{0,25}{100} = \underline{\underline{1,0025}}$$

$$G_n = G_0 \times r'^{(n \cdot m)}$$

$$G_n = 600,00 \times (1,0025)^{(5 \cdot 12)} = \underline{\underline{696,97 \text{ EUR}}}$$

4c. naloga.

Rešitev:

$$G_n = 3 * G_0$$

$$n = 15 \text{ let}$$

$$m = 1$$

$$p = x \%$$

$$G_n = G_0 \times r^n$$

$$r = \sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}}$$

$$r = \sqrt[15]{\frac{3 \times G_0}{G_0}}$$

$$r = \sqrt[15]{3}$$

$$r = \mathbf{1.075989625}$$

$$p = (r - 1) \times 100$$

$$p = (1.075989625 - 1) \times 100 = \mathbf{7.60 \%}$$

ali

$$p = \left(\sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}} - 1 \right) \times 100$$

$$p = \left(\sqrt[15]{\frac{3 \times G_0}{G_0}} - 1 \right) = (\sqrt[15]{3} - 1) \times 100 = \mathbf{7.60 \%}$$

Rešitve 2. skupine: Statistika

1a. naloga.

Tabela 1: Najpogostejša imena dečkov in deklic, rojenih v Sloveniji v letu 2015

		Ime dečka	Število dečkov	Ime deklice	Število deklic	P, %
1		Luka	328	Ema	267	25,87
2		Filip	254	Eva	259	20,03
3		Nik	248	Zala	240	19,56
4		Mark	222	Sara	220	17,51
5		Žan	216	Lara	206	17,03
6		Jakob	206	Nika	205	
7		Jaka	191	Julija	200	
8		Žiga	178	Ana	183	
9		David	168	Lana	176	
10		Anže	164	Mia	174	
		Skupaj			2130	100,00

1b. naloga.

- Strukturni delež imena Žan med desetimi moškimi imeni je 0,099.
- Strukturni delež imena Lara med desetimi ženskimi imeni je 0,097.

1d. naloga.

Tabela 2: Število živorojenih otrok z imenom Marko v letih od 2010 do 2015

Leto rojstva	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Število otrok	67	73	62	56	57	56

Vir: SURS

2a. naloga.

Gostota prebivalcev = 101,8 prebivalca na km²

$$101,8 = \frac{x \text{ prebivalcev}}{20273}$$

$$x = 2063791 \text{ prebivalcev}$$

Odgovor: 1. julija 2016 je Slovenija štela 2.063.791 prebivalcev.

2b. naloga.

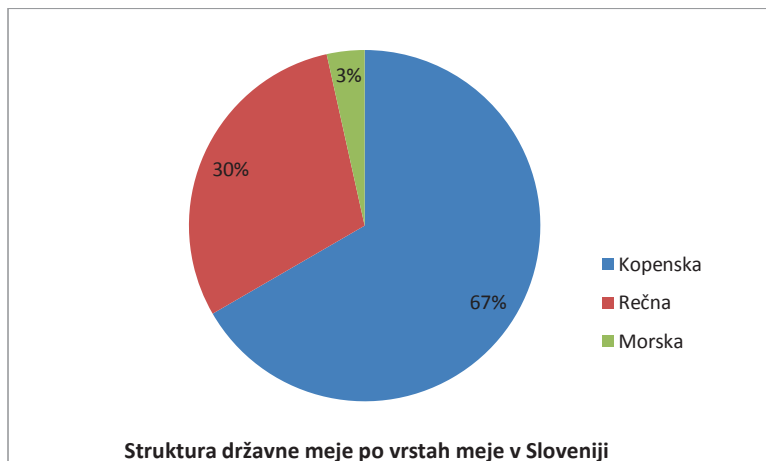
$$K = \frac{\text{št.zdravnikov}}{\text{št.prebivalec}} * 1000 \qquad 2,5 = \frac{x}{2063791} * 1000$$

$$x = 5.159 \text{ zdravnikov}$$

2c. naloga.

Vrsta meje	Dolžina meje v km	P _j %	Ločne stopinje
Kopenska	921	66,64	239,91
Rečna	413	29,89	107,58
Morska	48	3,47	12,51
Skupaj	1382	100,0	360,00

2d. naloga.



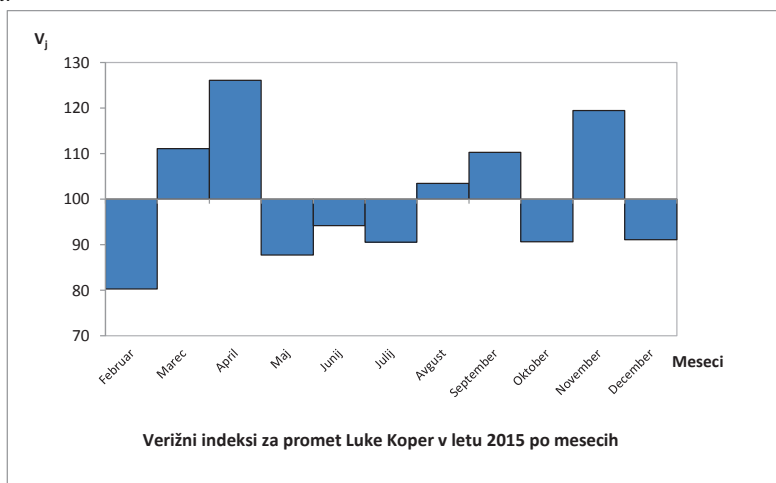
3a. naloga.

Tabela 3: Promet Luke Koper po mesecih v letu 2015

Mesec	V_j	Promet (v tonah)	
Januar	-	1,802,663,07	
Februar	80,26	1,446.817,38	
Marec	111,10	1,607.414,11	
April	126,07	2,026,466,96	
Maj	87,75	1,778.224,76	
Junij	94,22	1,675.443,37	
Julij	90,56	1,517.281,52	
Av gust	103,44	1,569.476,00	
September	110,25	1,730.347,29	
Oktober	90,70	1,569.424,99	
November	119,45	1,874.678,15	
December	91,15	1,708.769,14	

(Vir: <http://pxweb.stat.si/pxweb/Dialog/Saveshow.asp> , 27.11.2016)

3b. naloga.



3c. naloga.

$$S_{\text{junij}} \% = -5,78 \%$$

Odgovor: Junija 2015 je bil promet Luke Koper za 5,78 % manjši kot maja istega leta.

3d. naloga.

$$\text{Promet}_{\text{jan}} = 1,708.769,14 * 1,21454 = 2,075.368,47 \text{ tone}$$

4a. naloga.

$$M = \frac{112,9+126,7+125,9}{3} = \frac{365,5}{3} = 121,83 \text{ točke}$$

Odgovor: Povprečno število točk naše »trojke« po prvi seriji je bilo 121,83.

4b. naloga.

R	1	2	3	4	5	6
Y _i	79	124	128,5	129,5	131,5	135,5

$$R = \frac{N+1}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$$

$$Me = \frac{128,5+129,5}{2} = 129 \text{ metrov}$$

Odgovor: Polovica skokov je bilo krajših od 129 metrov.

4c. naloga.

Rešitev: Mediana.

4d. naloga.

$$x = \frac{261,4 \cdot 111,17}{100} = 290,60 \text{ točke}$$

Odgovor: Zmagovalec Severin Freund je dosegel 290,60 točke.

Rešitve državnega tekmovanja v znanju finančne matematike in statistike

1a. naloga:

V navedenem obdobju se je spreminjalo število upokojencev.

Povprečno pokojnino dobimo kot uteženo povprečje povprečnih mesečnih pokojnin v posameznih letih, v katerem so uteži sorazmerne številu upokojencev:

$$\mu = \frac{602.311 \cdot 588,55 + 608.885 \cdot 586,88 + 612.018 \cdot 571,53}{602.311 + 608.885 + 612.018} = 582,28 \text{ EUR.}$$

Povprečna pokojnina v obdobju 2013-2015 je znašala 582,28 EUR.

1b. naloga:

Povprečna mesečna pokojnina je prvič je padla v letu 2012. Odstotna sprememba je znašala

$$\frac{590,47 - 605,08}{605,08} = -2,41 \%$$

Povprečna mesečna pokojnina je padla za 2,41 %.

Masa pokojnin je v letu 2011 je znašala

$$569.951 \cdot 605,08 \cdot 12 = 4.138.391.412,96 \text{ EUR,}$$

v letu 2012 pa

$$585.408 \cdot 590,47 \cdot 12 = 4.147.990.341,12 \text{ EUR.}$$

Odstotna sprememba mase pokojnin znaša

$$\frac{4.147.990.341,12 - 4.138.391.412,96}{4.138.391.412,96} = 0,23 \%$$

Masa pokojnin se je povišala za 0,23 %.

Opomba: Enak rezultat dobimo, če določimo in primerjamo mesečni masi pokojnin.

1c. naloga:

Povprečna mesečna pokojnina v letu 2011 je znašala $x_{2011} = 605,08$ EUR, v letu 2015 pa $x_{2015} = 571,53$ EUR.

Označimo (negativni) letni padec z d . Veljati mora $x_{2015} = x_{2011} + 4d$, od koder dobimo

$$d = \frac{x_{2015} - x_{2011}}{4} = \frac{571,53 - 605,08}{4} = -8,39 \text{ EUR.}$$

Pokojnine bi vsako leto padle za 8,39 EUR.

Povprečna pokojnina v letu 2014 bi znašala

$$605,08 + 3d = 605,08 - 3 \cdot 8,39 = 579,91 \text{ EUR.}$$

1d. naloga:

Povprečna mesečna pokojnina v letu 2011 je znašala $x_{2011} = 605,08$ EUR, v letu 2015 pa $x_{2015} = 571,53$ EUR.

Označimo letni faktor rasti z g . Veljati mora $x_{2015} = x_{2011} \cdot g^4$, od koder dobimo

$$g^4 = \frac{x_{2015}}{x_{2011}} \Rightarrow g = \sqrt[4]{\frac{x_{2015}}{x_{2011}}} = \sqrt[4]{\frac{571,53}{605,08}} = 0,9858.$$

(Negativna) letna stopnja rasti je $0,9858 - 1 = -1,42\%$.

Povprečna pokojnina v letu 2014 bi znašala

$$605,08 \cdot g^3 = 605,08 \cdot 0,9858^3 = 579,67 \text{ EUR.}$$

1e. naloga:

Masa pokojnin v letu 2015 je znašala $612.018 \cdot 571,53 \cdot 12 = 4.197.439.770,48$ EUR in je predstavljala 10,88 % BDP.

BDP je zato znašal

$$\frac{4.197.439.770,48}{0,1088} = 38,579 \text{ milijard EUR.}$$

2a. naloga:

Glavnica kredita je $G = 500.000$ EUR.

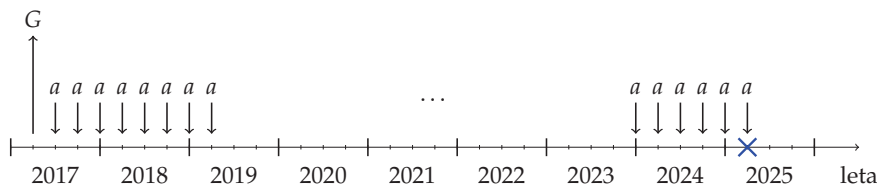
Dolg odplačamo z 32 četrletnimi obroki v višini a .

Prvi obrok plačamo 1 četrletje po najemu kredita, zadnjega 32 četrletij po najemu.

Letna obrestna mera je $p\% = 6\%$.

Relativni četrletni obrestni faktor je $r = 1 + \frac{p}{100 \cdot 4} = 1 + \frac{6}{100 \cdot 4} = 1,015$.

Denarne tokove po četrletjih prikazuje spodnja shema.



Redukcijski termin je trenutek zadnjega obroka.

Z načelom ekvivalence glavnice dobimo:

$$\begin{aligned} Gr^{32} &= ar^{31} + ar^{30} + ar^{29} + \dots + ar^2 + ar + a = \\ &= a(r^{31} + r^{30} + r^{29} + \dots + r^2 + r + 1) \end{aligned}$$

Seštejemo geometrijsko vrsto (količnik r):

$$Gr^{32} = a \frac{r^{32} - 1}{r - 1}.$$

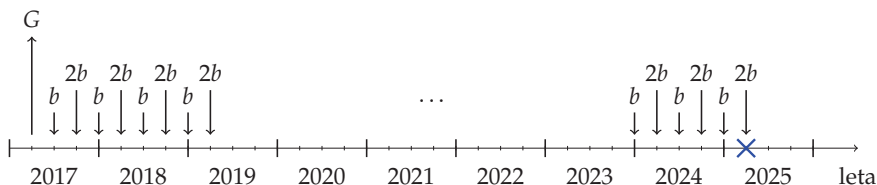
Rešimo enačbo za neznanko a :

$$a = \frac{Gr^{32}(r - 1)}{r^{32} - 1} = \frac{500.000 \cdot 1,015^{32}(1,015 - 1)}{1,015^{32} - 1} = 19.788,55 \text{ EUR.}$$

Višina obroka je 19.788,55 EUR.

2b. naloga:

Popravimo shemo denarnih tokov, tako da januarski in julijski obroki znašajo b , aprilski in oktobrski pa $2b$.



Redukcijski termin je trenutek zadnjega obroka.

Z načelom ekvivalence glavnice dobimo:

$$Gr^{32} = br^{31} + 2br^{30} + br^{29} + 2br^{28} + \dots + br^3 + 2br^2 + br + 2b.$$

Združimo člene s faktorjem b in člene s faktorjem $2b$ ter izpostavimo skupne faktorje:

$$Gr^{32} = br(r^{30} + r^{28} + \dots + r^2 + 1) + 2b(r^{30} + r^{28} + \dots + r^2 + 1).$$

Seštejemo geometrijski vrsti (količnik r^2):

$$Gr^{32} = br \frac{r^{32} - 1}{r^2 - 1} + 2b \frac{r^{32} - 1}{r^2 - 1}.$$

Še nadalje izpostavimo

$$Gr^{32} = b \frac{r^{32} - 1}{r^2 - 1} (r + 2).$$

Rešimo enačbo za neznanko b :

$$b = \frac{Gr^{32}(r^2 - 1)}{(r^{32} - 1)(r + 2)} = \frac{500.000 \cdot 1,015^{32}(1,015^2 - 1)}{(1,015^{32} - 1)(1,015 + 2)} = 13.225,18 \text{ EUR.}$$

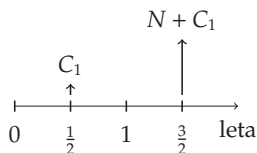
Višini obrokov sta 13.225,18 EUR (januar, julij) in 26.450,36 EUR (april, oktober).

3a. naloga:

Nominalna vrednost obveznice je $N = 100$ EUR.

Letni kupon je enak $C_1 = 0,0355 \cdot 100 = 3,55$ EUR.

Ceno obveznice dobimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov.



$$P_1 = C_1 \cdot D(0, \frac{1}{2}) + (N + C_1) \cdot D(0, \frac{3}{2})$$

$$P_1 = \frac{C_1}{(1 + R(0, \frac{1}{2}))^{\frac{1}{2}}} + \frac{N + C_1}{(1 + R(0, \frac{3}{2}))^{\frac{3}{2}}}$$

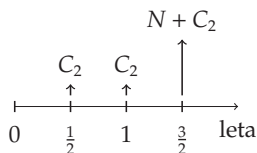
$$P_1 = \frac{3,55}{1,015^{\frac{1}{2}}} + \frac{103,55}{1,03^{\frac{3}{2}}}$$

$$P_1 = 102,58 \text{ EUR}$$

3b. naloga:

Nominalna vrednost obveznice je $N = 100$ EUR, cena obveznice je $P_2 = 99,35$ EUR.

Polletni kupon je enak C_2 .



S formulo za vrednotenje obveznic dobimo zvezo:

$$P_2 = C_2 \cdot D(0, \frac{1}{2}) + C_2 \cdot D(0, 1) + (N + C_2) \cdot D(0, \frac{3}{2})$$

$$P_2 = C_2 \left(D(0, \frac{1}{2}) + D(0, 1) + D(0, \frac{3}{2}) \right) + N \cdot D(0, \frac{3}{2})$$

$$C_2 = \frac{P_2 - N \cdot D(0, \frac{3}{2})}{D(0, \frac{1}{2}) + D(0, 1) + D(0, \frac{3}{2})}$$

$$C_2 = \frac{99,35 - 100 \cdot 1,03^{-\frac{3}{2}}}{1,015^{-\frac{1}{2}} + 1,023^{-1} + 1,03^{-\frac{3}{2}}}$$

$$C_2 = 1,26 \text{ EUR}$$

Višino kupona C_2 in kuponsko obrestno mero c_2 povezuje enačba

$$C_2 = N \cdot \Delta \cdot c_2,$$

kjer je $\Delta = \frac{1}{2}$. Dobimo kuponsko obrestno mero $c_2 = \frac{C_2}{N \cdot \Delta} = \frac{1,26}{100 \cdot \frac{1}{2}} = 2,52 \%$.

3c. naloga:

Cena obveznice iz a) z letnimi kuponi je

$$\tilde{P}_1 = (N + C_1)D(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}) = \frac{N + C_1}{1 + R} = \frac{103,55}{1 + R}.$$

Cena obveznice iz b) s polletnimi kuponi je

$$\tilde{P}_2 = C_2 \cdot D(\tfrac{1}{2}, 1) + (N + C_2)D(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}) = \frac{1,26}{1,014^{\frac{1}{2}}} + \frac{101,26}{1 + R}.$$

Iz primerjave cen dobimo:

$$\begin{aligned}\frac{103,55}{1 + R} &= \frac{1,26}{1,014^{\frac{1}{2}}} + \frac{101,26}{1 + R} + 1 \\ \frac{103,55 - 101,26}{1 + R} &= \frac{1,26 + 1,014^{\frac{1}{2}}}{1,014^{\frac{1}{2}}} \\ 1 + R &= \frac{1,014^{\frac{1}{2}}(103,55 - 101,26)}{1,26 + 1,014^{\frac{1}{2}}} \\ R &= \frac{1,014^{\frac{1}{2}}(103,55 - 101,26)}{1,26 + 1,014^{\frac{1}{2}}} - 1 \\ R &= 1,72 \%\end{aligned}$$

3d. naloga:

Cena obveznice z letnimi kuponi v času 0,5 je

$$\tilde{P}_1 = \frac{103,55}{1 + 0,0172} = 101,80 \text{ EUR}.$$

Investitor je obveznico v času 0 kupil za 102,58 EUR, v času 0,5 prejel kupon v višini 3,55 EUR in prodal obveznico za 101,80 EUR.

Ustvarjena (polletna) donosnost znaša

$$\frac{(3,55 + 101,8) - 102,58}{102,58} = 2,70 \%.$$

Opomba: Enak rezultat dobimo, če investitor proda obveznico tik red izplačilom kupona v trenutku 0,5, saj še neizplačani kupon poviša ceno obveznice.

4a. naloga:

Cena delnice je $S_0 = 20$ EUR.

Dividenda $d = 3$ EUR bo izplačana v trenutku $t' = \frac{1}{3}$ leta.

Obrestna mera za vsa dospetja je $R = 0,031$.

Ročnost terminskega posla je $T = \frac{1}{2}$ leta.

Sedanja vrednost dividende je $I(0, \frac{1}{2}) = d \cdot D(0, \frac{1}{3}) = 3(1 + 0,031)^{-\frac{1}{3}} = 2,9696$ EUR.

Arbitražna ni mogoča pri izračitveni ceni

$$K = (S_0 - I(0, T))(1 + R)^T = (20 - 2,9696)(1 + 0,031)^{\frac{1}{2}} = 17,29 \text{ EUR}.$$

Druga možnost: Arbitraža ni mogoča pri izročitveni ceni

$$K = S_0(1 + R)^T - d(1 + R)^{T-t'} = 20(1 + 0,031)^{\frac{1}{2}} - 3(1 + 0,031)^{\frac{1}{2}} = 17,29 \text{ EUR.}$$

4b. naloga:

Nova dividenda $\tilde{d} = 5$ EUR bo še vedno izplačana v trenutku $t' = \frac{1}{3}$ leta.

Sedanja vrednost dividende je $I(0, \frac{1}{2}) = \tilde{d} \cdot D(0, \frac{1}{3}) = 5(1 + 0,031)^{-\frac{1}{3}} = 4,9494$ EUR.

Arbitraža ni mogoča pri izročitveni ceni

$$\tilde{K} = (S_0 - I(0, T))(1 + R)^T = (20 - 4,9494)(1 + 0,031)^{\frac{1}{2}} = 15,28 \text{ EUR.}$$

Ker je

$$\tilde{K} - K = -2,01 \text{ EUR,}$$

se mora izročitvena cena v terminskem poslu znižati za 2,01 EUR.

Druga možnost: Arbitraža ni mogoča pri izročitveni ceni

$$\tilde{K} = S_0(1 + R)^T - \tilde{d}(1 + R)^{T-t'} = 20(1 + 0,031)^{\frac{1}{2}} - 5(1 + 0,031)^{\frac{1}{2}} = 15,28 \text{ EUR.}$$

4c. naloga:

Banka ponuja termske posle s previsoko izročitveno ceno, zato danes kupimo delnico ter prodamo termiski posel (sklenemo kratko pozicijo).

Čez pol leta bomo zato delnico banki prodali za $K = 17,29$ EUR.

S transakcijami na bančnem računu poskrbimo, da bodo neto denarni tokovi v vseh trenutkih nenegativni.

Možna arbitražna strategija je naslednja:

- Čas $t = 0$ (danes).
 - Kupimo delnico,
 - banki prodamo termiski posel z izročitveno ceno $K = 17,29$ EUR,
 - sposodimo si znesek $K(1 + R)^{-T} = 17,29 \cdot 1,031^{-1/2} = 17,03$ EUR do časa $T = \frac{1}{2}$,
 - sposodimo si znesek $\tilde{d}(1 + R)^{-t'} = 5 \cdot 1,031^{-1/3} = 4,95$ EUR do časa $t' = \frac{1}{3}$.

Neto denarni tok znaša $-20 + 0 + 17,03 + 4,95 = 1,98$ EUR.

- Čas $t = t' = \frac{1}{3}$ (izplačilo dividende).
 - Prejmemo dividendo,
 - vrnemo znesek 4,95 EUR z nastalimi obrestmi.

Neto denarni tok znaša $5 - 4,95 \cdot 1,031^{1/3} = 0$ EUR.

- Čas $t = T = \frac{1}{2}$ (ročnost terminskega posla).
 - Prodamo delnico v skladu s terminskim poslom.
 - vrnemo znesek 17,03 EUR z nastalimi obrestmi.

Neto denarni tok znaša $17,29 - 17,03 \cdot 1,031^{1/2} = 0$ EUR.

Arbitražni zaslužek smo ustvarili v času 0.