Tekmovanja

Tekmovanje srednješolcev v znanju fizike – šolsko tekmovanje

Naloge za srednjo šolo

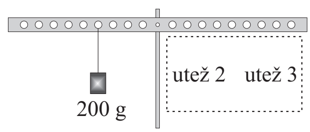
1. V loncu s prostornino devet litrov je sedem litrov vode. V vodo potopimo telo nepravilne oblike tako, da je v celoti potopljeno. Pri tem se čez rob lonca prelije nekaj vode. Ko telo vzamemo iz vode, so v loncu le še štirje litri vode. Kolikšna je prostornina telesa?

(**A**) En liter. (**B**) Dva litra. (**C**) Trije litri. (**D**) Štirje litri. (**E**) Pet litrov.

2. Ko na leseno klado delujemo s konstantno silo F v vodoravni smeri proti desni (glej sliko), klada po hrapavi podlagi drsi s konstantno hitrostjo. Katera puščica najbolj ustrezno kaže, v kateri smeri podlaga deluje na klado?

(**A**) $\leftarrow$ (**B**) $\nwarrow$ (**C**) $\uparrow$ (**D**) $\nearrow$ (**E**) $\rightarrow$

3. Na prečko, ki ima enakomerno navrtane luknje in je vrtljivo pritrjena na sredini, je Tine na levo stran na četrto luknjo obesil utež z maso 200 g. Na desno je na različne luknje obešal različne uteži. Vsakič, ko je ugotovil, da je prečka v ravnovesju, je zapisal v tabelo, na kateri luknji na desni je visela kolikšna utež. Na desni sta vsakič hkrati viseli dve uteži na dveh različnih luknjah. V zadnji vrstici tabele mu je nekdo izbrisal podatek, na kateri luknji je visela 100 g utež. Kaj je pisalo na mestu ________?



leva stran	desna stran	
utež 1	utež 2	utež 3
200 g na 4. luknji	200 g na 1. luknji	100 g na 6. luknji
200 g na 4. luknji	400 g na 1. luknji	200 g na 2. luknji
200 g na 4. luknji	100 g na 2. luknji	150 g na 4. luknji
200 g na 4. luknji	250 g na 2. luknji	100 g na 3. luknji
200 g na 4. luknji	200 g na 3. luknji	100 g na ________

(**A**) 1. luknji. (**B**) 2. luknji. (**C**) 3. luknji. (**D**) 4. luknji. (**E**) 5. luknji.

4. Imamo tri enake kovinske kroglice na izoliranih podstavkih. Na 1. in 2. kroglici sta enako velika pozitivna naboja, 3. kroglica je nevtralna. Najprej staknemo 2. in 3. kroglico, nato staknemo 1. in 2. kroglico. Kakšni so končni naboji na kroglicah?

(**A**) $e_1 < e_2 = e_3$ (**B**) $e_1 = e_2 < e_3$ (**C**) $e_1 = e_2 = e_3$ (**D**) $e_1 = e_2 > e_3$ (**E**) $e_1 > e_2 > e_3$

5. Homogen kvader ima stranice v razmerju $a : b : c = 1 : 2 : 4$. Najprej kvader položimo na največjo ploskev, nato na srednjo ploskev in na koncu na najmanjšo ploskev. V vsakem položaju je tlak pod kvadrom zaradi kvadra povečan v primerjavi s tlakom, ko kvadra ni. V kolikšnem razmerju so trije tlaki, ki jih povzroča kvader po vrsti na največji, na srednji in na najmanjši ploskvi?

(**A**) $1 : 1 : 1$ (**B**) $1 : 2 : 4$ (**C**) $1 : 2 : 8$ (**D**) $1 : 4 : 8$ (**E**) $1 : 4 : 16$

6. Približno kolikšno je razmerje kotne hitrosti ω_1, s katero Luna kroži okoli Zemlje, in kotne hitrosti ω_2, s katero Zemlja kroži okoli Sonca?

(**A**) $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 0{,}74$ (**B**) $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 1$ (**C**) $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 13{,}5$ (**D**) $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 27$ (**E**) $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 365$

7. S štoparico, ki meri čas na 0,1 s natančno, želi skupina dijakov čim natančneje izmeriti čas enega obrata vrtiljaka, ki se enakomerno vrti. Iz katerega niza meritev lahko dobijo najbolj natančen čas enega obrata vrtiljaka?

(**A**) En dijak izmeri čas 10 obratov.

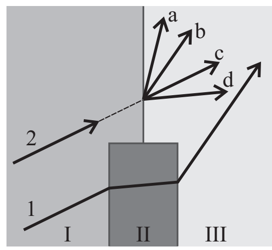
(**B**) Deset dijakov izmeri čas enega obrata.

(**C**) En dijak 10-krat izmeri čas enega obrata.

(**D**) En dijak izmeri čas enega obrata za 10 enakih vrtiljakov.

(**E**) Iz vseh meritev zgoraj bodo rezultati enako natančni.

8. Slika na desni kaže, kako se svetloba lomi (žarek 1) pri prehodu skozi tri prozorne snovi, označene z I, II in III. Žarek 2 je v snovi I vzporeden žarku 1. Katera puščica pravilno prikazuje smer, v kateri se bo po prehodu v snov III širila svetloba, ki vpada na mejo med snovema I in III v smeri žarka 2?

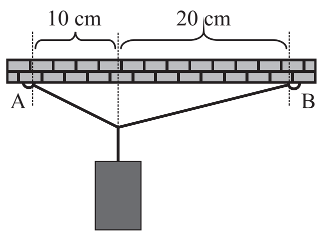


(**A**) Puščica a. (**B**) Puščica b.

(**C**) Puščica c. (**D**) Puščica d.

(**E**) Ni dovolj podatkov, da bi napovedali smer svetlobe v snovi III.

9. Telo je z vrvicama privezano v točkah A in B na strop, kot kaže skica, ki ni narisana v merilu. Teža telesa je 12 N. Katera izjava je pravilna?



(**A**) Sili v A in B sta enaki 6,0 N.

(**B**) Sili v A in B sta enaki 8,5 N.

(**C**) Sila v A je 8,0 N, sila v B je 4,0 N.

(**D**) Sila v A je 11,3 N, sila v B je 8,9 N.

(**E**) Ni dovolj podatkov, da bi določili sili v A in B.

10. Ko nehomogeno telo, ki nima lukenj, plava v vodi, je 90 % telesa potopljenega pod gladino. Od telesa odlomimo majhen del s prostornino 0,34 dm^3 in z maso 290 g. Kaj velja za preostanek telesa?

(**A**) Preostanku telesa se povprečna gostota poveča in še naprej plava.

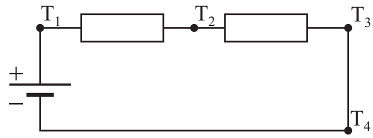
(**B**) Preostanku telesa se povprečna gostota zmanjša in še naprej plava.

(**C**) Preostanku telesa se povprečna gostota poveča in potone.

(**D**) Preostanku telesa se povprečna gostota zmanjša in potone.

(**E**) Preostanku telesa se povprečna gostota poveča, a ne moremo napovedati, ali plava ali potone.

11. V vezju sta dva enaka zaporedno vezana upornika z uporom po 100 Ω. Na voljo imamo še en upornik z uporom 100 Ω. Kako naj vežemo tretji upornik, da bo skupni upor vezja enak 150 Ω?



(**A**) Dodatno med točki T_1 in T_3 v obstoječe vezje.

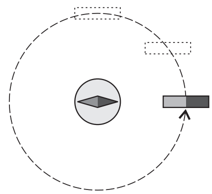
(**B**) Dodatno med točki T_2 in T_4 v obstoječe vezje.

(**C**) Dodatno med točki T_3 in T_4 v obstoječe vezje.

(**D**) Med točki T_3 in T_4 namesto obstoječe povezave med tema točkama.

(**E**) Z dodatnim upornikom z uporom 100 Ω ne moremo doseči skupnega upora vezja 150 Ω.

12. Paličast magnet počasi premikamo po krožnici tako, da ga ne vrtimo (glej sliko). Na ta način magnet enkrat obkroži kompas, ki je v sredini krožnice. Kolikokrat se pri tem zavrti magnetna igla v kompasu?



(**A**) Se ne zavrti. (**B**) Za pol obrata.

(**C**) Za en obrat. (**D**) Za dva obrata.

(**E**) Ni dovolj podatkov, da bi določili število obratov magnetne igle.

13. Krogla ima enak premer kot okrogla luknja v plošči. Kroglo segrejemo za 30 K, ploščo segrejemo za 40 K. Krogla in plošča sta narejeni iz različnih kovin. Katera od trditev je pravilna?

(**A**) Luknja v plošči se bo povečala in njen premer bo večji od premera krogle.

(**B**) Luknja v plošči se bo povečala in njen premer bo enak premeru krogle.

(**C**) Luknja v plošči se bo povečala in njen premer bo manjši od premera krogle.

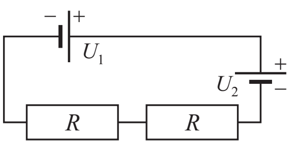
(**D**) Luknja v plošči se bo zmanjšala in njen premer bo manjši od premera krogle.

(**E**) Za pravilno napoved imamo na voljo premalo podatkov.

14. Dva homogena predmeta, K in L, sta narejena iz različnih snovi, ki imata specifični toploti v razmerju $c_K : c_L = 1 : 2$. Njuni masi sta v razmerju $m_K : m_L = 3 : 2$. Ko predmet K prejme 2000 J toplote, se segreje za 12 °C. Za koliko se z enako količino prejete toplote segreje predmet L?

(**A**) Za 4 °C. (**B**) Za 6 °C. (**C**) Za 8 °C. (**D**) Za 9 °C. (**E**) Za 16 °C.

15. V električni krog zaporedno vežemo dve bateriji z gonilnima napetostima $U_1 = 4{,}5$ V in $U_2 = 1{,}5$ V ter dva enaka upornika z uporom po $R = 100$ Ω, kot kaže shema vezave ob besedilu. Kolikšna je napetost na levem uporniku?



(**A**) 6 V. (**B**) 4,5 V. (**C**) 3 V. (**D**) 1,5 V. (**E**) 0 V.

16. Fizikalna količina A je odvisna od fizikalnih količin B in C. Tabeli kažeta, kako se spreminja vrednost A, ko se spreminja ali samo količina B (leva tabela) ali samo količina C (desna tabela). Katera od enačb pod tabelama pravilno opisuje zvezo med A, B in C?

B	$2B$	$3B$
A	$\frac{1}{2}A$	$\frac{1}{3}A$

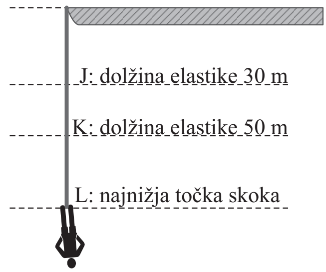
C	$2C$	$3C$
A	$4A$	$9A$

(**A**) $A = B\sqrt{C}$ (**B**) $A = B\,C^2$ (**C**) $A = C/B$ (**D**) $A = B/\sqrt{C}$ (**E**) $A = C^2/B$

17. Smukač z maso 90 kg se spusti z vrha 300 m visokega hriba po 800 m dolgi progi brez ovinkov in s stalnim naklonom. Ob vznožju hriba ima hitrost 40 m/s. Kolikšno delo opravi sila zračnega upora, če poleg sile upora gibanje smukača zavira še stalna sila trenja 62,5 N?

(**A**) 50 kJ. (**B**) 122 kJ. (**C**) 148 kJ. (**D**) 198 kJ. (**E**) 220 kJ.

18. Bungee skok je fizikalno zelo zanimiv dogodek. Neraztegnjena elastika je dolga 30 m. Ko skakalec po skoku obmiruje pritrjen na krajišče elastike, je elastika dolga 50 m. Masa skakalca je 60 kg, obravnavamo ga kot točkasto telo. Predpostavimo, da se elastika obnaša kot idealna vzmet. Kje je skakalec, ko ima največjo hitrost?

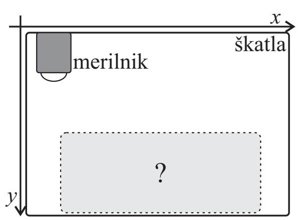


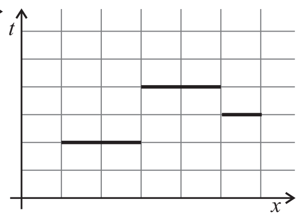
(**A**) V legi J. (**B**) Med legama J in K.
(**C**) V legi K. (**D**) Med legama K in L.
(**E**) V legi L.

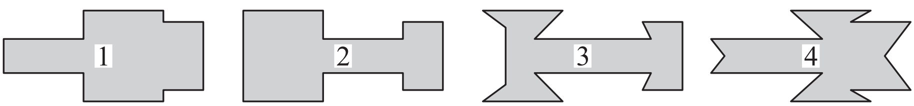
19. Avtomobil z dolžino 4 m, ki vozi s hitrostjo 35 m/s, prehiteva tovornjak z dolžino 13 m, ki vozi s hitrostjo 25 m/s. Prehitevanje začne, ko je razdalja med prednjim delom avtomobila in zadnjim delom tovornjaka 2 m, in ga zaključi, ko je med zadnjim delom avtomobila in prednjim delom tovornjaka razdalja 2 m. Koliko časa traja prehitevanje?

(**A**) 0,6 s. (**B**) 1,3 s. (**C**) 1,7 s. (**D**) 2,1 s.
(**E**) Ni dovolj podatkov, da bi določili čas prehitevanja.

20. Ultrazvočni merilnik deluje tako, da odda kratek pulz (kratko zvočno motnjo) in sprejme od ovire odbiti pulz. Ultrazvočni merilnik izmeri skupni čas potovanja zvočnega pulza od oddajnika do ovire in nazaj od ovire do oddajnika. Z ultrazvočnim merilnikom želimo odkriti, kateri od oštevilčenih predmetov spodaj je v osenčenem delu v škatli na sliki zgoraj levo. S premikanjem merilnika vzdolž osi x izmerimo čase potovanja odbitega zvočnega pulza na različnih mestih $t(x)$. Rezultati meritev nad osenčenim delom so prikazani na grafu zgoraj desno. Katera trditev je najbolj v skladu z dobljenim grafom?





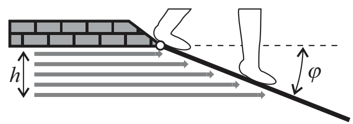


(**A**) V škatli je gotovo predmet 1. (**B**) V škatli bi lahko bil predmet 1, a ni nujno.
(**C**) V škatli je gotovo predmet 2. (**D**) V škatli bi lahko bil predmet 3, a ni nujno.
(**E**) V škatli je gotovo predmet 4.

54. fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije – regijsko tekmovanje

Skupina I

1. Mateja ima maso 45 kg in se uči deskanja na valovih. Za ta namen ima bazen ob enem robu narejen poseben vodni curek nad gladino vode v bazenu. Tik nad zgornjim robom vodnega curka je vrtljivo vpeta ravna deska z dolžino 1,2 m in z maso 20 kg, kot kaže slika. Deska je vpeta tako, da je pri vseh kotih φ v celoti nad gladino vode v bazenu in da jo zadene celoten curek vode. Curek ima prečni presek z višino $h = 25$ cm in s širino, ki je enaka širini deske. Sila curka na desko ima vodoravno smer in velikost $F(v) = kv^2$, kjer je $k = 225\ \mathrm{Ns^2/m^2}$.



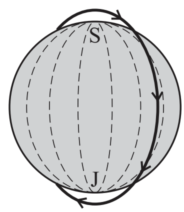
   a) Voda v curku ima hitrost 2,0 m/s. Na deski ni nikogar. Kolikšen je kot φ v ravnovesju?

   Med učenjem deskanja je hitrost vode v curku 3,0 m/s. Mateja previdno stopi na desko tako, da ima eno nogo natančno nad osjo, kjer je deska vrtljivo vpeta, drugo (sprednjo) pa počasi premika po deski vedno dlje od osi. Težo razporeja tako, da je sila obeh nog na podlago ves čas navpična in po velikosti enaka pod vsako nogo.

   b) Kolikšen je kot φ v ravnovesju, ko Mateja s sprednjo nogo na desko pritiska na razdalji 65 cm od osi?

   c) Največ na kolikšni razdalji od osi sme pritiskati s sprednjo nogo na desko, da še ne pade z deske v vodo v bazenu, če je največji kot φ, pri katerem še lahko stoji na deski, 30°?

2. Satelit z obhodnim časom 87 min kroži v *polarni orbiti*. To pomeni, da satelit kroži preko obeh zemeljskih polov kot kaže slika. Gibanje satelita spremlja opazovalec v kraju na zemljepisni širini 40°.



   a) Na kolikšni višini nad površjem Zemlje kroži satelit?

   b) S kolikšno hitrostjo kroži? Hitrost izrazi v km/s.

   c) S kolikšno hitrostjo in v kateri smeri (proti vzhodu ali proti zahodu) kroži opazovalec okoli Zemljine osi? Hitrost izrazi v km/s.

   d) Kolikšen kot oklepa tir gibanja satelita s smerjo sever-jug, ko je satelit navpično nad opazovalcem? Ali se od točke navpično nad opazovalcem satelit giblje vzhodno ali zahodno od poldnevnika (meridiana), na katerem je opazovalec?

3. Igralec skvoša stoji na sredini med visokima vzporednima stenama, ki sta med seboj oddaljeni 5,0 m. Proti eni od sten udari žogico poševno navzgor pod kotom φ glede na vodoravnico. Udari jo tako, da je žogica med letom ves čas v navpični ravnini, ki je pravokotna na steni. Žogica ima takoj po udarcu hitrost 65 km/h, se ne vrti in se od sten popolnoma prožno odbija.

   a) Pod kolikšnim najmanjšim kotom φ mora igralec udariti žogico, da se ta po dveh odbojih vrne natančno v začetno točko?

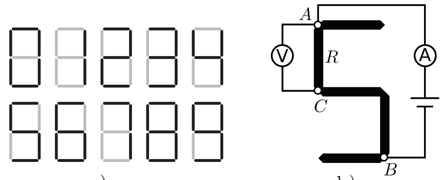
   b) Pod kolikšnim največjim kotom φ mora igralec udariti žogico, da se ta po dveh odbojih vrne natančno v začetno točko?

   c) Za največ koliko se žogica dvigne med letom v vprašanjih a) in b)?

   d) Koliko je vseh različnih kotov, pri katerih se žogica po sodem številu odbojev vrne natančno v začetno točko?

Skupina II

1. Na panoju razporedimo prevodne ploščice v obliki številk (števk) od 0 do 9, kot kaže slika a). Sosednje ploščice so v električnem kontaktu. Med točki A in B priključimo napetost 9,00 V in merimo tok skozi izvir ter napetost med točkama A in C. Primer vezja za razporeditev ploščic v obliki števke 5 kaže slika b).



a) b)

   a) Pri nekaterih števkah je napetost med A in C enaka 0, pri nekaterih pa je tok med A in B enak 0. Katere števke so to?

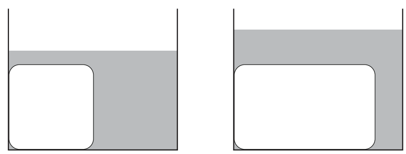
   b) Pri kateri števki je izmerjena napetost enaka 5,40 V?

   c) Kolikšen je upor ene ploščice, če med A in B v primeru b) teče tok 36 mA?

   d) Štiri števke sestavimo v 4-mestno število in izmerimo naslednje tokove in napetosti na posameznih števkah od leve proti desni:

   $I_1 = 36$ mA, $I_2 = 90$ mA, $I_3 = 60$ mA, $I_4 = 90$ mA,
   $U_1 = 5{,}40$ V, $U_2 = 4{,}50$ V, $U_3 = 6{,}00$ V, $U_4 = 2{,}25$ V.
   Katera število je prikazano?

2. V posodi z vodoravnim dnom s ploščino 400 cm^2 je 5,0 litrov vode in na dnu pritrjen potopljen balon s prostornino 7,0 litrov. V balonu je zrak s temperaturo 7,0 °C, tlak zraka v balonu je 100 kPa. Specifična toplota zraka pri konstantnem tlaku je 1010 J/kgK. Opna balona je mehka in ne ustvarja dodatnega tlaka v balonu. Balon se napihuje (širi) oziroma krči le v vodoravni smeri, kot kaže slika.



   a) Za koliko se dvigne gladina vode, če zrak v balonu segrejemo za 80 K? Privzemi, da je tlak v balonu ves čas konstanten in se voda pri tem ne segreva.

   b) Koliko toplote smo pri tem dovedli zraku v balonu?

   c) Koliko bi se spremenil rezultat pri a), če bi upoštevali, da tlak zraka ni konstanten?

3. Iz dveh navpično postavljenih kovinskih plošč v obliki pravokotnika s širino 10 cm in višino 20 cm v razmiku 5,0 mm sestavimo ploščati kondenzator. Na dnu in ob straneh postavimo neprevodne plošče, tako da dobimo posodo, ki dobro tesni, hkrati pa omogoča, da prevodni plošči kondenzatorja poljubno razmikamo. V posodo nalijemo olje z dielektričnostjo $\varepsilon = 80$ do vrha plošč in priključimo kovinski plošči na napetost 2000 V. (Če je v kondenzatorju snov z dielektričnostjo ε, se kapaciteta kondenzatorja poveča za faktor ε v primerjavi s praznim kondenzatorjem.)

   a) Kolikšen je naboj na ploščah kondenzatorja?

   b) Razmik med ploščama povečamo na 8,0 mm. Kolikšen je sedaj naboj na ploščah?

   c) Za koliko se v primeru b) spremeni električna energija kondenzatorja?

   d) Napajanje izključimo in plošči razmaknemo, tako da je razmik med ploščama enak 11,0 mm. Kolikšen je naboj na ploščah?

Skupina III

1. Strela udari iz oblaka navpično navzdol v tla. Ko se vzpostavi tako imenovani *prevodni kanal* med oblakom in tlemi, skoraj hipoma (v času nekaj μs) po prevodnem kanalu steče zelo velik naboj. Ob tem se zrak močno segreje in zasveti, kar vidimo kot blisk. Istočasno se vzdolž celotnega prevodnega kanala zelo poveča tlak, kar povzroči pok, ki ga slišimo kot grom. Ko udari strela, je energija oddanega zvočnega valovanja enakomerno porazdeljena vzdolž celotne dolžine prevodnega kanala. Grom zaslišimo 6 s po udarcu strele v tla, grmenje traja 1,5 s. Predpostavi, da je hitrost zvoka povsod v zraku enaka 340 m/s. Zanemari tudi morebitne odboje zvoka.

   a) Kolikšna je razdalja poslušalca od točke, kamor je strela udarila v tla?

   b) Kolikšna je višina oblaka, od koder je strela udarila v tla?

   c) Kolikšno je razmerje gostote energijskega toka zvoka, ki ga poslušalec sliši na koncu grmenja, in gostote energijskega toka zvoka, ki ga poslušalec sliši na začetku grmenja?

   Jakost zvoka izražamo tudi kot glasnost G, ki jo definiramo z enačbo $G = 10\log(j/j_0)$, kjer je j gostota energijskega toka zvoka in j_0 mejna gostota energijskega toka, da zvok še slišimo. S to enačbo izračunani številski vrednosti glasnosti pripišemo enoto *decibel* z oznako dB.

   d) Za koliko decibelov je za poslušalca glasnost zvoka na koncu grmenja manjša od glasnosti zvoka na začetku grmenja?

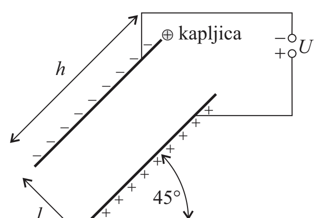
2. Na sončen dan na parkirišče sočasno pripeljeta in parkirata dva moderna avtomobila, ki imata obliko polkrogle s polmerom 1,5 m. Prvi je bel in ima albedo (odbojnost) 0,8, drugi je črn in ima albedo 0,4. Podatka se nanašata na kratkovalovno (vidno) sončno svetlobo. Avtomobila in okolica sevajo v infrardečem področju in v tem primeru je albedo za oba avtomobila enak in meri 0,05. (V IR delu spektra sta torej oba avtomobila skoraj „črna".) Sonce je v zenitu in sveti navpično navzdol pravokotno na tla, gostota vpadnega energijskega toka je $j_s = 1{,}0$ kW/m^2. Ko pripeljeta na parkirišče, sta temperaturi obeh avtomobilov enaki temperaturi okolice $T_0 = 25$ °C. Privzemi, da je dno avtomobila izolirano.

   a) Kolikšen energijski tok (moč) s Sonca prejema (absorbira) beli in kolikšnen črni avtomobil?

   b) Kolikšna je ravnovesna temperatura belega in kolikšna ravnovesna temperatura črnega avtomobila, če izmenjujeta energijo z okolico le s sevanjem?

   c) Avtomobila oddajata energijski tok v okolico tudi s konvekcijo. Velja $P = \Lambda S(T - T_0)$, kjer je S površina telesa, segretega na temperaturo T, T_0 je temperatura okolice in Λ konvekcijski koeficient, $\Lambda = 6{,}0$ W/m^{2}K. Kolikšna je v tem primeru ravnovesna temperatura za oba avtomobila?
   Namig: Upoštevaj, da je $\Delta T = T - T_0$ dosti manj od T_0 ($x \equiv \Delta T/T_0 \ll 1$), zato lahko razvijemo četrto potenco dvočlenika kot $(1 + x)^4 \approx 1 + 4x$.

3. Kondenzator s kvadratnima ploščama s stranico $h = 20$ cm, ki sta med seboj oddaljeni $l = 10$ cm, postavimo poševno pod kotom 45°, kot kaže slika. Na kondenzator priključimo neznano konstantno napetost U. Ob zgornjem robu vrhnje plošče spustimo v kondenzator oljno kapljico z maso 0,1 mg in z nabojem $+1{,}0 \cdot 10^{-11}$ As.



   a) Najmanj kolikšna mora biti napetost U, da oljna kapljica pade skozi kondenzator, ne da bi se dotaknila spodnje plošče?
   Namig: Silo razstavi na vodoravno in navpično komponento.

   b) Napetost na kondenzatorju povečamo na dvakratno vrednost mejne napetosti, izračunane pri vprašanju a). Kapljica naj ima sedaj pri vstopu v kondenzator hitrost v smeri navpično navzdol. Kolikšna naj bo ta hitrost, da kapljica izstopi iz kondenzatorja tik ob robu spodnje plošče?
   Namig: Pospeške izrazi z g.

14. tekmovanje v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike – državno tekmovanje

1. skupina: Poslovna matematika

1. NALOGA

15 zidarjev v 16 dneh pri 8-urnem delavniku zgradi hišo, ki je 10,00 m široka in enako dolga ter 8,80 m visoka.

a) Kakšna bo višina novo zgrajene 22,5 % širše in 20 % krajše hiše, ki jo bo gradilo 14 zidarjev 2 tedna pri 12-urnem delavniku? (1 teden = 7dni)

b) Za koliko metrov in odstotkov bo druga hiša višja oziroma nižja od prve?

2. NALOGA

Tri podjetja so kot partnerji nastopila na trgu z novim izdelkom. Pri tem so bila pri izdelavi izdelka (od načrtovanja proizvodnje do prodaje na trgu) različno udeležena, in sicer:

OPIS DELEŽA PODJETJA	Podjetje A	Podjetje B	Podjetje C
Število strokovnjakov v podjetju (premo sorazmerno)	3	2	2
Vložena sredstva v projekt v € (premo sorazmerno)	150.000,00	180.000,00	120.000,00
Dohodek od predpogodb in promocij v € (obratno sorazmerno)	45.000,00	40.000,00	20.000,00
»Teža« strokovnjakov (razmerje) (premo sorazmerno)	1	1,5	0,9

a) Kako si bodo podjetja razdelila dobiček pod danimi pogoji v višini 1,200.500,00 EUR? Rezultat izrazi tudi v odstotkih!

b) Strokovnjaka podjetja B bosta prejela nagrado za izum. Dogovorita se, da si bosta nagrado razdelila premo sorazmerno glede na vložena sredstva v razmerju 3 : 2, premo sorazmerno glede na vložen čas v razmerju 2 : 5 ter obratno sorazmerno glede na že prejeta sredstva iz predpogodb, ki so v razmerju 1 : 2. Koliko bo prejel drugi izumitelj, če je prvi prejel 5.700,00 EUR?

3. NALOGA

Cena kvadratnega metra stanovanja je v začetku leta znašala 1.950,00 EUR, nato pa se je v prvi polovici leta dvakrat zapored zvišala, in sicer maja za 3 %, junija pa za 5 %.

a) Koliko je znašala cena za kvadratni meter stanovanja po posamezni podražitvi? Koliko odstotna je skupna podražitev?

b) Koliko odstotna bi morala biti enkratna <u>podražitev</u>/<u>pocenitev</u>, če se cena za m^2 stanovanja junija ne bi zvišala za 5 %, ampak znižala za 5 %?

c) Prodajalec stanovanja ponuja dve možnosti pri nakupu stanovanja: prva možnost je takojšnje plačilo 210.900,00 EUR; druga pa s poznejšim plačilom v znesku 225.127,74 EUR z vključenimi 6,75-odstotnimi stroški. Katera ponudba je ugodnejša in zakaj?

4. NALOGA

a) Koliko sta Micka in Janez vložila v banko pred 15 leti, če danes po preteku vezave razpolagata z zneskom 125.874,20 EUR. Banka vezane vloge obrestuje z obrestno obrestnim računom po 6,20-% letni dekurzivni obrestni meri in celoletni kapitalizaciji?

b) Micka bo svoj delež, ki znaša 45 % od vloženega, uporabila za nakup avtomobila, ki stane 25.000,00 EUR. Za znesek, ki ji bo zmanjkal, bo najela posojilo za dve leti po dogovorjeni 6-% letni obrestni meri, obrestno obrestnem računu pri semestralni kapitalizaciji. Koliko bo Micko stal novi avto?

---

2. skupina: Statistika

1. NALOGA

Nogometna Liga prvakov je najbolj znano klubsko nogometno tekmovanje v Evropi v organizaciji Evropske nogometne zveze (UEFA), ki poteka od leta 1955. Naslov je doslej osvojilo 21 klubov, od tega je to dvanajstim klubom uspelo več kot enkrat.

Tabela 1: **Klubi, ki so največkrat osvojili naslov Lige prvakov**

Klub	**Št. osvojenih naslovov v strukturnem odstotku**	**Število osvojenih naslovov**
Real Madrid	16,67	
Milan	11,67	
Bayern München	8,33	
Liverpool	8,33	
Barcelona	8,33	
Ostali klubi	46,67	
SKUPAJ	100,00	60

Vir: /sl.wikipedia.org/wiki/Nogometna_Liga_prvakov#Zmagovalci_po_klubih

a) Izračunajte, kolikokrat je posamezni klub osvojil naslov prvaka v Ligi prvakov. *(Rezultate zaokrožite na celo število in jih vpišite v tabelo 1.)*

V 60-letni zgodovini tekmovanja so naslove osvojili klubi iz 10-ih držav. V tabeli so navedene prve štiri najuspešnejše države.

Tabela 2: **Zmagovalci lige prvakov po državah**

Država	Št. naslovov prvaka	Prvaki iz te države
Španija	15	Real Madrid (10), Barcelona (5)
Italija	12	Milan (x), Internazionale (x), Juventus (x)
Anglija	12	Liverpool (5), Manchester United (3),Nottingham Forest (2), Chelsea (1), Aston Villa (1)
Nemčija	7	Bayern München (5), Borussia Dortmund (1),Hamburg (1)

Vir: sl.wikipedia.org/wiki/Nogometna_Liga_prvakov#Zmagovalci_po_dr.C5.BEavah

b) V odstotkih predstavite naslove prvakov angleških klubov glede na skupno število osvojenih naslovov te države in komentirajte rezultate.

Tabela 3: **Strukturni odstotek osvojenih naslovov angleških klubov glede na vse njihove zmage**

Klub	Št. osvojenih naslovov	Strukturni odstotek
Liverpool	5	
Manchester United	3	
Nottingham Forest	2	
Chelsea	1	
Aston Villa	1	
SKUPAJ	12	100,00

Vir: Tabela 2

c) V spodnji tabeli je zapisana uspešnost najboljših klubov iz Italije. *(Glejte tabelo 2.)*

Tabela 4: **Osvojeni naslovi italijanskih klubov glede na vse njihove zmage**

Klub	Št. osvojenih naslovov	Strukturni odstotki izraženi v stopinjah
Milan		210°
Internazionale		90°
Juventus		60°
Skupaj	12	360°

Vir: sl.wikipedia.org/wiki/Nogometna_Liga_prvakov#Zmagovalci_po_dr.C5.BEavah

Na podlagi podatkov v grafičnem prikazu in tabeli dopolnite spodaj navedene trditve.

Milan je osvojil naslov prvaka v tem tekmovanju ________-krat. Internazionale je osvojil naslov prvaka _____________-krat, Juventus je bil prvak _________ -krat.

2. NALOGA

Na srednji šoli »Veleumneži« je zaposlenih 87 učiteljev. Prav tako vemo, da je na šoli 9 dijakov na učitelja.

a) Koliko dijakov obiskuje to srednjo šolo?

b) Zapišite enačbo za koeficient, s katerim bi izrazili promil dijakov, ki ponavljajo letnik. Koliko znaša le-ta, če imajo na šoli 12 dijakov ponavljalcev?

c) Z ustreznim koeficientom zapišite, da je bilo na 100 dijakov 14 dijakov s statusom športnika.

d) Izmed vseh učiteljev jih 8 % poučuje matematiko. Od tega sta dva moška. Zapišite strukturo učiteljev matematike po spolu v odstotkih.

3. NALOGA

Iz Slovenije se vsako leto odseli določeno število prebivalcev v tujino. V tabeli so predstavljeni podatki o migracijah naših prebivalcev v letih od 2010 do 2014.

Tabela 5: **Število odseljenih iz Slovenije v tujino v letih od 2010 do 2014**

Leto	Skupno število odseljenih moških in žensk
2010	15937
2011	12024
2012	14378
2013	13384
2014	14336

Vir: SURS: http://pxweb.stat.si/pxweb/Dialog/Saveshow.asp

a) Izračunajte spremembe za skupno število odseljenih iz leta v leto z indeksi. Rezultate vpišite v spodnjo tabelo.

b) Za skupno število odseljenih izračunajte spremembe v številu odseljenih glede na leto 2014 v obliki indeksov in jih vpišite v spodnjo tabelo.

Tabela 6: **Indeksi za odseljene iz Slovenije v tujino po letih**

Leto	V_j	$I_{j/2014}$
2010		
2011		
2012		
2013		
2014		

Vir: Tabela 1

Radovednega dijaka srednje ekonomske šole je zanimalo, koliko je bilo med vsemi odseljenimi iz države žensk in koliko moških. O tem je našel samo nepopolne podatke. Pomagajte mu razrešiti to dilemo s pomočjo spodnje tabele, kjer imate danih nekaj podatkov.

Tabela 7: **Število odseljenih iz Slovenije v tujino po spolu v letih od 2010 do 2014**

Leto	Skupno število odseljenih	Moški	Ženske	$I_{j/2010}$ moški	$I_{j/2011}$ ženske	S_j moški	V_j ženske
2010	15937		4351				
2011	12024						
2012	14378			75,08			146,63
2013	13384				141,54		
2014	14336					8,95	

Vir: SURS: http://pxweb.stat.si/pxweb/Dialog/Saveshow.asp

c) Izračunajte število moških in žensk, odseljenih po posameznih letih. *(Rezultate zaokrožite na cela števila.)*

d) Dopolnite navedene trditve in podčrtajte pravilne trditve.

Število žensk, odseljenih iz države leta 2012, je bilo glede na leto 2011 za ________ odstotka ***večje/manjše***.

Število žensk, odseljenih iz države leta 2013, je bilo glede na leto 2011 za ______ odstotka ***večje/manjše***.

Leta 2012 se je iz države odselilo ________ odstotka ***več/manj*** moških kot leta 2010.

Stopnja rasti za moške v letu 2014 je bila ***pozitivna /negativna*** .

4. NALOGA

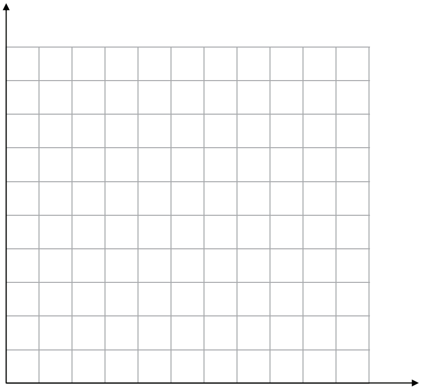
Tabela 8: **Delavci podjetja MERX Celje po zaslužkih v mesecu septembru 2015**

Zaslužek v EUR	**Št. delavcev f_j**	
nad 700 do 900	5	
nad 900 do 1.100	14	
nad 1.100 do 1.300	20	
nad 1.300 do 1.500	32	
nad 1.500 do 1.700	22	
nad 1.700 do 1.900	15	
nad 1.900 do 2.100	6	
Skupaj	**114**	

Vir: Izmišljeni podatki

a) Izračunajte zaslužek, od katerega je polovica delavcev zaslužila več, druga polovica pa manj.

b) Grafično prikažite kumulativo frekvenc.



c) Grafično ocenite število delavcev, ki so zaslužili nad 1.250,00 do 1.650,00 evrov.

d) Grafično ocenite, koliko odstotkov delavcev je zaslužilo nad 1.750,00 evrov.

Državno tekmovanje v znanju finančne matematike in statistike

1. V tabeli so prikazani podatki o povprečni temperaturi zraka, povprečni maksimalni dnevni temperaturi zraka, povprečni minimalni dnevni temperaturi zraka, trajanju sončnega obsevanja, številu dni z nevihto ter številu dni z dnevno količino padavin nad 0,1 mm v posameznih mesecih leta 2015 za kraj Bilje pri Novi Gorici (nadmorska višina 55 m).

Mesec	Povp. temp. [°C]	Povp. maks. temp. [°C]	Povp. min. temp. [°C]	Trajanje sonca [h]	Št. dni z nevihto	Št. dni s padavinami
januar	4,6	10,0	0,4	94,0	0	10
februar	5,1	10,3	0,7	129,4	0	10
marec	9,2	15,0	4,1	193,0		8
april	11,8	18,5	5,7	240,1	0	8
maj	17,6	23,3	12,4	224,9		13
junij	21,5	28,1	14,8	292,7		12
julij		32,1	18,9	334,0	6	9
avgust	23,0	30,6	17,2	293,4	4	10
september	18,4	24,2	13,4	204,1	5	11
oktober	13,1	18,7	9,1	142,5	3	18
november	7,9	14,3	3,2	144,9	0	10
december	4,7	10,5	0,6	99,1	1	11

Vir: Agencija Republike Slovenije za okolje

Rezultate zaokroži na eno decimalno mesto.

a) Izračunaj povprečno dnevno trajanje sončnega obsevanja za poletje 2015? Meteorološko poletje traja od 1. junija do 31. avgusta.

b) V katerem mesecu v prvi polovici leta 2015 je bila razlika med povprečno maksimalno in povprečno minimalno temperaturo zraka največja in koliko je znašala?

c) V juniju je bilo šest dni z nevihto več kot v maju, v marcu pa en dan manj kot v maju. Izračunaj število dni z nevihto v marcu, maju in juniju, če je bilo v celem letu v povprečju 2,5 dneva z nevihto na mesec.

d) Izračunaj modus in mediano števila dni v mesecu, ko je padlo več kot 0,1 mm padavin. Podatke o številu dni s padavinami prikaži s škatlo z brki.

e) Kolikšna je bila povprečna temperatura zraka v juliju, če je bila povprečna temperatura zraka poleti 23,3°C?

2. Komitenti bank se pri najemanju potrošniških kreditov srečujemo z vrsto omejitev. Ena izmed njih je, da višina mesečne anuitete ne sme presegati tretjine vsote rednih mesečnih prilivov na naš bančni račun.

   Za potrošniške kredite banka uporablja konformno mesečno obrestovanje z letno obrestno mero 4 %. Privzemi, da imamo redne mesečne dohodke v višini 900 EUR.

   Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

   a) Največ kolikšen potrošniški kredit z odplačilno dobo 24 mesecev lahko najamemo? Privzemi, da prvi obrok kredita plačamo mesec dni po najemu.

   b) S potrošniškim kreditom želimo kupiti novo opremo dnevne sobe, ki stane 4200 EUR. Kolikšna mora biti odplačilna doba kredita, če želimo dolg povrniti z najvišjimi še dovoljenimi anuitetami?

   c) Banka nam odobri kredit za novo opremo iz b) in dovoli, da vse anuitete razen zadnje znašajo 300 EUR. Koliko znaša zadnji obrok?

3. Spodnja preglednica prikazuje trenutne efektivne obrestne mere za različna dospetja. Čas t merimo v letih.

t	1	2	3
$R(0,t)$	2,00 %	2,50 %	3,00 %

   Na trgu obstajata dve obveznici istega izdajatelja, obe imata dospetje čez 3 leta in izplačujeta letne kupone, prvega čez natanko eno leto.

   Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

   a) Prva obveznica je klasična kuponska obveznica z nominalno vrednostjo 1500 EUR in nominalno obrestno mero 4 %. Določi njeno ceno v času 0.

   b) Druga obveznica je amortizacijska obveznica z nominalno vrednostjo 1500 EUR in nominalno obrestno mero 3 %. Ta obveznica ob vsakem kuponu izplača še tretjino svoje nominalne vrednosti. Določi denarne tokove amortizacijske obveznice. Za vsak denarni tok zapiši izplačani znesek in trenutek izplačila.

      Upoštevaj, da je kupon izplačan ob koncu obrestovalnega obdobja in da je njegova višina odvisna od preostale nominalne vrednosti po izplačilu prejšnjega kupona.

   c) Določi ceno amortizacijske obveznice v času 0.

   d) Kolikšen bi moral biti letni kupon klasične kuponske obveznice iz naloge a), da bi bila njena cena v času 0 enaka ceni amortizacijske obveznice iz naloge c)?

e) Kolikšna bi morala biti nominalna obrestna mera amortizacijske obveznice iz naloge b), da bi bila njena cena enaka ceni klasične kuponske obveznice iz naloge a)?

4. Cena delnice podjetja A trenutno znaša 50 EUR, netvegana efektivna obrestna mera pa je 2 % za vsa dospetja. Delnica bo čez tri mesece izplačala dividendo v višini 3 EUR.

   Na delnico sta izdani evropska in ameriška nakupna opcija z zapadlostjo čez eno leto in izvršilno ceno 47 EUR.

   a) Kaj lahko poveš o premiji evropske nakupne opcije? Zapiši interval cen, ki ne omogočajo arbitraže.

   b) Ali je možna arbitraža, če je premija evropske nakupne opcije 2 EUR, premija ameriške nakupne pa 1,80 EUR? Če da, opiši arbitražno strategijo.

   c) Takoj po izplačilu dividend obrestne mere vztrajajo pri 2 % za vsa dospetja, cena delnice se je ustalila pri 48 EUR, cena evropske nakupne opcije pa pri 1,50 EUR. Pokaži, da je s tem možna arbitraža, in pripravi arbitražno strategijo, ki vključuje natanko eno evropsko nakupno opcijo.

Rešitve 54. fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije – regijsko tekmovanje

Skupina I

1. *Podatki:* $m = 45$ kg, $m_0 = 20$ kg, $h = 25$ cm, $k = 225\ \mathrm{Ns^2/m^2}$, $b = 1{,}2$ m, $v_0 = 2{,}0$ m/s, $v_1 = 3{,}0$ m/s, $x = 65$ cm, $\varphi_{\max} = 30°$.

   a) Za navor sile curka na desko velja $M = rF$, pri čemer je ročica enaka $r = \frac{1}{2}h$. Ročica pri računanju navora teže deske pa je enaka $r' = \frac{1}{2}b\cos\varphi$, saj deska tvori z navpičnico kot $90° - \varphi$.

   Navor sile curka uravnovesi navor teže deske:

$$k\,v_0^2\,\frac{h}{2} = m_0 g\,\frac{b}{2}\,\cos\varphi\,, \qquad \cos\varphi = \frac{kv_0^2 h}{m_0 g b}\,, \qquad \varphi = 17°\,.$$

   b) V tem primeru upoštevamo še navor sile $F_M = \frac{1}{2}mg$, s katero Mateja pritiska na desko na razdalji x od osi; pri tem je ročica enaka $r'' = x\cos\varphi_1$:

$$kv_1^2\,\frac{h}{2} = m_0 g\,\frac{b}{2}\,\cos\varphi_1 + \frac{m}{2}\,gx\,\cos\varphi_1\,.$$

   Dobimo

$$\cos\varphi_1 = \frac{kv_1^2 h}{(m_0 b + mx)g}\,, \qquad \varphi_1 = 14°\,.$$

   Naklon deske je 14°.

c) Enačba za ravnovesje je enaka kot pri b):

$$kv_1^2 \frac{h}{2} = m_0 g \frac{b}{2} \cos \varphi_{\max} + \frac{m}{2} g x_{\max} \cos \varphi_{\max} .$$

le da sedaj iščemo razdaljo $x_{\max}$:

$$x_{\max} = \frac{kv_1^2 h}{mg \cos \varphi_{\max}} - \frac{m_0 b}{m} = 79 \text{ cm} .$$

Z nogo sme pritiskati na razdalji 79 cm od osi.

2. *Podatki:* $t_0 = 87$ min, $\vartheta = 40°$, (iz zbirke $R_z = 6400$ km, $M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$).

   a) Po drugem Newtonovem zakonu je produkt mase in centripetalnega pospeška enak gravitacijski sili na satelit:

$$m\omega^2 r = \frac{GmM_Z}{r^2} ,$$

   pri čemer je r razdalja satelita do središča Zemlje

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_z}{\omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{GM_z t_0^2}{4\pi^2}} = 6520 \text{ km} .$$

   Satelit leti na višini 120 km.

   b) Hitrost satelita je enaka

$$v_s = \omega r = \frac{2\pi r}{t_0} = 7{,}85 \text{ km/s} .$$

   c) Razdalja opazovalca do zemeljske osi je $r_0 = R_z \cos \vartheta$ in hitrost ($t_{24} = 24$ h):

$$v_z = \frac{2\pi R_z \cos \vartheta}{t_{24}} = 0{,}36 \text{ km/s}$$

   v smeri proti vzhodu.

   d) Za opazovalca na Zemlji smer gibanja satelita tvori s poldnevnikom kot α:

$$\tan \alpha = \frac{v_z}{v_s} , \qquad \alpha = 2{,}6° .$$

   Satelit se za opazovalca giblje v smeri zahodno od poldnevnika.

3. *Podatki:* $a = 5$ m, $v_0 = 65$ km/s.

   a) V navpični smeri se žogica giblje tako kot pri poševnem metu in velja

$$v_y = v_0 \sin \varphi - gt , \qquad y = v_0 \sin \varphi \; t - \tfrac{1}{2} g t^2 ,$$

v vodoravni smeri pa enakomerno z velikostjo hitrosti

$$v_x = v_0 \cos \varphi \,.$$

Pri odboju hitrost le spremeni predznak, velikosti pa ne. Zato je pot v vodoravni smeri enaka poti, ki bi jo žogica opravila na prostem (brez sten):

$$s_x = v_0 \cos \varphi \; t \,.$$

Po dveh odbojih se žogica se vrne na začetno višino $y = 0$ in pri tem opravi pot $2a$. Iz pogoja $y = 0$ dobimo za čas potovanja

$$t = \frac{2v_0 \sin \varphi}{g} \,,$$

in za pot

$$s_x = 2a = \frac{2v_0^2 \sin \varphi \cos \varphi}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi \,.$$

Dobljeni kot je najmanjši možni kot.

b) Drugo rešitev enačbe za 2φ dobimo pri suplementarnem kotu, saj je $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ za poljuben α. Ta rešitev ustreza maksimalnemu kotu

$$\varphi_{\text{max}} = 90^\circ - \varphi_{\text{min}} = 81{,}25^\circ \,.$$

c) Največjo višino doseže žogica po času, ki je enak polovici časa potovanja do končne točke. Za največjo višino dobimo

$$y_a = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \varphi_{\text{min}} = 0{,}38\ \text{m} \qquad \text{in} \qquad y_b = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \varphi_{\text{max}} = 16{,}25\ \text{m} \,.$$

d) V primeru $2N$ odbojev od sten opravi žogica pot $s_x = 2Na$. Dobimo

$$2Na = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi \,.$$

Enačba ima rešitev, če je izpolnjen pogoj $\sin 2\varphi \leq 1$. Od tod sledi

$$N \leq \frac{v_0^2}{2ag} = 3{,}33 \,.$$

Torej $N = 3$. Pri vsakem N dobimo za rešitev kot in njegov komplementarni kot; skupaj dobimo $2N = 6$ različnih kotov.

Skupina II

1. *Podatki:* $U_0 = 9{,}00$ V, $U' = 5{,}40$ V, $I' = 36$ mA, $U_1 = 5{,}40$ V, $I_1 = 36$ mA, $U_2 = 4{,}50$ V, $I_2 = 90$ mA, $U_3 = 6{,}00$ V, $I_3 = 60$ mA, $U_4 = 2{,}25$ V, $I_4 = 90$ mA.

   a) Napetost je enaka 0 pri števkah **1** in **7**; tok ne teče pri števki **1**.

   b) Napetost 5,4 V ustreza delitvi 9 V v razmerju 3:2. Pomeni, da napetost merimo na treh zaporedno povezanih ploščicah, ki so zaporedno vezane z dvema ploščicama. Takšna razporeditev ploščic ustreza števki **2**.

   c) Skozi pet zaporedno vezanih ploščic teče tok I_0, torej je njihov skupni upor $R = U_0/I_0 = 250\ \Omega$. Upor ene ploščice je $R_1 = R/5 = 50\ \Omega$.

   d) Prva števka ustreza **2**; preveriti moramo še števke **0**, **3**, **4**, **5**, **6**, **8** in **9**.

   Pri **0** teče tok po dveh vzporednih vejah iz treh zaporedno vezanih ploščic. Za nadomestni upor vezja velja $1/R = 1/3R_1 + 1/3R_1$, $R = 3R_1/2 = 75\ \Omega$ in za skupni tok $I = U_0/R = 120$ mA, kar je več od podanih tokov. Pri **8** je skupni tok kvečjemu še večji, zato lahko **0** in **8** izločimo.

   Takoj lahko izločimo tudi **4** in **5**, pri katerih teče tok skozi 3 zaporedno vezane ploščice, tako da je na vrhnji ploščici AC tretjina napetosti vira, torej 3 V.

   Pri **3** tok prav tako teče skozi tri zaporedno vezane ploščice, a sedaj voltmeter meri napetost na zgornjih dveh, torej 6 V. Za tok dobimo $I = U_0/(3R_1) = 60$ mA, kar tudi ustreza tretji števki v zapisu števila.

   Pri **6** teče tok skozi ploščico AC z uporom R_1 in nato skozi dva vzporedno vezana upornika sestavljena iz po dveh zaporedno vezanih ploščic s skupnim uporom R_1. Skupni upor celotnega vezja je $2R_1$ in skupni tok 90 mA. Padec napetosti na ploščici AC je 4,5 V in tretja števka je lahko **6**.

   Preostane še **9**: vezje je enako kot pri **6** in zato tudi skupni tok. Vendar sedaj v ploščici AC teče le polovica celotnega toka in je iskani padec napetosti enak 2,25 V. Števka **9** ustreza zadnji števki v iskanem številu:

   $$2369$$

   Zaradi celovitosti podajamo še izračun za števko **8**, čeprav jo lahko izločimo že s primerjavo z **0**.

   Pare točk v stikih med vodoravnimi ploščami na osmici označimo od zgoraj navzdol kot A in D, C in E ter F in B. Zaradi ohranitve toka in simetrije velja $I_{\mathrm{AC}} = I_{\mathrm{EB}}$, $I_{\mathrm{AD}} = I_{\mathrm{DE}} = I_{\mathrm{CF}} = I_{\mathrm{FB}}$ in $I_{\mathrm{CE}} = I_{\mathrm{AC}} - I_{\mathrm{CF}}$. Ker so upori vseh prečk enaki, veljajo enake enačbe tudi za padce napetosti. Na poti ADEB velja:

   $$U_{\mathrm{AD}} + U_{\mathrm{DE}} + U_{\mathrm{EB}} = U_{\mathrm{AD}} + U_{\mathrm{AD}} + U_{\mathrm{AC}} = 2U_{\mathrm{AD}} + U_{\mathrm{AC}} = U_0\,,$$

   na poti ACEB pa

   $$U_{\mathrm{AC}} + U_{\mathrm{CE}} + U_{\mathrm{EB}} = U_{\mathrm{AC}} + U_{\mathrm{AC}} - U_{\mathrm{CF}} + U_{\mathrm{AC}} = 3U_{\mathrm{AC}} - U_{\mathrm{AD}} = U_0\,.$$

Drugo enačbe pomnožimo z 2 in enačbi seštejemo. Dobimo:

$$7U_{\mathrm{AC}} = 3U_0\,, \qquad U_{\mathrm{AC}} = \frac{3}{7}\,U_0 = 3{,}87\ V$$

in skupni tok

$$I = I_{\mathrm{AC}} + I_{\mathrm{AD}} = \frac{3U_0}{7R_1} + \frac{2U_0}{7R_1} = 129\ \mathrm{mA}\,.$$

2. *Podatki:* $V_0 = 7$ l, $S = 400$ cm^2, $T_0 = 7$ °C, $\Delta T = 80$ K, $p_0 = 100$ kPa, $c_p = 1010$ J/kgK.

   a) Sprememba je izobarna in velja

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{T_0 + \Delta T}{T_0}\,, \qquad V_1 = \frac{T_0 + \Delta T}{T_0}\,V_0 = 9{,}0\ \mathrm{l}.$$

   Prostornina balona se poveča za $\Delta V = 2{,}0$ l in gladina se dvigne za

$$h_0 = \frac{\Delta V}{S} = 5\ \mathrm{cm}\,.$$

   b) Dovedena toplota je enaka:

$$Q = mc_p\Delta T = \frac{M\,p_0V_0}{RT_0}\,\Delta T = 706\ \mathrm{J}\,.$$

   c) V tem primeru moramo upoštevati, da je na koncu tlak v balonu večji za hidrostatski tlak $\Delta p = \rho_v g h_0$. Končno prostornino dobimo iz splošne plinske enačbe:

$$\frac{(p_0 + \rho_v g h_0)V_1'}{T_0 + \Delta T} = \frac{p_0V_0}{T_0}\,, \qquad V_1' = \frac{(T_0 + \Delta T)}{T_0}\,\frac{p_0}{(p_0 + \rho_v g h_0)}\,V_0 = V_1\,\frac{1}{(1+r)}\,,$$

   če je r relativno povečanje tlaka

$$r = \frac{\rho_v g h_0}{p_0} = 0{,}005\,.$$

   Za spremembo višine dobimo

$$\Delta h = \frac{V_1' - V_0}{S} - \frac{V_1 - V_0}{S} = \frac{\dfrac{V_1}{(1+r)} - V_1}{S} = -\frac{rV_1}{(1+r)S} = -1{,}1\ \mathrm{mm}\,.$$

3. *Podatki:* $h = 20$ cm, $a = 10$ cm, $d_0 = 5$ mm, $U = 2000$ V, $\varepsilon = 80$, $d_1 = 8$ mm, $d_2 = 11$ mm.

a) Kapaciteta kondenzatorja je

$$C_0 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 ha}{d} = 2{,}85\ \mathrm{nF}\,.$$

Na njem se nabere naboj

$$e_0 = C_0 U = 5{,}7 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{As}\,.$$

b) Ko plošči razmaknemo na razdaljo d_1 se gladina olja spusti do višine $h_1 = hd_0/d_1$. Kondenzator si mislimo sestavljen iz dveh vzporedno vezanih kondenzatorjev s ploščami v razmiku d_1; v zgornjem z višino plošč $h_1' = h - h_1$ je zrak, v spodnjem z višino h_1 pa olje. Skupna kapaciteta je enaka

$$\begin{aligned} C_b &= C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 h_1' a}{d_1} + \frac{\varepsilon\varepsilon_0 h_1 a}{d_1} \\ &= \frac{\varepsilon\varepsilon_0 ha}{d}\,\frac{d_0}{d_1}\frac{h_1}{h}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\frac{(h-h_1)}{h_1}\right) \\ &= C_0\left(\frac{d_0}{d_1}\right)^2\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{d_1 - d_0}{d_0}\right)\right) = 1{,}1\ \mathrm{nF}\,. \\ e_1 &= C_b U = e_0\,\frac{C_b}{C_0} = 2{,}2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{As}\,. \end{aligned}$$

c)

$$\Delta W = \tfrac{1}{2}C_b U^2 - \tfrac{1}{2}C_0 U^2 = -3{,}4\ \mathrm{mJ}\,.$$

d) Ker je kondenzator izoliran, se naboj ohranja in je enak naboju, izračunanem pri b).

Skupina III

1. *Podatki:* $t = 6$ s, $\Delta t = 1{,}5$ s, $c = 340$ m/s.

a) Zvok najprej prispe iz točke, v kateri je strela udarila v tla, torej na razdalji $x = ct = 2040$ m.

b) Od oblaka do opazovalca potuje zvok po diagonali trikotnika z osnovnico x, ki smo jo izračunali pri a), in višino y. Konec grmenja zasliši po času $t + \Delta t$. Dolžino diagonale dobimo iz časa potovanja zvoka $s = c(t + \Delta t) = 2550$ m. Za višino oblaka dobimo $y = \sqrt{s^2 - x^2} = 1530$ m.

c) Jakost zvoka pojema s kvadratom razdalje $j(r) = P/r^2$, če je P moč grmenja. Za razmerje jakosti na koncu in začetku grmenja torej velja

$$\frac{j(s)}{j(x)} = \frac{\frac{P}{s^2}}{\frac{P}{x^2}} = \frac{x^2}{s^2} = \frac{t^2}{(t+\Delta t)^2} = 0{,}64\,.$$

d) Razlika v glasnosti je

$$\begin{aligned}
G(s) - G(x) &= 10\log\left(\frac{j(s)}{j_0}\right) - 10\log\left(\frac{j(x)}{j_0}\right) = 10\log\left(\frac{j(s)}{j(x)}\right) \\
&= 10\log\left(\frac{t^2}{(t+\Delta t)^2}\right) = 20\log\left(\frac{t}{t+\Delta t}\right) \\
&= -1{,}9\ \mathrm{dB}\,.
\end{aligned}$$

2. *Podatki:* $r = 1{,}5$ m, $a_\mathrm{b} = 0{,}8$, $a_\mathrm{č} = 0{,}4$, $a_\mathrm{IR} = 0{,}05$, $j_s = 1{,}0\ \mathrm{kW/m^2}$, $T_0 = 25\ ^\circ\mathrm{C}$, $\Lambda = 6{,}0\ \mathrm{W/Km^2}$.

a) Sončna svetloba pada pravokotno na vodoravni presek polkrogle s ploščino πr^2. Avtomobil prejema energijski tok (moč) $P = (1-a)\pi r^2$ in sicer

$$P_\mathrm{beli} = (1-a_\mathrm{b})\pi r^2 j_s = 1410\ \mathrm{W}\,, \qquad P_\mathrm{črni} = (1-a)\pi r^2 j_s = 4240\ \mathrm{W}\,.$$

b) Avtomobil se ohlaja s sevanje; oddana moč je enaka $P_\mathrm{odd} = (1-a_\mathrm{IR})S\sigma T^4$, pri čemer je T temperatura, na katero se segreje avtomobil, S površina polkrogle, $S = 2\pi r^2$, in σ Stefanova konstanta. Poleg energijskega toka s Sonca prejema avtomobil tudi energijski tok iz okolice, ki seva v IR območju pri temperaturi T_0, $P_\mathrm{okolica} = (1-a_\mathrm{IR})S\sigma T_0^4$. V ravnovesju je prejeti tok enak oddanemu:

$$(1-a)\pi r^2 j_s + (1-a_\mathrm{IR})2\pi r^2\sigma T_0^4 = (1-a_\mathrm{IR})2\pi r^2\sigma T^4\,,$$

pri čemer za a vstavimo a_b ali $a_\mathrm{č}$. Dobimo

$$T = \sqrt[4]{\frac{(1-a)j_s}{2(1-a_\mathrm{IR})\sigma} + T_0^4}$$

in

$$T_\mathrm{beli} = 314\ \mathrm{K} = 41\ ^\circ\mathrm{C}\,, \qquad T_\mathrm{črni} = 341\ \mathrm{K} = 68\ ^\circ\mathrm{C}\,.$$

c) V tem (realističnem) primeru avtomobil oddaja energijo tudi s konvekcijo in velja:

$$(1-a)\pi r^2 j_s + (1-a_\mathrm{IR})2\pi r^2\sigma T_0^4 = (1-a_\mathrm{IR})2\pi r^2\sigma T^4 + \Lambda 2\pi r^2(T-T_0)\,.$$

Enačbo rešimo, tako da četrto potenco temperature lineariziramo:

$$\begin{aligned}
T^4 &= (T_0 + (T-T_0))^4 = T_0^4\left(1 + \left(\frac{T-T_0}{T_0}\right)\right)^4 \\
&\approx T_0^4\left(1 + 4\left(\frac{T-T_0}{T_0}\right)\right) = T_0^4 + 4T_0^3(T-T_0)\,.
\end{aligned}$$

Po preureditvi dobimo

$$(1-a)j_s = 2(1-a_{\mathrm{IR}})\,4\sigma T_0^3(T-T_0) + 2\Lambda(T-T_0)$$

in od tod

$$T = T_0 + \frac{(1-a)j_s}{8(1-a_{\mathrm{IR}})\sigma T_0^3 + 2\Lambda}\,.$$

Ravnovesni temperatur sta v tem primeru

$$T_{\mathrm{beli}} = 307\ \mathrm{K} = 34\ ^\circ\mathrm{C}\,, \qquad T_{\mathrm{črni}} = 324\ \mathrm{K} = 51\ ^\circ\mathrm{C}\,.$$

3. *Podatki:* $h = 20$ cm, $l = 10$ cm, $\alpha = 45°$, $m = 1{,}0$ mg, $e = 1{,}0 \cdot 10^{-11}$ As.

a) Na kapljico deluje električna sila $F = eU/l$ pod kotom 45° glede na vodoravnico v smeri navzgor, navpično navzdol pa teža $F_g = mg$. V navpični smeri se kapljica giblje navzdol s pospeškom

$$a_y = g - \frac{eU}{ml}\cos\alpha = g - \frac{eU}{ml\sqrt{2}}\,,$$

v vodoravni smeri pa s pospeškom

$$a_x = \frac{eU}{ml}\sin\alpha = \frac{eU}{ml\sqrt{2}}$$

v levo (glej sliko pri besedilu naloge). Če izhodišče koordinatnega sistema postavimo v točko, v kateri je kapljica na začetku, in os x usmerimo v levo, os y pa navzdol, velja za lego kapljice po času t

$$x = \tfrac{1}{2}a_x t^2 = \frac{1}{2}\,\frac{eU}{ml\sqrt{2}}\,t^2\,, \qquad y = \tfrac{1}{2}a_y t^2 = \frac{1}{2}\left(g - \frac{eU}{ml\sqrt{2}}\right)t^2\,.$$

Drugo enačbo delimo s prvo in dobimo

$$\frac{y}{x} = \frac{a_y}{a_x}\,, \quad \text{oziroma} \quad y = k\,x\,, \quad k = \frac{a_y}{a_x}\,,$$

kar pomeni, da je tir kapljice premica. Kapljica bo v mejnem primeru zapustila kondenzator v točki, ki leži na levem robu spodnje plošče kondenzatorja. Koordinati te točke sta

$$x_0 = h\cos\alpha - l\sin\alpha = \frac{h-l}{\sqrt{2}}\,, \qquad y_0 = h\sin\alpha + l\cos\alpha = \frac{h+l}{\sqrt{2}}\,.$$

Velja

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{a_y}{a_x}\,,$$

oziroma

$$\frac{h+l}{h-l} = \frac{g - \dfrac{eU}{ml\sqrt{2}}}{\dfrac{eU}{ml\sqrt{2}}} \,.$$

Za podane vrednosti h in l je razmerje ravno 3 in dobimo

$$4\frac{eU}{ml\sqrt{2}} = g\,, \qquad U = \frac{mgl\sqrt{2}}{4e} = 3{,}46\ \mathrm{kV}\,.$$

b) Pri dvakrat večji napetosti $U' = 2U$ sledi iz predzadnje enačbe pri a):

$$\frac{eU'}{ml\sqrt{2}} = 2\frac{eU}{ml\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}g$$

in enačb za pospeške

$$a_y = g - \frac{eU'}{ml\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}g\,, \qquad a_x = \frac{eU'}{ml\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}g\,.$$

Lego kapljice lahko sedaj zapišemo

$$x = \tfrac{1}{2}a_x t^2 = \frac{1}{4}gt^2\,, \qquad y = v_0 t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 = v_0 t + \frac{1}{4}gt^2 = v_0 t + x\,.$$

Čas potovanja do točke (x_0, y_0) dobimo iz enačbe za x:

$$t = \sqrt{\frac{4x_0}{g}} = \sqrt{\frac{4(h-l)}{\sqrt{2}g}} = 0{,}17\ \mathrm{s}\,.$$

Iskana hitrost je enaka

$$v_0 = \frac{y_0 - x_0}{t} = \sqrt{\frac{gl^2}{(h-l)\sqrt{2}}} = 0{,}83\ \mathrm{m/s}\,.$$

Preveriti moramo, če se kapljica ni še pred tem dotaknila pozitivne plošče kondenzatorja. Poglejmo, kako se naklon tira spreminja s časom:

$$\tan\vartheta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{a_y}{a_x} + \frac{v_0}{a_x t} = 1 + \frac{v_0}{a_x t}\,.$$

Naklon tira je ves čas večji od 45°, torej se tir približuje končni točki z notranje strani kondenzatorja.

Rešitve 14. tekmovanja v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike – državno tekmovanje

1. skupina: Poslovna matematika

1. NALOGA

15 zidarjev v 16 dneh pri 8-urnem delavniku zgradi hišo, ki je 10 m široka in enako dolga ter 8,8 m visoka.

a) Kakšna bo višina novo zgrajene 22,5 % širše in 20 % krajše hiše, ki jo bo gradilo 14 zidarjev 2 tedna pri 12-urnem delavniku? (1 teden = 7dni)

15 zidarjev	16 dni	8 ur	10 m (š)	10 m (d)	8,8 m (v)
↑	↑	↑	↓	↓	↑
14 zidarjev	14 dni	12 ur	12,25 m (š)	8 m (d)	x m (v)

$$\mathbf{x} = \frac{8{,}8 \ x \ 14 \ x \ \ 14 \ x \ 12 \ x \ 10 \ x \ 10}{15 \ x \ 16 \ x \ 8 \ x \ 12{,}25 \ x \ 8} = \underline{\mathbf{11\ m\ (v)}}$$

b) Za koliko metrov in odstotkov bo druga hiša višja oziroma nižja od prve?

Razlika višine: 11 m – 8,8 m = **2,2 m**

8,8 m (v)	100 %
↑	↑
2,2 m (v)	X %

$x = \frac{2{,}20 * 110}{8{,}80}$ = **25 %** (Odgovor: Druga hiša bo za 25 % višja od prve.)

2. NALOGA

Tri podjetja so kot partnerji nastopila na trgu z novim izdelkom. Pri tem so bila pri izdelavi izdelka (od načrtovanja proizvodnje do prodaje na trgu) različno udeležena, in sicer:

OPIS DELEŽA PODJETJA	Podjetje A	Podjetje B	Podjetje C
Število strokovnjakov pri podjetju (premo sorazmerno)	3	2	2
Vložena sredstva v projekt (EUR) (premo sorazmerno)	150.000,00	180.000,00	120.000,00
Dohodek od predpogodb in promocij (EUR) (obratno sorazmerno)	45.000,00	40.000,00	20.000,00
»Teža« strokovnjakov (razmerje) (premo sorazmerno)	1	1,5	0,9

a) Kako si bodo podjetja razdelila dobiček pod danimi pogoji v višini 1,200.500,00 EUR? Rezultat izrazi tudi v odstotkih!

Podjetja	Kriterij delitve				Enostavna razmerska števila	Odgovor	
	Število strokovnjakov	Vložena sred.	Dohodek	»Teža« strokovnjaka		v EUR	v %
A	3	150.000,00	$\frac{1}{45.000,00}$	1	10,0 x	**350.000,00 EUR**	**29,15 %**
B	2	180.000,00	$\frac{1}{40.000,00}$	1,5	13,5 x	**472.500,00 EUR**	**39,36 %**
C	2	120.000,00	$\frac{1}{20.000,00}$	0,9	10,8 x	**378.000,00 EUR**	**31,49 %**

34,3 x = 1,200.500,00
x = 35.000,00

b) Strokovnjaka podjetja B bosta prejela nagrado za izum. Dogovorita se, da si bosta nagrado razdelila premo sorazmerno glede na vložena sredstva v razmerju 3 : 2, premo sorazmerno glede na vložen čas v razmerju 2 : 5 ter obratno sorazmerno glede na že prejeta sredstva iz predpogodb, ki so v razmerju 1 : 2. Koliko bo prejel drugi izumitelj, če je prvi prejel 5.700,00 EUR?

Strokovnjak	Kriterij delitve			Enostavna razmerska števila	Odgovor
	Vložena sredstva	Vložen čas	Prejeta sredstva iz predpogodb		
Prvi	3	2	1	6 x	///////////////
Drugi	2	5	$\frac{1}{2}$	5 x	4.750,00 EUR

6 x = 5.700,00
x = 950,00

3. NALOGA

Cena kvadratnega metra stanovanja je v začetku leta znašala 1.950,00 EUR, nato pa se je v prvi polovici leta dvakrat zapored zvišala, in sicer maja za 3 %, junija pa za 5 %.

a) Koliko je znašala cena za kvadratni meter stanovanja po posamezni podražitvi? Koliko odstotna je skupna podražitev?

Cena za m^2 = 1.950,00 * 1,03 = 2.008,50 EUR/ m^2
Cena za m^2 = 1.950,00 * 1,03 * 1,05 = 2.108,93 EUR/ m^2

Izračun Σ podražitve v % = $\frac{(2.108,93-1.950,00)x100}{1950,00} = \frac{158,93\ x\ 100}{1950,00}$ = 8,15 %

b) Koliko odstotna bi morala biti enkratna podražitev / pocenitev, če se cena za m^2 stanovanja junija ne bi zvišala za 5 %, ampak znižala za 5 %?

Cena za m^2 = 1.950,00 * 1,03 = 2.008,50 EUR/ m^2
Cena za m^2 = 2.008,50 * 0,95 = **1.908,08 EUR/ m^2**

Izračun Σ pocenitve v % = $\frac{(1,950,00\ -1.908,08)x100}{1.950,00} = \frac{41,92\ x\ 100}{1.950,00}$ = **2,15 %** pocenitev

c) Prodajalec stanovanja ponuja dve možnosti pri nakupu stanovanja: prva možnost je takojšnje plačilo 210.900,00 EUR; druga pa s poznejšim plačilom v znesku 225.127,74 EUR z vključenimi 6,75-odstotnimi stroški. Katera ponudba je ugodnejša in zakaj?

C^+ = 225.127,75 EUR
p = 6,75%
C = ? EUR

106,75 % …………….. 225.127,74 EUR
100 % ……………… x EUR

$$x = \frac{100 * 225.127,74}{106,75} = \mathbf{\underline{210.892,50\ EUR}}$$

Odg.: Druga ponudba je ugodnejša zaradi nižje cene (**210.892,50 €<** 210.900,00 €).

4. NALOGA

a) Koliko sta Micka in Janez vložila v banko pred 15 leti, če danes po preteku vezave razpolagata z zneskom 125.874,20 EUR. Banka vezane vloge obrestuje z obrestno obrestnim računom po 6,20-% letni dekurzivni obrestni meri in celoletni kapitalizaciji?

$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{6,20}{100} = 1,062$

$G_n = G_0 * r^n$

$G_0 = \frac{Gn}{r^n}$

$G_0 = \frac{125.874,20}{1,062^{15}} =$ **51.058,61 EUR**

b) Micka bo svoj delež, ki znaša 45 % od vloženega, uporabila za nakup avtomobila, ki stane 25.000,00 EUR. Za znesek, ki ji bo zmanjkal, bo najela posojilo za dve leti po dogovorjeni 6-% letni obrestni meri, obrestno obrestnem računu pri semestralni kapitalizaciji. Koliko bo Micko stal novi avto?

45 % delež $= \frac{51.058,61\ x\ 45}{100} =$ **22.976,37 EUR**

Manjkajoči znesek = 25.000,00 – 22.976,37 = **2.023,63 EUR**

$p' = \frac{p.a.}{m} = \frac{6\ \%}{2} = 3\ \%$

$r' = 1 + \frac{p'}{100} = 1 + \frac{3}{100} = 1,03$

$G_n = G_0 * r'^{(n*m)}$

$G_n = 2.023,63 * (1,03)^{(4)} =$ **2.277,61 EUR**

obresti = 2.277,61 – 2.023,63 = **253,98 EUR**

Odgovor: Micko bo novi avto stal **25.253,98 EUR**.

2. skupina: Statistika

1. NALOGA

Nogometna Liga prvakov je najbolj znano klubsko nogometno tekmovanje v Evropi v organizaciji Evropske nogometne zveze (UEFA), ki poteka od leta 1955. Naslov je doslej osvojilo 21 klubov, od tega je to dvanajstim klubom uspelo več kot enkrat.

Tabela 1: **Klubi, ki so največkrat osvojili naslov Lige prvakov**

Klub	**Št. osvojenih naslovov v strukturnem odstotku**	**Število osvojenih naslovov**
Real Madrid	16,67	10
Milan	11,67	7
Bayern München	8,33	5
Liverpool	8,33	5
Barcelona	8,33	5
Ostali klubi	46,67	28
SKUPAJ	100,00	60

Vir: /sl.wikipedia.org/wiki/Nogometna_Liga_prvakov#Zmagovalci_po_klubih

a) Izračunajte, kolikokrat je posamezni klub osvojil naslov prvaka v Ligi prvakov.

V 60-letni zgodovini tekmovanja so naslove osvojili klubi iz 10-ih držav. V tabeli so navedene prve štiri najuspešnejše države.

Tabela 2: **Zmagovalci lige prvakov po državah**

Država	**Št. naslovov prvaka**	**Prvaki iz te države**
Španija	15	Real Madrid (10), Barcelona (5)
Italija	12	Milan (x), Internazionale (x), Juventus (x)
Anglija	12	Liverpool (5), Manchester United (3),Nottingham Forest (2), Chelsea (1), Aston Villa (1)
Nemčija	7	Bayern München (5), Borussia Dortmund (1),Hamburg (1)

Vir: sl.wikipedia.org/wiki/Nogometna_Liga_prvakov#Zmagovalci_po_dr.C5.BEavah

b) V odstotkih predstavite naslove prvakov angleških klubov glede na skupno število osvojenih naslovov te države in komentirajte rezultate.

Tabela 3: **Strukturni odstotek osvojenih naslovov angleških klubov glede na vse njihove zmage**

Klub	**Št. osvojenih naslovov**	**Strukturni odstotek**
Liverpool	5	41,67
Manchester United	3	25,00
Nottingham Forest	2	16,67
Chelsea	1	8,33
Aston Villa	1	8,33
SKUPAJ	12	100,00

Vir: Tabela 2

Komentar:
Klub Liverpool je osvojil 41,67 % vseh osvojenih naslovov, ki so jih osvojili angleški klubi. 25 % osvojenih naslovov angleških klubov je prispeval klub Manchester United, Nottingham Forest je osvojil 16,67 % osvojenih naslovov, Chelsea in Aston Villa pa sta osvojila vsak po 8,33 % vseh osvojenih naslovov.

c) V spodnji tabeli je zapisana uspešnost najboljših klubov iz Italije.

Tabela 4: **Osvojeni naslovi italijanskih klubov glede na vse njihove zmage**

Klub	**Št. osvojenih naslovov**	**Strukturni odstotki izraženi v stopinjah**
Milan		210°
Internazionale		90°
Juventus		60°
Skupaj	12	360°

Vir: sl.wikipedia.org/wiki/Nogometna_Liga_prvakov#Zmagovalci_po_dr.C5.BEavah

Vir: Tabela 4

d) Na podlagi podatkov v grafičnem prikazu in tabeli dopolnite spodaj navedene trditve.

Milan je osvojil naslov prvaka v tem tekmovanju **7**-krat. Internazionale je osvojil naslov prvaka **3**-krat, Juventus je bil prvak **2**-krat.

2. NALOGA

Na srednji šoli »Veleumneži« je zaposlenih 87 učiteljev. Prav tako vemo, da je na šoli 9,02 dijaka na učitelja.

a) Koliko dijakov obiskuje to srednjo šolo?

$$K = \frac{\text{št.}dijakov}{\text{št. }učiteljev}$$

$$9 = \frac{x}{87}$$ x = 783 dijakov

Odgovor: Šolo obiskuje 785 dijakov.

b) Zapišite enačbo za koeficient, s katerim bi izrazili promil dijakov, ki ponavljajo letnik. Koliko znaša le-ta, če imajo na šoli 12 dijakov ponavljalcev?

$$\mathrm{K} = \frac{\text{št.ponavljalcev}}{\text{št.dijakov}} \cdot 1000$$

$$\boldsymbol{K = \frac{12}{783} \cdot 1000 = 15,33}$$ **dijaka ponavljalca na 1000 dijakov**

c) Z ustreznim koeficientom zapišite, da je bilo na 100 dijakov 14 dijakov s statusom športnika.

$$K = \frac{Št.\,dijakov\ športnikov}{Št.\,vseh\ dijakov} * 100 = 14\ dijakov\ športnikov\ na\ 100\ dijakov$$

d) Izmed vseh učiteljev jih 8 % poučuje matematiko. Od tega sta dva moška. Zapišite strukturo učiteljev matematike po spolu v odstotkih.

8 % od 87 = 7 učiteljev matematike

$Y_{moški}$ % = 28,57
$Y_{ženske}$ % = 71,43

3. NALOGA

Iz Slovenije se vsako leto odseli določeno število prebivalcev v tujino. V tabeli so predstavljeni podatki o migracijah naših prebivalcev v letih od 2010 do 2014.

Tabela 5: **Število odseljenih iz Slovenije v tujino v letih od 2010 do 2014**

Leto	**Skupno število odseljenih moških in žensk**
2010	15937
2011	12024
2012	14378
2013	13384
2014	14336

Vir: SURS: http://pxweb.stat.si/pxweb/Dialog/Saveshow.asp

Tabela 5: **Število odseljenih iz Slovenije v tujino v letih od 2010 do 2014**

Leto	**Skupno število odseljenih moških in žensk**
2010	15937
2011	12024
2012	14378
2013	13384
2014	14336

Vir: SURS: http://pxweb.stat.si/pxweb/Dialog/Saveshow.asp

a) Izračunajte spremembe za skupno število odseljenih iz leta v leto z indeksi. Rezultate vpišite v spodnjo tabelo.

b) Za skupno število odseljenih izračunajte spremembe v številu odseljenih glede na leto 2014 v obliki indeksov in jih vpišite v spodnjo tabelo.

Tabela 6: **Indeksi za odseljene iz Slovenije v tujino po letih**

Leto	Vj	$I_{j/2014}$
2010	-	111,67
2011	75,45	83,87
2012	119,58	100,29
2013	93,09	93,36
2014	107,11	100,00

Vir: Tabela 1

Radovednega dijaka srednje ekonomske šole je zanimalo, koliko je bilo med vsemi odseljenimi iz države žensk in koliko moških. O tem je našel samo nepopolne podatke. Pomagajte mu razrešiti to dilemo s pomočjo spodnje tabele, kjer imate danih nekaj podatkov.

Tabela 7: **Število odseljenih iz Slovenije v tujino po spolu v letih od 2010 do 2014**

Leto	Skupno število odseljenih	Moški	Ženske	$I_{j/2010}$ moški	$I_{j/2011}$ ženske	S_j moški	V_j ženske
2010	15937	11586	4351				
2011	12024	8151	3873				
2012	14378	8699	5679	75,08			146,63
2013	13384	7902	5482		141,54		
2014	14336	8609	5727			8,95	

Vir: SURS: http://pxweb.stat.si/pxweb/Dialog/Saveshow.asp

c) Izračunajte število moških in žensk, odseljenih po posameznih letih. *(Rezultate zaokrožite na cela števila.)*

d) Dopolnite navedene trditve in podčrtajte pravilne trditve.

Število žensk, odseljenih iz države leta 2012, je bilo glede na leto 2011 za **46,63** % ***večje*** / *manjše*.

Število žensk, odseljenih iz države leta 2013, je bilo glede na leto 2011 za **41,54** % ***večje*** /*manjše*.

Leta 2012 se je iz države odselilo **24,92** % več / **manj** moških kot leta 2010.
Stopnja rasti za moške v letu 2014 je bila ***pozitivna*** /*negativna* .

4. NALOGA

Tabela 8: **Delavci podjetja MERX Celje po zaslužkih v mesecu septembru 2015**

Zaslužek v EUR	**Delavci f_j**	F_j
nad 700 do 900	5	5
nad 900 do 1.100	14	19
nad 1.100 do 1.300	20	39
nad 1.300 do 1.500	32	71
nad 1.500 do 1.700	22	93
nad 1.700 do 1.900	15	108
nad 1.900 do 2.100	6	114
Skupaj	**114**	

Vir: Izmišljeni podatki

a) Izračunajte zaslužek, od katerega je polovica delavcev zaslužila več, druga polovica pa manj.

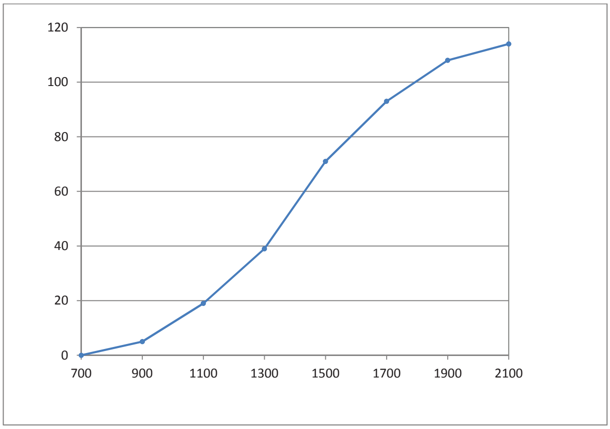
$$R = \frac{N+1}{2} = \frac{114+1}{2} = 57{,}5$$

Medialni razred: nad 1.300 do 1.500

$$Me = 1.300 + 200 \cdot \frac{57{,}5 - 39}{32} = 1.415{,}63\ EUR$$

Me = 1.415,63 EUR

b) Grafično prikažite kumulativo frekvenc.



c) Grafično ocenite število delavcev, ki so zaslužili nad 1.250,00 do 1.650,00 evrov.
cca. 50 – 51 delavcev

d) Grafično ocenite, koliko odstotkov delavcev je zaslužilo nad 1.750,00 evrov.
cca. 14 odstotkov delavcev

1. V tabeli so prikazani podatki o povprečni temperaturi zraka, povprečni maksimalni dnevni temperaturi zraka, povprečni minimalni dnevni temperaturi zraka, trajanju sončnega obsevanja, številu dni z nevihto ter številu dni z dnevno količino padavin nad 0,1 mm v posameznih mesecih leta 2015 za kraj Bilje pri Novi Gorici (nadmorska višina 55 m).

   Rezultate zaokroži na eno decimalno mesto.

   Rezultate zaokroži na eno decimalno mesto.

   a) Izračunaj povprečno dnevno trajanje sončnega obsevanja za poletje 2015? Meteorološko poletje traja od 1. junija do 31. avgusta.

   Rešitev

   V juniju, juliju in avgustu je sončno obsevanje trajalo 292,7 + 334,0 + 293,4 = 920,1 ure.
   Meteorološko poletje ima 30 + 31 + 31 = 92 dni.
   Povprečno dnevno trajanje sončnega obsevanja je bilo $\frac{920{,}1}{92} = 10{,}0$ ur.

   b) V katerem mesecu v prvi polovici leta 2015 je bila razlika med povprečno maksimalno in povprečno minimalno temperaturo zraka največja in koliko je znašala?

   Rešitev

   Razlike med povprečno maksimalno in povprečno minimalno temperaturo so zapisane v tabeli.
   Razlika je bila največja v juniju in je znašla 13,3°C.

   c) V juniju je bilo šest dni z nevihto več kot v maju, v marcu pa en dan manj kot v maju. Izračunaj število dni z nevihto v marcu, maju in juniju, če je bilo v celem letu v povprečju 2,5 dneva z nevihto na mesec.

   Rešitev

   Označimo število dni z nevihto v maju z x. Junija je bilo takih dni $x + 6$, v marcu pa $x - 1$.
   Iz enačbe za povprečje

   $$\frac{(x-1) + x + (x+6) + 19}{12} = 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad \frac{3x + 24}{12} = 2{,}5$$

   izračunamo $x = 2$.
   V marcu je bil 1 dan z nevihto, v maju sta bila 2 in v juniju 8 dni z nevihto.

   d) Izračunaj modus in mediano števila dni v mesecu, ko je padlo več kot 0,1 mm padavin. Podatke o številu dni s padavinami prikaži s škatlo z brki.

Rešitev

Podatke uredimo od najmanjšega do največjega.

$$8, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 12, 13, 18$$

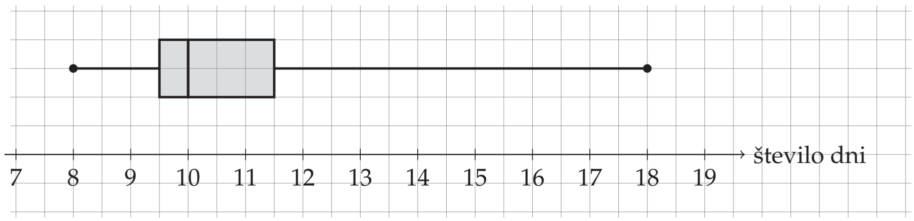
Največkrat se pojavi vrednost 10, zato je modus enak Mo = 10.

Šesti in sedmi podatek v urejenem nizu sta enaka 10, zato je mediana enaka Me = 10.

Izračunamo še prvi kvartil $Q_1 = \frac{9+10}{2} = 9{,}5$ in tretji kvartil $Q_3 = \frac{11+12}{2} = 11{,}5$.

Škatla se razteza od prvega do tretjega kvartila, vmes označimo mediano.

Brka se raztezata od kvartilov do najvišje oziroma najnižje vrednosti.



e) Kolikšna je bila povprečna temperatura zraka v juliju, če je bila povprečna temperatura zraka poleti 23,3°C?

Rešitev

Označimo povprečno temperaturo v juliju z y.

Povprečna temperatura v meteorološkem letnem času je utežena aritmetična sredina objavljenih povprečij, uteži so sorazmerne številom dni v posameznih mesecih.

Povprečna temperatura zraka poleti je bila

Rešitev

Označimo povprečno temperaturo v juliju z y.

Povprečna temperatura v meteorološkem letnem času je utežena aritmetična sredina objavljenih povprečij, uteži so sorazmerne številom dni v posameznih mesecih.

Povprečna temperatura zraka poleti je bila

$$\mu = \frac{30 \cdot 21{,}5 + 31y + 31 \cdot 23}{30 + 31 + 31} = \frac{31y + 1358}{92}.$$

Iz enačbe

$$\frac{31y + 1358}{92} = 23{,}3$$

dobimo $y = 25{,}3$°C.

2. Komitenti bank se pri najemanju potrošniških kreditov srečujemo z vrsto omejitev. Ena izmed njih je, da višina mesečne anuitete ne sme presegati tretjine vsote rednih mesečnih prilivov na naš bančni račun.

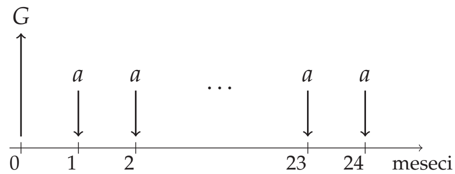
   Za potrošniške kredite banka uporablja konformno mesečno obrestovanje z letno obrestno mero 4 %. Privzemi, da imamo redne mesečne dohodke v višini 900 EUR.

   Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

a) Največ kolikšen potrošniški kredit z odplačilno dobo 24 mesecev lahko najamemo? Privzemi, da prvi obrok kredita plačamo mesec dni po najemu.

Rešitev

Letna obrestna mera je $p_{\%} = 4\,\%$, mesečni konformni obrestni faktor je $r = \sqrt[12]{1{,}04}$.
Mesečna anuiteta lahko znaša največ $a = 300$ EUR. Iščemo glavnico kredita G.
Denarne tokove po mesecih prikazuje spodnja shema.



Redukcijski termin postavimo na trenutek zadnje anuitete.
Z načelom ekvivalence glavnic dobimo

$$
\begin{aligned}
Gr^{24} &= ar^{23} + ar^{22} + \cdots + ar + a,\\
Gr^{24} &= a(r^{23} + r^{22} + \cdots + r + 1),\\
Gr^{24} &= a \cdot \frac{r^{24} - 1}{r - 1}.
\end{aligned}
$$

Najvišja dovoljena glavnica je $G = a \cdot \dfrac{r^{24} - 1}{(r - 1)r^{24}} = 300 \cdot \dfrac{1{,}04^2 - 1}{(\sqrt[12]{1{,}04} - 1)1{,}04^2} = 6913{,}54$ EUR.

b) S potrošniškim kreditom želimo kupiti novo opremo dnevne sobe, ki stane 4200 EUR. Kolikšna mora biti odplačilna doba kredita, če želimo dolg povrniti z najvišjimi še dovoljenimi anuitetami?

Rešitev

Glavnica kredita je $G = 4200$ EUR, mesečna anuiteta največ $a = 300$ EUR.
Naj bo število obrokov (meseci odplačilne dobe) enako n. Rešujemo enačbo

$$
Gr^n = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}.
$$

Preuredimo

$$
\begin{aligned}
\frac{G(r-1)}{a} &= \frac{r^n - 1}{r^n},\\
\frac{G(r-1)}{a} &= 1 - \frac{1}{r^n},\\
\frac{1}{r^n} &= \frac{a - G(r-1)}{a},\\
r^n &= \frac{a}{a - G(r-1)}
\end{aligned}
$$

in logaritmiramo

$$n \ln r = \ln \frac{a}{a - G(r-1)},$$

$$n = \frac{\ln \frac{a}{a-G(r-1)}}{\ln r} = \frac{\ln \frac{300}{300-4200(\sqrt[12]{1{,}04}-1)}}{\ln \sqrt[12]{1{,}04}} = 14{,}35.$$

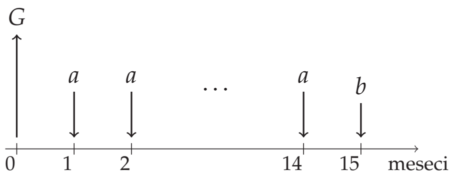
Odplačilna doba mora biti 15 mesecev.

c) Banka nam odobri kredit za novo opremo iz b) in dovoli, da vse anuitete razen zadnje znašajo 300 EUR. Koliko znaša zadnji obrok?

Rešitev

Glavnica kredita je $G = 4200$ EUR, število obrokov 15, prvih 14 je enakih $a = 300$ EUR, zadnji je b.

Denarne tokove po mesecih prikazuje spodnja shema.



Redukcijski termin postavimo na trenutek zadnje anuitete.

Z načelom ekvivalence glavnic dobimo

$$Gr^{15} = ar^{14} + ar^{13} + \cdots + ar + b,$$
$$Gr^{15} = ar(r^{13} + r^{12} + \cdots + r + 1) + b,$$
$$Gr^{15} = ar \cdot \frac{r^{14}-1}{r-1} + b.$$

Zadnji obrok znaša

$$b = Gr^{15} - ar \cdot \frac{r^{14}-1}{r-1} = 4200 \sqrt[12]{1{,}04}^{15} - 300 \sqrt[12]{1{,}04} \cdot \frac{\sqrt[12]{1{,}04}^{14} - 1}{\sqrt[12]{1{,}04} - 1} = 106{,}44 \text{ EUR}.$$

3. Spodnja preglednica prikazuje trenutne efektivne obrestne mere za različna dospetja. Čas t merimo v letih.

t	1	2	3
$R(0,t)$	2,00 %	2,50 %	3,00 %

Na trgu obstajata dve obveznici istega izdajatelja, obe imata dospetje čez 3 leta in izplačujeta letne kupone, prvega čez natanko eno leto.

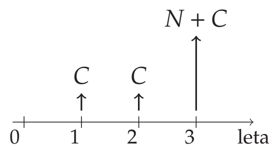
Rezultate v evrih in odstotkih zaokroži na dve decimalni mesti.

a) Prva obveznica je klasična kuponska obveznica z nominalno vrednostjo 1500 EUR in nominalno obrestno mero 4 %. Določi njeno ceno v času 0.

Rešitev

Posamezen kupon je enak $C = 0{,}04 \cdot 1500 = 60$ EUR.

Ceno obveznice dobimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov.



$$P_1 = C \cdot D(0,1) + C \cdot D(0,2) + (N + C) \cdot D(0,3)$$

b) Druga obveznica je amortizacijska obveznica z nominalno vrednostjo 1500 EUR in nominalno obrestno mero 3 %. Ta obveznica ob vsakem kuponu izplača še tretjino svoje nominalne vrednosti. Določi denarne tokove amortizacijske obveznice. Za vsak denarni tok zapiši izplačani znesek in trenutek izplačila.

Upoštevaj, da je kupon izplačan ob koncu obrestovalnega obdobja in da je njegova višina odvisna od preostale nominalne vrednosti po izplačilu prejšnjega kupona.

Rešitev

Nominalna vrednost obveznice je 1500 EUR.

Prvi kupon se izplača iz celotne nominalne vrednosti in znaša $C_1 = 0{,}03 \cdot 1500 = 45$ EUR.

Skupaj z njim se izplača prva tretjina nominalne vrednosti obveznice $\frac{N}{3} = 500$ EUR.

Drugi kupon se izplača iz preostale nominalne vrednosti in znaša

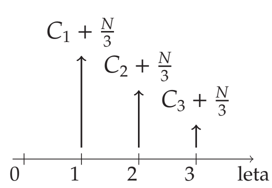
$$C_2 = 0{,}03 \cdot \frac{2N}{3} = 0{,}03 \cdot 1000 = 30 \text{ EUR}.$$

Skupaj z njim se izplača druga tretjina nominalne vrednosti obveznice $\frac{N}{3} = 500$ EUR.

Zadnji kupon znaša

$$C_3 = 0{,}03 \cdot \frac{N}{3} = 0{,}03 \cdot 500 = 15 \text{ EUR}.$$

Skupaj z njim se izplača zadnja tretjina nominalne vrednosti $\frac{N}{3} = 500$ EUR.



c) Določi ceno amortizacijske obveznice v času 0.

Rešitev

Ceno obveznice dobimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov.

$$P_2 = \frac{C_1 + \frac{N}{3}}{1 + R(0,1)} + \frac{C_2 + \frac{N}{3}}{(1 + R(0,2))^2} + \frac{C_3 + \frac{N}{3}}{(1 + R(0,3))^3}$$

$$P_2 = \frac{545}{1{,}02} + \frac{530}{1{,}025^2} + \frac{515}{1{,}03^3}$$

$$P_2 = 1510{,}07 \text{ EUR}$$

d) Kolikšen bi moral biti letni kupon klasične kuponske obveznice iz naloge a), da bi bila njena cena v času 0 enaka ceni amortizacijske obveznice iz naloge c)?

Rešitev

Označimo neznani kupon s C.

Iz formule za vrednotenje obveznic iz naloge a) dobimo enačbo

$$\frac{C}{1{,}02} + \frac{C}{1{,}025^2} + \frac{1500 + C}{1{,}03^3} = 1510{,}07,$$

$$C\left(\frac{1}{1{,}02} + \frac{1}{1{,}025^2} + \frac{1}{1{,}03^3}\right) = 1510{,}07 - \frac{1500}{1{,}03^3}.$$

Dobimo

$$C = \frac{1510{,}07 - \frac{1500}{1{,}03^3}}{\frac{1}{1{,}02} + \frac{1}{1{,}025^2} + \frac{1}{1{,}03^3}} = 48{,}24 \text{ EUR}.$$

e) Kolikšna bi morala biti nominalna obrestna mera amortizacijske obveznice iz naloge b), da bi bila njena cena enaka ceni klasične kuponske obveznice iz naloge a)?

Rešitev

Označimo iskano nominalno obrestno mero s c.

Upoštevamo, da so kuponi amortizacijske obveznice enaki

$$C_1 = c \cdot N = 1500c, \qquad C_2 = c \cdot \frac{2N}{3} = 1000c, \qquad C_3 = c \cdot \frac{N}{3} = 500c.$$

Iz formule za vrednotenje obveznic iz naloge c) dobimo enačbo

$$\frac{500 + 1500c}{1{,}02} + \frac{500 + 1000c}{1{,}025^2} + \frac{500 + 500c}{1{,}03^3} = 1543{,}55,$$

$$c\left(\frac{1500}{1{,}02} + \frac{1000}{1{,}025^2} + \frac{500}{1{,}03^3}\right) = 1543{,}55 - 500\left(\frac{1}{1{,}02} + \frac{1}{1{,}025^2} + \frac{1}{1{,}03^3}\right).$$

Dobimo

$$c = \frac{1543{,}55 - 500\left(\frac{1}{1{,}02} + \frac{1}{1{,}025^2} + \frac{1}{1{,}03^3}\right)}{\frac{1500}{1{,}02} + \frac{1000}{1{,}025^2} + \frac{500}{1{,}03^3}} = 0{,}0416 = 4{,}16\,\%.$$

4. Cena delnice podjetja A trenutno znaša 50 EUR, netvegana efektivna obrestna mera pa je 2 % za vsa dospetja. Delnica bo čez tri mesece izplačala dividendo v višini 3 EUR.

   Na delnico sta izdani evropska in ameriška nakupna opcija z zapadlostjo čez eno leto in izvršilno ceno 47 EUR.

   a) Kaj lahko poveš o premiji evropske nakupne opcije? Zapiši interval cen, ki ne omogočajo arbitraže.

      Rešitev

      Cena delnice je $S_0 = 50$ EUR, obrestna mera $R = 2\,\%$. Delnica do izplačala dividendo $d = 3$ EUR ob času $t = \frac{1}{4}$. Zapadlost opcij je $T = 1$ leto, izvršilna cena pa $K = 47$ EUR.
      Za premijo evropske nakupne opcije velja

      $$\max\{S_0 - K \cdot (1+R)^{-T} - I(0,T), 0\} \leq c_0^E \leq S_0.$$

      $I(0,T)$ je sedanja vrednost dividende $I(0,T) = \dfrac{a}{(1+R)^{1/4}}$. Dobimo

      $$\max\left\{50 - \frac{47}{1{,}02} - \frac{3}{1{,}02^{\frac{1}{4}}}, 0\right\} \leq c_0^E \leq 50 \quad \Rightarrow \quad 0{,}94 \leq c_0^E \leq 50.$$

   b) Ali je možna arbitraža, če je premija evropske nakupne opcije 2 EUR, premija ameriške nakupne pa 1,80 EUR? Če da, opiši arbitražno strategijo.

      Rešitev

      Premija evropske nakupne opcije je $c_0^E = 2$ EUR in ne krši intervala iz a).
      Premija ameriške nakupne opcije $c_0^A = 1{,}80$ EUR dopušča arbitražo.
      Ker ameriške opcije omogočajo predčasno izvršitev (dajejo več pravic kot evropske), ne morejo biti cenejše od sorodnih evropskih opcij.

      Arbitražna strategija je naslednja:

      Ob času $t = 0$:

      - Kupi ameriško nakupno opcijo,
      - izdaj evropsko nakupno opcijo.

      Neto denarni tok je $-1{,}80 + 2 = 0{,}20$ EUR.

      Ameriške opcije predčasno ne izvršimo.

      Ob času $t = 1$:

      - Izvrši ameriško nakupno opcijo, če se splača,
      - izplačaj evropsko nakupno opcijo, če je to potrebno.

      V obeh primerih se denarna tokova izničita. Neto denarni tok je enak 0.
      Netvegani zaslužek smo ustvarili v času 0.
      Možne so še druge arbitražne strategije, npr. nakup ameriške nakupne opcije in takojšnja izvršitev.

   c) Takoj po izplačilu dividend obrestne mere vztrajajo pri 2 % za vsa dospetja, cena delnice se je ustalila pri 48 EUR, cena evropske nakupne opcije pa pri 1,50 EUR. Pokaži, da je s tem možna arbitraža, in pripravi arbitražno strategijo, ki vključuje natanko eno evropsko nakupno opcijo.

Rešitev

Cena delnice je $S_{1/4} = 48$ EUR, obrestna mera $R = 2\,\%$, delnica do zapadlosti opcije ne bo izplačala dividend.
Za premijo evropske nakupne opcije mora veljati ocena

$$\max\{S_{1/4} - K \cdot (1+R)^{-(T-1/4)}, 0\} \leq c^E_{1/4} \leq S_{1/4}.$$

Dobimo

$$\max\left\{48 - \frac{47}{1{,}02^{3/4}}, 0\right\} \leq c^E_{1/4} \leq 48 \quad \Rightarrow \quad 1{,}69 \leq c^E_{1/4} \leq 48.$$

Premija $c^E_{1/4} = 1{,}50$ EUR leži zunaj intervala dopustnih cen, zato je mogoča arbitraža.

Na trgu namesto predpisane neenakosti $\max\{S_{1/4} - K \cdot (1+R)^{-(T-1/4)}, 0\} \leq c^E_{1/4}$ velja

$$S_{1/4} - K \cdot (1+R)^{-(T-1/4)} > c^E_{1/4},$$
$$S_{1/4} - K \cdot (1+R)^{-(T-1/4)} - c^E_{1/4} > 0.$$

Premija $c^E_{1/4} = 1{,}50$ EUR leži zunaj intervala dopustnih cen, zato je mogoča arbitraža.

Na trgu namesto predpisane neenakosti $\max\{S_{1/4} - K \cdot (1+R)^{-(T-1/4)}, 0\} \leq c^E_{1/4}$ velja

$$S_{1/4} - K \cdot (1+R)^{-(T-1/4)} > c^E_{1/4},$$
$$S_{1/4} - K \cdot (1+R)^{-(T-1/4)} - c^E_{1/4} > 0.$$

Arbitražna strategija je naslednja:

Ob času $t = 1/4$:

- Prodaj delnico (kratka prodaja),
- investiraj znesek $\dfrac{47}{1{,}02^{3/4}} = 46{,}31$ EUR do časa 1,
- kupi evropsko nakupno opcijo po ceni, ki velja na trgu.

Neto denarni tok je $48 - \dfrac{47}{1{,}02^{3/4}} - 1{,}50 = 0{,}19$ EUR.

Ob času $t = 1$:

- Kupi delnico in zapri kratko prodajo,
- prejmi investirani znesek z obrestmi,
- izvrši evropsko nakupno opcijo, če se splača.

Neto denarni tok je $-S_1 + 47 + \max\{S_1 - 47, 0\} = \max\{0, 47 - S_1\} \geq 0$.

Netvegan zaslužek je zagotovljen v času 1/4.
Ob zapadlosti opcije lahko prejmemo še dodatno izplačilo, odvisno od cene delnice S_1.