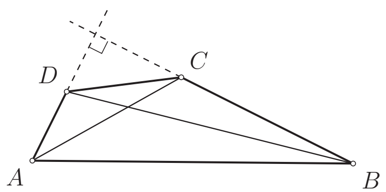
Tekmovanja

Matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje

Naloge za 1. letnik

A1. Nosilki stranic AD in BC konveksnega štirikotnika $ABCD$ se sekata pod pravim kotom (glej sliko). Velja še $|CD| = 1$, $|AC| = 2$ in $|BD| = 3$. Koliko je $|AB|$?



(**A**) $2\sqrt{3}$ (**B**) $3\sqrt{2}$ (**C**) 4 (**D**) $4\sqrt{3}$ (**E**) 6

A2. Letalska družba potniku za prtljago ne zaračuna dodatnih stroškov, če masa prtljage ne preseže določene dovoljene mase. Vsak dodaten kilogram prtljage pa mora potnik doplačati. Gospod in gospa Kotnik imata skupno prtljago, zato se jima ne bi zaračunalo dodatnih stroškov, če masa skupne prtljage ne bi presegla dvakratnika določene dovoljene mase. Njuna skupna prtljaga tehta 60 kg, doplačati pa sta morala 11 evrov. Prtljaga gospoda Novaka, ki potuje sam, prav tako tehta 60 kg. Toda on je moral za prtljago doplačati 33 evrov. Največ koliko kilogramov prtljage lahko ima en potnik, da mu zanjo ni treba nič doplačati?

(**A**) 11 (**B**) 18 (**C**) 20 (**D**) 24 (**E**) 39

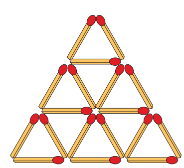
A3. Kenguruju Pitagori so všeč le tista naravna števila, ki so deljiva s 4 in imajo vsoto števk enako 3 ter imajo v zapisu natanko 5 števk enakih 0. Koliko naravnih števil je všeč kenguruju Pitagori?

(**A**) 15 (**B**) 16 (**C**) 19 (**D**) 20 (**E**) 25

B1. Poišči vsa praštevila p, q, r in s, ki zadoščajo enačbama $p + q = r$ in $q + r = s^2$.

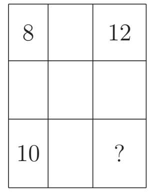
B2. Kot med nosilkama diagonal štirikotnika $ABCD$ je velik $60°$. Vsako oglišče štirikotnika prezrcalimo čez nosilko diagonale, ki poteka skozi njemu sosednji oglišči. Dokaži, da zrcalne slike oglišč ležijo na isti premici.

B3. Iz 18 vžigalic sestavimo mrežo (glej sliko). Najmanj koliko vžigalic moramo odstraniti, da preostale vžigalice ne bodo tvorile nobenega trikotnika?



Naloge za 2. letnik

A1. Polona je razdelila pavokotnik na 9 manjših pravokotnikov in na tri izmed štirih vogalnih pravokotnikov zapisala njihove ploščine (glej sliko). Koliko je ploščina četrtega vogalnega pravokotnika?



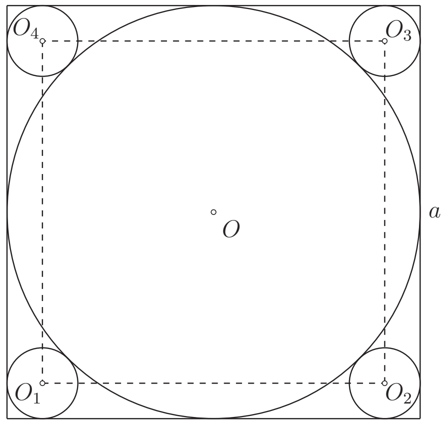
(A) 9 **(B)** 13.5 **(C)** 14 **(D)** 15 **(E)** 16

A2. Dano je naravno število $x > 1$. Kako se potenca $x^{(x^{x+1})}$ izrazi s spremenljivko y, če je $x^x = y$?

(A) y^2 **(B)** y^y **(C)** y^{2y} **(D)** $y^{(y^2)}$ **(E)** $y^{(y^y)}$

A3. V kvadrat s stranico dolžine a je včrtana krožnica s središčem v O. Štiri manjše krožnice s središči O_1, O_2, O_3 in O_4 se dotikajo večje krožnice in po dveh stranic kvadrata (glej sliko). Koliko je ploščina kvadrata $O_1O_2O_3O_4$?

(A) $3a^2(3-2\sqrt{2})$ **(B)** $4a^2(3-2\sqrt{2})$
(C) $a^2(3-\sqrt{2})$ **(D)** $a^2(2-\sqrt{2})$
(E) $3a^2(2-\sqrt{2})$

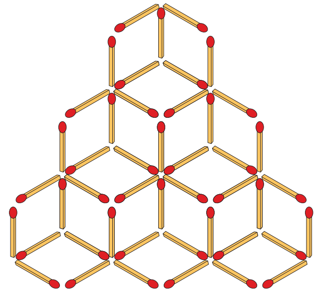


B1. Naj bo n naravno število. Poišči vsa realna števila x, ki rešijo enačbo

$$2^n(-x)^n + (-1)^{3n+1}2^{n+1}x^{n-1}(2x+1) - (-2x)^{n+1} = 0.$$

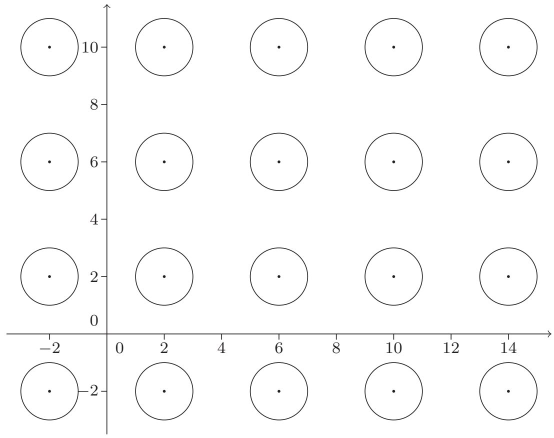
B2. Naj bo M točka na stranici BC pravokotnega trikotnika ABC s pravim kotom pri A. Razpolovišče daljice AM označimo s P. Naj bosta P_B in P_C zrcalni sliki točke P preko stranic AC in AB, B' in C' pa zrcalni sliki točk B in C preko točke P. Denimo, da so točke B', C', P_B in P_C kolinearne. Dokaži, da je tedaj M razpolovišče stranice BC.

B3. Iz 45 vžigalic sestavimo mrežo (glej sliko). Najmanj koliko vžigalic moramo odstraniti, da preostale vžigalice ne bodo tvorile nobenega pravilnega šestkotnika?



Naloge za 3. letnik

A1. V koordinatnem sistemu je narisana neskončna mreža krožnic s polmeri 1. Ena izmed krožnic ima središče v točki $(2,2)$, razdalje med središči sosednjih krožnic pa so enake 4 (glej sliko). Za vsako točko (x,y), ki leži na neki izmed krožnic, izračunamo vsoto $x+y$. Katere izmed navedenih vrednosti ne dobimo pri izračunu teh vsot?

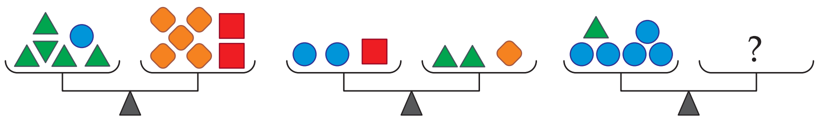


(A) 5 **(B)** 6 **(C)** 7 **(D)** 8 **(E)** 9

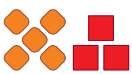
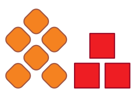
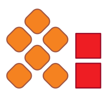
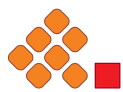
A2. Dolžine stranic pravokotnega trikotnika ABC s pravim kotom pri A so naravna števila. Dolžina stranice AB je 101. Koliko je obseg trikotnika ABC?

(A) 306 **(B)** 10201 **(C)** 10202 **(D)** 10302 **(E)** 10303

A3. Prvi dve tehtnici na sliki sta uravnoteženi.



Kaj moramo postaviti na desno stran tretje tehtnice na sliki, da bo tudi ta uravnotežena?

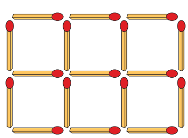
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

B1. Poišči vsa realna števila x, ki rešijo enačbo

$$\log_2(\log_2(7x-6))+1=\log_2(\log_2(3x-2))+\log_2 3.$$

B2. Diagonali tetivnega štirikotnika $ABCD$ se sekata pod kotom, ki ni velik 60°. Vsako oglišče štirikotnika prezrcalimo čez nosilko diagonale, ki poteka skozi njemu sosednji oglišči. Dokaži, da tudi zrcalne slike oglišč tvorijo tetivni štirikotnik.

B3. Iz 17 vžigalic sestavimo mrežo (glej sliko). Najmanj koliko vžigalic moramo odstraniti, da preostale vžigalice ne bodo tvorile nobenega kvadrata?



Naloge za 4. letnik

A1. Koliko je takih 6-mestnih števil, ki se ne začnejo z 0 in vsebujejo število 2017 kot strnjen podniz? Npr. število 820178 vsebuje strnjen podniz 2017, število 820817 pa ne.

(**A**) 100 (**B**) 190 (**C**) 200 (**D**) 280 (**E**) 300

A2. Prvo število zaporedja šestih števil je enako 4, zadnje pa 47. Vsako število od vključno tretjega naprej je enako vsoti prejšnjih dveh števil. Naj bo S vsota vseh šestih števil zaporedja. Tedaj S leži na intervalu med

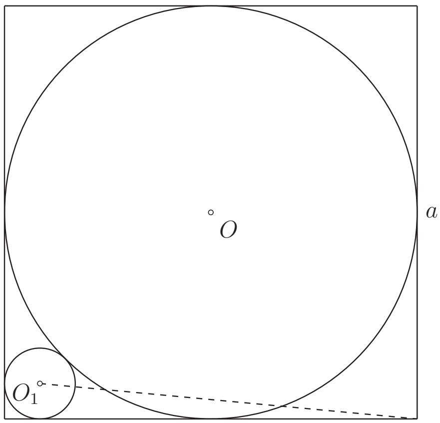
(**A**) 51 in 90 (**B**) 91 in 100 (**C**) 101 in 110 (**D**) 111 in 120 (**E**) 121 in 160

A3. V kvadrat s stranico dolžine a je včrtana krožnica s središčem v O. Manjša krožnica s središčem v O_1 se dotika večje krožnice in dveh stranic kvadrata (glej sliko). Koliko je razdalja med O_1 in ogliščem kvadrata, ki ne leži na premici OO_1?

(**A**) $\frac{3a}{4}\sqrt{13-8\sqrt{2}}$ (**B**) $\frac{a\sqrt{2}}{3}\sqrt{13-8\sqrt{2}}$

(**C**) $\frac{a\sqrt{2}}{2}\sqrt{13-8\sqrt{2}}$ (**D**) $\frac{a}{2}\sqrt{9-4\sqrt{2}}$

(**E**) $\frac{a\sqrt{2}}{3}\sqrt{9-4\sqrt{2}}$



B1. Določi vse vrednosti, ki jih zavzame izraz $A = n \cdot \left\lfloor \frac{2017}{n} \right\rfloor$, ko n preteče vsa naravna števila. Pri tem $\lfloor x \rfloor$ označuje največje celo število, ki ni večje od x.

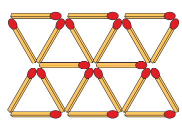
B2. Za točko P znotraj trikotnika ABC pravimo, da je *izjemna*, če velja naslednji pogoj:

Če so A', B' in C' zaporedoma presečišča premic AP, BP in CP s stranicami BC, AC in AB, lahko daljice AA', BB' in CC' vzporedno premaknemo tako, da oblikujemo trikotnik, katerega dolžine stranic so $|AA'|$, $|BB'|$ in $|CC'|$.

(a) Dokaži, da je težišče trikotnika izjemna točka.

(b) Dokaži trditev "Edina izjemna točka znotraj trikotnika je težišče trikotnika."

B3. Iz 20 vžigalic sestavimo mrežo (glej sliko). Najmanj koliko vžigalic moramo odstraniti, da preostale vžigalice ne bodo tvorile nobenega trikotnika?



55. fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije – regijsko tekmovanje

Skupina I

1. Na dolgem ravnem odseku dvotirne železniške proge miruje na vsakem tiru en vlak, prvi je tovorni, drugi potniški. Tovorni vlak je dolg 330 m, potniški pa 190 m. Vlaka začneta voziti istočasno drug proti drugemu, tovorni s pospeškom 0,15 m/s^2 in potniški s pospeškom 0,25 m/s^2. Začetna razdalja med prednjima deloma lokomotiv je 500 m, lokomotiva vsakega od vlakov je na tistem krajišču vlaka, ki je bliže drugemu vlaku. Na opazovanem delu proge velja omejitev hitrosti 54 km/h. Oba vlaka pospešujeta do največje dovoljene hitrosti, nato vozita enakomerno z največjo dovoljeno hitrostjo.

   a) Po kolikšnem času od začetka gibanja se prednja dela lokomotiv vlakov srečata?

   b) Kolikšna je razdalja med prednjima deloma lokomotiv v trenutku, ko začneta oba vlaka voziti enakomerno?

2. Električni avtomobil Renault ZOE v 2,8 s enakomerno pospeši iz mirovanja do 40 km/h, ko doseže maksimalno moč. Od tam naprej pospešuje s konstantno močjo, enako moči, ki jo doseže po 2,8 s. Masa vozila je 1500 kg, zračni upor zanemarimo.

   a) Kolikšen je pospešek avtomobila in kolikšna sila, ki ga pospešuje?

   b) Kolikšna je trenutna moč elektromotorja pri 40 km/h? (*Namig*: Moč je premo sorazmerna s hitrostjo.) Nariši (prostoročno) graf moči v odvisnosti od časa za $0 \leq t \leq 5$ s.

   c) Po kolikšnem času od starta doseže avtomobil hitrost 100 km/h?

   d) Odpravimo se na izlet iz Maribora v Koper. Mesti sta po avtocesti oddaljeni 232 km. Povprečna poraba energije pri vožnji je 15 kWh/100 km, na pot se podamo s polnim 22 kWh akumulatorjem. Najmanj za koliko časa se moramo ustaviti na eni izmed avtocestnih hitrih polnilnic z močjo 40 kW, da nam ravno še uspe priti do cilja?

3. Na eno krajišče vrvice z gostoto 1,4 kg/L in prečnim presekom 0,78 mm^2 je privezan balon, napolnjen s helijem, drugo krajišče pa prosto visi. Prostornina balona je 12 L, prazen pa tehta 10 g. Balon miruje nad gladino mirnega jezera. Gostota zraka je 1,21 g/L, gostota helija pa 0,17 g/L.

   a) Kolikšna naj bo dolžina vrvice, da balon in vrvica mirujeta v zraku?

   b) Kolikšna dolžina vrvice je pod vodo, ko je balon v ravnovesju, če je celotna dolžina vrvice 3,0 m?

   c) Vrvico pri vprašanju b) prerežemo tik nad gladino. Kako se balon z vrvico giblje takoj po rezu? (Če ugotoviš, da se giblje enakomerno, podaj smer in velikost hitrosti, če ugotoviš, da se giblje pospešeno, pa smer in velikost pospeška.)

Skupina II

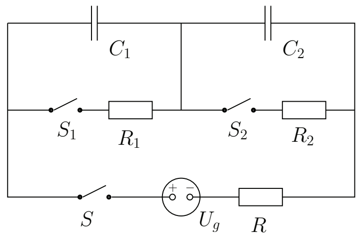
1. Polna plinska jeklenka s prostornino 20 L vsebuje 10 kg utekočinjene mešanice propan-butana s specifično sežigno toploto 48 MJ/kg in kilomolsko maso 50 kg/kmol. Jeklenko priključimo na plinski gorilnik.

   a) Koliko energije, ki bi jo lahko porabili za segrevanje, ostane v jeklenki, potem ko plamen ugasne, če je temperatura okolice $-10°$ C in tlak 1 bar? Plamen gori, če je tlak v jeklenki vsaj 0,2 bara večji od zunanjega.

b) Izkoristek želimo povečati, zato del energije žrtvujemo za segrevanje jeklenke. Skupna toplotna kapaciteta jeklenke in okoliškega zraka je 8,0 kJ/K, toplotno kapaciteto plina pa lahko zanemariš. Koliko dodatne koristne toplote pridobimo, če jeklenko segrejemo za 10 K? (Dovedena toplota, potrebna za segretje telesa s toplotno kapaciteto C za temperaturno razliko ΔT, je $Q = C\Delta T$.)

c) Na kolikšno temperaturo moramo segreti jeklenko, da pridobimo največ dodatne koristne toplote? Nalogo reši tako, da računaš razliko med dodatno toploto in toploto, potrebno za segrevanje jeklenke, v korakih po 10 K (vse dokler ne najdeš optimalne temperature).

2. Vezje na sliki priključimo na baterijo z gonilno napetostjo 9 V in zanemarljivim notranjim uporom. Vrednosti elementov na sliki so $R = 9\ \Omega$, $R_1 = 15\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $C_1 = C_2 = 10\ \mu$F. Vsa tri stikala so sprva razklenjena.



a) Najprej sklenemo samo stikalo S. Kolikšni sta napetosti na kondenzatorjih C_1 in C_2 po dovolj dolgem času?

b) Nato sklenemo še stikalo S_2. (Stikalo S ostane sklenjeno, stikalo S_1 ni sklenjeno.) Kolikšni sta sedaj končni napetosti na obeh kondenzatorjih?

c) Na koncu sklenemo še stikalo S_1, tako da so vsa tri stikala sklenjena. Kolikšni sta sedaj končni napetosti na kondenzatorjih?

3. O žarnici vemo: ko je na žarnici napetost 3 V, teče skozi žarnico tok 80 mA. Žarnico priključimo na iztrošeno baterijo, ki ima gonilno napetost 3 V in notranji upor 5 Ω. Pri vprašanjih a) in b) privzemi, da je upor žarnice neodvisen od temperature.

a) Kolikšna je moč žarnice, ki ustreza zapisanima podatkoma o žarnici?

b) S kolikšno močjo sveti, ko jo priključimo na iztrošeno baterijo?

c) Kolikšna bi morala biti gonilna napetost iztrošene baterije z notranjim uporom 5 Ω, da bi žarnica svetila z močjo pri a)?

d) V resnici se upor žarilne nitke v žarnici spreminja s temperaturo. Iz predpostavke, da je upor žarnice sorazmeren z absolutno temperaturo žarilne nitke, in predpostavke, da je moč žarnice, ki oddaja energijo s sevanjem, sorazmerna s četrto potenco absolutne temperature žarilne nitke, dobimo med uporom R in močjo P enačbo

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^4 = \frac{P}{P_0}\,,$$

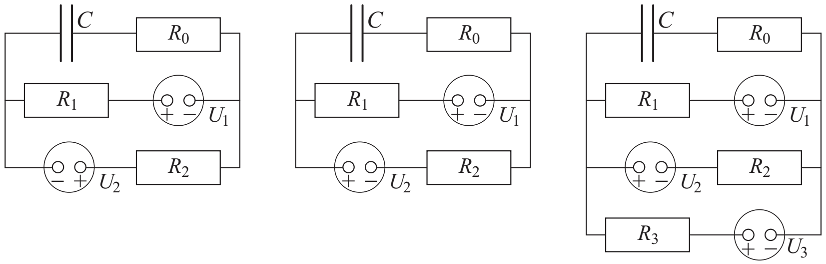
kjer je P_0 moč žarnice in R_0 upor žarnice, ko sveti z močjo, izračunano pri a).

i) Iz rezultata, s kolikšno močjo sveti žarnica pri vprašanju b) in podane enačbe med uporom in močjo, izračunaj upor žarnice, ko je vezana na iztrošeno baterijo.

ii) Uporabi to vrednost upora in na novo izračunaj moč, s katero sveti žarnica.

Skupina III

1. Janez ima električne elemente: upornike z enakimi upori $R_0 = R_1 = R_2 = R_3 = 150\,\Omega$, kondenzator s kapaciteto $C = 1\,\mathrm{nF}$ in vire z gonilnimi napetostmi $U_1 = 15\,\mathrm{V}$ in $U_2 = U_3 = 12\,\mathrm{V}$ in zanemarljivimi notranjimi upori. Najprej sestavi električno vezje na levi shemi.



   a) Kolikšen naboj se po dolgem času nabere na kondenzatorju?

   b) Nato obrne polariteto vira 2 in dobi vezje na srednji shemi. Kolikšen naboj se po dolgem času nabere na kondenzatorju?

   c) Nazadnje vezju iz vprašanja b) doda še upornik R_3 in vir 3, da dobi shemo na desni. Kolikšen naboj se po dolgem času nabere na kondenzatorju?

2. Zaprt akvarij z dimenzijami 80 cm $\times$ 50 cm $\times$ 40 cm je poln umazane vode z absorpcijskim koeficientom $k = 0{,}8\ \mathrm{m}^{-1}$. Vsaka od šestih sten akvarija je debela 6 mm in ima toplotno prevodnost 0,03 $\mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$, voda v akvariju je dobro premešana.

   Pojasnilo: Gostota svetlobnega toka v absorptivnem sredstvu pojema eksponentno z razdaljo x kot

$$j(x) = j(0)\,\mathrm{e}^{-kx}\,.$$

   a) Na stransko ploskev akvarija (80 cm $\times$ 40 cm) pravokotno vpada sončna svetloba z gostoto svetlobnega toka 400 $\mathrm{Wm^{-2}}$. Na razdalji 50 cm se del svetlobnega toka absorbira, drugi del pa skozi nasprotno stransko ploskev zapusti akvarij. Odboje svetlobe na prehodu v akvarij in iz njega zanemari. Koliko energije se vsako sekundo absorbira v umazani vodi?

   b) Za koliko je po dolgem času temperatura vode v akvariju višja od okoliške temperature?

   c) Ko skrbnik akvarija zamenja umazano vodo s čisto, opazi, da je ob enakih svetlobnih pogojih temperatura v akvariju eno stopinjo nad zunanjo. Izračunaj absorpcijski koeficient čiste vode.

3. Na eno krajišče vrvice z gostoto 1,4 kg/L, prečnim presekom 0,78 mm^2 in dolžino 3,0 m je privezan balon, napolnjen s helijem. Prostornina balona je 12 L, prazen pa tehta 10 g. Balon miruje nad gladino mirnega jezera, tako da je drugo krajišče v vodi. Temperatura je 16 °C, tlak v balonu in okolici je 1 bar, kilomolska masa zraka je 29 kg/kmol, helija pa 4 kg/kmol.

   a) Kolikšna dolžina vrvice je pod vodo, ko je balon v ravnovesju?

   b) S kolikšnim nihajnim časom zaniha, če ga malo izmaknemo iz ravnovesne lege?

Tekmovanje iz znanja naravoslovja – šolsko tekmovanje

4. in 5. razred

1. Kaj bi pri poskusu SOLINE lahko uporabil namesto papirnate brisače?
Napiši 2 predloga.

(A) ______________________ **(B)** ______________________

2. Zakaj ne moreš presejati mokre mivke? Obkroži pravilni odgovor.

(A) Ker je mokra mivka pretežka.

(B) Ker mokra mivka ni dovolj čista.

(C) Ker voda zlepi zrna mivke med seboj.

(D) Ker se zrna mivke preveč povečajo.

3. V kateri od naštetih zmesi bi lahko ločil sestavini na podoben način, kot si ločeval mivko in sol?
Obkroži DA (v razpredelnico vpiši D), če bi ju lahko, in NE (v razpredelnico vpiši N), če ju tako ne bi mogel ločiti.

3.a	moka in sol	DA	NE
3.b	sol in sladkor	DA	NE
3.c	sladkor in mivka	DA	NE
3.d	mivka in koruzni zdrob	DA	NE
3.e	sol in žagovina	DA	NE

4. V čašo vode streseš žlico soli in pomešaš. Kaj se zgodi s soljo v vodi? Obkroži pravilni odgovor.

(A) Sol se utekočini.

(B) Sol se filtrira.

(C) Sol kristalizira.

(D) Sol se raztopi.

(E) Sol se stali.

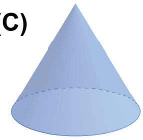
(F) Sol izhlapi.

5. Pri poskusu SOLINE si opazoval kristale soli. Kakšne oblike so? Obkroži pravilni odgovor.

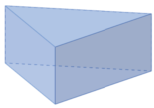
(A)

(B)

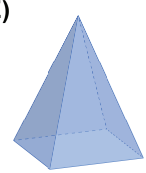
(C)



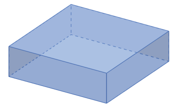
(D)



(E)



(F)



6. Jana sedi na klopi v parku, potem vstane in steče. Kako se pri teku spremenijo količine, s katerimi opišemo delovanje njenega telesa glede na sedenje? Obkroži pravilne odgovore.

		SE ZMANJŠA	SE NE SPREMENI	SE POVEČA
6.a	frekvenca utripanja srca	**A**	**B**	**C**
6.b	pretok krvi po žilah	**A**	**B**	**C**
6.c	frekvenca dihanja	**A**	**B**	**C**
6.d	minutni volumen srca	**A**	**B**	**C**
6.e	utripni volumen srca	**A**	**B**	**C**
6.f	potreba po kisiku	**A**	**B**	**C**
6.g	količina izdihanega ogljikovega dioksida v minuti	**A**	**B**	**C**

7. Kolikšna približno je frekvenca utripanja srca zdravega odraslega človeka v mirovanju? Obkroži pravilni odgovor.

(A) 1 Hz **(B)** 15 Hz **(C)** 70 Hz. **(D)** 300 Hz. **(E)** 2000 Hz.

8. Koliko litrov krvi ima zdrav odrasel človek? Napiši odgovor. ____________

9. Ganga je slonica v ljubljanskem živalskem vrtu. Tehta 3,3 tone, njeno srce ima 17 kg, utripni volumen njenega srca je 8 litrov. Ko Ganga stoji, je frekvenca utripanja njenega srca 30 utripov na minuto.

9.a Kolikšna je frekvenca utripanja Ganginega srca?

9.b Koliko litrov krvi prečrpa Gangino srce v 1 minuti?

9.c Izračunaj, v kolikšnem času Gangino srce prečrpa 1000 litrov (1 m^3) krvi. Odgovor v minutah in sekundah napiši na črto.

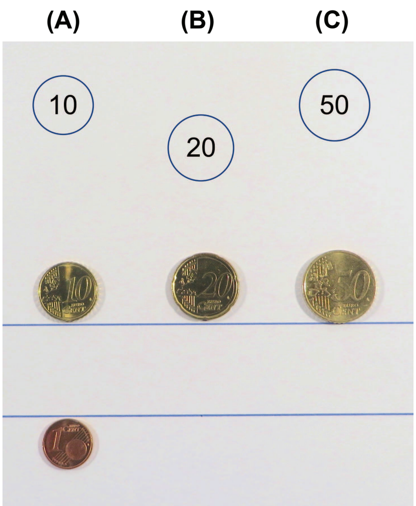
10. Marko opravlja poskus s trki kovancev. Frca kovanec za 1 cent. Slika kaže središčni trk kovanca za 1 cent s tremi različnimi kovanci. V katerem primeru je imel kovanec za 1 cent PRED TRKOM največjo hitrost? Obkroži pravilni odgovor.

(A) V primeru A.

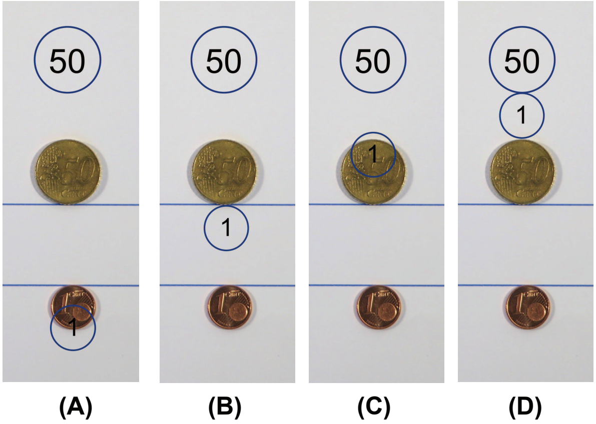
(B) V primeru B.

(C) V primeru C.

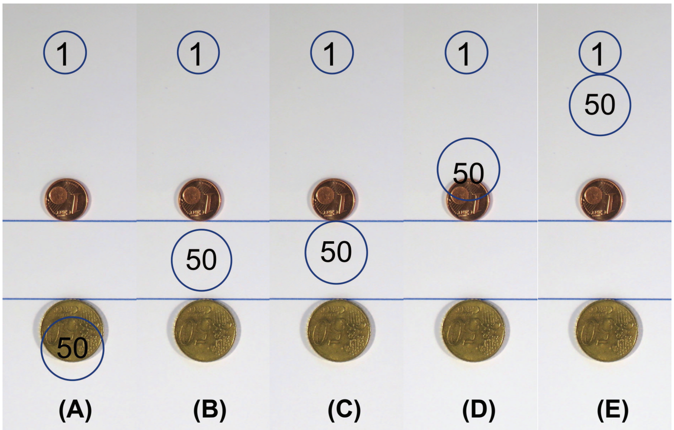
(D) V vseh primerih je imel enako hitrost.



11. Slika kaže središčni trk kovanca za 1 cent s kovancem za 50 centov. Katera slika pravilno kaže lego kovancev PO TRKU? Obkroži pravilni odgovor.

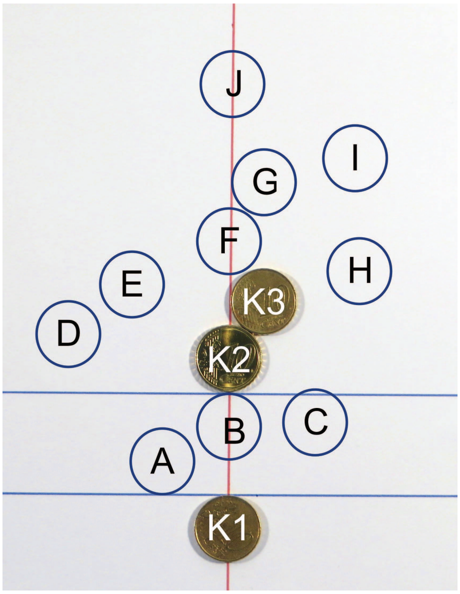


12. Slika kaže središčni trk kovanca za 50 centov s kovancem za 1 cent. Katera slika pravilno kaže lego kovancev PO TRKU? Obkroži pravilni odgovor.



13. Slika kaže središčni trk kovanca K1 za 10 centov s tarčo, ki jo sestavljata dva kovanca za 10 centov K2 in K3. Za vsakega od kovancev K1, K2 in K3 zapiši v razpredelnico, v kateri legi je po trku.

13.a	13.b	13.c
K1	K2	K3



1.

Kakšne barve je vodna raztopina barvila rdečega zelja		rumena	rdeča	oranžna	modro-zelena	vijolična
1.a	brez dodatkov?	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
1.b	z dodano citronsko kislino?	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
1.c	z dodano jedilno sodo?	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**

2

Kaj se zgodi, ko zmešamo suha praška citronske kisline in jedilne sode?

(A) Zmes se peni.

(C) Zmes spremeni barvo.

(B) Zmes se raztopi.

(D) Nič od naštetega.

3.

Pri reakciji med citronsko kislino in jedilno sodo v vodni raztopini nastaja plin ogljikov dioksid. Obkroži DA (v razpredelnico vpiši D), če je izjava pravilna, in NE (v razpredelnico vpiši N), če ni.

Ogljikov dioksid je …

3.a težji od zraka, DA NE

3.b strupen, DA NE

3.c brezbarven, DA NE

3.d brez vonja, DA NE

3.e pospešuje gorenje. DA NE

4.

S katero snovjo lahko pri poskusu z barvilom rdečega zelja nadomestiš jedilno sodo in dobiš podoben rezultat? Obkroži DA (v razpredelnico vpiši D), če je rezultat podoben, in NE (v razpredelnico vpiši N), če ni.

4.a pralni prašek DA NE

4.b jabolčni kis DA NE

4.c detergent za posodo DA NE

4.d sadni sok DA NE

4.e citronska kislina DA NE

5.

Uredi naštete planete Osončja po trajanju njihovega obhoda okoli Sonca (dolžini njihovega leta), od planeta z najdaljšim letom (1) do planeta z najkrajšim letom (6). Urejene začetnice planetov vpiši v razpredelnico.

(J) Jupiter **(M)** Mars **(S)** Saturn **(U)** Uran **(V)** Venera **(Z)** Zemlja

	1	2	3	4	5	6
Planet						

6.

Kateri od naštetih planetov opravi v 1 mesecu najdaljšo pot?

(J) Jupiter **(M)** Mars **(S)** Saturn **(U)** Uran **(V)** Venera **(Z)** Zemlja

7.a

V Osončje se vključi nov planet XX. Njegovo leto traja 5 mesecev, njegov tir je krožnica. Med katerima planetoma je glede na oddaljenost od Sonca?

Merkur	(A)	Venera	(B)	Zemlja	(C)	Mars	(D)	Jupiter	(E)	Saturn	(F)	Uran	(G)	Neptun

7.b

Ob času $t = 0$ je XX v spodnji konjunkciji s Soncem (za opazovalca na Zemlji). Čez koliko mesecev bo XX prvič ponovno v spodnji konjunkciji s Soncem? Čez

(A) 2,5 meseca.
(B) 3,5 meseca.
(C) 5 mesecev.
(D) 6 mesecev.
(E) 8,5 meseca.
(F) 10 mesecev.
(G) 12 mesecev.
(H) 17 mesecev.

8.

Katera med naštetimi dejstvi pomembno vplivajo na to, da je planete ugodneje opazovati, ko so v opoziciji? Obkroži DA (v razpredelnico vpiši D), če dejstvo pomembno vpliva, in NE (v razpredelnico vpiši N), če ne vpliva pomembno.

Planete je ugodneje opazovati, ko so v opoziciji, ker …

8.a	so takrat bližje Zemlji.	DA	NE
8.b	so takrat bližje Soncu.	DA	NE
8.c	jih takrat drugi planeti ne zakrivajo.	DA	NE
8.d	je med opazovanjem noč (tema).	DA	NE
8.e	je med opazovanjem dan (svetlo).	DA	NE
8.f	je takrat Zemljina os obrnjena proti planetu.	DA	NE
8.g	so vidni celo noč.	DA	NE

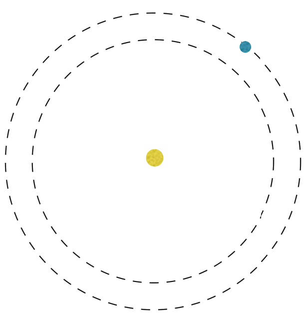
9.

Kolikokrat Venera obkroži Sonce v 7 Zemljinih letih? Zapiši odgovor. ______

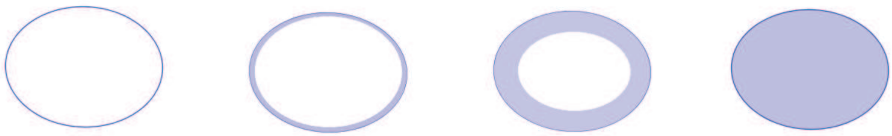
10.

Slika prikazuje tirnici dveh planetov okoli njune zvezde (sonca). Zunanji planet je v nekem trenutku v označeni legi. Na tirnici notranjega planeta označi tisto lego notranjega planeta, v kateri ima, glede na označeno lego zunanjega planeta, največjo elongacijo.

Izmeri največjo elongacijo notranjega planeta. Zapiši, kolikšna je. ______



11. Brezbarvne želatinaste medvedke namakamo v vodi, ki smo ji dodali modro barvilo za živila. Medvedka po 6 urah namakanja vzamemo iz raztopine in ga narežemo na rezine. Kako je videti rezina iz sredine medvedka?



(A) **(B)** **(C)** **(D)**

12. Kaj se dogaja z maso jajca brez lupine potem, ko ga po nekaj urah namakanja v destilirani vodi prestavimo v vodo, v kateri smo raztopili veliko sladkorja?

(A) Masa jajca se povečuje.
(B) Masa jajca se zmanjšuje.
(C) Masa jajca ostaja nespremenjena.

13. Kaj je fiziološka raztopina?

(A) Goveja juha.
(B) Raztopina sladkorja in soli v vodi.
(C) Raztopina sladkorja (glukoze) v vodi.
(D) Raztopina različnih sladkorjev v vodi.
(E) Raztopina soli (natrijevega klorida) v vodi.

14. Kaj se zgodi v telesu ob pitju zelo sladke pijače? Obkroži DA (v razpredelnico vpiši D), če se zgodi, in NE (v razpredelnico vpiši N), če se ne zgodi.

14.a Celice v telesu izgubljajo vodo.	DA	NE
14.b Celice v telesu dobijo vodo.	DA	NE
14.c Celice v telesu dobijo hrano.	DA	NE

15. V živih bitjih snovi (topilo in topljenci) prehajajo skozi polprepustno membrano celic. Obkroži pravilne odgovore.

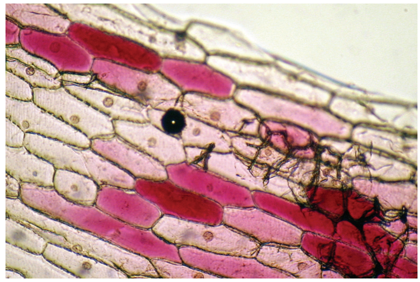
15.a Z osmozo skoznjo prehaja(jo) **(A)** topilo (voda). **(B)** topljenci (soli, sladkorji …)

15.b Z difuzijo skoznjo prehaja(jo) **(A)** topilo (voda). **(B)** topljenci (soli, sladkorji …)

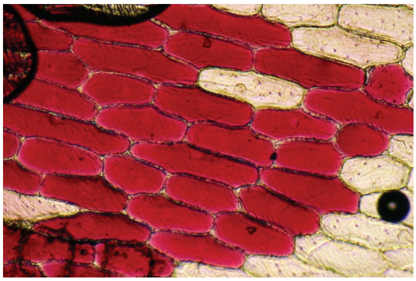
15.c Celice živih bitij se prehranjujejo z **(A)** z difuzijo. **(B)** z osmozo.

16. Slika (A) prikazuje celice sveže rdeče čebule pod mikroskopom. Na celice kaneš kapljico zelo slane vode. Kako so pod mikroskopom videti celice čebule čez nekaj časa? Kot na sliki (A), (B) ali (C)?

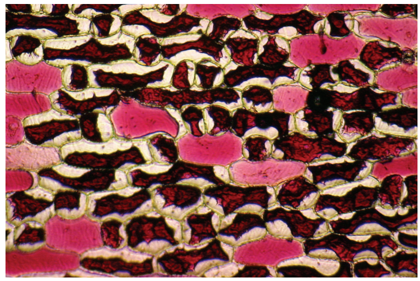
(A)



(B)



(C)



Rešitve matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje

Rešitve nalog za 1. letnik

I/A1. Označimo presečišče nosilk stranic AD in BC z E. Tedaj po Pitagorovem izreku velja

$$|ED|^2 + |EC|^2 = |CD|^2 = 1,$$
$$|EA|^2 + |EC|^2 = |AC|^2 = 4,$$
$$|ED|^2 + |EB|^2 = |BD|^2 = 9.$$

Če seštejemo drugo in tretjo enačbo in od njiju odštejemo prvo, dobimo $|EA|^2 + |EB|^2 = 12$. Po Pitagorovem izreku sledi $|AB|^2 = |EA|^2 + |EB|^2 = 12$, torej je $|AB| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Pravilen odgovor je (A).

I/A2. Označimo največjo dovoljeno težo za enega potnika z d. Gospod in gospa Kotnik imata skupaj $60 - 2d$ dodatnih kilogramov prtljage, za katere sta plačala 11 evrov. Torej sta za vsak dodaten kilogram plačala $\frac{11}{60-2d}$ evrov. Gospod Novak ima $60 - d$ dodatnih kilogramov prtljage, za katere je plačal 33 evrov. Za vsak kilogram je torej plačal $\frac{33}{60-d}$ evrov. Ker morata biti tarifi enaki, je $\frac{11}{60-2d} = \frac{33}{60-d}$. Enačbo delimo z 11 in odpravimo ulomke, da dobimo $60 - d = 3(60 - 2d)$. Od tod izračunamo $d = 24$. Pravilen odgovor je torej (D).

I/A3. Števke, ki so enake 0 k vsoti števk ne prispevajo ničesar. Iz neničelnih števk pa lahko dobimo vsoto 3 le na tri načine, $3 = 3$, $1 + 2 = 3$ ali $1 + 1 + 1 = 3$. Ker je natanko 5 števk števila, ki je všeč kenguruju Pitagori, enakih 0, imamo torej tri možnosti.

Naravno število, ki ima števke $3, 0, 0, 0, 0, 0$ in je deljivo s 4, je samo 300000. Ničle namreč ne smejo nastopati na začetku števila.

Naravna števila s števkami $1, 2, 0, 0, 0, 0, 0$ so po vrsti 1000002, 1000020, 1000200, 1002000, 1020000, 1200000, 2000001, 2000010, 2000100, 2001000, 2010000, 2100000. Od teh števila 1000002, 2000001 in 2000010 niso deljiva s 4, ostala pa so.

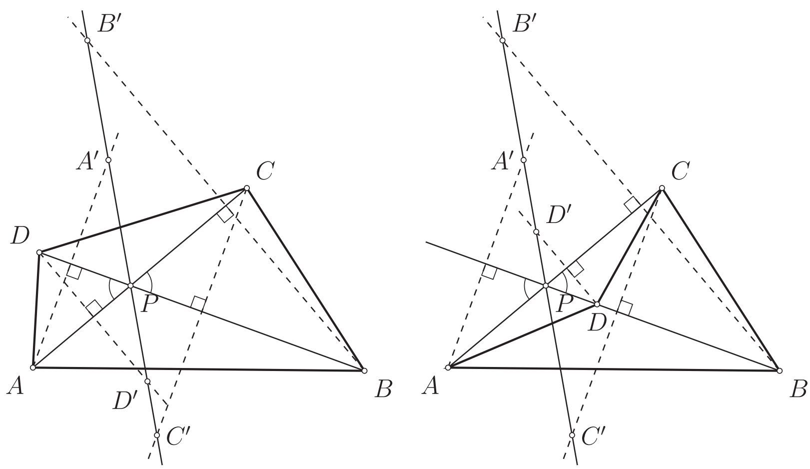
Naravna števila s števkami $1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0$, ki so deljiva s 4, morajo imeti na zadnjih dveh mestih števko 0. Taka števila (razvrščena po številu števk 0 na desni strani) so 10001100, 10010100, 10100100, 11000100, 10011000, 10101000, 11001000, 10110000, 11010000, 11100000.

Skupaj je kenguruju Pitagori všeč natanko 20 naravnih števil.

I/B1. Iz prve enačbe vidimo, da je $r \geq 4$, torej mora biti r liho praštevilo. Ce je tudi q liho praštevilo, potem iz druge enačbe sledi, da je s sodo praštevilo, torej $s = 2$. Tedaj je $s^2 = 4$, hkrati pa je $q + r \geq 6$, saj sta q in r lihi praštevili. Prišli smo do protislovja, saj enačba $q + r = s^2$ ni izpolnjena.

Od tod sklepamo, da je q sodo praštevilo, torej $q = 2$. Iz prve enačbe izrazimo $r = p + 2$ in to vstavimo v drugo enačbo, da dobimo $p + 4 = s^2$. To enačbo preoblikujemo v $p = (s - 2)(s + 2)$. Ker je p praštevilo, od tod sledi $s - 2 = 1$ in $s + 2 = p$, saj je $s - 2 < s + 2$. Torej je $s = 3$ in $p = 5$. Iz $r = p + 2$ dobimo še $r = 7$.
Dobili smo eno samo rešitev $p = 5$, $q = 2$, $r = 7$ in $s = 3$.

I/B2.



Zrcalne slike oglišč A, B, C in D pri zrcaljenju čez nosilke ustreznih diagonal označimo po vrsti z A', B', C' in D'. Označimo presečišče nosilk diagonal s P.

Denimo najprej, da P leži v notranjosti štirikotnika. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da je $\sphericalangle BPC = 60°$. Zaradi zrcaljenja potem velja $\sphericalangle A'PD = \sphericalangle DPA = 60°$, $\sphericalangle APD' = \sphericalangle DPA = 60°$, $\sphericalangle C'PB = \sphericalangle BPC = 60°$ in $\sphericalangle CPB' = \sphericalangle BPC = 60°$. Sledi

$$\sphericalangle A'PD' = \sphericalangle A'PD + \sphericalangle DPA + \sphericalangle APD' = 180°$$

in

$$\sphericalangle C'PB' = \sphericalangle C'PB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPB' = 180°.$$

Prva enakost pove, da točke A', D' in P ležijo na isti premici, druga pa, da točke B', C' in P ležijo na isti premici. Zaradi zrcaljenja velja tudi $\sphericalangle A'PA = \sphericalangle C'PC = 120°$. Ker točke A, C in P ležijo na isti premici in točki A' in C' ležita na različnih bregovih premice AC, od tod sledi, da tudi točke A', C' in P ležijo na isti premici. Od tod sledi, da vseh pet točk A', B', C', D' in P leži na isti premici.

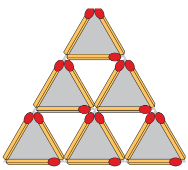
Denimo sedaj, da P leži zunaj štirikotnika. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da D leži med B in P in da je $\sphericalangle BPC = 60°$. Na enak način kot v prvem primeru pokažemo, da točke B', C' in P ležijo na isti premici. Zaradi zrcaljenja je $\sphericalangle CPD' = \sphericalangle DPC = 60°$ in $\sphericalangle A'PA = 2 \cdot 60° = 120°$. Torej je $\sphericalangle CPA' = 180° - \sphericalangle A'PA = 60°$ in zato velja $\sphericalangle CPA' = \sphericalangle CPD'$. Ker točki A' in D' ležita na istem bregu premice AC, sledi, da so tudi točke A', D' in P kolinearne. Kot v prvem primeru sledi, da je vseh pet točk A', B', C', D' in P leži na isti premici.

2. način. Naj bo P presečišče premic AC in BD. S p označimo premico skozi P, ki razpolavlja tisti kot med AC in BD, ki meri $120°$. Premica p zato seka obe nosilki diagonal pod kotom $60°$. Dokazati želimo, da točke A', B', C' in D' ležijo na p.

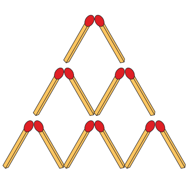
Ker se AC in BD sekata v točki P pod kotom $60°$, mora tudi zrcalna slika premice AC preko premice BD sekati BD v točki P pod kotom $60°$. To je ravno premica p. Po drugi strani pa vemo, da točki A' in C' ležita na zrcalni sliki premice AC. Zato A' in C' ležita na p. Podobno mora zrcalna slika premice BD preko premice AC sekati AC v točki P pod kotom $60°$. To je ravno premica p. Ker točki B' in D' ležita na zrcalni sliki BD, ležita na premici p.

Dokazali smo, da točke A', B', C' in D' ležijo na premici p.

I/B3. Vžigalice na sliki tvorijo 9 majhnih trikotnikov s stranicami dolgimi 1 vžigalico, 3 srednje trikotnike s stranicami dolgimi 2 vžigalici ter 1 velik trikotnik s stranicami dolgimi 3 vžigalice. Osenčimo nekatere trikotnike, kot to prikazuje slika.



Ker moramo iz vsakega osenčenega trikotnika odstraniti vsaj eno vžigalico in nobena dva osenčena trikotnika nimata skupne stranice, moramo skupaj odstraniti vsaj 6 vžigalic. Da to tudi zadostuje, prikazuje naslednja slika.



Rešitve nalog za 2. letnik

II/A1. Označimo višini prve in tretje vrstice pravokotnikov z x in y, širini prvega in tretjega stolpca pravokotnikov pa z z in w. Tedaj so ploščine treh vogalnih pravokotnikov s številkami enake $xz = 8$, $xw = 12$, $yz = 10$, ploščina četrtega vogalnega pravokotnika pa je $yw = \frac{yz \cdot xw}{xz} = \frac{10 \cdot 12}{8} = 15$.

II/A2. Z upoštevanjem pravil za računanje s potencami in zveze $x^x = y$, dan izraz preoblikujemo

$$x^{(x^x+1)} = x^{(x^x \cdot x)} = x^{yx} = x^{xy} = (x^x)^y = y^y.$$

Pravilen odgovor je (B).

II/A3. Označimo oglišča osnovnega kvadrata z A_1, A_2, A_3 in A_4, tako da je za vsak i oglišče A_i najbližje točki O_i. Polmer večje krožnice je $R = \frac{a}{2}$, polmer manjših krožnic pa označimo z r. Tedaj je $|A_1O_1| = r\sqrt{2}$, saj je to diagonala majhnega kvadratka s stranico dolžine r, podobno je $|A_3O_3| = r\sqrt{2}$. Diagonala osnovnega kvadrata je zato dolga

Ker pa je to diagonala osnovnega kvadrata, mora biti dolga $a\sqrt{2}$. Sledi

$$a + 2r(1 + \sqrt{2}) = a\sqrt{2},$$

od koder izrazimo $r = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}+1)}$. Ulomek racionaliziramo, da dobimo

$$r = \frac{a(\sqrt{2}-1)^2}{2} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}a.$$

Ploščina kvadrata $O_1O_2O_3O_4$ je enaka

$$pl = (a - 2r)^2 = (2\sqrt{2}a - 2a)^2 = 4a^2(\sqrt{2} - 1)^2 = 4a^2(3 - 2\sqrt{2}).$$

II/B1. Opazimo, da je $(-1)^{3n+1} = (-1)^{2n}(-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}$, zato lahko enačbo preoblikujemo do

$$2^n(-1)^n x^n + (-1)^{n+1}2^{n+1}x^{n-1}(2x + 1) - (-1)^{n+1}2^{n+1}x^{n+1} = 0.$$

Na levi strani enačbe izpostavimo skupni faktor, da dobimo

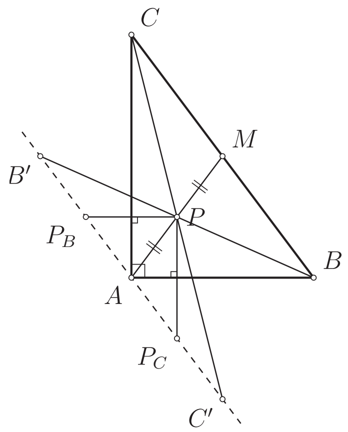
$$(-1)^n 2^n x^{n-1}(x - 2(2x + 1) + 2x^2) = 0.$$

Ker je $x - 2(2x + 1) + 2x^2 = x(2x + 1) - 2(2x + 1) = (x - 2)(2x + 1)$, sledi

$$(-1)^n 2^n x^{n-1}(x - 2)(2x + 1) = 0.$$

Če je $n = 1$, sta rešitvi enačbe $x = 2$ in $x = -\frac{1}{2}$, če pa je $n \geq 2$, so rešitve enačbe $x = 0$, $x = 2$ in $x = -\frac{1}{2}$.

II/B2.

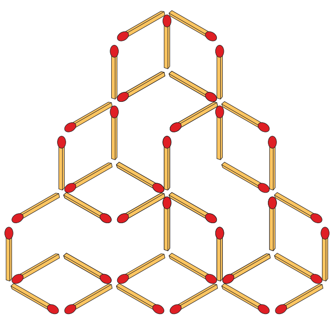


Ker sta P_B in P_C zrcalni sliki točke P preko stranic trikotnika, velja $\sphericalangle PAC = \sphericalangle CAP_B$ in $\sphericalangle BAP = \sphericalangle P_CAB$. Torej je

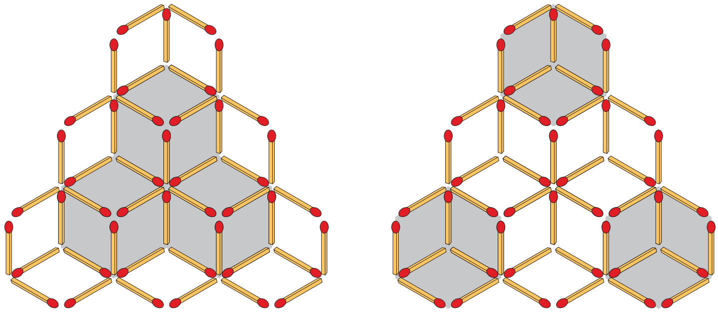
$$\sphericalangle P_CAP_B = \sphericalangle P_CAB + \sphericalangle BAP + \sphericalangle PAC + \sphericalangle CAP_B = 2(\sphericalangle BAP + \sphericalangle PAC) = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ,$$

kar pomeni, da so točke P_B, A in P_C kolinearne. Sledi, da vseh 5 točk B', C', P_B, P_C in A leži na isti premici. Ker se daljici BB' in CC' razpolavljata v točki P, je $BCB'C'$ paralelogram, torej sta premici BC in $B'C'$ vzporedni. Zato velja $\sphericalangle MBA = \sphericalangle C'AB = \sphericalangle P_CAB = \sphericalangle BAP = \sphericalangle BAM$, kar pomeni, da je trikotnik ABM enakokrak z vrhom pri pri M in velja $|BM| = |AM|$. Podobno je tudi $\sphericalangle ACM = \sphericalangle CAB' = \sphericalangle MAC$, torej je tudi trikotnik CAM enakokrak in velja $|AM| = |CM|$. Sledi $|BM| = |CM|$, od koder sklepamo, da je M razpolovišče stranice BC.

II/B3. Vžigalice na sliki tvorijo 9 majhnih pravilnih šestkotnikov s stranicami dolgimi 1 vžigalico ter 1 večji pravilni šestkotnik stranicami dolgimi 2 vžigalici. Ker je vsaka vžigalica stranica kvečjemu 2 manjših pravilnih šestkotnikov, moramo odstraniti vsaj 5 vžigalic. Da to tudi zadostuje, prikazuje naslednja slika. Paziti moramo le, da izničimo tudi večji pravilni šestkotnik.



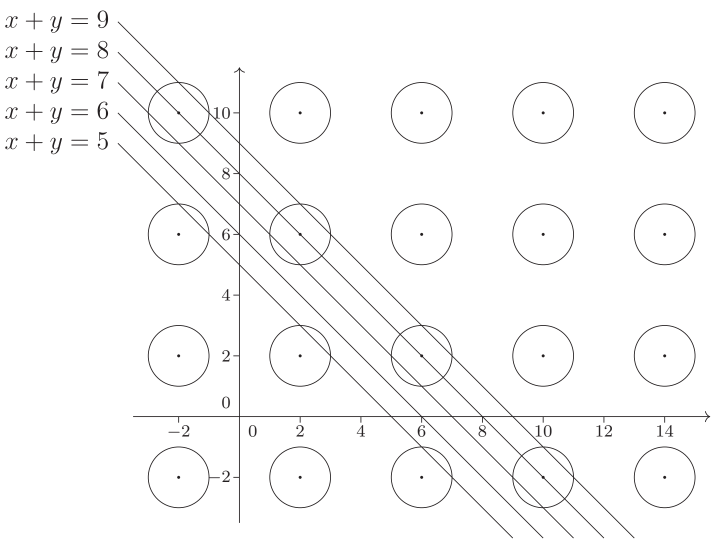
2. način. Vžigalice na sliki tvorijo 9 majhnih pravilnih šestkotnikov s stranicami dolgimi 1 vžigalico ter 1 večji pravilni šestkotnik s stranicami dolgimi 2 vžigalici. Osenčimo nekatere majhne pravilne šestkotnike, kot to prikazujeta sliki.



Da izničimo 3 osenčene pravilne šestkotnike na levi sliki moramo odstraniti vsaj 2 vžigalici z njihovih stranic, da izničimo 3 osenčene pravilne šestkotnike na desni sliki pa moramo odstraniti vsaj 3 vžigalice z njihovih stranic. Ker osenčeni pravilni šestkotniki na levi sliki nimajo nobene skupne stranice z osenčenimi pravilnimi šestkotniki na desni sliki, moramo torej skupaj odstraniti vsaj $2 + 3 = 5$ vžigalic. Da to tudi zadostuje, prikazuje slika iz 1. rešitve.

Rešitve nalog za 3. letnik

III/A1. Točke (x, y), ki imajo vsoto koordinat enako $5, 6, 7, 8$ oz. 9 ležijo zaporedoma na premicah $x + y = 5$, $x + y = 6$, $x + y = 7$, $x + y = 8$ oz. $x + y = 9$. Če te premice narišemo na sliko, opazimo, da le premica $x + y = 6$ ne seka nobene krožnice.



Torej vsota koordinat točke na eni od krožnic v nobenem primeru ne more biti enaka 6. Pravilen odgovor je (B).

III/A2. Po Pitagorovem izreku velja $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$ oziroma $101^2 + |AC|^2 = |BC|^2$. Enačbo preuredimo v $101^2 = |BC|^2 - |AC|^2 = (|BC| + |AC|)(|BC| - |AC|)$. Faktorja na desni strani enačbe sta različni naravni števili. Ker pa je 101 praštevilo, lahko število 101^2 le na en način razcepimo kot produkt dveh različnih naravnih števil in sicer kot $101^2 = 1 \cdot 101^2 = 1 \cdot 10201$. Ker je $|BC| + |AC| > |BC| - |AC|$, sledi $|BC| + |AC| = 10201$ in $|BC| - |AC| = 1$. Obseg trikotnika je $|AB| + |BC| + |AC| = 101 + 10201 = 10302$.

III/A3. Označimo težo kroga z k, težo trikotnika s t, težo manjšega kvadrata z m in težo večjega kvadrata z v. Ker sta prvi dve tehtnici uravnoteženi, sledi

$$
\begin{aligned}
5t + k &= 5m + 2v, \\
2k + v &= 2t + m.
\end{aligned}
$$

Prvi enačbi prištejemo dvakratnik druge, da dobimo $5t + 5k + 2v = 7m + 2v + 4t$ oziroma $t + 5k = 7m$. Leva stran zadnje enačbe predstavlja težo na levi strani zadnje tehtnice, zato moramo na desno stran zadnje tehtnice postaviti 7 manjših kvadratov. Pravilen odgovor je (E).

III/B1. Z upoštevanjem zveze $1 = \log_2 2$ in formule za vsoto logaritmov $\log_2 a + \log_2 b = \log_2(a \cdot b)$ enačbo najprej preoblikujemo v

$$\log_2(2\log_2(7x - 6)) = \log_2(3\log_2(3x - 2)).$$

Nato uporabimo še zvezo $a \log_2 b = \log_2 b^a$, da dobimo

$$\log_2(\log_2(7x - 6)^2) = \log_2(\log_2(3x - 2)^3).$$

Dvakrat antilogatirmiramo, da pridemo do enačbe

$$(7x - 6)^2 = (3x - 2)^3.$$

Odpravimo oklepaje in enačbo preoblikujemo v

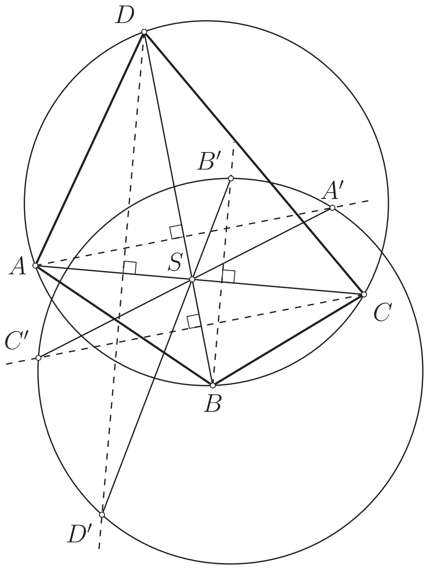
$$27x^3 - 103x^2 + 120x - 44 = 0.$$

Uganemo, da je ena rešitev te enačbe $x_1 = 1$, in nato s Hornerjevim algoritmom razcepimo levo stran enačbe

$$(x - 1)(27x^2 - 76x + 44) = 0.$$

S pomočjo formule za ničle kvadratnega polinoma izračunamo še ostali dve rešitvi $x_2 = 2$ in $x_3 = \frac{22}{27}$. Za vse vrednosti naredimo preizkus. Ugotovimo, da x_3 ni rešitev enačbe, saj je $7x_3 - 6 = -\frac{8}{27} < 0$ in zato izraz $\log_2(7x_3 - 6)$ ni definiran. Prav tako tudi x_1 ni rešitev enačbe, saj je $\log_2(7x_1 - 6) = 0$ in zato izraz $\log_2(\log_2(7x - 6))$ ni definiran. V primeru $x_2 = 2$ pa dobimo $\log_2(\log_2 8) + 1 = \log_2(\log_2 4) + \log_2 3$, kar drži. Edina rešitev enačbe je torej $x = 2$.

III/B2.



Zrcalne slike oglišč A, B, C in D pri zrcaljenju čez ustrezne diagonale označimo po vrsti z A', B', C' in D'. Naj bo S presečišče diagonal štirikotnika $ABCD$. Pri zrcaljenju čez premico AC se točka S ohranja, daljica BD pa se slika v daljico $B'D'$, zato točka S leži tudi na daljici $B'D'$. Poleg tega velja $|B'S| = |BS|$ in $|D'S| = |DS|$. Na enak način ugotovimo, da točka S leži tudi na daljici $A'C'$ in velja $|A'S| = |AS|$ in $|C'S| = |CS|$.

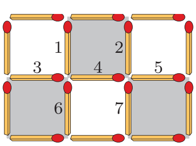
Ker je štirikotnik $ABCD$ tetiven, velja $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$ in $\sphericalangle DBA = \sphericalangle DCA$. Sledi, da sta si trikotnika ABS in DCS podobna, torej je $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$. Po zgoraj dokazanem zato velja tudi $\frac{|A'S|}{|D'S|} = \frac{|B'S|}{|C'S|}$. Zaradi zrcaljenja je

$$\sphericalangle A'SD + \sphericalangle DSA + \sphericalangle ASD' = 3 \sphericalangle DSA.$$

Zato je $\sphericalangle A'SD' = 3 \sphericalangle DSA$, če je $3 \sphericalangle DSA \leq 360°$, oziroma $\sphericalangle A'SD' = 3 \sphericalangle DSA - 360°$, če je $3 \sphericalangle DSA > 360°$. Po predpostavki je $\sphericalangle DSA$ različen od $60°$ in $120°$, od koder sledi, da je $\sphericalangle A'SD'$ različen od $0°$ in $180°$. To pomeni, da točke A', S in D' ne ležijo na isti premici, ampak tvorijo trikotnik. Ker je $\sphericalangle D'SA' = \sphericalangle B'SC'$, iz enakosti $\frac{|A'S|}{|D'S|} = \frac{|B'S|}{|C'S|}$ sledi, da sta si trikotnika $D'A'S$ in $C'B'S$ podobna. V posebnem velja $\sphericalangle C'B'S = \sphericalangle SA'D'$. Ker je S med A' in C' ter med B' in D', sledi

Ker B' leži na drugem bregu premice $A'C'$ kot D', to pomeni, da je štirikotnik $A'B'C'D'$ tetiven.

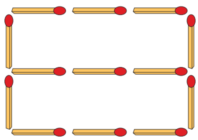
III/B3. Vžigalice na sliki tvorijo 6 majhnih kvadratov s stranicami dolgimi 1 vžigalico ter 2 večja kvadrata s stranicami dolgimi 2 vžigalici. Osenčimo nekatere majhne kvadrate in oštevilčimo nekatere vžigalice, kot to prikazuje slika.



Ker moramo iz vsakega osenčenega kvadrata odstraniti vsaj eno vžigalico, moramo skupaj odstraniti vsaj 3 vžigalice. Denimo, da zadostuje odstraniti 3 vžigalice. Tedaj mora biti vsaka odstranjena vžigalica stranica natanko 1 osenčenega in 1 neosenčenega majhnega kvadrata, hkrati pa moramo vsakemu majhnemu kvadratu odstraniti natanko 1 stranico. Vžigalic na robu mreže torej ne smemo odstraniti.

Če odstranimo vžigalico 1, potem vžigalice 2 ne smemo odstraniti. Zato moramo v zgornjem desnem majhnem kvadratu odstraniti vžigalico 5, v spodnjem desnem majhnem kvadratu pa vžigalice 7 ne smemo odstraniti. To je protislovje, saj tedaj ne odstranimo nobene vžigalice z levega velikega kvadrata. Torej vžigalice 1 ne smemo odstraniti.

Zaradi simetrije lahko podobno pokažemo, da tudi vžigalice 6 ne smemo odstraniti. Toda tedaj ne odstranimo nobene vžigalice z desnega velikega kvadrata, kar je spet protislovje. S tem smo pokazali, da odstraniti 3 vžigalice ne zadostuje. Odstraniti moramo vsaj 4 vžigalice. Da to zadostuje, prikazuje naslednja slika.



Rešitve nalog za 4. letnik

IV/A1. 6-mestno število, ki vsebuje strnjen podniz 2017 je ene od treh oblik: $xy2017$, $x2017y$ ali $2017xy$, kjer sta x in y števki. Hitro opazimo, da nobeno naravno število ne more biti dveh oblik hkrati. Torej moramo le prešteti, koliko števil je posamezne oblike, saj s tem nobenega števila ne bomo šteli dvakrat. Števil oblike $xy2017$ je $9 \cdot 10 = 90$, saj x ne sme biti enak 0. Števil oblike $x2017y$ je $9 \cdot 10 = 90$, števil oblike $2017xy$ pa $10 \cdot 10 = 100$. Vseh števil skupaj je $90 + 90 + 100 = 280$.

IV/A2. Označimo drugo število v zaporedju z a. Tedaj je zaporedje števil enako $4, a, a+4, 2a+4, 3a+8, 5a+12$. Zadnje število je enako $5a+12 = 47$, od koder izračunamo $a = 7$. Vsota vseh šestih števil je enaka $S = 4 + a + (a+4) + (2a+4) + (3a+8) + (5a+12) = 12a + 32 = 12 \cdot 7 + 32 = 116$. Pravilen odgovor je (D).

IV/A3. Označimo oglišča kvadrata z A, B, C in D, tako da je oglišče A najbližje točki O_1. Polmer večje krožnice je $R = \frac{a}{2}$, polmer manjše krožnice pa označimo z r. Tedaj je $|AO_1| = r\sqrt{2}$, saj je to diagonala majhnega kvadratka s stranico dolžine r. Dolžina $|AO|$ je enaka

$$|AO| = |AO_1| + |O_1O| = r\sqrt{2} + (r + R) = \frac{a}{2} + r(1 + \sqrt{2}).$$

Ker pa je AO polovica diagonale osnovnega kvadrata, mora biti $|AO| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Sledi

$$\frac{a}{2} + r(1 + \sqrt{2}) = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

od koder izrazimo $r = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}+1)}$. Ulomek racionaliziramo, da dobimo

$$r = \frac{a(\sqrt{2}-1)^2}{2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}a.$$

Razdaljo $|O_1B|$, ki jo iščemo, dobimo po Pitagorovem izreku, če narišemo pravokotnico iz O_1 na stranico AB

$$|O_1B|^2 = r^2 + (a-r)^2 = a^2 - 2ar + 2r^2 = a^2 - (3-2\sqrt{2})a^2 + 2 \cdot \frac{(3-2\sqrt{2})^2}{4}a^2 =$$
$$= a^2\left(1 - 3 + 2\sqrt{2} + \frac{17-12\sqrt{2}}{2}\right) = a^2\left(\frac{13-8\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{a^2}{2}\left(13-8\sqrt{2}\right).$$

Sledi $|O_1B| = \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{13-8\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\sqrt{13-8\sqrt{2}}$.

IV/B1. Pokažimo, da izraz A zavzame natanko vrednosti 0 in vsa naravna števila od vključno 1009 do vključno 2017.

Označimo z $m < n$ ostanek števila 2017 pri deljenju z n. Tedaj lahko število 2017 zapišemo v obliki $2017 = kn + m$, kjer je k nenegativno celo število. Tedaj je

$$A = n \cdot \left\lfloor \frac{2017}{n} \right\rfloor = nk,$$

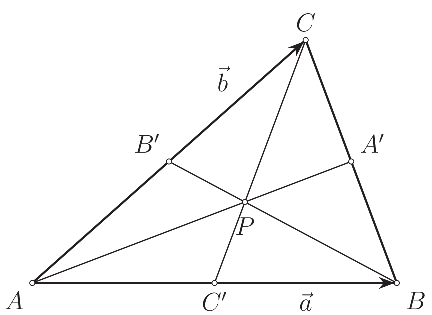
kar je zagotovo celo število. Če je $k = 0$, je $A = 0$. Če je $k = 1$, je $A = n$, hkrati pa je $n \leq 2017 < 2n$, torej je $1009 \leq n \leq 2017$. V tem primeru torej A zavzame vsa naravna števila med vključno 1009 in 2017. Če pa je $k \geq 2$, je $2n \leq 2017$ oziroma $m < n \leq 1008$ in zato $A = nk = 2017 - m > 1009$ ter $A = 2017 - m \leq 2017$. V tem primeru A ne zavzame nobenih novih števil.

2. način. Ker je n naravno število, je $\left\lfloor \frac{2017}{n} \right\rfloor$ nenegativno celo število, zato je tudi A nenegativno celo število. Za vsako realno število x velja $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$, zato je

$$2017 - n = n\left(\frac{2017}{n} - 1\right) < A \leq n \cdot \frac{2017}{n} = 2017.$$

Od tod sledi, da za vsak $n \leq 1008$ velja $1009 < A \leq 2017$. Če je $1009 \leq n \leq 2017$, potem je $1 \leq \frac{2017}{n} < 2$, zato je $\left\lfloor \frac{2017}{n} \right\rfloor = 1$ in $A = n$. S tem A zavzame vsa naravna števila od vključno 1009 do vključno 2017. Če pa je $n \geq 2018$, potem je $0 < \frac{2017}{n} < 1$, zato je $\left\lfloor \frac{2017}{n} \right\rfloor = 0$ in tudi $A = 0$.

IV/B2.



Označimo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

(a) Če je P težišče, tedaj je

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AA'} &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},\\
\overrightarrow{BB'} &= \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},\\
\overrightarrow{CC'} &= \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}.
\end{aligned}$$

Sledi $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 0$, torej lahko z vzporednimi premiki daljic AA', BB' in CC' sestavimo trikotnik, če postavimo daljice tako, da točki A' in B sovpadeta ter točki B' in C sovpadeta. Težišče trikotnika je torej izjemna točka.

(b) Naj bo P izjemna točka. Ker sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna, obstajata realni števili α in β, da velja $\overrightarrow{AP} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Ker P leži v notranjosti trikotnika, je $\alpha, \beta > 0$. Izrazimo vektorje $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ in $\overrightarrow{CC'}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

$\overrightarrow{AA'} = k(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \vec{a} + \ell(\vec{b} - \vec{a})$ za neki konstanti k in ℓ, od koder sledi $k\alpha = 1 - \ell$ in $k\beta = \ell$. Iz teh dveh enačb sledi $k = \frac{1}{\alpha+\beta}$, torej je $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b})$.

$\overrightarrow{BB'} = k(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} - \vec{a}) = \ell\vec{b} - \vec{a}$ za neki konstanti k in ℓ, od koder sledi $k(\alpha - 1) = -1$ in $k\beta = \ell$. Torej je $k = \frac{1}{1-\alpha}$ in $\overrightarrow{BB'} = \frac{1}{1-\alpha}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} - \vec{a})$.

$\overrightarrow{CC'} = k(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} - \vec{b}) = \ell\vec{a} - \vec{b}$ za neki konstanti k in ℓ, od koder sledi $k\alpha = \ell$ in $k(\beta - 1) = -1$. Torej je $k = \frac{1}{1-\beta}$ in $\overrightarrow{CC'} = \frac{1}{1-\beta}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} - \vec{b})$.

Ker lahko z vzporednimi premiki iz daljic AA', BB' in CC' sestavimo trikotnik, mora veljati $\overrightarrow{AA'} \pm \overrightarrow{BB'} \pm \overrightarrow{CC'} = 0$ za neko izbiro predznakov.

Denimo najprej, da je $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 0$, torej

$$\frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) + \frac{1}{1-\alpha}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} - \vec{a}) + \frac{1}{1-\beta}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} - \vec{b}) = 0.$$

Ker sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna, od tod sledi

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} - 1 + \frac{\alpha}{1-\beta} = 0 \qquad \text{in} \qquad \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{1-\alpha} - 1 = 0.$$

V obeh enačbah odpravimo ulomke in ju poenostavimo, da dobimo

$$\alpha\beta - \beta + \beta^2 + \alpha^2 = 0 \qquad \text{in} \qquad \alpha\beta - \alpha + \beta^2 + \alpha^2 = 0.$$

Od tod sledi $\alpha = \beta$. Če to vstavimo v eno izmed enačb, dobimo $3\beta^2 - \beta = 0$. Ker je $\beta > 0$, mora biti $\beta = \frac{1}{3}$ in $\alpha = \frac{1}{3}$.

Denimo sedaj, da je $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{CC'} = 0$. Tedaj podobno kot zgoraj dobimo enačbi

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} - 1 - \frac{\alpha}{1-\beta} = 0 \qquad \text{in} \qquad \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{1-\alpha} + 1 = 0,$$

ki ju preoblikujemo do

$$\beta^2 - \alpha^2 - \alpha\beta - \beta = 0 \qquad \text{in} \qquad \beta^2 - \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha + 2\beta = 0.$$

Od tod sledi $\alpha = -2\beta$, kar pa je protislovje, saj sta α in β pozitivni števili.

Če je $\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 0$, na podoben način dobimo protislovje $\beta = -2\alpha$.

Če pa je $\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{CC'} = 0$, dobimo enačbi

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + 1 - \frac{\alpha}{1-\beta} = 0 \qquad \text{in} \qquad \frac{\beta}{\alpha+\beta} - \frac{\beta}{1-\alpha} + 1 = 0,$$

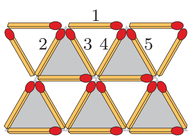
ki ju preoblikujemo do

$$2\alpha + \beta - \beta^2 - \alpha^2 - 3\alpha\beta = 0 \qquad \text{in} \qquad \alpha + 2\beta - \beta^2 - \alpha^2 - 3\alpha\beta = 0.$$

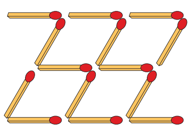
Od tod sledi $\alpha = \beta$. Ko to vstavimo v prvi enačbo, dobimo $3\beta - 5\beta^2 = 0$. Ker je $\beta > 0$, mora biti $\beta = \frac{3}{5}$ in $\alpha = \frac{3}{5}$. Toda v tem primeru P leži zunaj trkotnika, saj je $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{5}(\vec{a} + \vec{b})$, medtem ko za razpolovišče M stranice BC velja $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

S tem smo pokazali, da znotraj trikotnika leži največ ena izjemna točka, iz točke (a) pa vemo, da je to težišče trikotnika.

IV/B3. Vžigalice na sliki tvorijo 10 majhnih trikotnikov s stranicami dolgimi 1 vžigalico ter 4 večje trikotnike s stranicami dolgimi 2 vžigalici. Osenčimo nekatere majhne trikotnike in oštevilčimo nekatere vžigalice, kot to prikazuje slika.



Ker moramo iz vsakega osenčenega trikotnika odstraniti vsaj eno vžigalico, moramo skupaj odstraniti vsaj 5 vžigalic. Denimo, da zadostuje odstraniti 5 vžigalic. Tedaj mora biti vsaka odstranjena vžigalica stranica natanko 1 osenčenega in 1 neosenčenega majhnega trikotnika, hkrati pa moramo vsakemu majhnemu trikotniku odstraniti natanko 1 stranico. V zgornjem levem neosenčenem trikotniku moramo zato odstraniti vžigalico 2, v zgornjem desnem neosenčenem trikotniku pa vžigalico 5. Toda potem v sosednjih osenčenih trikotnikih vžigalic 3 in 4 ne smemo odstraniti. Hkrati tudi vžigalice 1 ne smemo odstraniti, saj ni stranica osenčenega trikotnika. To pa je protislovje, ker neodstranjene vžigalice 1, 3 in 4 tvorijo trikotnik. Sledi, da moramo odstraniti vsaj 6 vžigalic. Da to zadostuje, prikazuje naslednja slika.



Rešitve 55. fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije – regijsko tekmovanje

Skupina I

1. *Podatki:* $d = 500$ m, $a_1 = 0{,}15$ m/s^2, $l_1 = 330$ m, $a_2 = 0{,}25$ m/s^2, $l_2 = 190$ m, $v_0 = 54$ km/h$= 15$ m/s.

   a) Potniški (hitreje pospešuje) vlak pospešuje $t_2 = v_0/a_2 = 60$ s. V času t_2 opravi pot $s_2 = 450$ m. Očitno se prednja dela vlakov srečata, ko oba vlaka še pospešujeta. Torej velja

   $$d = \tfrac{1}{2}\,a_1 t_a^2 + \tfrac{1}{2}\,a_s t_a^2$$

   in

   $$t_a = \sqrt{2d/(a_1 + a_2)} = 50\ \mathrm{s}\,.$$

   b) Tovorni vlak potrebuje $t_1 = v_0/a_1 = 100$ s, da doseže hitrost v_0. Potniški vlak doseže to hitrost že prej, saj hitreje pospešuje. Končno hitrost je dosegel že ob času $t_2 = v_0/a_2 = 60$ s in se od tega časa naprej giblje enakomerno. Ob času t_1 opravi tovorni vlak pot

   $$s_1 = \tfrac{1}{2} a_1 t_1^2\,,$$

   potniški pa

   $$s_2 = \tfrac{1}{2} a_2 t_2^2 + v_0(t_1 - t_2)\,.$$

   Razdalja med prednjima deloma vlakov je

   $$r_b = \tfrac{1}{2} a_1 t_1^2 + \tfrac{1}{2} a_2 t_2^2 + v_0(t_1 - t_2) - d\,. = 1300\ \mathrm{m}.$$

2. *Podatki:* $t_a = 2{,}8$ s, $v_a = 40$ km/h, $m = 1500$ kg, $v_0 = 100$ km/h, $w = 15$ kWh/100 km, $W_a = 22$ kWh, $P_p = 40$ kW, $s = 232$ km.

   a) Pospešek izračunamo iz enačbe za enakomerno pospešeno gibanje; silo pa iz 2. Newtonovega zakona:

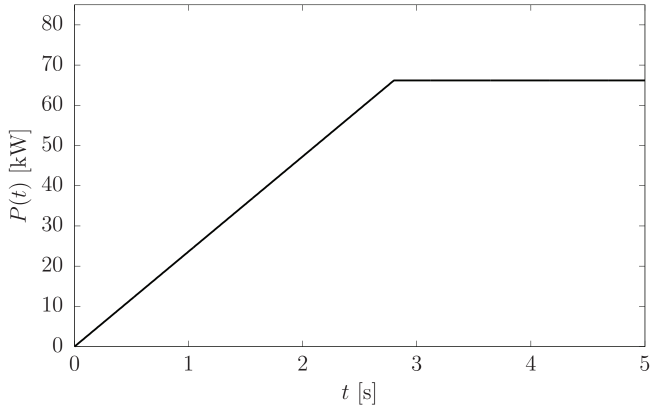
   $$a = \frac{v_a}{t_a} = 4{,}0\ \mathrm{m/s^2}\,, \qquad F = ma = 6{,}0\ \mathrm{kN}\,.$$

   b) Moč premo sorazmerna s silo in hitrostjo; pri hitrosti 40 km/h je enaka

   $$P = F\,v_a = 66{,}0\ \mathrm{kW}$$

   in jo doseže po $t_1 = 2{,}8$ s.

   Po tem je moč konstantna.



c) Povečanje kinetične energije avtomobila od hitrosti v_a do končne hitrosti v_0 gre na račun dela. Ker je moč konstantna, je delo kar premo sorazmerno s časom, $A = Pt$. Velja

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 - \tfrac{1}{2}mv_a^2 = Pt\,, \qquad t = \frac{m(v_0^2 - v_a^2)}{2P} = 7{,}4\ \mathrm{s}\,.$$

Hitrost 100 km/h doseže po $t = 2{,}8\ \mathrm{s} + 7{,}4\ \mathrm{s} = 10{,}2\ \mathrm{s}$.

d) Celotna poraba energije je $W = ws = 34{,}8$ kWh. Akumulator drži $W_a = 22$ kWh, torej potrebujemo še $\Delta W = W - W_a = 12{,}8$ kWh. To napolnimo v $t = \Delta W/P_p = 0{,}32\ \mathrm{h} = 19{,}2\ \mathrm{min}$.

3. *Podatki:* $\rho_{\mathrm{vrv}} = 1{,}4\ \mathrm{kg/L}$, $S = 0{,}78\ \mathrm{mm}^2$, $V_b = 12\ \mathrm{L}$, $m_b = 10\ \mathrm{g}$, $\rho_{\mathrm{zrak}} = 1{,}21\ \mathrm{g/L}$, $\rho_{\mathrm{He}} = 0{,}17\ \mathrm{g/L}$, $l = 3{,}0\ \mathrm{m}$.

a) V ravnovesju je vzgon zraka enak teži balona, helija v balonu in vrvice:

$$\rho_{\mathrm{zrak}} V_b g = m_b g + \rho_{\mathrm{He}} V_b g + \rho_{\mathrm{vrv}} S x g$$

Za dolžino vrvice x sledi

$$x = \frac{(\rho_{\mathrm{zrak}} - \rho_{\mathrm{He}})V_b - m_b}{\rho_{\mathrm{vrv}} S} = 2{,}27\ \mathrm{m} \approx 2{,}3\ \mathrm{m}\,.$$

b) V tem primeru vzgon zraka in vzgon vode na del vrvice, ki je pod vodo, uravnovesi težo balona, helija v balonu in vrvice z dolžino l. Dolžino potopljenega dela vrvice označimo z z:

$$\rho_{\mathrm{zrak}} V_b g + \rho_{\mathrm{voda}} S z g = m_b g + \rho_{\mathrm{He}} V_b g + \rho_{\mathrm{vrv}} S l g$$

Dobimo

$$z = \frac{m_b + \rho_{\mathrm{vrv}} S l - (\rho_{\mathrm{zrak}} - \rho_{\mathrm{He}})V_b}{\rho_{\mathrm{voda}} S} = 1{,}02\ \mathrm{m} \approx 1{,}0\ \mathrm{m}\,.$$

c) Prvi možni razmislek: Ko prerežemo vrvico, je dolžina vrvice, pritrjene na balon, manjša kot v primeru a). Sile niso v ravnovesju in zato se balon pospešeno dviga.

Drugi možni razmislek: Sila na potopljeni del vrvice kaže navzdol, saj je gostota vrvice večja od gostote vode. Ko vrvico prerežemo, pa prispevek odrezanega dela vrvice k vsoti sil manjka in sila na ostanek balon deluje navpično navzgor.

Sila na balon s prerezano vrvico je enaka razliki med vzgonom zraka in vsoto teže balona s helijem in teže vrvice:

$$F = \rho_{\text{zrak}} V_b g - m_b g - \rho_{\text{He}} V_b g - \rho_{\text{vrv}} S(l-z)g = (\rho_{\text{vrv}} - \rho_{\text{voda}}) Szg = 3{,}2\ \text{mN}\,.$$

Balon se giblje pospešeno s pospeškom

$$a = \frac{F}{m_b + m_{\text{He}} + m_{\text{vrv}}} = \frac{F}{m_b + \rho_{\text{He}} V_b + \rho_{\text{vrv}} S(l-z)} = 0{,}22\ \text{m/s}^2\,.$$

Skupina II

1. *Podatki:* $V = 20$ L, $m_0 = 10$ kg, $q = 48$ MJ/kg, $M = 50$ kg/kmol $T_0 = -10^\circ$ C $p_0 = 1{,}0$ bar, $\Delta p = 0{,}2$ bar, $C = 8{,}0$ kJ/K, $\Delta T = 10$ K.

Maso plina, ki ostane v jeklenki, izračunamo iz splošne plinske enačbe:

$$m = \frac{MpV}{RT_0} = \frac{M(p_0 + \Delta p)V}{RT_0} = 55\ \text{g}\,.$$

Pri gorenju bi ostanek plina oddal $Q = mq = 2{,}64$ MJ toplote.

b) Če jeklenko segrejemo na $T = T_0 + \Delta T$, ostane v jeklenki manj plina. Za segrevanje lahko porabimo

$$\Delta m = \frac{M(p_0 + \Delta p)V}{RT_0} - \frac{M(p_0 + \Delta p)V}{RT} = \frac{M(p_0 + \Delta p)V}{R}\left[\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_0 + \Delta T}\right] = 2{,}0\ \text{g}$$

in pridobimo $Q_{\text{odd}} = 96$ kJ toplote.

Del te toplote se porabi za segrevanje okolice: $Q_{\text{izg}} = C\Delta T = 80$ kJ.

c) Postopek nadaljujemo, tako da je v n-tem koraku temperatura plina $T_n = T_0 + n\Delta T$ in pridobljena toplota enaka

$$Q_{\text{odd}}(n) = \frac{qM(p_0 + \Delta p)V}{R}\left[\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_0 + n\Delta T}\right]$$

in izgube $Q_{\text{izg}}(n) = nC\Delta T$.

Rezultati za nekaj n-jev so v tabeli:

n	T_n [°C]	Q_{odd} [kJ]	Q_{izg} [kJ]	Q_{kor} [kJ]
1	0	96	80	16
2	10	186	160	26
3	20	270	240	30
4	30	348	320	28

Vidimo, da največ koristne toplote dobimo, če jeklenko segrejemo na 20°C.

2. *Podatki:* $U_g = 9$ V $R = 9\ \Omega$, $R_1 = 15\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $C_1 = C_2 = 10\ \mu$F.

a) Po dovolj dolgem času skozi vezje ne teče tok, zato je padec napetosti na uporniku R enak 0 in je vsa napetost na zaporedno vezanih kondenzatorjih C_1 in C_2 in velja $U_g = U_1 + U_2$.

Ker imata kondenzatorja enaki kapaciteti, je na obeh enaka napetost. Sledi

$$U_1 = \frac{U_g}{2} = 4{,}5\ \mathrm{V} \qquad \text{in} \qquad U_2 = \frac{U_g}{2} = 4{,}5\ \mathrm{V}\,.$$

b) Po dovolj dolgem času se kondenzator C_1 napolni in skozi upornika R_2 in R tok več ne teče. Zato sta padca napetosti na R_2 in R enaka 0.

Na kondenzatorju C_2 je enaka napetost kot na uporniku R_2, torej $U_2 = 0$.

Vsa napetost vira je na kondenzatorju C_1:

$$U_1 = U_g = 9{,}0\ \mathrm{V}\,.$$

c) Po dovolj dolgem času se kondenzatorja C_1 in C_2 napolnita in tok teče le skozi upornika R_1 in R_2 (in seveda R). Tok je enak

$$I = \frac{U_g}{R + R_1 + R_2} = 0{,}33\ \mathrm{A}\,.$$

Napetost na C_1 je enaka padcu napetosti na R_1:

$$U_1 = R_1 I = \frac{R_1 U_g}{R + R_1 + R_2} = 5{,}0\ \mathrm{V}$$

in napetost na C_2 padcu na R_2:

$$U_2 = R_2 I = \frac{R_2 U_g}{R + R_1 + R_2} = 1{,}0\ \mathrm{V}\,.$$

3. *Podatki:* $U_0 = 3$ V (nazivna napetost), $I_0 = 80$ mA (nazivni tok), $U_g = 3$ V, $R_n = 5\ \Omega$.

a) Moč, izračunano iz podatkov za žarnico, imenujemo *nazivna* moč in je $P_0 = U_0 I_0 = 240$ mW.

b) Nazivni upor žarnice je $R_0 = U_0/I_0 = 37{,}5\ \Omega$.

Zaradi notranjega upora baterija $R_n = 5\ \Omega$ teče skozi žarnico tok

$$I_a = \frac{U_g}{(R_0 + R_n)} = 70{,}6\ \text{mA}.$$

Moč žarnice je

$$P_a = R_0 I_a^2 = \frac{U_g^2 R_0}{(R_0 + R_n)^2} = 187\ \text{mW} = 0{,}78\ P_0\,.$$

c) Gonilna napetost U_g' mora biti toliko višja, da je padec napetosti na žarnici enak nazivni napetosti U_0. Velja $U_g' : (R_0 + R_n) = U_0 : R_0$, zato sledi

$$U_g' = \frac{U_0(R_0 + R_n)}{R_0} = 3{,}4\ \text{V}.$$

d)
i) Izračunan moč P_a je manjša od P_0. Upor žarnice ocenimo po enačbi, ki povezuje upor in moč

$$R = R_0 (P_a / P_0)^{1/4} = 35{,}225\ \Omega.$$

ii) Od tu izračunamo izsevano moč žarnice kot

$$P_c = \frac{U_g^2\, R}{(R + R_n)^2} = 196\ \text{mW} = 0{,}82\ P_0. \tag{1}$$

Skupina III

1. *Podatki:* $R_0 = R_1 = R_2 = R_3 = 150\ \Omega$, $C = 1$ nF, $U_1 = 15$ V, $U_2 = U_3 = 12$ V.

   a) Zaporedna vezava z dvema viroma, ki poganjata tok v isto smer, da za tok

$$I_a = \frac{U_1 + U_2}{R_1 + R_2}\,. \tag{1}$$

Skozi upornik R_0 tok ne teče, zato je padec napetosti na R_0 enak 0. Zaradi toka skozi upornik R_1 je napetost na kondenzatorju

$$U_a = U_1 - I_a R_1 = \frac{U_1 R_2 - U_2 R_1}{R_1 + R_2} = \frac{U_1 - U_2}{2} = 1{,}5\ \text{V} \tag{2}$$

in naboj

$$e_a = U_a C = 1{,}5\ \text{nAs}\,.$$

b) Tokrat vir 2 poganja tok v nasprotno smer, a ker je $U_1 > U_2$, teče tok v isto smer kot prej in je enak

$$I_b = \frac{U_1 - U_2}{R_1 + R_2}\,. \tag{3}$$

Ustrezna napetost in naboj na kondenzatorju sta po vrsti

$$U_b = U_1 - I_b R_1 = \frac{U_1 R_2 + U_2 R_1}{R_1 + R_2} = \frac{U_1 + U_2}{2} = 13{,}5\ \mathrm{V}\,, \tag{4}$$
$$e_a = U_a C = 13{,}5\ \mathrm{nAs}\,. \tag{5}$$

c) Po dolgem času, ko se na kondenzatorju vzpostavi končna napetost, je veja s kondenzatorjem in upornikom R_0 neaktivna (po njej ne teče tok), zato imamo opravka le s tremi različnimi tokovi I_1, I_2 in I_3, ki jih definiramo pozitivno, ko tečejo, kot bi jih določala napetost vira U_1, ki je največja. Lahko bi izbrali drugače, a tako je velika verjetnost, da bodo izračunane vrednosti tokov pozitivne. Da torej tokovi tečejo v smereh, ki jih predvidevamo. Kirchhoffov izrek v vozlišču zahteva

$$I_1 = I_2 + I_3, \tag{6}$$

medtem ko se Kirchhoffova zakona v zanki z upornikoma R_1 in R_2 ter v zanki z upornikoma R_2 in R_3 po vrsti glasita

$$U_1 - U_2 = I_1 R_1 + I_2 R_2\,, \tag{7}$$
$$U_2 - U_3 = I_3 R_3 - I_2 R_2\,. \tag{8}$$

Iz (8) dobimo zaradi $U_2 = U_3$ in $R_2 = R_3$:

$$I_2 = I_3 \frac{R_3}{R_2} = I_3\,. \tag{9}$$

Iz (6) in (9) dobimo

$$I_1 = I_3 \frac{R_2 + R_3}{R_3} = 2I_2\,. \tag{10}$$

Iz enačbe (7) sledi

$$U_1 - U_2 = I_2(2R_1 + R_2)\,, \qquad I_2 = \frac{U_1 - U_2}{2R_1 + R_2} = 6{,}67\ \mathrm{mA}$$

in $I_1 = 2I_2 = 13{,}33$ mA.

Zaradi toka skozi upornik R_1 je napetost na kondenzatorju

$$U_c = U_1 - I_1 R_1 = U_1 - \frac{2(U_1 - U_2)}{3} = 13{,}0\ \mathrm{V}\,. \tag{11}$$

Od tu je naboj enak

$$e_c = U_c C = 13{,}0\ \mathrm{nAs}\,.$$

Zaradi kompletnosti podajamo še splošni izraz za primer, ko upori niso enaki. Iz (7), (9) in (10) dobimo

$$I_3 = \frac{(U_1 - U_2)R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \tag{12}$$

in

$$I_1 = \frac{(U_1 - U_2)(R_2 + R_3)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}. \tag{13}$$

Zaradi toka skozi upornik R_1 je napetost na kondenzatorju

$$U_c = U_1 - I_1R_1 = \frac{U_1R_2R_3 + U_2(R_1R_2 + R_1R_3)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}. \tag{14}$$

2. *Podatki:* $a = 80$ cm, $b = 50$ cm, $c = 40$ cm, $j_0 = 400$ Wm^{-2}, $k = 0{,}8$ m^{-1}, $d = 6$ mm, $\lambda = 0,03$ Wm^{-1}K^{-1}, $t = 1$ s, $\Delta T' = 1$ K.

   a) V akvarij vstopa svetlobni tok $P_0 = j_0 S$, kjer je $S = ac$. Zaradi absorpcije se na poti do zadnje stene gostota toka zmanjša na $j_1 = j(b) = j_0\,\mathrm{e}^{-kb}$, zato izstopa manj svetlobnega toka, $P_1 = j_1 S$. Skupaj voda absorbira razliko teh dveh svetlobnih tokov:

   $$P_{\text{abs}} = P_0 - P_1 = ac\,j_0\left(1 - \mathrm{e}^{-kb}\right) = 42\ \mathrm{W}.$$

   Vsako sekundo se absorbira toplota $Q = P_{\text{abs}}t = 42$ J.

   b) Absorbirana toplota segreva vodo, vse dokler se absorbirani toplotni tok v vodi ne izenači s toplotnim tokom, ki uhaja skozi stene akvarija zaradi temperaturne razlike ΔT med temperaturo vode v akvariju in temperature okolice:

   $$P_{\text{abs}} = P_{\text{prev}} = S\,\frac{\lambda \Delta T}{d}.$$

   Površina akvarija je $S = 2(ab + bc + ca) = 1{,}84$ m^2. Temperaturna razlika je

   $$\Delta T = \frac{P_{\text{abs}}d}{\lambda S} = 4{,}6\ \mathrm{K}.$$

   c) V tem primeru je prejeta moč enaka moči, ki se prevaja skozi stene pri temperaturni razliki $\Delta T'$:

   $$P'_{\text{abs}} = P'_{\text{prev}} = S\,\frac{\lambda \Delta T'}{d} = 9{,}2\ \mathrm{W}.$$

Iz enačbe za absorbirano moč pri absorpcijskem koeficientu k':

$$P'_{\mathrm{abs}} = ac\, j_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-k'b}\right)$$

sledi

$$k' = -\frac{1}{b} \ln\left(1 - \frac{P'_{\mathrm{abs}}}{acj_0}\right) = 0{,}15\ \mathrm{m}^{-1}\,.$$

3. *Podatki:* $\rho_{\mathrm{vrv}} = 1{,}4$ kg/L, $S = 0{,}78$ mm^2, $V_b = 12$ L, $m_b = 10$ g, $l = 3{,}0$ m, $T = 16^\circ$C, $M_{\mathrm{zrak}} = 29$ kg/kmol, $M_{\mathrm{He}} = 4$ kg/kmol, $p = 1$ bar.

   a) Vzgon zraka in vzgon vode na del vrvice, ki je pod vodo, uravnovesi težo balona, helija v balonu in vrvice z dolžino l. Dolžino potopljenega dela vrvice označimo s h:

$$\rho_{\mathrm{zrak}} V_b g + \rho_{\mathrm{voda}} Shg = m_b g + \rho_{\mathrm{He}} V_b g + \rho_{\mathrm{vrv}} Slg\,.$$

   Gostoti zraka in helija izračunamo iz splošne plinske enačbe $pV = mRT/M$ oziroma $\rho = m/V = pM/RT$:

$$\rho_{\mathrm{zrak}} = \frac{pM_{\mathrm{zrak}}}{RT} = 1{,}21\ \mathrm{kg/m^3}\,, \qquad \rho_{\mathrm{He}} = \frac{pM_{\mathrm{He}}}{RT} = 0{,}17\ \mathrm{kg/m^3}\,.$$

   Iz enačbe za ravnovesje balona sledi

$$h = \frac{m_b + \rho_{\mathrm{vrv}} Sl - (\rho_{\mathrm{zrak}} - \rho_{\mathrm{He}}) V_b}{\rho_{\mathrm{voda}} S} = 1{,}02\ \mathrm{m} \approx 1{,}0\ \mathrm{m}\,.$$

   b) Če vrvico potegnemo navzdol za x, se poveča vzgon za težo dodatno izpodrinjene vode v prostornini Sx:

$$F = g\rho_{\mathrm{voda}} Sx\,.$$

   Sila kaže proti ravnovesni legi in je premo sorazmerna z odmikom iz ravnovesne lege, tako kot pri nihalu na vijačno vzmet. Koeficientu vzmeti ustreza izraz

$$k = g\rho_{\mathrm{voda}} S\,.$$

   Balon z vrvico niha z nihajnim časom

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,,$$

   pri čemer je m vsota mas praznega balona, helija in vrvice:

$$m = m_b + \rho_{\mathrm{He}} V_b + \rho_{\mathrm{vrv}} Sl\,.$$

Izračunamo

$$k = g\rho_{\text{voda}}S = 7{,}64 \cdot 10^{-3}\ \text{N/m}\,, \qquad m = 14{,}2\ \text{g}$$

in

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 8{,}9\ \text{s}\,.$$

Rešitve tekmovanje iz znanja naravoslovja – šolsko tekmovanje

4. in 5. razred

1. naloga

Pri poskusu SOLINE bi lahko namesto papirnate brisače (kot filter) uporabili papir, časopisni papir, toaletni papir, gosto spužvo, karton, krpo iz gosto tkanega blaga ali kuhinjsko krpo (vileda ali podobno). Pa še kaj.

2. naloga

Mokre mivke ne moremo sejati, ker voda zlepi zrna mivke med seboj **(C)**.

3. naloga

Na podoben način kot mivko in sol bi lahko sestavini ločil tudi v zmeseh sladkorja in mivke ter soli in žagovine. Moke in soli ne bi mogli ločiti na podoben način, ker se ob prisotnosti vode proteini iz moke med seboj kemijsko povežejo (temu procesu rečemo *hidratacija*). Z mehanskim (*fizikalnim*) postopkom *filtracije* ne moremo ločiti na sestavine snovi, ki so med seboj kemijsko reagirale.
V pšenični moki dva naravno prisotna proteina, glutenin in gliadin ob hidrataciji tvorita gluten (za podrobnejše pojasnilo glej http://www.cookingscienceguy.com/pages/wp-content/uploads/2012/07/Explaining-Gluten.pdf).

4. naloga

Ko v čašo vode stresemo žlico soli in pomešamo, se sol v vodi raztopi **(D)**.

5. naloga

Kristalčki soli imajo kvadratni presek **(F)**, so kvadri.

6. naloga

Pri povečani fizični aktivnosti se glede na mirovanje povečajo vse naštete količine, razen utripnega volumna srca, ki se ne spremeni. Utripni volumen srca je najbolj odvisen od starosti in velikosti osebe ter velikosti njenega srca.

7. naloga

Frekvenca utripanja srca zdravega odraslega človeka v mirovanju je okoli 1 Hz **(A)**, 1 utrip v sekundi.

8. naloga

Zdrav odrasel človek ima približno 6 litrov krvi (med 4 litri in 7 litri).

9. naloga

a. Frekvenca utripanja Ganginega srca je 30 utripov na minuto ali 1 utrip na 2 sekundi ali pol utripa na sekundo:

$$\frac{30}{\text{min}} = \frac{30}{60\,\text{s}} = \frac{1}{2\,\text{s}} = \frac{1}{2}\,\text{Hz} = 0{,}5\,\text{Hz}$$

b. Gangino srce utripne 30-krat v minuti, pri vsakem utripu prečrpa 1 utripni volumen, ki je 8 litrov, kar pomeni, da v 1 minuti prečrpa 30·8 litrov = 240 litrov krvi.

c. Če Gangino srce v 1 minuti prečrpa 240 litrov krvi, jih v 4 minutah prečrpa že skoraj 1000, natančno pa 4·240 litrov = 960 litrov. Do 1000 jih manjka še 40. Z enim utripom Gangino srce prečrpa 8 litrov, 40 litrov pa jih prečrpa s 5 utripi, ki jih opravi v 10 sekundah. Gangino srce prečrpa 1000 litrov krvi v 4 minutah in 10 sekundah.

Slon je velika žival in tudi njegovo srce je velika, zdržljiva in močna naprava, ki prečrpa 1000 litrov (!!!) v 4 minutah in še malo. In tako od minute do minute, dneva do dneva, leta do leta…. Si predstavljamo, koliko je 1000 litrov? Kocka z robom dolgim 1 m ima prostornino 1000 litrov.

10. naloga

Kovanec za 1 cent je imel pred trkom največjo hitrost v primeru **(C)**. Tako sklepamo po tem, da se je najtežji kovanec za 50 centov po trku z lahkim kovancem za 1 cent premaknil dlje kot lažji kovanec za 20 centov (in enako kot še lažji kovanec za 10 centov).

11. naloga

V primeru, ko lahki kovanec središčno trči v mirujoči težki kovanec, se lahki kovanec od težkega odbije nazaj, težki pa se giblje v smeri, v kateri se giblje lahki kovanec pred trkom. Samo na sliki **(A)** je prikazano, da se lahki kovanec po trku odbije nazaj.

12. naloga

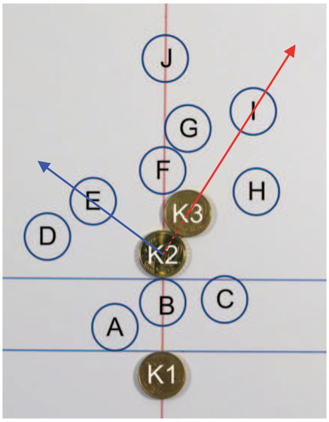
V primeru, ko težki kovanec središčno trči v mirujoči lahki kovanec, se smer gibanja težkega kovanca ne spremeni, še vedno se giblje naprej, a počasneje. Lahki kovanec, v katerega je središčno trčil težki kovanec, se po trku giblje v smeri, v kateri se giblje težki kovanec pred trkom, in hitreje od težkega kovanca. Lahki kovanec doseže večjo razdaljo kot težki, kot kaže slika **(D)**.

13. naloga

Trk kovanca K1 s tarčo, ki jo sestavljata dva kovanca, je zaporedje dveh trkov.

Najprej trči K1 središčno s K2 in takoj zatem trči K2 ne-središčno s K3. Ko središčno trčita enaka kovanca, od katerih pred trkom drugi miruje, opazimo, da se po trku v gibanju zamenjata: prvi kovanec obmiruje na mestu trka, drugi pa se giblje naprej v isti smeri, v kateri se je gibal prvi kovanec pred trkom. Za trk kovanca K1 s kovancem K2 to pomeni, da kovanec K1 po trku obmiruje v legi **(B)**, kovanec K2 pa se takoj po trku giblje v smeri, v kateri se je pred trkom gibal K1.

Drugi trk kovancev K2 in K3 (ki se zgodi takoj za prvim trkom) je ne-središčni. Pri nesrediščnem trku dveh enakih kovancev, od katerih drugi (v našem primeru K3) pred trkom miruje, opazimo, da se po trku drugi kovanec (K3) giblje v smeri, ki jo določa premica skozi središči obeh kovancev K2 in K3. Po nesrediščnem trku se po trku giblje tudi prvi kovanec (v našem primeru K2), a v drugi smeri kot pred trkom. Opazimo, da sta smeri gibanja kovancev K2 in K3 po trku med seboj približno pravokotni. Od označenih leg ustrezata zapisanim opažanjem samo legi **(E)** za K2 in **(I)** za K3.



6. in 7. razred

1. naloga

Vodna raztopina barvila rdečega zelja je indikator kislosti in bazičnosti. Če v raztopino dodamo kislino (kisline imajo pH pod 7), se raztopina obarva rdeče, če dodamo bazo (baze imajo pH nad 7), se raztopina obarva modro-zeleno. Jedilna soda (natrijev hidrogenkarbonat) je baza.

a. Vodna raztopina barvila rdečega zelja brez dodatkov je vijolična **(E)**.
b. Vodna raztopina barvila rdečega zelja z dodano citronsko kislino je rdeča **(B)**.
c. Vodna raztopina barvila rdečega zelja z dodano jedilno sodo je modro-zelena **(D)**.

2. naloga

Ko zmešamo suha praška citronske kisline in jedilne sode se ne zgodi nič od naštetega **(D)**. Reakcija poteče šele, ko dodamo vodo.

3. naloga

Ogljikov dioksid JE težji od zraka, NI strupen (v naravnih koncentracijah; kar pa velja za vse…), JE brezbarven, JE brez vonja in NE pospešuje gorenja.

4. naloga

Pri poskusu z barvilom rdečega zelja bi lahko jedilno sodo nadomestili s pralnim praškom ali detergentom za posodo in dobili enak rezultat.

5. naloga

V razpredelnici v razpisu poskusa so podani polmeri tirnic planetov in njihovi obhodni časi. Opazimo, da so obhodni časi in polmeri tirnic med seboj *monotono* povezani. Če sta dve količini med seboj monotono povezani (korelirani, soodvisni), lahko to povezavo kvalitativno opišemo s *čim … tem …* stavkom. *Čim bližje je planet Soncu, tem krajši je njegov obhodni čas* (njegovo leto). Planeti se od planeta z najdaljšim letom do planeta z najkrajšim letom zvrstijo tako: **U**ran, **S**aturn, **J**upiter, **M**ars, **Z**emlja, **V**enera.

6. naloga

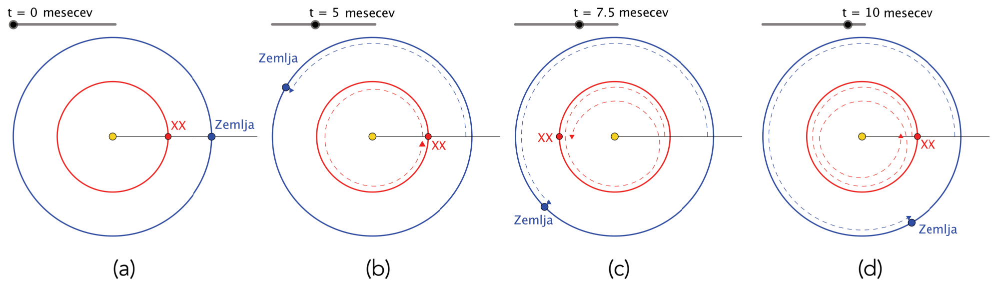
Pri poskusu z modelom Osončja smo opazili, da obstaja tudi monotona povezava med oddaljenostjo planeta od Sonca in hitrostjo, s katero planet kroži okoli Sonca. *Čim bližje je planet Soncu, tem hitreje se giblje*. To pomeni, da planet, ki je bližje Soncu, v 1 mesecu opravi daljšo pot kot planet, ki je bolj oddaljen od Sonca. Med naštetimi planeti je Soncu najbližje Venera **(V)**, ki opravi v 1 mesecu tudi najdaljšo pot. Od planetov Osončja opravi v istem času daljšo pot le še Merkur, ki pa ni med planeti, naštetimi pri nalogi.

7.a naloga

Če smo opravili poskus z modelom Osončja, smo si zapomnili, da traja Merkurjevo leto (približno) 3 mesece in Venerino leto (približno) 7 mesecev. Upoštevamo še ugotovitev, da čim bližje je planet Soncu, tem krajše je njegovo leto in umestimo novi planet XX z dolžino leta 5 mesecev med Merkur in Venero **(A)**.

7.b naloga

Slike kažejo zaporedne lege Sonca, Zemlje in planeta XX ob različnih časih. Ob t = 0 sta Zemlja in XX poravnana s Soncem (XX je v spodnji konjunkciji s Soncem), kot kaže slika (a). Od trenutka t = 0 naprej planet XX v obkroževanju Sonca prehiteva Zemljo. V 5 naslednjih mesecih XX enkrat obkroži Sonce, Zemlja pa v istem času opravi le 5 dvanajstin enega obhoda, kot kaže slika (b). Še pol leta planeta XX naprej, ob času t = 7,5 mesecev, je za planetom XX že en obhod in pol, za Zemljo pa tudi več kot pol obhoda in je malo pred planetom XX, ki jo dohiteva, kot kaže slika (c). Zadnja slika (d) kaže lego obeh planetov ob času t = 10 mesecev: planet XX je točno dvakrat obkrožil Sonce, za Zemljo pa še ni en cel obhod. Med časoma t = 7,5 mesecev in t = 10 mesecev se v nekem trenutku XX in Zemlja ponovno znajdeta poravnana s Soncem na enak način kot ob času t = 0; to je tedaj, ko XX pri svojem drugem obkrožanju Sonca ujame Zemljo pri njenem prvem obkrožanju Sonca. Edini odgovor med ponujenimi, ki ustreza dobi med t = 7,5 mesecev in t = 10 mesecev, je odgovor **(E)**: 8,5 mesecev.



Odgovora na vprašanji 7.a in 7.b lahko poiščete tudi s pomočjo dinamičnega prikaza gibanja notranjih planetov Osončja na spletni strani http://www.geogebr.si/astronomija/gibanje-notranjih-planetov-osoncja/.

8. naloga

Planete je ugodneje opazovati, ko so v opoziciji (glede na Zemljo so na nasprotni strani kot Sonce), ker so takrat bližje Zemlji, je med opazovanjem noč (tema) in so vidni celo noč.

9. naloga

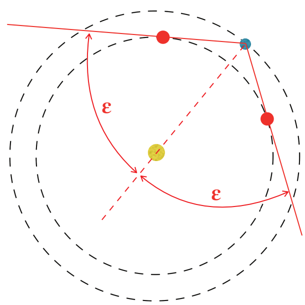
V 7 Zemljinih letih mine 7·12 mesecev. Ker traja Venerino leto 7 mesecev, takoj ugotovimo, da Venera v 7 Zemljinih letih obkroži Sonce **12-krat**. Če upoštevamo, da traja Venerino leto več kot 7 mesece (224,7 dni), ugotovimo, da Venera v 7 letih obkroži Sonce 11,4 - krat.

10. naloga

Glede na trenutno lego zunanjega planeta obstajata na tirnici notranjega planeta dve legi, v katerih ima notranji planet največjo elongacijo - vzhodno in zahodno. Ti dve legi sta označeni na sliki. Določeni sta kot dotikališči tangente, ki ju na tirnico notranjega planeta narišemo iz točke, ki označuje trenutno lego zunanjega planeta. Izmerimo kot (elongacijo),

$\varepsilon \simeq$ **54° ± 2°**.

Prikaz spreminjanja elongacije s časom, izdelan z orodjem GeoGebra, je dosegljiv na spletnem naslovu www.geogebr.si/astronomija/elongacija-merkurja-in-venere



11. naloga

Po 6 urah namakanja v obarvani vodi je rezina iz sredine medvedka videti taka, kot na sliki **(C)**.

12. naloga

Ko jajce brez lupine nekaj ur namakamo v destilirani vodi, voda prodira (procesu rečemo osmoza) skozi jajčno membrano v jajce, jajce je vedno večje. Ko jajce iz destilirane vode prestavimo v vodno raztopino sladkorja, se proces prehajanja vode obrne. Voda zdaj prehaja (z osmozo) iz jajca v raztopino sladkorja. Masa jajca se zato zmanjšuje, jajce se suši **(B)**.

13. naloga

Fiziološka raztopina je 0,9 % raztopina soli (natrijevega klorida) v vodi **(E)**.

14. naloga

Ob pitju zelo sladke pijače celice v telesu izgubljajo vodo (podobno kot jajce brez lupine) in dobijo hrano.

15. naloga

Skozi polprepustno membrano celice prehaja z osmozo topilo (voda), z difuzijo pa topljenci (soli, sladkorji …). Celice živih organizmov se prehranjujejo z difuzijo.

16. naloga

Ko na celice sveže rdeče čebule kapnemo kapljico zelo slane vode, to povzroči, da začne iz celic skozi celične membrane z osmozo prehajati voda. Celice se sušijo, podobno, kot se suši jajce brez lupine v zelo sladki vodi. Pod mikroskopom so videti manjše, posušene, zgubane (kot rozine), kot celice na sliki **(C)**.