Tekmovanja

52. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje – državno tekmovanje

Naloge za 5. razred

A1. S katerim številom moramo deliti število 2016, da dobimo količnik 25 in ostanek 66?

(**A**) 56 (**B**) 60 (**C**) 70 (**D**) 78 (**E**) 83

A2. Koliko je četrtina petine števila 160?

(**A**) 2 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 8 (**E**) 10

A3. Ob dolgi ravni cesti raste 12 brez. Med vsakima dvema brezama raste grm divjih vrtnic. Med vsako brezo in sosednjim grmom divjih vrtnic raste leska. Koliko lesk raste ob tej cesti?

(**A**) 21 (**B**) 22 (**C**) 23 (**D**) 24 (**E**) 25

A4. Jan ima mobilni telefon, ki prikazuje čas v digitalnem zapisu (npr. $20{:}16$). Kolikokrat v enem dnevu se števke 0, 1, 2 in 6 na mobilnem telefonu pokažejo hkrati?

(**A**) 8 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 14 (**E**) 16

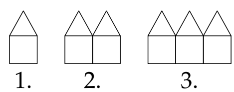
A5. Miha bere knjigo z 261 stranmi. Prvi dan prebere 10 strani, drugi dan 8 strani, tretji dan spet 10 strani, četrti pa spet 8. Tako nadaljuje v istem ritmu, izmenično prebira 10 in 8 strani na dan. Koliko strani prebere v treh tednih?

(**A**) 180 (**B**) 188 (**C**) 190
(**D**) 216 (**E**) prebere celo knjigo

A6. Tine ima le kovance za 10 centov, 50 centov in 1 EUR. Kupil bo sladoled za 2 EUR. Odločil se je, da ne bo plačal s kovanci, ki bi bili vsi enake vrednosti. Na koliko načinov lahko plača?

(**A**) 6 (**B**) 7 (**C**) 8 (**D**) 9 (**E**) 10

A7. Ana je z vžigalicami po vrsti oblikovala figure. Kot je razvidno s slike, je za prvo figuro porabila 6 vžigalic, za drugo 11, za tretjo pa 16 vžigalic. Za katero figuro po vrsti bi porabila 131 vžigalic?



(**A**) $5.$ (**B**) $25.$ (**C**) $26.$ (**D**) $27.$ (**E**) $31.$

A8. Nika je na koledarju obkrožila števila, ki so označevala sobote nekega meseca. Tri obkrožena števila so bila soda. Kateri dan v tednu je bil 25. dan tega meseca?

(**A**) nedelja (**B**) ponedeljek (**C**) torek (**D**) petek (**E**) sobota

B1. Izračunaj: $2016 - 1602 : 6 : 3 + (79 \cdot 5 - 7 - 3) - 4^2 \cdot 2$

B2. V šolo v naravi bo šlo 63 otrok $5.$ razreda. Po sobah bodo nameščeni tako, da bodo fantje spali v triposteljnih sobah, dekleta pa v dvoposteljnih. Za namestitev vseh otrok je potrebna ena triposteljna soba več, kot je dvoposteljnih. Koliko deklet in koliko fantov bo šlo v šolo v naravi? Rešitev utemelji.

Naloge za 6. razred

A1. Koliko so tri četrtine petine števila 160?

(**A**) 8 (**B**) 24 (**C**) 96 (**D**) 120 (**E**) 128

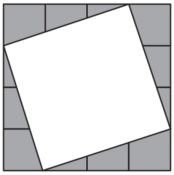
A2. Za koliko se razlikujeta števili 5 M 4 St 9 Dt 9 S 2 D 3 E ter šest milijonov dvaintrideset tisoč sedem?

(**A**) 458916 (**B**) 541084 (**C**) 541184 (**D**) 542084 (**E**) 1541084

A3. Koliko je $0.1 + 0.01 : 0.1 \cdot 0.01$?

(**A**) 0.01 (**B**) 0.011 (**C**) 0.101 (**D**) 0.11 (**E**) 10.1

A4. Kolikšen del kvadratne mreže predstavlja izrezani del?



(**A**) $\frac{1}{4}$ (**B**) $\frac{1}{2}$ (**C**) $\frac{5}{8}$ (**D**) $\frac{3}{4}$ (**E**) $\frac{7}{8}$

A5. V določenem delu zime traja noč 3 ure in 15 minut dlje kot dan. Koliko časa traja dan?

(**A**) 13 h 35 min 30 s (**B**) 12 h 22 min 30 s (**C**) 10 h 20 min 40 s
(**D**) 13 h 37 min 30 s (**E**) 10 h 22 min 30 s

A6. V 6. razredu je 28 učencev. Odlično oceno iz matematike ima 5 učencev, dodatni pouk matematike pa obiskuje 8 učencev, medtem ko 17 učencev nima niti odlične ocene iz matematike niti ne obiskuje dodatnega pouka. Koliko tistih učencev, ki imajo odlično oceno iz matematike, obiskuje dodatni pouk matematike?

(**A**) 5 (**B**) 4 (**C**) 3 (**D**) 2 (**E**) 1

A7. Na rojstnodnevni zabavi je bilo število deklet za 2 večje od števila fantov. Rojstnodnevno torto so razdelili na 26 enakih kosov. Vsak fant je pojedel 2 kosa torte in vsako dekle 1 kos torte. Pojedli so celo torto. Koliko otrok je bilo na zabavi?

(**A**) 22 (**B**) 18 (**C**) 15 (**D**) 14 (**E**) 12

A8. Marko je petkrat pogledal na uro in vsakič zapisal, koliko je bila tedaj ura. Ob kateri uri sta urna kazalca oklepala najmanjši kot?

(**A**) 1.30 (**B**) 2.45 (**C**) 4.15 (**D**) 7.50 (**E**) 13.00

B1. V toni pitne vode je 40 g soli, v toni morske vode pa je 35 kg soli. Kolikšna količina pitne vode vsebuje toliko soli kot 200 g morske vode?

B2. En kemični svinčnik stane 1.10 EUR. Če jih kupiš več, veljajo naslednje ugodnosti:
za 20 plačanih kemičnih svinčnikov dobiš še enega zastonj ali
za 50 plačanih kemičnih svinčnikov dobiš še tri zastonj ali
za 100 plačanih kemičnih svinčnikov jih dobiš še 8 zastonj.

(a) Koliko plačaš za 30 kemičnih svinčnikov?

(b) Potrebuješ 185 kemičnih svinčnikov. Koliko plačaš za njih?

(c) Koliko kemičnih svinčnikov dobiš za 100 EUR?

Naloge za 7. razred

A1. Koliko je $0.1 + 0.01 : 0.1 \cdot 0.01$?

(**A**) 0.01 (**B**) 0.011 (**C**) 0.101 (**D**) 0.11 (**E**) 10.1

A2. S katerim številom moramo deliti razliko števil $3\frac{1}{12}$ in $2\frac{1}{18}$, da bi bil količnik enak $1\frac{3}{4}$?

(**A**) $\frac{2}{21}$ (**B**) $\frac{37}{63}$ (**C**) $\frac{2}{3}$ (**D**) $\frac{6}{7}$ (**E**) $\frac{259}{144}$

A3. Prejšnji mesec je 250 g orehov v trgovini A stalo 3.80 EUR, a so ceno ta mesec znižali za 25 %. V trgovini B je 200 g orehov prejšnji mesec stalo 2.75 EUR, vendar so ta mesec ceno zvišali za 20 %. V kateri trgovini je cena za 100 g orehov nižja in za koliko?

(**A**) V trgovini A, za 51 centov (**B**) V trgovini A, za 45 centov
(**C**) V trgovini B, za 23 centov (**D**) V trgovini B, za 15 centov
(**E**) Ceni sta enaki

A4. Kolikšna je vrednost izraza $\frac{4}{3-\frac{6}{3+\frac{3}{2-\frac{1}{5}}}}$?

(**A**) 2 (**B**) 1 (**C**) $\frac{1}{2}$ (**D**) $\frac{1}{5}$ (**E**) $2\frac{1}{3}$

A5. Na potovanju v eksotično deželo se je Robert okužil z redko boleznijo. Zdravljenje traja 100 dni. Zdravnik mu je predpisal tri zdravila: kapljice, ki jih mora jemati po preteku vsakih 8 ur, tablete, ki jih mora jemati po preteku vsakih 18 ur, in kapsule, ki jih mora jemati po preteku vsakih 12 ur. Na začetku vzame vsa tri zdravila hkrati. Kolikokrat med terapijo bo vzel vsa tri zdravila ob istem času?

(**A**) 40-krat (**B**) 39-krat (**C**) 36-krat (**D**) 34-krat (**E**) 33-krat

A6. Miha ima 8 enako velikih kock, in sicer 4 rdeče in 4 modre. Iz 4 kock sestavi stolp. Koliko različnih stolpov lahko sestavi, če ne smeta nobeni dve rdeči kocki stati ena na drugi?

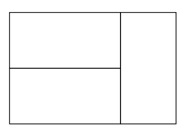
(**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 10 (**D**) 11 (**E**) 14

A7. V nekem koledarskem letu, ki ni prestopno, je 53 torkov. Kateri datum je prvo soboto v januarju?

(**A**) $2.\ 1.$ (**B**) $3.\ 1.$ (**C**) $4.\ 1.$ (**D**) $5.\ 1.$ (**E**) $6.\ 1.$

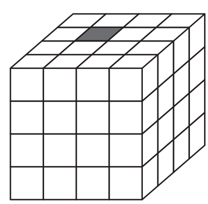
A8. Kolikšna je vsota števk najmanjšega naravnega števila, ki je deljivo s 7 in ima natanko 3 delitelje?

(**A**) 5 (**B**) 7 (**C**) 13
(**D**) 16 (**E**) nemogoče je določiti



A9. Ana s tremi skladnimi pravokotniki oblikuje večji pravokotnik s ploščino $150\ \mathrm{cm}^2$. Za koliko se razlikujeta obsega večjega pravokotnika in enega izmed skladnih pravokotnikov?

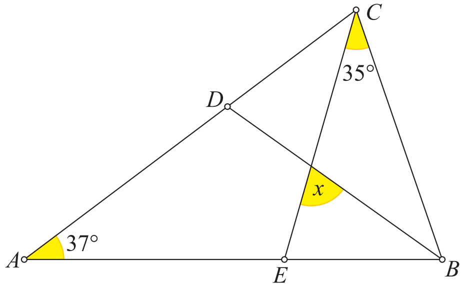
(**A**) 10 cm (**B**) 20 cm (**C**) 30 cm (**D**) 40 cm (**E**) 50 cm



A10. Kocka na sliki je sestavljena iz 63 manjših belih kock in ene črne kocke, kot kaže slika. Prvi dan črna kocka spremeni barvo vseh sosednjih kock iz bele v črno. Naslednji dan vse črne kocke naredijo enako. Koliko črnih kock imamo na koncu drugega dne?
Kocki sta sosednji, če imata skupno ploskev.

(**A**) 6 (**B**) 11 (**C**) 15 (**D**) 16 (**E**) 17

B1. Daljica BD leži na simetrali kota z vrhom v točki B trikotnika ABC. Na stranici AB leži točka E tako, da velja $|AE| = |CE|$. Kot $\sphericalangle BAC$ je velik $37°$, kot $\sphericalangle ECB$ pa $35°$. Izračunaj velikost kota x (glej sliko).



B2. Imamo 400 enakih voščenih krogel, iz katerih izdelujemo sveče. Iz vsake krogle izdelamo 10 sveč. Iz ostanka vsakih 20 uporabljenih krogel lahko naredimo eno kroglo, enako prvotnim.

Koliko sveč lahko naredimo iz vseh 400 krogel voska?

Kolikšen del vse količine voska, ki smo ga imeli na začetku, predstavlja količina voska, ki na koncu ostane?

Naloge za 8. razred

A1. Kolikšna je vrednost izraza $\frac{1}{\sqrt{18}}\left(\sqrt{8}+\sqrt{32}\right)$?

(**A**) $\frac{1}{4}$ (**B**) $\sqrt{2}$ (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 6

A2. Koliko je vsota prafaktorjev števila, ki ga predstavlja vrednost izraza $3^6 - 2^6$?

(**A**) 1 (**B**) 19 (**C**) 31 (**D**) 54 (**E**) 102

A3. Nika je preštela vse stranice in diagonale nekega večkotnika. Ugotovila je, da jih je skupaj 45. Kateri večkotnik je to?

(**A**) 6-kotnik (**B**) 7-kotnik (**C**) 9-kotnik (**D**) 10-kotnik (**E**) 12-kotnik

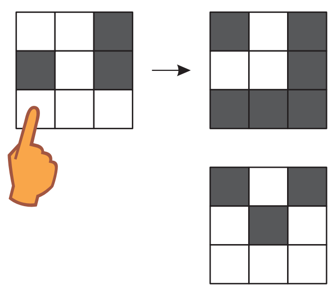
A4. Kolikšna je vrednost izraza $|ab - (-(-b) + (-a))|$ za $a = 8$ in $b = -4$?

(**A**) -44 (**B**) -20 (**C**) 20 (**D**) 28 (**E**) 44

A5. Aritmetična sredina 11 števil je 4850. Od vsakega izmed enajstih števil odštejemo 10. Kolikšna je aritmetična sredina novih števil?

(**A**) 4740 (**B**) 4840 (**C**) 4730
(**D**) 4830 (**E**) Ni mogoče določiti.

A6. Klemen ima na zaslonu svojega mobilnega telefona kvadratno mrežo 3×3 s črnimi in z belimi kvadrati. Ko se Klemen dotakne nekega kvadrata, vsi kvadrati v isti vrstici in istem stolpcu, kot je ta kvadrat, spremenijo svojo barvo (iz črne v belo ali obratno, kot je prikazano na sliki desno zgoraj). Klemen bo začel z mrežo, ki je narisana desno spodaj, in se enega za drugim dotaknil treh kvadratov, ki so trenutno črne barve. Koliko belih kvadratov bo na koncu na mreži?



(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 5 (**E**) 8

A7. Kolikokrat se v 24 urah na digitalni uri pojavijo natanko tri enake števke zapored? (Na primer: 22:21.)

(**A**) 32 (**B**) 36 (**C**) 39 (**D**) 40 (**E**) 43

A8. Točki P in R razdelita stranico AB pravokotnika $ABCD$ na tri enake dele. Naj bo S središče pravokotniku očrtane krožnice. Kolikšen del ploščine celotnega pravokotnika predstavlja trikotnik PRS?

(**A**) $\frac{1}{6}$ (**B**) $\frac{1}{12}$ (**C**) $\frac{1}{24}$ (**D**) $\frac{1}{18}$ (**E**) $\frac{1}{9}$

B1. Izračunaj vrednost izraza

$$4^{2016} : 4^{2015} : (5 \cdot 2^3 + \frac{16^5}{8^5} - 3^5 : 3^3 : \frac{1}{9} - \sqrt{1\frac{9}{16}} + \sqrt{8^2 + 6^2})$$

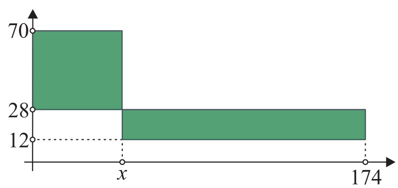
B2. V 8. razredu, v katerem je enako število deklet in fantov, ima 40 % učencev svetle lase, vsi ostali pa temne. Izmed vseh svetlolasih učencev je 75 % deklet. Kolikšen odstotek vseh učencev v razredu predstavljajo fantje s temnimi lasmi?

B3. Točki A in B ležita na krožnici s središčem v točki S. Nosilka tetive AB in pravokotnica skozi središče na polmer AS se sekata v točki C, ki leži v notranjosti kroga. Tangenta na krožnico skozi točko B seka nosilko daljice SC v točki D. Dokaži, da je trikotnik BCD enakokrak. Nariši skico.

Naloge za 9. razred

A1. Kolikšna je vrednost izraza $\dfrac{4}{3 - \frac{6}{3 + \frac{3}{2 - \frac{1}{5}}}}$?

(**A**) 2 (**B**) 1 (**C**) $\frac{1}{2}$ (**D**) $\frac{1}{5}$ (**E**) $2\frac{1}{3}$



A2. Osenčena pravokotnika v koordinatnem sistemu sta ploščinsko enaka. Kolikšna je koordinata x?

(**A**) 12 (**B**) 24 (**C**) 48 (**D**) 60 (**E**) 72

A3. Polna steklenica vode tehta ravno 1 kg. Če odlijemo $\frac{2}{7}$ vode, tehta steklenica s preostankom vode $\frac{1}{4}$ kg manj kot polna steklenica. Koliko tehta prazna steklenica?

(**A**) 0.1 kg (**B**) 0.125 kg (**C**) 0.15 kg (**D**) 0.175 kg (**E**) 0.2 kg

A4. Na pisnem testu je bilo 30 vprašanj. Renata je imela 50 % več pravilnih odgovorov, kot je imela napačnih odgovorov. Na koliko vprašanj je odgovorila pravilno?

(**A**) 10 (**B**) 12 (**C**) 15 (**D**) 18 (**E**) 20

A5. Točka M je razpolovišče stranice AB pravilnega šestkotnika $ABCDEF$. Točka N leži na stranici DE, da velja $|DN| : |NE| = 2 : 1$. Naj bo L presečišče daljice MN in diagonale AD. Kolikšno je razmerje $|AL| : |LD|$?

(**A**) 1 : 1 (**B**) 1 : 2 (**C**) 3 : 4 (**D**) 2 : 3 (**E**) 3 : 7

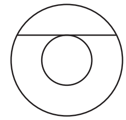
A6. Mediana Martinih doseženih točk na 15 košarkarskih tekmah je enaka 9. Na dveh tekmah je dala največje število točk, in sicer 10. Največkrat je dosegla 6 točk, kar je tudi njen najslabši rezultat. Kolikokrat je dosegla po 6 točk?

(**A**) 5-krat (**B**) 6-krat (**C**) 7-krat (**D**) 8-krat (**E**) 9-krat

A7. Na gradbišču so bili 4 delavci. Prvi, drugi in tretji delavec bi skupaj delo opravili v 6 urah. Prvi, drugi in četrti delavec bi končali v 7.5 ure. Če bi skupaj delala samo tretji in četrti delavec, bi delo opravila v 10 urah. V kolikšnem času bi delo opravili vsi štirje skupaj?

(**A**) 4 ure (**B**) 5 ur (**C**) 5.5 ure (**D**) 6 ur (**E**) 11.5 ure

A8. Dani sta dve koncentrični krožnici. Tetiva večje krožnice leži na tangenti manjše krožnice in je dolga 20 enot. Kolikšna je ploščina kolobarja, omejenega s krožnicama?



(**A**) 20π (**B**) 100π (**C**) 200π

(**D**) 400π (**E**) Ni mogoče določiti.

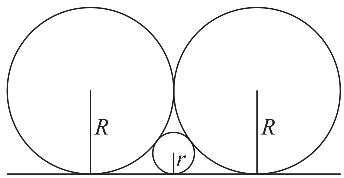
B1. Dan je izraz $(2.6x + 5.8)^2 - (0.8x - 12.2)^2$. Za katere vrednosti realnih števil x je vrednost izraza enaka 0?

B2. Dolžina, širina in višina kvadrataste škatle, podane v centimetrih, so tri zaporedna naravna liha števila. Vsota dolžin vseh robov škatle je 156 cm.

(a) Izračunaj, koliko kvadratnih metrov kartona potrebujemo za izdelavo take škatle, če zaradi rezanja in pokrova potrebujemo $5\ \%$ kartona več.

(b) Kolikšna je prostornina take škatle v litrih?

B3. Dani so trije krogi, ki se dotikajo, kot kaže slika. Polmer manjšega kroga izrazi s polmerom enega izmed obeh skladnih večjih krogov.



60. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – šolsko tekmovanje

Naloge za 1. letnik

B1. Naj bo $\mathcal{K}$ krožnica s polmerom 1. Znotraj krožnice $\mathcal{K}$ narišemo tri manjše krožnice enakih polmerov, tako da se vsaka od njih dotika drugih dveh in krožnice $\mathcal{K}$. Določi polmer teh treh manjših krožnic.

B2. Poišči vsa realna števila x, ki rešijo neenačbo

$$\Big||x-2| - |2x-1|\Big| < 2.$$

Naloge za 2. letnik

B1. Poišči vsa nenegativna realna števila x, y in z, za katera velja

$$\sqrt{x} - \sqrt{y+z} = \sqrt{y} - \sqrt{z+x} = \sqrt{z} - \sqrt{x+y}.$$

B2. Naj bo D taka točka na stranici AB trikotnika ABC, da je CD simetrala kota $\sphericalangle ACB$. Središči trikotnikoma ADC in DBC včrtanih krožnic označimo zaporedoma z I in J. Denimo, da sta premici IJ in CD pravokotni. Dokaži, da je tedaj trikotnik ABC enakokrak z vrhom pri C.

Naloge za 3. letnik

B1. Krožnica $\mathcal{K}$ s polmerom r poteka skozi oglišči A in B kvadrata $ABCD$ s stranico dolžine a, tako da središče kvadrata leži zunaj krožnice. Tangentni odsek iz točke C do krožnice $\mathcal{K}$, je dvakrat daljši od stranice kvadrata. Izrazi polmer r z dolžino a.

B2. Poišči vsa realna števila x in α, ki rešijo enačbo

$$\tan^2 \alpha = x(2\sin\alpha - x).$$

Naloge za 4. letnik

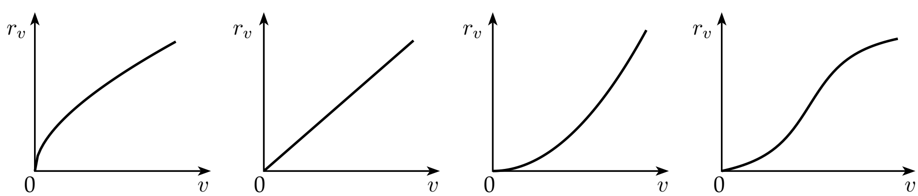
B1. Označimo z a_n, b_n in c_n po vrsti ostanke pri deljenju naravnega števila n s števili 502, 602 in 702. Poišči vsa naravna števila n, za katera velja $n = a_n + b_n + c_n$.

B2. Za polinom p, katerega koeficienti so zaporedna naravna števila, velja $p(1) = 121$. Koliko je najvišja možna stopnja tega polinoma?

Tekmovanje iz fizike za zlato Stefanovo priznanje – državno tekmovanje

Naloge za 8. razred

A1 Varnostna razdalja r_v je najmanjša dovoljena razdalja med dvema voziloma, ki vozita eno za drugim z enako in stalno hitrostjo v. Določena je kot pot, ki jo vozilo prevozi v 2 s. Kateri graf pravilno kaže odvisnost varnostne razdalje r_v od hitrosti vozila v?

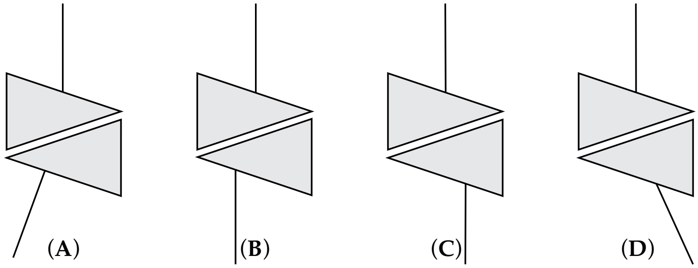


(A) **(B)** **(C)** **(D)**

A2 Parameter, ki določa ločljivost pri natisu s tiskalniki, ima enoto *dpi*. Oznaka *dpi* (*"dots per inch"*) pomeni število pik, ki jih tiskalnik lahko natisne v vrstico dolžine 1 inče. Ta pola je bila natisnjena z ločljivostjo 600 dpi v obeh smereh, vodoravni in navpični. Inča meri 2,54 cm. Kolikšno je največje možno število pik, ki jih tiskalnik natisne v kvadratek s stranico dolgo 1 cm?

(A) 55 800 **(B)** 141 732 **(C)** 360 000 **(D)** 914 400

A3 Svetlobni curek vpada iz zraka na dve enaki stekleni prizmi, postavljeni, kot kažejo slike. Katera slika pravilno kaže smeri curkov pred in po prehodu skozi par prizm?



A4 V opisanih primerih naredi smiselne ocene za sile in ploščine ploskev. V vseh primerih so tla vodoravna in gladka. V katerem primeru je tlak največji?

(**A**) Na parketu pod konicami prstov balerine, ki v trdih baletnih copatih izvaja pirueto (se vrti na prstih ene noge).

(**B**) Na asfaltu pod kolesi osebnega avtomobila z maso 1 t.

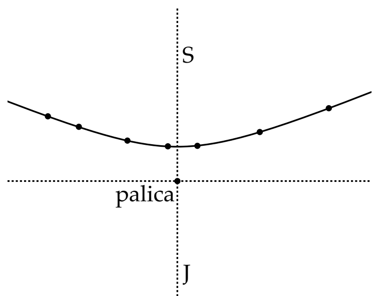
(**C**) Na mizi pod dolgim robom geotrikotnika, s katerim smo pod težiščem podprli 1. del SSKJ (Slovarja slovenskega knjižnega jezika), ki ima maso 2,7 kg.

(**D**) Pod kocko iz betona z robom dolgim 1 m.

A5 Mesto Pontianak na indonezijskem otoku Borneo leži tik ob ekvatorju. Batari je nekega dne opazovala senco palice, zapičene navpično v vodoravna tla, tako da je na tleh ob različnih urah označila skrajno točko sence in na koncu označene točke povezala s krivuljo. To krivuljo vidiš na sliki (v tlorisu). Katerega dne je Batari opazovala senco palice?

(**A**) 25. marca. (**B**) 10. junija.

(**C**) 1. septembra. (**D**) 20. decembra.



B1 Ko jadrnica v brezvetrju miruje na mirni gladini jezera, njeno težo uravnoveša *sila vode* na jadrnico, ki ji pravimo tudi sila *vzgona*. Sila vzgona deluje na jadrnico v smeri navpično navzgor.

(a) Masa jadrnice je 1 tona, povprečna masa posameznega člana 2-članske posadke je 80 kg. Kolikšna sila vzgona deluje v brezvetrju na jadrnico, mirujočo na vodni gladini, ko sta na njej oba člana posadke?

(b) V splošnem je sila vzgona na telo, ki je celo ali delno potopljeno v vodi, po velikosti enaka teži vode, ki jo potopljeni del telesa izpodriva. Kolikšno prostornino vode izpodriva jadrnica v primeru, ko je na njej vsa posadka, in kolikšno v primeru, ko posadke ni na barki?

Če je na jadrnici dodaten tovor (*ali pa jo neka druga sila dodatno tišči ali vleče navzdol*), je jadrnica ugreznjena nekoliko globlje v vodo (izpodriva več vode).

(c) Jadrnica miruje zasidrana v zalivu, zaščitenem pred valovi. Posadke ni na njej. Veter piha v vodoravni smeri s hitrostjo 30 vozlov v smeri od premca proti krmi in deluje na zasidrano jadrnico s silo 2 500 N. Predpostavi, da je sidrna vrv lahka in ravno napeta od premca jadrnice do sidra na dnu, kot kaže slika. Masa sidra je v primerjavi z maso cele jadrnice zanemarljiva. Obkroži ustrezno besedo, da bo izjava pravilna.

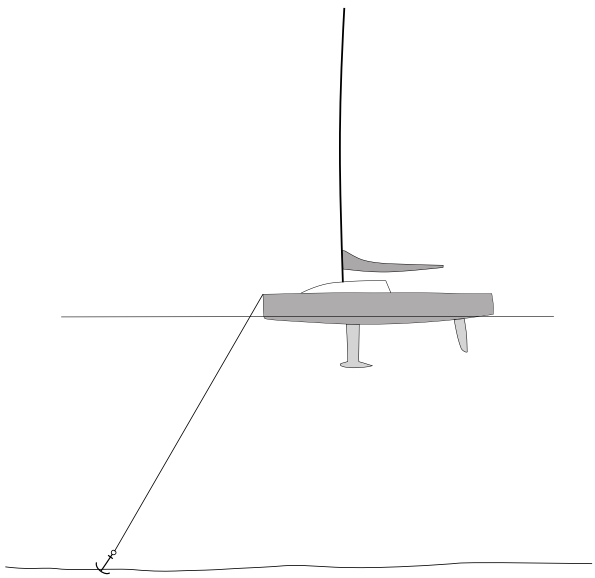
Ko piha veter, je sila vzgona na zasidrano jadrnico

(**A**) manjša (**B**) enaka (**C**) večja

kot sila vzgona, ko vetra ni.

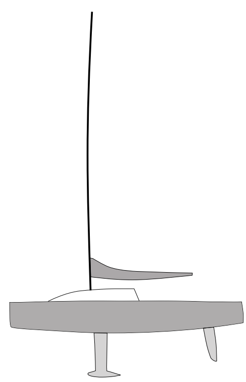
(d) Upoštevaj, da zasidrano jadrnico sestavljajo vsi njeni deli razen sidrne vrvi in sidra. Na sliko zasidrane jadrnice nariši v merilu, v katerem pomeni 1 cm na sliki silo 2,5 kN v naravi, vse zunanje sile, ki delujejo na jadrnico pri pogojih, navedenih pri vprašanju (c). Sile poimenuj in napiši njihove velikosti.

(e) Kolikšno prostornino vode izpodriva jadrnica pri pogojih, navedenih pri vprašanju (c) (jadrnica na sliki)?



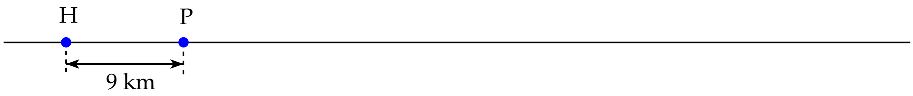
(f) S kolikšno silo vleče sidrna vrv sidro pri pogojih, navedenih pri vprašanju (c) (na zgornji sliki)?

(g) Če je sila vrvi na sidro prevelika, sidro popusti. Sidro dobro drži pri večji sili, če sila deluje na sidro pod manjšim kotom glede na podlago (dno), pa še sidrna vrv je tedaj manj napeta. S kolikšno silo vleče pri pogojih, navedenih pri vprašanju (c), sidrna vrv sidro, če jo mornar toliko podaljša, da oklepa z vodoravnim dnom kot 30°? Pomagaj si z načrtovanjem.



(h) Pod kolikšnim kotom glede na vodoravno dno bi morala sidrna vrv vleči sidro, da bi bila sila na sidro najmanjša, in kolikšna bi bila ta sila po velikosti v opisanih vetrovnih pogojih?

B2 Iz starega Močnikovega učbenika je tudi ta naloga. *Dva popotnika sta si narazen za* 9 *km. Ako si gresta nasproti, snideta se v* 1 *uri, ako pa gresta v isto smer, doide hitrejši* (H) *drugega* (počasnejšega, P) *v* 5 *urah.* Oba popotnika se gibljeta s stalnima hitrostma.

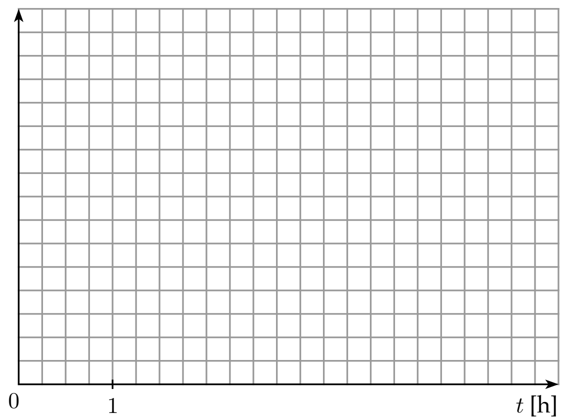


(a) Koliko kilometrov prehodita skupaj v 1 uri in koliko v 5 urah?

(b) Koliko kilometrov prehodi v 5 urah počasnejši popotnik?

(c) S kolikšnima hitrostma hodita popotnika?

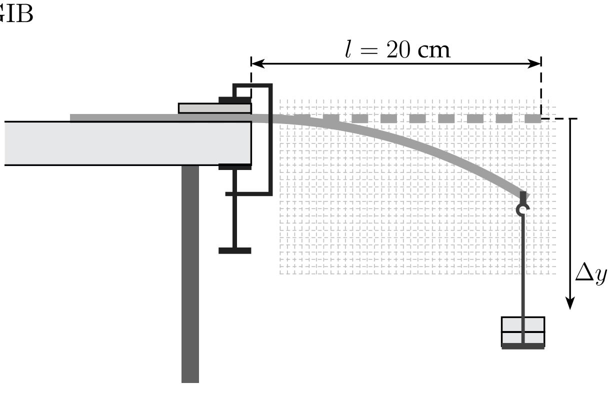
(d) V isti koordinatni sistem nariši grafe, ki kažejo, kako se legi obeh popotnikov spreminjata s časom v primeru, ko si hodita nasproti (s polnima črtama, označi ju s h_1, hitrejši, in p_1, počasnejši) ter v primeru, ko hodita v isto smer in hitrejši dohiteva počasnejšega (s črtkanima črtama, označi ju s h_2 in p_2).



(e) Kolikšna je hitrost, s katero se zmanjšuje razdalja med popotnikoma, ko hodita v isto smer in hitrejši dohiteva počasnejšega?

C – eksperimentalna naloga: UPOGIB

(a) Prižema drži ob robu mize leseno deščico. Med deščico in mizo vstavi ravnilo tako, da je zaznamek 20 cm točno ob robu mize, lesena deščica in prižema naj držita ravnilo pri tem zaznamku. Čez rob mize sega (malo več kot) 20 cm prostega ravnila.



Pri zaznamku 0 cm je v ravnilu luknjica. Skozi luknjico potisni zanko iz vrvice, na kateri visi posodica za uteži. Zanko zagozdi z vžigalico. Tako na ravnilo pritrdiš posodico za uteži. Zraven ravnila na primerno mesto (blizu ravnila) namesti še leseno palico, na kateri visi milimetrski papir, na katerega boš s flomastrom beležil svoje meritve.

Na milimetrskem papirju **za vsak niz meritev** najprej označi **ničelno lego krajišča** ravnila, ko v posodici ni uteži. Potem dodajaj uteži s skupno maso m (zapisano v tabeli) in na milimetrskem papirju označuj lego obremenjenega krajišča ravnila v odvisnosti od m.

Ko opraviš vse meritve, snemi milimetrski papir s palice in z njega izmeri odmik krajišča ravnila od ničelne lege Δy. Izmerjene odmike vpiši v razpredelnico.

Meritve ponovi še pri dolžinah prostega ravnila 10 cm in 30 cm in rezultate vpiši v razpredelnico. Največja masa uteži, ki jo v posameznem primeru obesiš na ravnilo, je že zapisana v ustrezni tabeli.

(A) $l = 20$ cm		**(B)** $l = 10$ cm		**(C)** $l = 30$ cm	
m [g]	Δy [cm]	m [g]	Δy [cm]	m [g]	Δy [cm]
0	0	0	0	0	0
100		100		50	
200		200		100	
300		300		150	
350		400		200	
400		500		250	
450		600		300	

(b) V isti koordinatni sistem (na naslednji strani) nariši tri grafe, ki kažejo, kako je odmik krajišča ravnila od ničelne lege odvisen od **sile**, ki deluje na krajišče ravnila, za različne dolžine ravnila (za primere **(A)**, **(B)** in **(C)**). Grafe jasno označi.

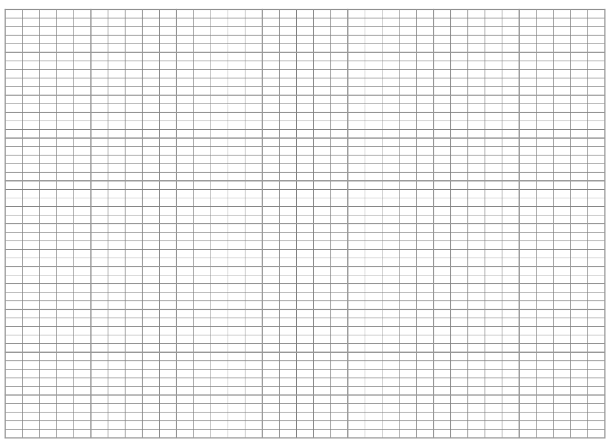
(c) Po točkah (na kratko, a natančno) zapiši štiri opažanja oz. ugotovitve o upogibanju enega ravnila.

(d) Ponovi meritve še z dvema ravniloma, ki ju položiš natančno enega na drugega, pri dolžini prostih delov ravnil 30 cm. Vrvico posodice za uteži zagozdi skozi luknjici v obeh ravnilih. Meritve vpiši v stolpec **(D)**.

(e) V zadnjem primeru pred merjenjem ravnili z lepilnim trakom tesno in dobro zlepi na obeh robovih po celotni dolžini. Dolžina prostih delov ravnil naj bo 30 cm. Meritve vpiši v stolpec **(E)**.

2 ravnili, $l = 30$ cm		
	(D)	**(E)**
m [g]	Δy [cm]	Δy [cm]
0	0	0
100		
200		
300		
400		
500		
600		

(f) V isti koordinatni sistem nariši tri grafe, ki kažejo, kako je odmik krajišča ravnila od ničelne lege odvisen od sile, ki deluje na krajišče ravnila, za dolžino ravnila $l = 30$ cm: za eno ravnilo (primer **A**), dve ravnili, položeni eno na drugo (primer **D**) in dve ravnili, položeni eno na drugo in zlepljeni po robovih (primer **E**).

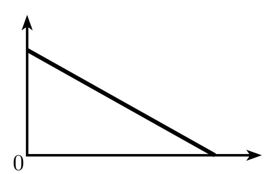


(g) Po točkah (na kratko, a natančno) zapiši tri opažanja oz. ugotovitve o upogibanju, ki se nanašajo na 30 cm dolga ravnila.

Naloge za 9. razred

A1 Skokico spustimo, da prosto pade proti tlom. Zračni upor zanemarimo. Višino h merimo od tal navzgor in čas t od trenutka, ko skokico spustimo. Katero odvisnost prikazuje graf na sliki?

(A) $W_k(h)$. **(B)** $W_p(h)$. **(C)** $W_k(t)$. **(D)** $W_p(t)$.



A2 Na prevesni tehtnici visita na nasprotnih straneh v enakih oddaljenostih od osi dve krogli, v celoti potopljeni pod vodno gladino tako, da se ne dotikata dna posode. Prva krogla je iz železa, druga iz aluminija. Tehtnica je v vodoravni ravnovesni legi. Kaj se zgodi, ko posodi z vodo počasi spuščamo (ali tehtnico dvigamo) in krogli ostaneta nad gladino?

(**A**) Tehtnica ostane v vodoravni ravnovesni legi.

(**B**) Tehtnica zaniha okoli vodoravne ravnovesne lege.

(**C**) Tehtnica se prevesi tako, da je železna krogla nižje.

(**D**) Tehtnica se prevesi tako, da je aluminijasta krogla nižje.

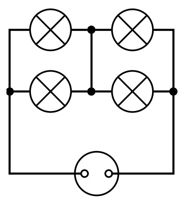
A3 Parameter, ki določa ločljivost pri natisu s tiskalniki, ima enoto *dpi*. Oznaka *dpi* (*"dots per inch"*) pomeni število pik, ki jih tiskalnik lahko natisne v vrstico dolžine 1 inče. Ta pola je bila natisnjena z ločljivostjo 600 dpi v obeh smereh, vodoravni in navpični. Inča meri 2,54 cm. Kolikšno je največje možno število pik, ki jih tiskalnik natisne v kvadratek s stranico dolgo 1 cm?

(**A**) 55 800 (**B**) 141 732 (**C**) 360 000 (**D**) 914 400

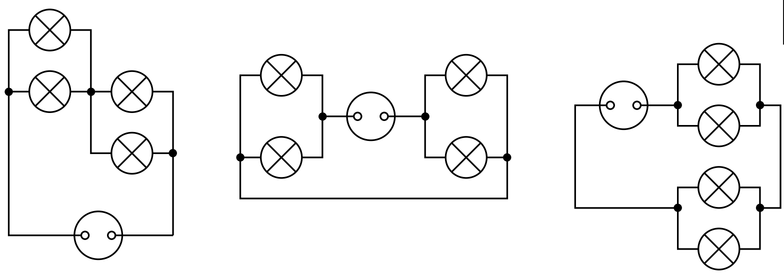
A4 Na mizi leži klada, ki je z lahko vrvico, napeljano preko lahkega škripca na robu mize, povezana z 200-gramsko utežjo, ki prosto visi. Škripec se vrti brez trenja, sila trenja med klado in mizo pa je po velikosti enaka desetini teže klade. Kolikšna naj bo masa klade, da se giblje s pospeškom $3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$?

(**A**) 0,14 kg (**B**) 0,35 kg (**C**) 0,5 kg (**D**) 0,67 kg

A5 Na desni sliki je shema vezja z virom napetosti in s štirimi enakimi žarnicami. Koliko shem vezav, narisanih spodaj, je ekvivalentnih tej shemi?



(**A**) Nobena. (**B**) Ena. (**C**) Dve. (**D**) Tri.



B1 Peter ima 62 kg. Zleze na 1,8 m visoko omaro, na njej stoji vzravnano in potem z nje sestopi (naredi korak v prazno, se ne odžene dodatno navzgor) na tla. Silo tal, ki deluje nanj pri doskoku, ublaži s sočasno prilagoditvijo svojega telesa: med doskokom v počep se njegovo težišče dodatno zniža za 0,5 m. Doskok je faza skoka od trenutka, ko se Peter dotakne tal, do trenutka, ko na tleh obmiruje v počepu.

(a) Kolikšna je Petrova hitrost tik preden se s stegnjenimi nogami dotakne tal?

(b) S kolikšnim povprečnim pojemkom se Peter med doskokom ustavlja? Pojemek izrazi kot večkratnik g.

(c) Koliko časa se Peter med doskokom ustavlja?

(d) Kolikšna povprečna sila podlage (tal) deluje na Petra med doskokom? Silo izrazi kot večkratnik Petrove teže.

(e) Predpostavi, da Peter doskoči z omare nerodno (bolj togo) in se pri doskoku v počep njegovo težišče dodatno spusti le za 25 cm. S kolikšnim povprečnim pojemkom se Peter ustavlja med nerodnim doskokom? Pojemek izrazi ga kot večkratnik g.

(f) Peter odskoči, leti in doskoči na planiški letalnici. V poskusni seriji pristane pri točki K, kjer je naklon hrbtišča 33° glede na vodoravnico. Petrova hitrost je tik pred pristankom $33\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, giblje pa se pod kotom 4° glede na podlago. Predpostavi, da se ob pristanku komponenta njegove hitrosti, ki je vzporedna s podlago, ne spremeni. Z natančnim načrtovanjem ugotovi, za koliko se ob pristanku spremeni komponenta Petrove hitrosti, ki je pravokotna na podlago.

(g) Tudi na letalnici se pravokotna razdalja med podlago in Petrovim težiščem med doskokom v telemark zmanjša za $0{,}5$ m. Kolikšen je med doskokom povprečni pojemek Petrovega težišča v smeri, pravokotni na podlago?

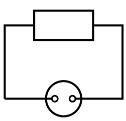
(h) Kolikšna povprečna sila podlage deluje na Petra v pravokotni smeri glede na podlago med opisanim doskokom?

(i) V prvi seriji Peter pristane pri dolžini 240 m, kjer je naklon hrbtišča le še 27°. Predpostavi, da je njegova hitrost tik pred pristankom po velikosti enaka kot v poskusni seriji in da je tudi smer letenja ista (pod kotom 37° glede na vodoravnico). S kolikšnim pojemkom v smeri pravokotno na podlago doskoči Peter v prvi seriji, če se med doskokom Petrovo težišče približa podlagi za $0{,}5$ m?

B2 Na enake nove baterije vežemo različne kroge s **samimi enakimi** porabniki. Naboj, ki ga po krogu požene nova baterija do svojega izpraznjenja, je 360 mAh. Upoštevaj, da za posamezen porabnik velja, da je napetost na njem premosorazmerna toku, ki teče skozenj. Napetost na bateriji je stalna in znaša 9 V, dokler se baterija na izrabi. Ko je na baterijo vezan en sam porabnik, teče skozenj tok 20 mA. Za vsakega od primerov izračunaj tok I skozi baterijo in druge količine, zapisane v razpredelnicah. Izračunaj, v kolikšnem času t se baterija izprazni. Rezultate vpiši v razpredelnice.

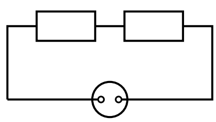
(a)

t [h]	



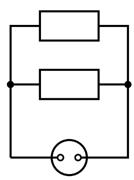
(b)

I [mA]	
t [h]	



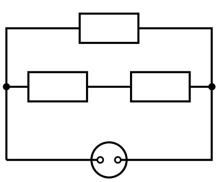
(c)

I [mA]	
t [h]	



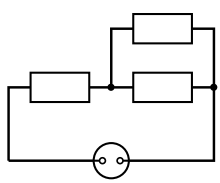
(d)

I [mA]	
t [h]	



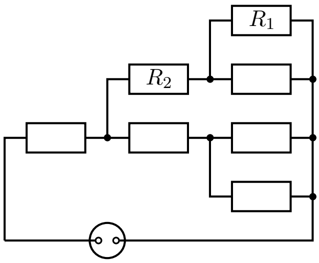
(e)

I [mA]	
t [h]	



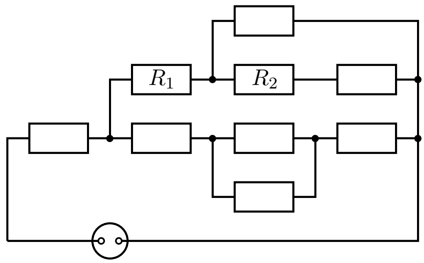
(f)

$\frac{I}{I_{R_1}}$	
$\frac{U_{R_2}}{U_{R_1}}$	
I [mA]	



(g)

$\frac{I_{R_1}}{I_{R_2}}$	
$\frac{U_{R_1}}{U_{R_2}}$	
$\frac{I}{I_{R_2}}$	
I [mA]	



C – eksperimentalna naloga: POKOVKA NA MIKROTEHTNICI

Priprava mikrotehtnice je zelo pomembna za meritve v nadaljevanju. **Uravnovesi** enakoročno mikrotehtnico. Z dvema papirnima sponkama obesi na krajišče prvega kraka tehtnice majhno in lahko posodico, ki jo oblikuj iz aluminijaste folije. Na krajišče drugega kraka tehtnice pritrdi košček plastelina, da bo tehtnica v **vodoravni ravnovesni legi**.

Da boš lahko meril maso koruznega zrna, mora biti tehtnica ravno prav občutljiva. Ko v posodico iz aluminijaste folije položiš eno zrno koruze, naj se kraka tehtnice odklonita od ravnovesne lege za kot α med približno $20°$ in $25°$.

(a) Kako si in kako bi še lahko postopal pri uravnovešanju tehtnice? Navedi dva postopka.

Ko tehtnico primerno uravnovesiš, je do naloge (h) ne spreminjaj več, da bodo tvoje meritve uporabne.

(b) Kot uteži boš uporabljal kvadratke s ploščino $1\ \text{cm}^2$, ki jih izrežeš iz papirja. Masa $1\ \text{m}^2$ papirja je 80 g. V tabelo dopiši mase uteži. N pomeni število kvadratkov.

$N \cdot 1\ \text{cm}^2$	m [ ]
1	

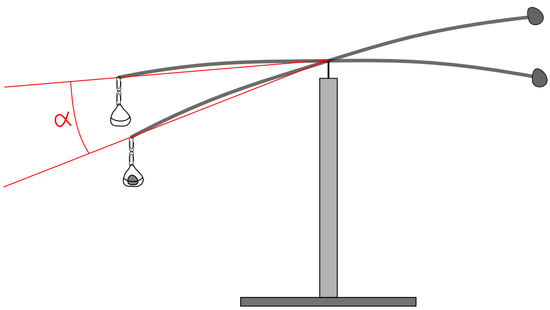
(c) Tehtnica naj bo v vodoravni ravnovesni legi. V posodico iz aluminijaste folije položi koruzno zrno. Na papirju na zaslonu s flomastrom označi lego, v kateri je krajišče odklonjenega kraka tehtnice.

Zrno vzemi s tehtnice in ga prestavi v posodico čajne svečke. Na tehtnico zdaj položi toliko uteži, da bosta kraka enako odklonjena kot prej, ko si tehtal zrno. Zapiši maso zrna.

(d) Stehtano koruzno zrno položi v posodico čajne svečke, ki je nad svečo. Svečo prižgi, koruzno zrno pa z zobotrebcem obračaj, da se ne prilepi na podlago in zažge. Ko se zrno razpoči, svečo ugasni. Zrno vzemi iz posodice in počakaj, da se malo ohladi. Potem ga z mikrotehtnico ponovno stehtaj.

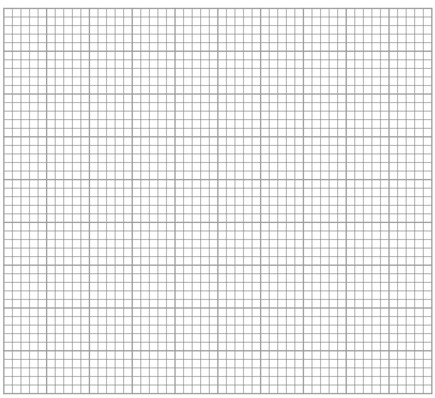
(e) Upoštevaj, da zrna koruze vsebujejo določen delež vode, ter na kratko zapiši, zakaj se zrno nad svečo razpoči in kaj lahko poveš o vodi v zrnu.

(f) Na tehtnico polagaj različne uteži in na zaslonu s flomastrom vsakič označi lego krajišča obremenjenega kraka tehtnice. Papir snemi z zaslona in na njem izmeri kot α, za katerega se tehtnica odkloni od ravnovesne lege, v odvisnosti od mase m uteži. Meritve zapiši v razpredelnico.



m [ ]	α [°]

(g) Nariši umeritveno krivuljo $\alpha(m)$ za mikrotehtnico.



(h) Če predhodnih nalog od (a) do (g) še nisi zaključil, pa jih nameravaš, to stori, preden nadaljuješ, ker boš v nadaljevanju svojo mikrotehtnico spreminjal.

Občutljivost tehtnice pove, za koliko **vsaj** se morata masi, ki ju primerjaš, razlikovati, da boš to razliko s tehtnico lahko opazil (izmeril).

Občutljivost mikrotehtnice lahko bodisi povečaš bodisi zmanjšaš, če mikrotehtnico spremeniš. Razmisli in poskusi spremeniti občutljivost svoje mikrotehtnice. Po točkah navedi tri parametre, ki vplivajo na občutljivost mikrotehtnice.

(i) Za vsakega od parametrov, ki si ga navedel pri prejšnjem vprašanju, zapiši (na kratko, a jasno), kako ga spremeniš, da občutljivost tehtnice **povečaš**.

Rešitve 52. tekmovanja iz matematike za Vegovo priznanje – državno tekmovanje

Naloge za 5. razred

A1. Izračunajmo $(2016-66):25=78$.

A2. Najprej izračunamo petino števila 160 in dobimo $\frac{1}{5}$ od $160=32$. Potem izračunamo še četrtino dobljenega rezultata, $\frac{1}{4}$ od $32=8$.

A3. Med vsakima dvema brezama raste grm divjih vrtnic, torej je vseh grmov divjih vrtnic 11. Med skupno 23 brezami in grmi divjih vrtnic raste 22 lesk.

A4. Obstaja 10 časov, ki jih lahko zapišemo s števkami 0, 1, 2 in 6 in sicer 01:26, 02:16, 06:12, 06:21, 10:26, 12:06, 16:02, 16:20, 20:16, 21:06.

A5. V treh tednih prebere $11\cdot 10+10\cdot 8=190$ strani.

A6. Naštejmo vse ustrezne načine: $5\cdot 10$ c $+\ 3\cdot 50$ c, $10\cdot 10$ c $+\ 2\cdot 50$ c, $10\cdot 10$ c $+\ 1$ EUR, $15\cdot 10$ c $+\ 1\cdot 50$ c, $2\cdot 50$ c $+\ 1$ EUR in $5\cdot 10$ c $+\ 1\cdot 50c+1$ EUR.

A7. Za prvo figuro potrebuje 6 vžigalic, za vsako nadaljnjo pa 5 vžigalic več kot za pravkar oblikovano – kot bi oblikovala vrstne hiške, ki se stikajo. Izračunajmo $(131-6):5=25$, torej je k prvi hiški na iskani figuri dodala 25 hišk, vseh skupaj je 26 hišk. Torej je porabila 131 vžigalic za figuro na 26. mestu.

A8. Tri zapisana števila so bila soda, preostali dve pa lihi, zato so bile sobote $2.$, $9.$, $16.$, $23.$ in $30.$ dne v mesecu. Torej je bil $25.$ tega meseca ponedeljek.

B1. Izračunajmo:

$$2016-1602:6:3+(79\cdot 5-7-3)-4^2\cdot 2=$$

$$2016-267:3+(395-7-3)-16\cdot 2=$$

$$2016-89+(388-3)-32=$$

$$1927+385-32=2312-32=2280$$

B2. Za 60 učencev potrebujemo 12 dvoposteljnih ter 12 triposteljnih sob, saj je $60:5=12$. Izvemo, da dekleta spijo v manjših sobah torej je vseh deklet 24. Fantje potrebujejo 13 triposteljnih sob, torej jih je 39.

Naloge za 6. razred

A1. Najprej izračunamo petino števila 160 in dobimo $\frac{1}{5}$ od $160=32$. Potem izračunamo še tri četrtine dobljenega rezultata, $\frac{3}{4}$ od $32=24$.

A2. Izračunajmo: $6032007-5490923=541084$.

A3. Izračunajmo: $0.1+0.01:0.1\cdot 0.01=0.1+0.1\cdot 0.01=0.1+0.001=0.101$.

A4. Narišimo celotno mrežo. Imamo štiri cele kvadrate, pri ostalih šestih pa dva dela z isto oznako skupaj tvorita en cel kvadrat. Izrezani del predstavlja $\frac{10}{16}$ oziroma $\frac{5}{8}$.

A5. Dolžina dneva je enaka polovici od 24 h -3 h 15 min $=20$ h 45 min, torej 10 h 22 min 30 s.

A6. Vseh učencev, ki imajo odlično oceno iz matematike ali obiskujejo dodatnih pouk, je največ 13. Za 11 učencev velja, da imajo odlično oceno pri matematiki ali pa obiskujejo dodatni pouk. Torej sta 2 učenca, ki imata odlično oceno in obiskujeta dodatni pouk.

A7. Eno dekle in en fant skupaj pojesta 3 kose torte. Celi del pri deljenju 26 s 3 je 8. Torej je bilo 8 fantov in 10 deklet, ki so skupaj pojedli $16 + 10$ kosov. Vseh otrok na zabavi je bilo 18.

A8. Le v primerih C in E je kot manjši od $45°$. S slik razberemo, da je kot najmanjši v primeru E.

B1. Izračunajmo količino soli v morski vodi. Ker 1 tona morske vode vsebuje 35 kg soli, 1 kg morske vode vsebuje 35 g soli. Torej 200 g morske vode vsebuje 7 g soli. Podobno sklepamo za pitno vodo. Ker 1 tona pitne vode vsebuje 40 g soli, delimo 1000 s 40 in dobimo, da 25 kg pitne vode vsebuje 1 g soli. Za 7 g soli potrebujemo $25 \cdot 7 = 175$ kg pitne vode. Torej 175 kg pitne vode vsebuje enako količino soli kot 200 g morske vode.

B2. (a) Če želimo 30 kemičnih svinčnikov, jih plačamo le 29, torej $29 \cdot 1.10$ EUR $= 31.90$ EUR.

(b) Pri 185 kemičnih svinčnikih jih plačamo le 173, saj jih 12 dobimo zastonj. Znesek plačila je enak $173 \cdot 1.10$ EUR $= 190.30$ EUR.

(c) Izračunajmo $100 : 1.10 = 90.90$, kar pomeni, da bi za 100 EUR dobili 90 kemičnih svinčnikov. Zraven dobimo še 5 kemičnih svinčnikov brezplačno, zato je vseh skupaj 95.

Naloge za 7. razred

A1. Izračunajmo: $0.1 + 0.01 : 0.1 \cdot 0.01 = 0.1 + 0.1 \cdot 0.01 = 0.1 + 0.001 = 0.101$.

A2. Izračunajmo: $(3\frac{1}{12} - 2\frac{1}{18}) : 1\frac{3}{4} = (3\frac{3}{36} - 2\frac{2}{36}) : 1\frac{3}{4} = 1\frac{1}{36} : 1\frac{3}{4} = \frac{37}{36} : \frac{7}{4} = \frac{37}{36} \cdot \frac{4}{7} = \frac{37}{63}$

A3. V trgovini A je 250 g orehov po 25 % znižanju stalo 2.85 EUR, torej jih 100 g stane 1.14 EUR. V trgovini B je 200 g orehov po 20 % podražitvi stalo 3.30 EUR. Cena za 100 g je bila 1.65 EUR, kar je za 51 centov več kot v trgovini A.

A4. Izračunajmo: $\frac{4}{3-\frac{6}{3+\frac{3}{2-\frac{1}{5}}}} = \frac{4}{3-\frac{6}{3+\frac{3}{\frac{9}{5}}}} = \frac{4}{3-\frac{6}{3+\frac{5}{3}}} = \frac{4}{3-\frac{6}{\frac{14}{3}}} = \frac{4}{3-\frac{9}{7}} = \frac{4}{\frac{12}{7}} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

A5. Najmanjši skupni večkratnik števil 8, 12 in 18 je število 72. Torej Robert vsakih 72 ur oziroma 3 dni vzame vsa tri zdravila ob istem času. Prvi dan je vzel vsa tri zdravila hkrati, potem pa vsake tri dni v ostalih 99 dneh, torej $99 : 3 = 33$ krat. Vsa zdravila hkrati je vzel 34-krat.

A6. Naštejmo vse možnosti: $MMMM$, $MMMR$, $MMRM$, $MRMM$, $RMMM$, $MRMR$, $RMRM$ in $RMMR$.

A7. Leto ima 52 tednov in 1 dan, torej ima 53 torkov samo, če se začne s torkom. Datum prve sobote v januarju je zato 5.1.

A8. Iskano število je kvadrat nekega števila, saj ima liho število deliteljev.

Ker je iskano število deljivo s 7, je število $7^2 = 49$ najmanjše število, ki ima tri delitelje, in sicer 1, 7 in 49. Vsota števk tega števila je 13.

A9. Ploščina enega izmed treh skladnih pravokotnikov je enaka $50\ \text{cm}^2$. Njegova dolžina a je enaka dvakratniku njegove širine b. Velja $2 \cdot b \cdot b = 50$, torej je širina enaka 5 cm in dolžina 10 cm. Obseg manjšega pravokotnika je tako enak 30 cm, večjega pa $2 \cdot (10 + 15) = 50$ cm. Iskana razlika obsegov je enaka 20 cm.

A10. Prvi dan 5 belih kock postane črnih, drugi dan pa še 11. Število vseh črnih kock skupaj z začetno je tedaj enako 17.

B1. Trikotnik AEC je enakokrak z osnovnico CA, zato sta kota $\sphericalangle EAC$ in $\sphericalangle ACE$ skladna in sta velika $37°$. Velikost kota $\sphericalangle CBA$ je zato enaka $180° - 37° - (35° + 37°) = 71°$, torej je kot $\sphericalangle CBD$ velik $35.5°$. Velikost kota x je enaka vsoti $35° + 35.5° = 70.5°$, saj je velikost zunanjega kota pri enem oglišču trikotnika enaka vsoti velikosti notranjih kotov pri drugih dveh ogliščih.

B2. Iz vsake krogle naredimo 10 sveč, iz 400 krogel jih torej naredimo 4000. Iz ostanka naredimo $400 : 20 = 20$ novih krogel, iz katerih dobimo še 200 sveč. Iz ostanka izdelamo še eno kroglo za 10 sveč. Skupno imamo 4210 sveč. Ostane nam $\frac{1}{20}$ krogle, kar je $\frac{1}{8000}$ prvotne količine voska.

Naloge za 8. razred

A1. Računajmo $\frac{1}{\sqrt{18}}\left(\sqrt{8} + \sqrt{32}\right) = \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\right) = 2$.

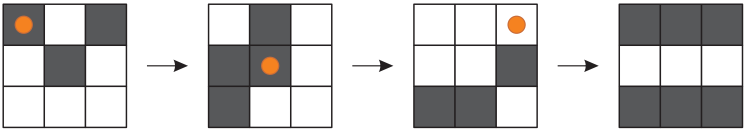
A2. Vrednost izraza $3^6 - 2^6$ je enaka 665. Razcepimo število na prafaktorje, dobimo $665 = 5 \cdot 7 \cdot 19$. Vsota teh faktorjev je enaka 31.

A3. Zapišemo enačbo $n + \frac{n(n-3)}{2} = 45$ in jo preoblikujemo v $n(n-1) = 90$. Rešitev enačbe je $n = 10$.

A4. Izračunamo: $|8 \cdot (-4) - (-(-(-4)) + (-8))| = |8 \cdot (-4) - (-4 - 8)| = |-32 + 12| = 20$.

A5. Zapišemo račun za prvo aritmetično sredino: $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{11}}{11} = 4850$. Ko od vsakega števila odštejemo 10, dobimo:
$\frac{a_1 - 10 + a_2 - 10 + \ldots + a_{11} - 10}{11} = 4850 - \frac{110}{11} = 4840$.

A6. Na koncu je črno obarvanih 6 kvadratkov.



A7. Vseh zapisov časa oblike $11{:}1x$, kjer je x element množice $\{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, je 9. Podobno velja v zapisih $22{:}2x$ in $00{:}0x$. Pri zapisu oblike $1x{:}xx$ je le 5 možnosti, saj je x element množice $\{0, 2, 3, 4, 5\}$. Podobno velja v zapisu oblike $0x{:}xx$. Zapisi oblike $2x{:}xx$ so le trije: $20{:}00$, $21{:}11$ in $23{:}33$. Vseh ustreznih zapisov je $3 \cdot 9 + 2 \cdot 5 + 3 = 40$.

A8. Naj bo a dolžina pravokotnika in b njegova širina. Dolžina stranice PR je enaka $\frac{a}{3}$. Višina na stranico PR trikotnika PRS pa je enaka $\frac{b}{2}$. Torej je ploščina trikotnika PRS enaka $\frac{\frac{a}{3} \cdot \frac{b}{2}}{2}$, kar je $\frac{1}{12}$ ploščine pravokotnika.

B1. Izračunamo

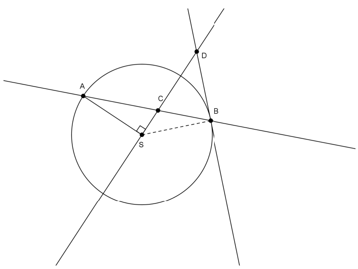
$$4^{2016} : 4^{2015} : (5 \cdot 2^3 + \frac{16^5}{8^5} - 3^5 : 3^3 : \frac{1}{9} - \sqrt{1\frac{9}{16}} + \sqrt{8^2 + 6^2}) =$$

$$= 4 : (5 \cdot 8 + (\frac{16}{8})^5 - 3^2 \cdot 9 - \sqrt{\frac{25}{16}} + \sqrt{64 + 36}) =$$

$$= 4 : (40 + 2^5 - 81 - \frac{5}{4} + 10) = 4 : (40 + 32 - 81 - 1\frac{1}{4} + 10) = 4 : (-\frac{1}{4}) = 4 \cdot (-4) = -16$$

B2. V razredu je x deklet in x fantov. Število svetlolasih fantov je enako eni četrtini vseh svetlolascev, torej $25\ \%$ od $40\ \%$ od $2x$, kar je enako $20\ \%$ od x. Temnolasih fantov je tedaj $x - 20\ \%$ od $x = 80\ \%$ od x. To število delimo z $2x$ in dobimo delež temnolasih fantov v razredu, ki je $40\ \%$.

B3. Narišemo skico.



Označimo: $\sphericalangle SAB = \alpha$. Trikotnik ABS je enakokrak, saj sta daljici SA in SB polmera krožnice. Torej sta kota $\sphericalangle SAB$ in $\sphericalangle ABS$ skladna. Kot $\sphericalangle DBS$ je pravi, zato je velikost kota $\sphericalangle DBC$ enaka $90^\circ - \alpha$. Kot $\sphericalangle BCD$ je sovršen s kotom $\sphericalangle ACS$ in je zato velik $90^\circ - \alpha$. Torej je trikotnik BCD res enakokrak.

Naloge za 9. razred

A1. Računajmo $\frac{4}{3 - \frac{6}{3 + \frac{3}{2 - \frac{1}{5}}}} = \frac{4}{3 - \frac{6}{3 + \frac{3}{\frac{9}{5}}}} = \frac{4}{3 - \frac{6}{3 + \frac{5}{3}}} = \frac{4}{3 - \frac{6}{\frac{14}{3}}} = \frac{4}{3 - \frac{9}{7}} = \frac{4}{\frac{12}{7}} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$

A2. Ploščina levega pravokotnika je enaka $x \cdot 42$, ploščina desnega pa $(174 - x) \cdot 16$. Izenačimo obe ploščini, dobimo enačbo $x \cdot 42 = (174 - x) \cdot 16$ z rešitvijo $x = 48$.

A3. $\frac{1}{4}$ kg vode predstavlja $\frac{2}{7}$ njene celotne mase, torej voda v steklenici tehta 0.875 kg. Prazna steklenica tehta 0.125 kg.

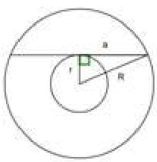
A4. Število pravilnih odgovorov je bilo za $50\ \%$ večje od števila napačnih odgovorov, torej sta števili v razmerju $3 : 2$. Razmerje med številom vseh vprašanj in številom nepravilnih odgovorov je zato enako $5 : 2$. Vseh vprašanj je bilo 30, torej je bilo napačnih odgovorov 12. Ker je bilo pravilnih za $50\ \%$ več, jih je bilo 18.

A5. Trikotnika AML in DNL sta si podobna, saj imata skladna dva para kotov. Razmerje $|AL| : |LD|$ je zato enako razmerju $|AM| : |DN| = \frac{a}{2} : \frac{2a}{3} = 3 : 4$.

A6. Mediana vseh dosežkov je na 8. mestu. Na prvem mestu je najslabši rezultat, 6 točk, na zadnjih dveh mestih sta najboljša rezultata, 10 točk. Na mestih od osmega do trinajstega je zato število 9, skupaj je zapisano 6-krat. Dosežek 6 točk je najbolj pogost, zato nastopa več kot 6-krat. Torej so na mestih od prvega do sedmega rezultati po 6 točk, kar pomeni da je vseh 7.

A7. Zapišemo enačbe, ki ustrezajo opravljenemu delu v eni uri: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{t}=\frac{1}{7.5}=\frac{2}{15}$ in $\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{10}$, kjer je x čas prvega delavca, y drugega, z tretjega in t četrtega. Enačbe seštejemo in dobimo: $2(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t})=\frac{1}{6}+\frac{2}{15}+\frac{1}{10}=\frac{24}{60}$. Velja $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{5}$, torej skupaj opravijo delo v 5 urah.

A8. Označimo z R polmer večje krožnice ter z r polmer manjše. Ploščina kolobarja je $p=\pi R^2-\pi r^2=\pi(R^2-r^2)$. Trikotnik s stranicami R, r in 10 je pravokoten, zato je $R^2-r^2=100$. Torej je ploščina kolobarja enaka $p=100\pi$.



B1. Izraz razstavimo kot razliko kvadratov:

$$(2.6x+5.8)^2-(0.8x-12.2)^2=$$

$$((2.6x+5.8)-(0.8x-12.2))((2.6x+5.8)+(0.8x-12.2))=$$

$$(2.6x+5.8-0.8x+12.2)(2.6x+5.8+0.8x-12.2)=$$

$$(1.8x+18)(3.4x-6.4)$$

Vrednost izraza je enaka 0, če je:

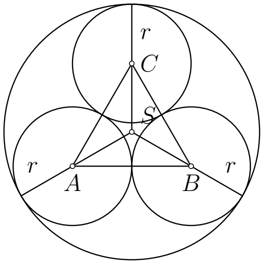
$1.8x+18=0$. Torej je $x=-10$.

$3.4x-6.4=0$. Torej je $x=\frac{32}{17}$.

B2. Iz besedila razberemo $4a+4b+4c=156$, torej velja $a+b+c=39$. Upoštevamo, da so a, b in c tri zaporedna liha števila, in dobimo enačbo $2n-1+2n+1+2n+3=39$ z rešitvijo $n=6$. Dolžine robov škatle so zato enake 11 cm, 13 cm in 15 cm. Površina take škatle je enaka $P=2(11\cdot 13+11\cdot 15+13\cdot 15)=1006\ \mathrm{cm}^2$. Porabimo 5 % kartona več, kar pomeni, da za škatlo potrebujemo $0.1006\cdot 1.05=0.10563\ \mathrm{m}^2$ kartona. Prostornina take škatle je enaka $V=11\cdot 13\cdot 15=2145\ \mathrm{cm}^3$, kar je enako 2.145 litra.

Rešitve 60. matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije – šolsko tekmovanje

Naloge za 1. letnik



B1.

Središče krožnice $\mathcal{K}$ označimo z S, središča treh manjših krožnic pa z A, B in C. Naj bo polmer manjših krožnic enak r. Potem je $|AB| = |AC| = |BC| = 2r$, torej je ABC enakostraničen trikotnik z dolžino stranice $2r$. Poleg tega je $|SA| = |SB| = |SC| = 1 - r$, kar pomeni, da je S središče enakostraničnega trikotnika ABC. Sledi

$$1 - r = |SC| = \frac{2}{3} \cdot \frac{|AB|\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}|AB| = \frac{2\sqrt{3}}{3}r.$$

Od tod izračunamo $r = \dfrac{3}{2\sqrt{3}+3} = 2\sqrt{3} - 3$.

B2. Najprej neenačbo prepišemo v ekvivalentno obliko $-2 < |x-2| - |2x-1| < 2$. Ločimo tri možnosti.

Če je $x \geq 2$, dobimo $-2 < -x - 1 < 2$, od koder sledi $1 > x > -3$. To pa ni mogoče, saj je $x \geq 2$. V tem primeru torej ni rešitev.

Če je $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$, dobimo $-2 < -3x + 3 < 2$, torej $\frac{5}{3} > x > \frac{1}{3}$. Upoštevamo še pogoj $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ in dobimo $\frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{3}$.

Če je $x \leq \frac{1}{2}$, pa dobimo $-2 < x + 1 < 2$, torej je $-3 < x < 1$. Ker pa je $x \leq \frac{1}{2}$, sledi $-3 < x \leq \frac{1}{2}$.

Rešitev neenačbe je torej interval $(-3, \frac{5}{3})$.

Naloge za 2. letnik

B1. Enačbo $\sqrt{x} - \sqrt{y+z} = \sqrt{y} - \sqrt{z+x}$ kvadriramo, da dobimo

$$x - 2\sqrt{x(y+z)} + y + z = y - 2\sqrt{y(z+x)} + z + x,$$

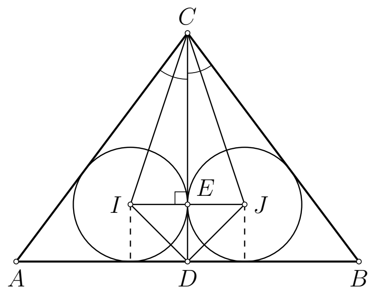
in poenostavimo do $\sqrt{x(y+z)} = \sqrt{y(z+x)}$. Enačbo sedaj ponovno kvadriramo in odpravimo oklepaje, da dobimo enačbo $xy + xz = yz + yx$, ki jo preoblikujemo v $(x-y)z = 0$. Na enak način iz enačbe $\sqrt{y} - \sqrt{z+x} = \sqrt{z} - \sqrt{x+y}$ izpeljemo še $(y-z)x = 0$.

Če je $x = 0$, sledi $yz = 0$, torej je $y = 0$ ali $z = 0$. Ko v prvotne enačbe vstavimo $x = y = 0$, dobimo $-\sqrt{z} = -\sqrt{z} = \sqrt{z}$, torej mora biti tudi $z = 0$. Ko v prvotne enačbe vstavimo $x = z = 0$, dobimo $y = 0$. Edina rešitev v tem primeru je torej $x = y = z = 0$.

Naj bo sedaj $x \neq 0$. Potem mora biti $y = z$ in zato $(x - y)y = 0$. Če je $y = 0$, podobno kot zgoraj z upoštevanjem $y = z = 0$ iz začetnih enačb izpeljemo $x = 0$, kar pa je protislovje, saj smo predpostavili, da je $x \neq 0$. Torej mora biti $x = y$. Preizkus pokaže, da je $x = y = z$ res rešitev naloge za poljuben $x > 0$.

Rešitve so torej vse trojice $(x, y, z) = (x, x, x)$, kjer je $x \geq 0$ poljuben.

B2.



Označimo presešišče premic CD in IJ z E. Ker sta premici IJ in CD pravokotni, je E hkrati tudi dotikališče obeh včrtanih krožnic s simetralo CD. Ker so premice CE, CI in CJ zaporedoma simetrale kotov $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ACE$ in $\sphericalangle ECB$, je CE tudi simetrala kota ICJ. Hkrati je CE tudi višina trikotnika ICJ. Torej je trikotnik ICJ enakokrak z vrhom pri C. Sledi, da imata včrtani krožnici s središčema v I in J enaka polmera, torej sta točki I in J enako oddaljeni od stranice AB. To pa pomeni, da je daljica IJ vzporedna stranici AB, zato je premica CD pravokotna tudi na stranico AB. Premica CD je torej hkrati simetrala kota pri C in višina skozi C trikotnika ABC, kar pomeni, da je trikotnik ABC enakokrak z vrhom pri C.

2. način. Kote trikotnika ABC označimo kot običajno z α, β in γ, presešišče premic CD in IJ pa označimo z E. Ker je $\sphericalangle ICE = \sphericalangle ECJ = \frac{\gamma}{4}$, imata trikotnika IEC in JEC enake vse kote in skupno stranico CE, zato sta skladna in velja $|IE| = |JE|$. Nadalje poračunamo, da velja

$$\sphericalangle EJD = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle JDE = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sphericalangle BDC = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\pi - \beta - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{4}$$

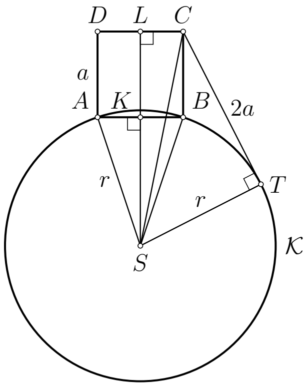
in

$$\sphericalangle EDI = \frac{1}{2}\sphericalangle CDA = \frac{1}{2}\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{4} = \sphericalangle EJD.$$

Sledi, da sta trikotnika DJE in IDE podobna, saj imata dva kota skladna. Torej velja

$$\frac{|DE|}{|IE|} = \frac{|JE|}{|DE|}.$$

Ker pa je $|IE| = |JE|$, sledi $|DE| = |JE|$, zato je trikotnik DJE polovica kvadrata in velja $\sphericalangle EJD = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{4} = \frac{\pi}{4}$. Od tod sledi $2\beta + \gamma = \pi$ in zato je $\alpha = \beta$. Trikotnik ABC je torej res enakokrak z vrhom pri C.



B1. Naj bo S središče krožnice $\mathcal{K}$ in T dotikališče tangentnega odseka iz C s krožnico $\mathcal{K}$. Torej velja $|CT| = 2a$. Pitagorov izrek za trikotnik CST nam da

$$|CS|^2 = r^2 + 4a^2.$$

Označimo s K in L zaporedoma središči stranic AB in CD. Kota $\sphericalangle AKS$ in $\sphericalangle SLC$ sta očitno prava kota. Iz Pitagorovega izreka za trikotnik ASK izpeljemo

$$|SK|^2 = r^2 - \frac{a^2}{4},$$

iz Pitagorovega izreka za trikotnik SCL pa potem sledi

$$|CS|^2 = \frac{a^2}{4}+|SL|^2 = \frac{a^2}{4}+(a+|SK|)^2 = \frac{a^2}{4}+a^2+2a|SK|+\left(r^2 - \frac{a^2}{4}\right) = a^2+2a|SK|+r^2.$$

Iz obeh izražav $|CS|$ sledi $r^2 + 4a^2 = a^2 + 2a|SK| + r^2$ oziroma $|SK| = \frac{3a}{2}$. Ko slednje vstavimo v zgornjo izražavo $|SK|$, dobimo $\frac{9a^2}{4} = r^2 - \frac{a^2}{4}$, od koder sledi $r = \frac{\sqrt{10}a}{2}$.

B2. Enačbo preoblikujemo v obliko

$$x^2 - 2x\sin\alpha + \tan^2\alpha = 0$$

in jo rešimo kot kvadratno enačbo v spremenljivki x. Rešitvi izračunamo po formuli

$$x_{1,2} = \frac{2\sin\alpha \pm \sqrt{4\sin^2\alpha - 4\tan^2\alpha}}{2} = \sin\alpha \pm \sqrt{\sin^2\alpha - \tan^2\alpha}.$$

Da bosta rešitvi realni, mora biti diskriminanta nenegativna, torej velja

$$\sin^2\alpha - \tan^2\alpha = \tan^2\alpha(\cos^2\alpha - 1) \geq 0.$$

Ker pa je $\cos^2\alpha \leq 1$ in $\tan^2\alpha \geq 0$, je neenakost izpolnjena le, če je $\cos^2\alpha = 1$ ali $\tan^2\alpha = 0$. V obeh primerih je $\alpha = k\pi$, kjer je k poljubno celo število. Od tod izračunamo še $x_{1,2} = \sin k\pi \pm 0 = 0$.

Rešitve enačbe so torej $x = 0$ in $\alpha = k\pi$, kjer je k poljubno celo število.

Naloge za 4. letnik

B1. Z upoštevanjem podatkov naloge lahko naravno število n zapišemo v štirih oblikah

$$\begin{aligned} n &= 502A + a_n, \\ n &= 602B + b_n, \\ n &= 702C + c_n, \\ n &= a_n + b_n + c_n, \end{aligned}$$

kjer so A, B in C nenegativna cela števila.

Iz zadnjih dveh enakosti sledi $a_n + b_n = 702C$. Ker so a_n, b_n in c_n ostanki pri deljenju, je $0 \leq a_n < 502$, $0 \leq b_n < 602$ in $0 \leq c_n < 702$. Sledi $0 \leq a_n + b_n < 1004 < 702 \cdot 2$, zato je C bodisi 0 bodisi 1. Če bi bil $C = 0$, bi sledilo $a_n = b_n = 0$ in $n = c_n$. Torej bi bilo n naravno število manjše od 702 in deljivo s 502 in 602, kar pa ni mogoče. Zato je $C = 1$.

Podobno iz druge in četrte enakosti sledi $602B = a_n + c_n < 1204 = 602 \cdot 2$, torej je B bodisi 0 ali 1. Če bi bil $B = 0$ in posledično $a_n = c_n = 0$, bi bilo n naravno število manjše od 602 in deljivo s 702, kar ni mogoče. Torej je $B = 1$.

Iz prve in četrte enakosti sledi $502A = b_n + c_n < 1304 < 502 \cdot 3$, zato je A enak 0, 1 ali 2. Možnost $A = 0$ podobno kot prej odpade. Če je $A = 1$, potem je $n = 502 + a_n = 602 + b_n = 702 + c_n = a_n + b_n + c_n$. Od tod sledi $a_n = 200 + c_n$, $b_n = 100 + c_n$ in zato $702 + c_n = (200 + c_n) + (100 + c_n) + c_n$. Iz zadnje enačbe izračunamo $c_n = 201$ in zato je $n = 702 + 201 = 903$. Če pa je $A = 2$, je $n = 502 \cdot 2 + a_n = 602 + b_n = 702 + c_n = a_n + b_n + c_n$, od koder sledi $a_n = c_n - 302$, $b_n = 100 + c_n$ in zato $702 + c_n = (c_n - 302) + (100 + c_n) + c_n$. Od tod izračunamo $c_n = 452$ in $n = 702 + 452 = 1154$.

Iskani naravni števili sta dve, to sta 903 in 1154.

2. način. Ker so a_n, b_n in c_n ostanki pri deljenju, je $a_n < 502$, $b_n < 602$ in $c_n < 702$. Sledi $n = a_n + b_n + c_n < 502 + 602 + 702 = 1806$. Na podlagi izračuna

$$\begin{aligned} &1 \cdot 502 = 502, \quad &&1 \cdot 602 = 602, \quad &&1 \cdot 702 = 702, \\ &2 \cdot 502 = 1004, &&2 \cdot 602 = 1204, &&2 \cdot 702 = 1404, \\ &3 \cdot 502 = 1506, &&3 \cdot 602 = 1806, &&3 \cdot 702 = 2106, \\ &4 \cdot 502 = 2004, \end{aligned}$$

obravnavamo več primerov.

- Če je $n < 502$, potem je $a_n = n$, $b_n = n$ in $c_n = n$. Torej je $n = n + n + n$ oziroma $n = 0$, kar pa ni naravno število.
- Če je $502 \leq n < 602$, potem je $a_n = n - 502$, $b_n = n$ in $c_n = n$. Torej je $n = (n - 502) + n + n$ oziroma $n = 251$, kar pa ne ustreza začetnemu pogoju.
- Če je $602 \leq n < 702$, potem je $a_n = n - 502$, $b_n = n - 602$ in $c_n = n$. Torej je $n = (n - 502) + (n - 602) + n$ oziroma $n = 551$, kar spet ne ustreza začetnemu pogoju.

- Če je $702 \leq n < 1004$, potem je $a_n = n - 502$, $b_n = n - 602$ in $c_n = n - 702$. Torej je $n = (n - 502) + (n - 602) + (n - 702)$ oziroma $n = 903$. To je prva rešitev.
- Če je $1004 \leq n < 1204$, potem je $a_n = n - 1004$, $b_n = n - 602$ in $c_n = n - 702$. Torej je $n = (n - 1004) + (n - 602) + (n - 702)$ oziroma $n = 1154$. To je druga rešitev.
- Če je $1204 \leq n < 1404$, potem je $a_n = n - 1004$, $b_n = n - 1204$ in $c_n = n - 702$. Torej je $n = (n - 1004) + (n - 1204) + (n - 702)$ oziroma $n = 1455$, kar ne ustreza začetnemu pogoju.
- Če je $1404 \leq n < 1506$, potem je $a_n = n - 1004$, $b_n = n - 1204$ in $c_n = n - 1404$. Torej je $n = (n - 1004) + (n - 1204) + (n - 1404)$ oziroma $n = 1806$, kar spet ne ustreza začetnemu pogoju.

- In nazadnje, če je $1506 \leq n < 1806$, potem je $a_n = n - 1506$, $b_n = n - 1204$ in $c_n = n - 1404$. Torej je $n = (n - 1506) + (n - 1204) + (n - 1404)$ oziroma $n = 2057$, kar ne ustreza začetnemu pogoju.

Rešitvi sta 903 in 1154.

B2. Denimo, da so koeficienti polinoma p števila $n, n+1, n+2, \ldots, m$, kjer sta $n \leq m$ naravni števili. Stopnja polinoma p je potem enaka $m - n$, vsota njegovih koeficientov pa je enaka

$$\frac{m(m+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2}(m^2 + m - n^2 + n) = \frac{1}{2}\big((m+n)(m-n) + (m+n)\big) = \\ = \frac{(m+n)(m-n+1)}{2}.$$

Sledi $\frac{(m+n)(m-n+1)}{2} = p(1) = 121$ oziroma $(m+n)(m-n+1) = 242$. Iščemo tisto rešitev te enačbe, pri kateri bo stopnja $m - n$ čim večja, torej mora biti $(m - n + 1)$ čim večji delitelj števila 242. Število $242 = 2 \cdot 11^2$ ima delitelje $1, 2, 11, 22, 121, 242$. Opazimo, da je $m + n > m - n + 1$, zato je $m - n + 1 \leq 11$, oziroma $m - n \leq 10$. Stopnja polinoma p je torej največ 10.

Preveriti moramo še, da je stopnja res lahko enaka 10, torej da tak polinom obstaja. Če je $m - n = 10$ oziroma $m - n + 1 = 11$, mora biti $m + n = 22$. Od tod izračunamo $m = 16$ in $n = 6$. Tak polinom je torej $p(x) = 6 + 7x + 8x^2 + 9x^3 + \ldots + 16x^{10}$.

2. način. Kot v prvi rešitvi pridemo do enačbe $(m + n)(m - n + 1) = 242$ in opazimo, da je $m + n > m - n + 1 > 0$. Ker ima število 242 delitelje $1, 2, 11, 22, 121, 242$, imamo 3 možnosti.

- Če je $m + n = 22$ in $m - n + 1 = 11$, dobimo $m = 16$ in $n = 6$. Stopnja polinoma je v tem primeru enaka $m - n = 10$.
- Če je $m + n = 121$ in $m - n + 1 = 2$, dobimo $m = 61$ in $n = 60$ in stopnja polinoma enaka 1.
- Če pa je $m + n = 242$ in $m - n + 1 = 1$, dobimo $m = 121$ in $n = 121$, stopnja polinoma pa je enaka 0.

Najvišja možna stopnja polinoma p je 10.

Rešitve tekmovanja iz fizike za zlato Stefanovo priznanje – državno tekmovanje

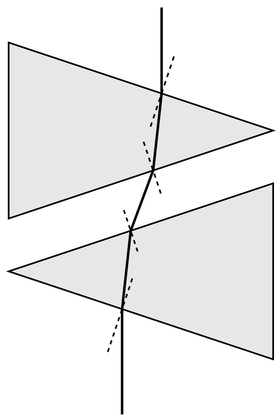
Naloge za 8. razred

A1 Varnostna razdalja r_v je pot, ki jo vozilo prevozi v 2 s, in je premosorazmerna hitrosti vozila. Premo sorazmerje kaže graf B.

A2 Največje možno število pik v kvadratni inči, natisnjenih pri ločljivosti 600 dpi, je $600 \cdot 600 = 360\,000$. Kvadratna inča ima ploščino $2{,}54$ cm $\cdot\, 2{,}54$ cm $=$ $6{,}45(16)$ cm^2, kar pomeni, da je na vsakem cm^2 natisnjenih

$$\frac{360\,000}{6{,}45(16)\,\mathrm{cm}^2} = 55\,800 \text{ pik.}$$

A3 Svetloba prehaja skozi enaki prizmi, postavljeni, kot kažejo slike, enako kot skozi planparalelno ploščico. Pravilno kaže prehod svetlobe skozi par prizm slika B.



A4 Količine, ki niso podane, ocenimo.

Ploščina ploskve, na kateri se stika baletni copat s parketom $S_A \approx 5$ cm^2, sila primabalerine na tla je $F_A \approx 500$ N in tlak pod copatom je

$$p_A = \frac{F_A}{S_A} = \frac{500\,\mathrm{N}}{5\,\mathrm{cm}^2} = 1\,000\,000\,\mathrm{Pa} = 10\,\mathrm{bar}.$$

Ocenimo ploščino ploskve S_1, na kateri se ena pnevmatika stika s podlago, $S_1 \approx 100$ cm^2. Štiri pnevmatike se s podlago stikajo na $S_B = 4 \cdot S_1 \approx 400$ cm^2. Sila avta na tla je $F_B = 10\,000$ N in tlak pod kolesi je

$$p_B = \frac{F_B}{S_B} = \frac{10\,000\,\mathrm{N}}{400\,\mathrm{cm}^2} = 250\,000\,\mathrm{Pa} = 2{,}5\,\mathrm{bar}.$$

Debelina geotrikotnika je približno 1 mm. Ploščina robne ploskve geotrikotnika je $S_C \approx 16\,\mathrm{cm} \cdot 0{,}1\,\mathrm{cm} = 1{,}6\,\mathrm{cm}^2$. Sila geotrikotnika, na katerem je 1. del SSKJ, na mizo, je $F_C = 27$ N in tlak pod robom geotrikotnika je

$$p_C = \frac{F_C}{S_C} = \frac{27\,\mathrm{N}}{1{,}6\,\mathrm{cm}^2} = 168\,750\,\mathrm{Pa} \approx 1{,}7\,\mathrm{bar}.$$

Ploščina osnovne ploskve kocke je $S_D = 1$ m^2. Masa betonske kocke s prostornino 1 m^3 je 2 300 kg (preberemo iz tabele gostot). Sila kocke na tla je $F_D = 23\,000$ N in tlak pod njo je

$$p_D = \frac{F_D}{S_D} = \frac{23\,000\,\mathrm{N}}{1\,\mathrm{m}^2} = 23\,000\,\mathrm{Pa} = 0{,}23\,\mathrm{bar}.$$

Tlak je največji pod baletnim copatom primabalerine.

A5 Na ekvatorju gre Sonce v obdobju med spomladanskim in jesenskim enakonočjem čez severno polovico neba in so sence obrnjene bolj proti jugu, v obdobju med jesenskim in spomladanskim enakonočjem pa čez južno polovico neba in so sence obrnjene bolj proti severu. Senca navpične palice, ki jo je opazovala Batari, je bila tistega dne obrnjena bolj proti severu, kar pomeni, da se je Sonce gibalo čez južni del neba. Edini dan med naštetimi, ki je v ustrezni polovici leta (za prebivalce S poloble, zimski), je 20. december.

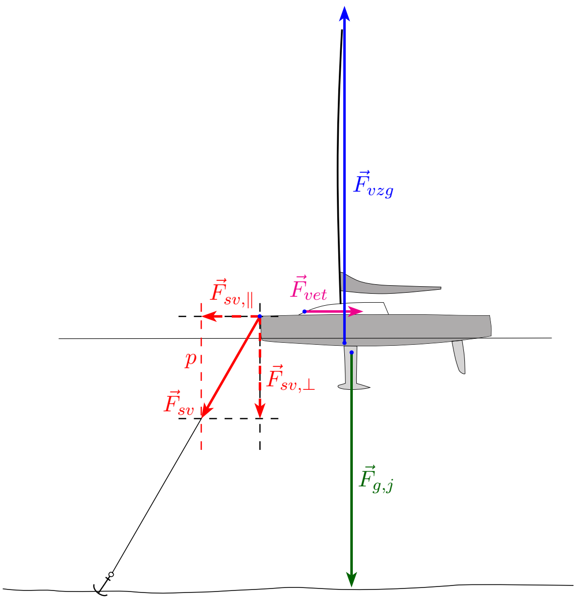
B1 (a) Na jadrnico, ki miruje v brezvetrju na gladini jezera, delujeta dve sili: teža in sila vzgona. Skupna masa jadrnice in posadke je $m_{j+p} = 1\,000$ kg $+ 2 \cdot 80$ kg $= 1\,160$ kg. Skupna teža jadrnice in posadke je $F_{g,j+p} = 11\,600$ N. Sila vzgona uravnoveša skupno težo jadrnice in posadke, $F_{vzg,j+p} = F_{g,j+p} = 11\,600$ N = 11,6 kN.

(b) Sila vzgona na jadrnico je po velikosti enaka teži vode, ki jo jadrnica izpodriva. Upoštevamo, da je teža 1 dm^3 vode enaka 10 N, teža 1 m^3 vode pa 10 kN. Ko sta na jadrnici oba člana posadke, ustreza sila vzgona $F_{vzg,j+p} = 11{,}6$ kN prostornini izpodrinjene vode $V_1 = 1{,}16\,\mathrm{m}^3$. Ko posadke ni na jadrnici, ustreza sila vzgona $F_{vzg,0} = F_{g,j} = 10$ kN prostornini izpodrinjene vode $V_0 = 1$ m^3.

(c) Ko piha veter, je sila vzgona na zasidrano jadrnico (C) večja kot sila vzgona, ko vetra ni. Ugrez jadrnice je takrat, ko piha veter, večji od ugreza v brezvetrju, ker jadrnico v vetru poleg teže (delno) navzdol dodatno vleče še napeta sidrna vrv. V brezvetrju lahka sidrna vrv ni napeta, če je le dovolj dolga, da sidro leži na dnu.

(d) V vetru delujejo na mirujočo zasidrano jadrnico 4 sile: v smeri navzdol deluje teža $\vec{F}_{g,j}$, v smeri od premca proti krmi jadrnice deluje nanjo sila vetra $\vec{F}_{vet}$, v smeri sidrne vrvi deluje sila sidrne vrvi $\vec{F}_{sv}$ in v smeri navzgor deluje sila vzgona $\vec{F}_{vzg}$. Ker jadrnica miruje, sklepamo, da so vse te sile v ravnovesju.

Vnaprej poznamo velikosti dveh sili, teže $F_{g,j} = 10$ kN in sile vetra $F_{vet} = 2{,}5$ kN, ki ju na sliki predstavimo s 4 cm in 1 cm dolgima usmerjenima daljicama.



Silo vetra uravnoveša vodoravna komponenta sile sidrne vrvi $F_{sv,\parallel} = 2{,}5$ kN, ki jo predstavimo z 1 cm dolgo usmerjeno daljico, usmerjeno v nasprotni smeri kot je sila vetra. Ker poznamo komponento sile sidrne vrvi in ker vemo, da sila sidrne vrvi deluje vzdolž vrvi, narišemo od krajišča $\vec{F}_{sv,\parallel}$ pravokotnico p na $\vec{F}_{sv,\parallel}$ in dobimo krajišče sile sidrne vrvi $\vec{F}_{sv}$ v točki, kjer pravokotnica p seka sidrno vrv. Na sliki izmerimo, da je usmerjena daljica, s katero predstavimo silo sidrne vrvi $\vec{F}_{sv}$ dolga 2,0 cm $\pm\,0{,}1$ cm, kar ustreza velikosti sile $F_{sv} = 5{,}0$ kN $\pm\,0{,}25$ kN.

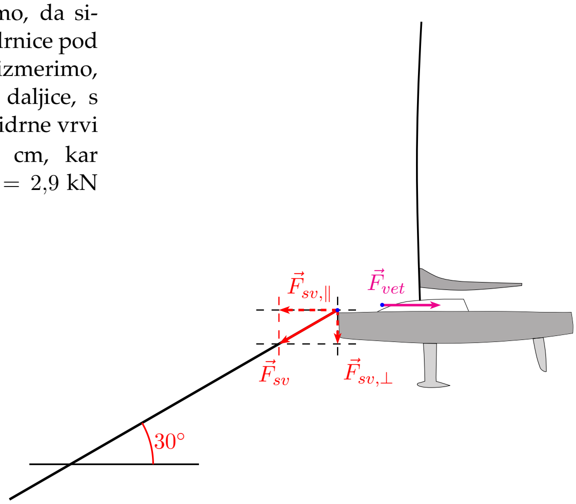
Sila vzgona $\vec{F}_{vzg}$ uravnoveša vsoto teže $\vec{F}_{g,j}$ in navpične komponente sile sidrne vrvi $\vec{F}_{sv,\perp}$. Na sliki izmerimo, da je usmerjena daljica, s katero predstavimo navpično komponento sile sidrne vrvi $\vec{F}_{sv,\perp}$ dolga 1,73 cm $\pm\,0{,}1$ cm, kar ustreza velikosti navpične komponente $F_{sv,\perp} = 4{,}33$ kN $\pm\,0{,}25$ kN. Vsota teže $\vec{F}_{g,j}$ in $\vec{F}_{sv,\perp}$ je po velikosti enaka sili vzgona, ki meri $F_{vzg} = 10$ kN $+\,4{,}33$ kN $= 14{,}33$ kN $\pm\,0{,}25$ kN in je na sliki predstavljena z usmerjeno daljico dolžine 5,73 cm $\pm\,0{,}1$ cm.

Prijemališča sil: teža prijemlje nekje na kobilici, nižje od sile vzgona. Sila vzgona prijemlje nekje v ugreznjenem delu trupa jadrnice (višje od teže). Sila sidrne vrvi prijemlje na premcu. Sila vetra prijemlje nekje na nadvodnem delu jadrnice.

(e) Sila vzgona $F_{vzg} = 14{,}33$ kN $\pm\,0{,}25$ kN je po velikosti enaka teži izpodrinjene vode, kar pomeni, da zasidrana jadrnica izpodriva 1,433 m^3 $\pm$0,025 m^3 vode.

(f) Sila $\vec{F}_s$, s katero sidrna vrv vleče sidro, je po velikosti enaka sili, s katero sidrna vrv vleče premec jadrnice $\vec{F}_{sv}$, $F_s = F_{sv} = 5{,}0$ kN $\pm\,0{,}25$ kN.

(g) Postopamo enako kot pri vprašanju (d), pri čemer upoštevamo, da sidrna vrv vleče premec jadrnice pod drugim kotom. Na sliki izmerimo, da je dolžina usmerjene daljice, s katero predstavimo silo sidrne vrvi $\vec{F}_{sv}$ dolga 1,2 cm $\pm\,0{,}1$ cm, kar ustreza velikosti sile $F_{sv} = 2{,}9$ kN $\pm\,0{,}25$ kN.



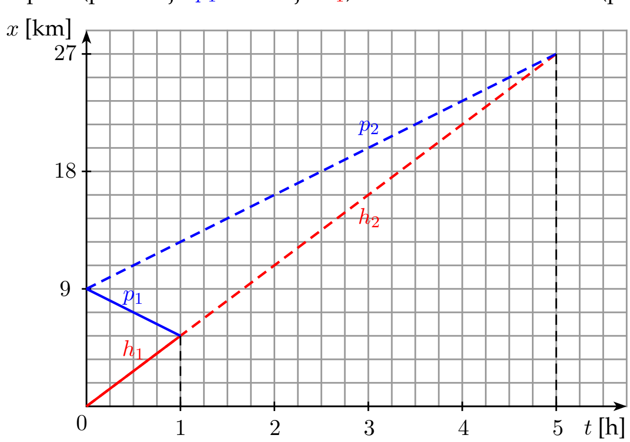
(h) Z najmanjšo silo bi sidrna vrv vlekla sidro v smeri vzporedni z vodoravnim dnom, pod kotom $0°$ glede na dno. Po velikosti bi bila enaka sili vetra, $2{,}5$ kN.

B2 (a) Če se popotnika, ki sta spočetka 9 km narazen, snideta po eni uri hoje nasproti, to pomeni, da v eni uri prehodita prav toliko - 9 km. V 5 urah prehodita 5-krat toliko, torej 45 km.

(b) Upoštevamo, da se, če hodita v isto smer, snideta po 5 urah - to pomeni, da je od celotne skupne prehojene razdalje 45 km prehodil hitrejši popotnik 9 km več kot počasnejši, ker sta bili toliko narazen njuni legi na začetku. Od preostanka poti, 45 km $-\,9$ km $=$ 36 km pa prehodita vsak pol, 18 km. Počasnejši popotnik torej prehodi v 5 urah 18 km, hitrejši pa 18 km $+\,9$ km $=$ 27 km.

(c) Hitrejši prehodi 27 km v 5 urah, torej hodi s hitrostjo $v_H = \frac{27\,\mathrm{km}}{5\,\mathrm{h}} = 5{,}4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Počasnejši prehodi 18 km v 5 urah, torej hodi s hitrostjo $v_P = \frac{18\,\mathrm{km}}{5\,\mathrm{h}} = 3{,}6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

(d) Grafi, ki kažejo, kako se legi obeh popotnikov spreminjata s časom v primeru, ko si hodita nasproti (počasnejši p_1 in hitrejši h_1) in ko hodita v isto smer (počasnejši p_2 in hitrejši h_2).



(e) Razdalja med popotnikoma se v primeru, ko hitrejši dohiteva počasnejšega, zmanjša za 9 km v 5 urah, torej se zmanjšuje s hitrostjo $v_2 = \frac{9\,\mathrm{km}}{5\,\mathrm{h}} = 1{,}8\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Ta hitrost je tudi razlika hitrosti obeh popotnikov, $v_2 = v_H - v_P = 5{,}4\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} - 3{,}6\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 1{,}8\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

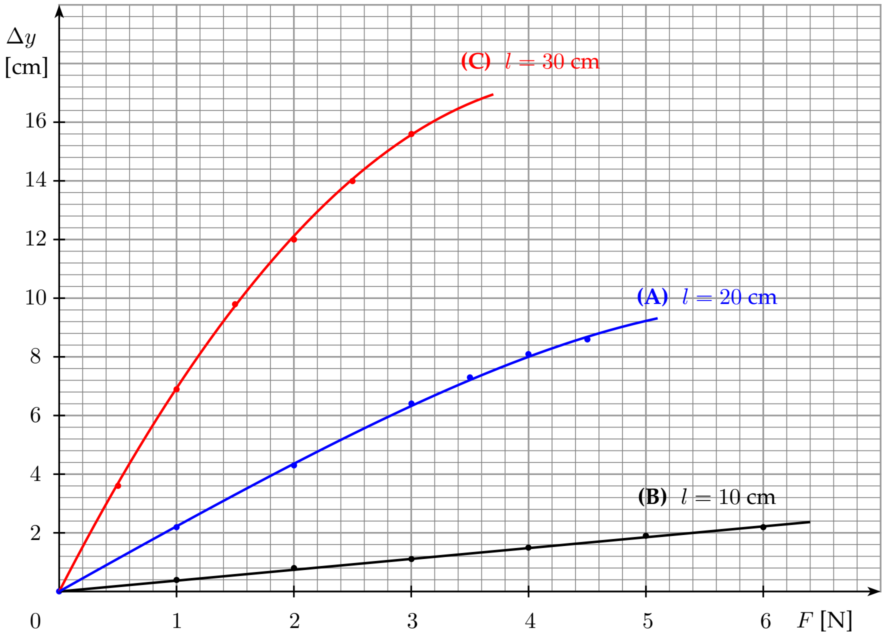
Razdalja med popotnikoma se v primeru, ko si hodita nasproti, zmanjšuje za 9 km vsako uro, torej se zmanjšuje s hitrostjo $v_1 = 9\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Ta hitrost je tudi vsota hitrosti obeh popotnikov, $v_1 = v_H + v_P = 5{,}4\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} + 3{,}6\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 9\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

C Vsi tekmovalci so imeli identične pripomočke.

(a) Primer meritev je v razpredelnici. Dovoljeno odstopanje pri meritvah je ±10%.

(A) $l = 20$ cm		**(B)** $l = 10$ cm		**(C)** $l = 30$ cm	
m [g]	Δy [cm]	m [g]	Δy [cm]	m [g]	Δy [cm]
0	0	0	0	0	0
100	2,2	100	0,4	50	3,6
200	4,3	200	0,8	100	6,9
300	6,4	300	1,1	150	9,8
350	7,3	400	1,5	200	12,0
400	8,1	500	1,9	250	14,0
450	8,6	600	2,2	300	15,6

(b) Grafi, ki kažejo, kako je odmik krajišča ravnila od ničelne lege odvisen od sile, ki deluje na krajišče ravnila.



(c) Opažanja in ugotovitve o upogibanju enega ravnila so lahko:

(i) če na prosto krajišče ravnila deluje večja sila, se ravnilo bolj upogne (odmik krajišča od ničelne lege je večji), kot če deluje manjša sila,

(ii) odmik krajišča daljšega ravnila od ničelne lege je pri isti sili večji od odmika krajišča krajšega ravnila,

(iii) pri manjših silah sta odmik krajišča od ničelne lege in sila premosorazmerna,

(iv) pri večjih silah se pri dodatnem povečanju sile odmik krajišča od ničelne lege poveča za manj kot pri manjših silah,

(v) pri daljšem ravnilu je meja premosorazmernosti sile in odmika pri manjši sili kot pri krajšem ravnilu,

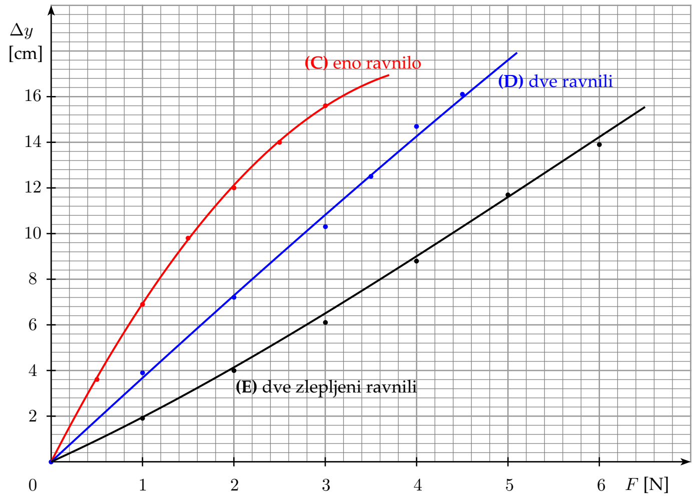
(vi) odmik krajišča ravnila od ničelne lege ni premosorazmeren dolžini ravnila,

(vii) pri večjih odmikih krajišča ravnila od ničelne lege deluje sila na krajišče ravnila pod kotom in je odmik zato manjši, kot če bi enako velika sila delovala na krajišče ravnila v smeri pravokotno na ravnilo.

(d),(e) Primera meritev sta v razpredelnici. Dovoljeno odstopanje pri meritvah **(D)** je $\pm 10\%$, pri **(E)** pa $\pm 20\%$ (ni nujno, da so vsi tekmovalci enako dobro zlepili ravnili).

2 ravnili, $l = 30$ cm		
	(D)	**(E)**
m [g]	Δy [cm]	Δy [cm]
0	0	0
100	3,9	1,9
200	7,2	4,0
300	10,3	6,1
400	12,5	8,8
500	14,7	11,7
600	16,1	13,9

(f) Grafi, ki kažejo, kako je odmik krajišča ravnila od ničelne lege odvisen od sile, ki deluje na krajišče ravnila.



(g) Opažanja in ugotovitve o upogibanju enega ravnila so lahko:

(i) pri isti sili, ki deluje na krajišče ravnila se najbolj upogne eno ravnilo in najmanj dve po robu zlepljeni ravnili,

(ii) za isti odmik krajišča od ničelne lege mora na dve ravnili, samo položeni eno na drugo, delovati (približno) dvakrat tolikšna sila, kot deluje na eno ravnilo,

(iii) ko se ravnili, položeni eno na drugo, skupaj upogibata, nekoliko drsita eno ob drugem,

(iv) z lepljenjem robov ravnil drsenje ravnil enega ob drugem zmanjšamo in se zato zlepljeni ravnili pri isti sili manj upogneta kot nezlepljeni ravnili,

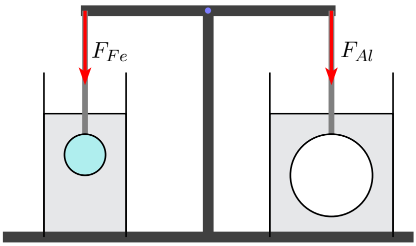
(v) pri dveh ravnilih je meja premosorazmernosti sile in odmika pri večji sili kot pri enem ravnilu.

Naloge za 9. razred

A1 Če je zračni upor zanemarljiv, se med prostim padanjem skokice ohranja vsota njenih kinetične in potencialne energije. Z višino lege skokice se linearno spreminja njena potencialna energija, in zato se linearno spreminja tudi njena kinetična energija. Pri $h = 0$ je potencialna energija skokice manjša od njene potencialne energije pri $h > 0$, kinetična energija skokice pa je pri $h = 0$ za prav toliko **večja** od kinetične energije skokice pri $h > 0$. Graf kaže odvisnost $W_k(h)$.

A2 Ker sta krogli obešeni na enakih oddaljenostih od osi in ker je tehtnica v vodoravni ravnovesni legi, sklepamo, da sta sili F_{Al} in F_{Fe}, s katerima v vodo potopljeni krogli vlečeta nasprotna kraka tehtnice, enaki,

$$F_{Al} = F_{Fe}\,.$$



Sila posamezne krogle na krak tehtnice je po velikosti enaka razliki med težo krogle in silo vzgona na kroglo,

$$F_{Al} = F_{g,Al} - F_{v,Al} = V_{Al} \cdot g \cdot (\rho_{Al} - \rho_v)$$

in

$$F_{Fe} = F_{g,Fe} - F_{v,Fe} = V_{Fe} \cdot g \cdot (\rho_{Fe} - \rho_v)\,.$$

kjer sta V_{Al} in V_{Fe} prostornini krogel, ρ_{Al} in ρ_{Fe} pa gostoti aluminija in železa.

Ko sili krogel na kraka tehtnice izenačimo, dobimo

$$V_{Al} \cdot (\rho_{Al} - \rho_v) = V_{Fe} \cdot (\rho_{Fe} - \rho_v)\,.$$

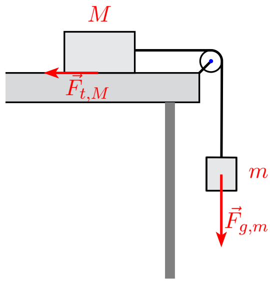
Ker je gostota železa večja od gostote aluminija, $\rho_{Fe} > \rho_{Al}$, je $(\rho_{Fe} - \rho_v) > (\rho_{Al} - \rho_v)$. Od tu sledi, da je prostornina krogle iz aluminija večja od prostornine krogle iz železa, $V_{Al} > V_{Fe}$.

Če je tako, deluje na železno kroglo manjša sila vzgona kot na kroglo iz aluminija, $F_{v,Fe} < F_{v,Al}$ in ker velja $F_{Al} = F_{Fe}$ vidimo, da velja tudi $F_{g,Fe} < F_{g,Al}$. Ko sta krogli nad vodno gladino, se tehtnica prevesi na stran težje krogle iz aluminija.

A3 Največje možno število pik v kvadratni inči, natisnjenih pri ločljivosti 600 dpi, je $600 \cdot 600 = 360\,000$. Kvadratna inča ima ploščino $2{,}54$ cm $\cdot\, 2{,}54$ cm $= 6{,}45(16)$ cm^2, kar pomeni, da je na vsakem cm^2 natisnjenih

$$\frac{360\,000}{6{,}45(16)\,\mathrm{cm}^2} = 55\,800 \text{ pik.}$$

A4 Klado in utež pospešuje teža uteži, gibanje pa zavira trenje med klado in mizo. Zapišemo 2. Newtonov zakon,



$$(m+M)\cdot a = m\cdot g - \frac{1}{10}\,M\cdot g\,.$$

Od tu izrazimo maso klade M,

$$M = m\cdot\frac{g-a}{a+\frac{1}{10}\,g} = m\cdot\frac{10-3}{3+1} = 0{,}2\,\mathrm{kg}\cdot\frac{7}{4} = 0{,}35\,\mathrm{kg}\,.$$

A5 Vsa štiri narisana vezja so med seboj ekvivalentna. Na vir napetosti sta zaporedno vezani dve kombinaciji dveh vzporedno vezanih žarnic.

B1 (a) Petrova potencialna energija se pretvori v njegovo kinetično energijo. Od lege na vrhu omare visoke $h_0 = 1{,}8$ m do lege tik preden se z nogami dotakne tal se njegova potencialna energija zmanjša za $\Delta W_p = (-)m\cdot g\cdot h_0$, njegova kinetična energija pa se za prav toliko poveča, in ker je Peter na vrhu omare miroval, lahko zapišemo

$$m\cdot g\cdot h_0 = \frac{1}{2}\,m\cdot v_0^2\,,$$

odkoder dobimo njegovo hitrost tik preden se s stegnjenimi nogami dotakne tal, $v_0 = \sqrt{2\cdot g\cdot h_0} = \sqrt{2\cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 1{,}8\,\mathrm{m}} = \sqrt{36}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

(b) Petrova hitrost se med doskokom z v_0 zmanjša na 0 na poti $h_1 = 0{,}5$ m, za kolikor se med doskokom v počep še dodatno zniža Petrovo težišče. Peter se med doskokom ustavlja s povprečnim pojemkom

$$\bar{a} = \frac{v_0^2}{2\cdot h_1} = \frac{36\,\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2\cdot 2\cdot 0{,}5\,\mathrm{m}} = 36\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 3{,}6\cdot g\,.$$

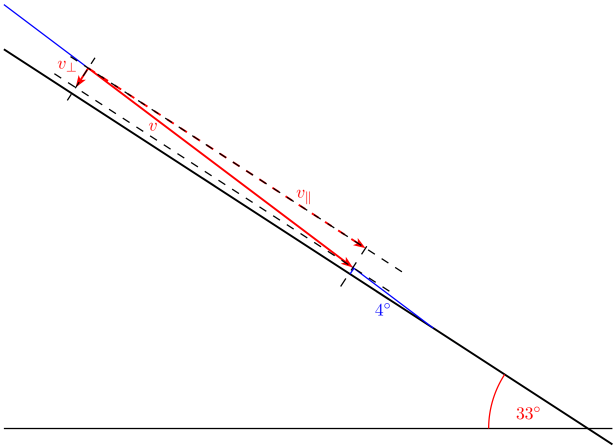
(c) Peter se med doskokom ustavlja čas t_1,

$$t_1 = \frac{\Delta v}{\bar{a}} = \frac{v_0}{\bar{a}} = \frac{6\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^2}{\mathrm{s}\cdot 36\cdot m} = \frac{1}{6}\,\mathrm{s} = 0{,}17\,\mathrm{s}\,.$$

(d) Med doskokom delujeta na Petra dve sili: navzdol deluje sila teže $\vec{F}_g$, navzgor deluje na Petra sila tal $\vec{F}_t$. Njuna rezultanta $\vec{F}_r = \vec{F}_g + \vec{F}_t$ povzroči, da se Petrovo težišče med doskokom ustavlja s povprečnim pojemkom $\bar{a} = 3{,}6\cdot g$, kar pomeni, da je rezultanta sil po velikosti enaka $F_r = m\cdot\bar{a} = m\cdot 3{,}6\cdot g$, $F_r = 3{,}6\cdot F_g$. Sila tal je od rezultante po velikosti še za Petrovo težjo večja, meri $F_t = 4{,}6\cdot F_g$. Med doskokom z omare deluje na Petra sila tal, ki je po velikosti enaka $4{,}6$-kratniku njegove teže.

(e) Povprečni pojemek, s katerim se Peter med doskokom ustavlja, je obratno-sorazmeren poti, na kateri se ustavi, kot je zapisano v izrazu pri odgovoru pri nalogi (b). Če bi se njegovo težišče med doskokom spustilo le za pol toliko kot v prejšnjem primeru, $h_2 = \frac{1}{2}\,h_1$, bi bil njegov povprečni pojemek dvakrat tolikšen kot prej, torej $\bar{a}_2 = 2\cdot\bar{a} = 7{,}2\cdot g$. (Med površnim doskokom bi na Petra delovala sila tal, po velikosti enaka $8{,}2$-kratniku njegove teže.)

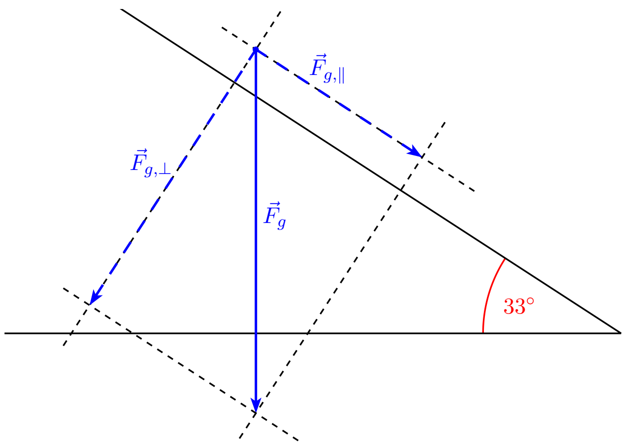
(f) Petrovo hitrost $v = 33\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (pravilno bi zapisali $\vec{v}$), ki ima tik pred pristankom na hrbtišču letalnice smer pod kotom $4°$ glede na podlago, razstavimo na dve pravokotni komponenti: na komponento, ki je v točki K vzporedna s podlago $v_{\parallel}$ (in je, tako kot hrbtišče na tistem mestu nagnjena za $33°$ glede na vodoravnico) in na komponento, ki je pravokotna na podlago $v_{\perp}$. Slika je narisana v merilu, kjer pomeni $6{,}6$ cm dolga usmerjena daljica hitrost $v = 33\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (daljica, dolga 1 cm pa ustreza hitrosti $5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$). Z natančnim načrtovanjem ugotovimo, da meri daljica, ki ustreza pravokotni komponenti Petrove hitrosti tik pred pristankom, $0{,}45$ cm $\pm\,0{,}1$ cm, kar ustreza pravokotni komponenti hitrosti $v_{\perp} = 2{,}25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\pm 0{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Za prav toliko se pravokotna komponenta Petrove hitrosti ob pristanku spremeni - zmanjša se na 0. Po pristanku se Peter giblje le vzporedno s podlago.



(g) Na podlago pravokotna komponenta Petrove hitrosti se med doskokom z $v_\perp$ zmanjša na 0 na poti $h_1 = 0{,}5$ m, za kolikor se med doskokom v telemark podlagi še dodatno približa Petrovo težišče. Med doskokom je povprečni pojemek v smeri, pravokotni na podlago

$$\bar{a}_\perp = \frac{v_\perp^2}{2 \cdot h_1} = \frac{(2{,}25)^2 \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2 \cdot 2 \cdot 0{,}5\,\mathrm{m}} = 5{,}06\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 0{,}5 \cdot g\,.$$

(h) Med doskokom delujeta na Petra v smeri, pravokotni na podlago, sila podlage $\vec{F}_{p,\perp}$ v smeri ven iz podlage in statična komponenta teže $\vec{F}_{g,\perp}$ v smeri v podlago. (Poleg sile podlage in statične komponente teže deluje na Petra še dinamična komponenta teže $\vec{F}_{g,\parallel}$, ki pa na gibanje v smeri, pravokotni na podlago, ne vpliva.)



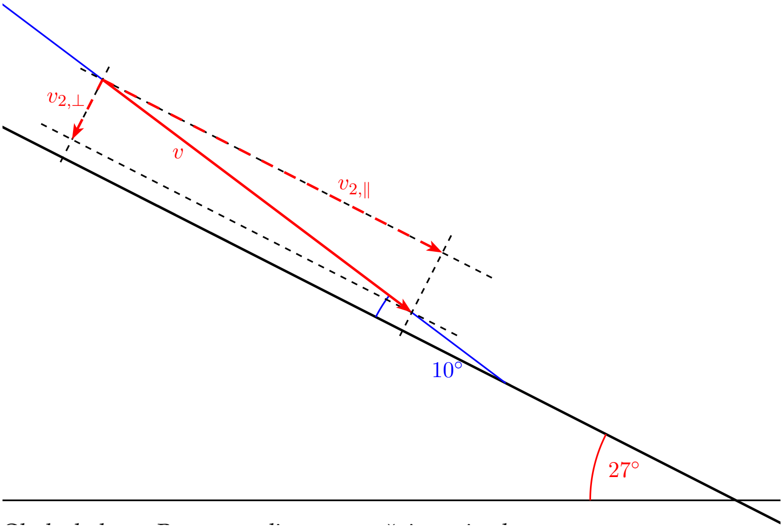
Rezultanta $\vec{F}_{g,\perp}$ in $\vec{F}_{p,\perp}$, po velikosti enaka $F_{r,\perp} = F_{p,\perp} - F_{g,\perp}$, povzroči Petrovo ustavljanje v smeri pravokotno na podlago s povprečnim pojemkom $\bar{a}_\perp$,

$$F_{r,\perp} = m \cdot \bar{a}_\perp = 62\,\mathrm{kg} \cdot 5{,}06\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 314\,\mathrm{N}\ \ (= 0{,}506 \cdot F_g)\,.$$

Statično komponento teže določimo z razstavljanjem teže na pravokotni komponenti. Slika je narisana v merilu, v katerem pomeni 1 cm silo 100 N. Na sliki izmerimo, da ustreza statični komponenti teže usmerjena daljica z dolžino $5{,}2$ cm $\pm 0{,}1$ cm, kar pomeni, da je velikost $F_{g,\perp} = 520$ N.

Med doskokom deluje na Petra povprečna pravokotna sila podlage $F_{p,\perp} = F_{r,\perp} + F_{g,\perp} = 314\,\mathrm{N} + 520\,\mathrm{N} = 834\,\mathrm{N}$ ($= 1{,}35 \cdot F_g$).

(i) Postopamo enako kot pri vprašanju (f). Pri načrtovanju upoštevamo, da se Peter tik pred doskokom giblje pod kotom $10°$ glede na podlago. Ugotovimo, da meri pravokotna komponenta hitrosti tik pred doskokom $v_{2,\perp} = 5{,}7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.



Ob doskoku se Peter ustavlja s povprečnim pojemkom

$$\bar{a}_{2,\perp} = \frac{v_{2,\perp}^2}{2 \cdot h_1} = \frac{(5{,}7)^2 \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2 \cdot 2 \cdot 0{,}5\,\mathrm{m}} = 32{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 3{,}25 \cdot g\,.$$

Peter ima tik pred drugim opisanim doskokom v smeri pravokotni na podlago približno tolikšno hitrost, kot jo ima tik pred doskokom z $1{,}8$ m visoke omare. Ker se njegovo težišče med obema doskokoma podlagi dodatno približa za isto razdaljo, sta približno enaka tudi pospeška.

Pravokotna sila podlage pa je med doskokom na **nagnjeno** hrbtišče letalnice vseeno nekoliko manjša kot pri doskoku z omare na vodoravna tla: pravokotna sila podlage na klancu dodatno uravnoveša le statično komponento teže (in ne celotne teže). Pri večjih naletnih kotih je sicer to zmanjšanje manj pomembno; po eni strani so pospeški pri doskoku tedaj večji in je večja rezultanta sil, po drugi strani pa je tedaj večja tudi statična komponenta teže.

B2 Pri reševanju nalog upoštevamo, da je napetost na posameznem porabniku U_R premo-sorazmerna toku I_R, ki teče skozi porabnik.

(a) Skozi en porabnik teče tok $I_{(a)} = 20$ mA. Ves naboj $e_0 = 360$ mAh, ki ga lahko skozi krog požene nova baterija do svojega izpraznjenja, steče skozi porabnik v času $t_{(a)}$, je $e_0 = I_{(a)} \cdot t_{(a)}$, od tu izrazimo čas

$$t_{(a)} = \frac{e_0}{I_{(a)}} = \frac{360\,\mathrm{mAh}}{20\,\mathrm{mA}} = 18\,\mathrm{h}\,.$$

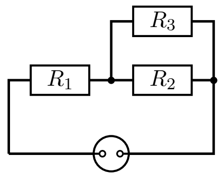
(b) Na posameznem od obeh enakih porabnikov je polovica napetosti vira $U_0 = 9$ V, zato je tok $I_{(b)}$, ki teče skozi porabnika in skozi vir, le pol tolikšen kot v primeru (a), $I_{(b)} = \frac{1}{2}\,I_{(a)} = 10$ mA. Baterija se izprazni v času $t_{(b)}$, ki je dvakrat tolikšen kot čas $t_{(a)}$; $t_{(b)} = 2 \cdot t_{(a)} = 36$ h.

(c) Napetost na vsakem od porabnikov je enaka napetosti vira in skozi vsakega od njiju teče tok $I_{(a)}$, skozi vir pa skupni tok $I_{(c)} = 2 \cdot I_{(a)} = 40$ mA. Dvakrat tolikšen tok kot v primeru (a) pomeni, da se baterija izprazni v pol tolikšnem času kot v primeru (a), $t_{(c)} = \frac{1}{2}\,t_{(a)} = 9$ h.

(d) Na porabniku v zgornji veji je napetost U_0, na posameznem od porabnikov v spodnji veji je napetost $\frac{1}{2}\,U_0$. Skozi porabnik v zgornji veji teče tok $I_{(a)}$, skozi zaporedno vezana porabnika v spodnji veji teče polovica tega toka, $I_{(b)}$. Skupni tok skozi vir je $I_{(d)} = I_{(a)} + I_{(b)} = 30$ mA. Čas $t_{(d)}$, v katerem se baterija izprazni, je

$$t_{(d)} = \frac{e_0}{I_{(d)}} = \frac{360\,\text{mAh}}{30\,\text{mA}} = 12\,\text{h}\,.$$

(e) Na vzporedno vezanih porabnikih R_2 in R_3 je napetost ista, $U_2 = U_3 = U_{23}$. Skozi R_2 in R_3 tečeta po velikosti enaka tokova I_2 in I_3, $I_2 = I_3$. Njuna vsota je tok I_1, ki teče skozi vir in skozi prvi porabnik R_1, $I_{(e)} = I_1 = 2{\cdot}I_2$. To pomeni, da je napetost na prvem porabniku U_1 dvakrat tolikšna kot je napetost U_{23} na vzporedno vezanih porabnikih, $U_1 = 2{\cdot}U_{23}$. Hkrati velja $U_1{+}U_{23} = U_0 = 9$ V, dobimo $2 \cdot U_{23} + U_{23} = 3 \cdot U_{23} = U_0$.

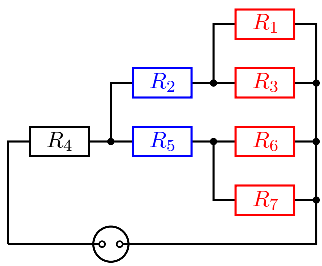


Napetost U_{23} na porabnikih R_2 in R_3 je enaka tretjini napetosti vira, kar pomeni, da skozi R_2 in R_3 tečeta tokova $I_2 = I_3 = \frac{1}{3}\,I_{(a)} = 6{,}67$ mA, skozi vir pa isti tok kot skozi prvi porabnik R_1, $I_{(e)} = I_1 = 2 \cdot I_2 = \frac{2}{3}\,I_{(a)} = 13{,}3$ mA. Čas $t_{(e)}$, v katerem se baterija izprazni, je

$$t_{(e)} = \frac{e_0}{I_{(e)}} = \frac{e_0}{\frac{2}{3}\,I_{(a)}} = \frac{3 \cdot e_0}{2 \cdot I_{(a)}} = \frac{3\ \cdot\ 360\,\text{mAh}}{2\ \cdot\ 20\,\text{mA}} = 27\,\text{h}\,.$$

(f) Vezje na sliki ima precej simetrije, kar nam olajša sklepanje. Porabniki R_1, R_3, R_6 in R_7 so vezani ekvivalentno, na njih je ista napetost $U_1 = U_3 = U_6 = U_7 = U_{1367}$ in skoznje tečejo enaki tokovi $I_1 = I_3 = I_6 = I_7$. Vsota teh štirih tokov je tok skozi porabnik R_4 in skozi vir, $I_4 = I_{(f)} = 4 \cdot I_1$, torej velja

$$\frac{I_{(f)}}{I_1} = \frac{I_4}{I_1} = 4 \quad \text{in tudi} \quad \frac{U_4}{U_{1367}} = 4\,.$$



Vsota enakih tokov I_1 in I_3 je tok I_2 skozi porabnik R_2 (ki mu je ekvivalenten porabnik R_5), $I_2 = I_1 + I_3 = 2 \cdot I_1$, torej velja

$$\frac{I_2}{I_1} = 2 \quad \text{in tudi} \quad \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_{25}}{U_{1367}} = 2\,.$$

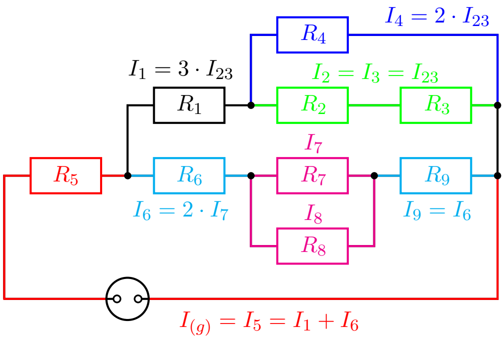
Poglejmo še napetosti v izbranem krogu, naj bo to npr. krog s porabniki R_4, R_2 in R_1. Upoštevamo, da je vsota napetosti na teh porabnikih enaka napetosti vira. Zapišemo lahko

$$U_0 = U_4 + U_2 + U_1 = U_4 + U_{25} + U_{1367} = 4 \cdot U_{1367} + 2 \cdot U_{1367} + U_{1367} = 7 \cdot U_{1367}\,.$$

Napetost $U_1 = U_{1367}$ je enaka sedmini napetosti vira, $U_{1367} = \frac{1}{7}U_0$ in tok I_1 je enak sedmini toka $I_{(a)}$, $I_1 = \frac{1}{7}I_{(a)} = \frac{20}{7}$ mA $= 2{,}86$ mA. Tok skozi baterijo je $I_{(f)} = I_4 = 4 \cdot I_1 = \frac{4 \cdot 20}{7}$ mA $= \frac{80}{7}$ mA $= 11{,}43$ mA.

(g) Začnimo z zgornjo vejo vezja (s porabniki R_1, R_2, R_3 in R_4). Skozi R_2 in R_3 teče isti tok $I_2 = I_3 = I_{23}$ in na obeh porabnikih sta enaki napetosti, $U_2 = U_3$. Na porabniku R_4 je napetost $U_4 = U_2 + U_3 = 2 \cdot U_2$ in skozenj teče tok $I_4 = 2 \cdot I_{23}$.
Skozi porabnik R_1 teče tok $I_1 = I_4 + I_{23} = 2 \cdot I_{23} + I_{23} = 3 \cdot I_{23}$. Razmerji tokov in napetosti sta

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{I_1}{I_{23}} = 3 \quad \text{in} \quad \frac{U_1}{U_2} = 3\,.$$



V spodnji veji vezja (porabniki R_6, R_7, R_8 in R_9) teče skozi porabnik R_7 tok I_7. Skozi porabnik R_8 teče enak tok, $I_8 = I_7$, skozi R_6 in R_9 pa teče isti tok $I_6 = I_9 = I_7 + I_8 = 2 \cdot I_7$. Za napetosti na porabnikih v tej veji lahko zapišemo $U_7 = U_8 = U_{78}$ in $U_6 = U_9 = 2 \cdot U_{78}$.
Hkrati velja, da sta vsoti napetosti na obeh vzporednih vejah enaki. Uporabimo že zapisana razmerja napetosti na porabnikih in zapišemo

$$U_1 + U_4 = U_6 + U_7 + U_9 \qquad \text{in} \qquad 3 \cdot U_2 + 2 \cdot U_2 = 2 \cdot U_{78} + U_{78} + 2 \cdot U_{78}\,.$$

Vidimo, da velja $U_2 = U_{78}$. Ker so vsi porabniki enaki, to pomeni, da velja tudi $I_{23} = I_7 = I_8$.
Za tok skozi baterijo in porabnik R_5 lahko zapišemo

$$I_{(g)} = I_5 = I_1 + I_6 = 3 \cdot I_{23} + 2 \cdot I_7 = 5 \cdot I_{23} \qquad \text{in} \qquad \frac{I_{(g)}}{I_2} = \frac{I_{(g)}}{I_{23}} = 5\,.$$

Napetost U_5 na porabniku R_5 je $U_5 = 5 \cdot U_2$.
Zdaj nam ostane le še zapis napetosti v enem od krogov, ki vključujejo baterijo. Izberemo si krog s porabniki R_5, R_1 in R_4. Zapišemo

$$U_0 = U_5 + U_1 + U_4 = 5 \cdot U_2 + 3 \cdot U_2 + 2 \cdot U_2 = 10 \cdot U_2$$

in od tu dobimo $U_2 = \frac{1}{10} U_0$ in $I_{23} = \frac{1}{10} I_{(a)} = 2$ mA in $I_{(g)} = 10$ mA.

Eksperimentalna naloga

C Na meritve vpliva velikost zrna koruze, ki ga tekmovalec uporabi. Pri vrednotenju bomo upoštevali tolerančno območje.

(a) Tehtnico lahko uravnovesimo z različnimi postopki:

(i) spreminjamo maso plastelina na krajišču enega kraka tehtnice,
(ii) spreminjamo lego plastelina na kraku,
(iii) na drugem kraku spreminjamo lego sponke za papir, ki drži posodico,
(iv) prestavimo lego šivanke na slamicah (naredimo luknjico - os - drugje).

(b) Masa lista papirja s ploščino 1 m^2 je 80 g, masa lista papirja s ploščino 1 dm^2 je 0,80 g in masa lista papirja s ploščino 1 cm^2 je 0,008 g = 8 mg.

$N \cdot 1$ cm^2	m [mg]
1	8
5	40
10	80
25	200

(c) Masa zrna koruze je med 0,16 g in 0,23 g. Masivnejših zrn nismo našli. Ko smo merili mase, je imelo največ zrn maso 0,19 g = 190 mg.

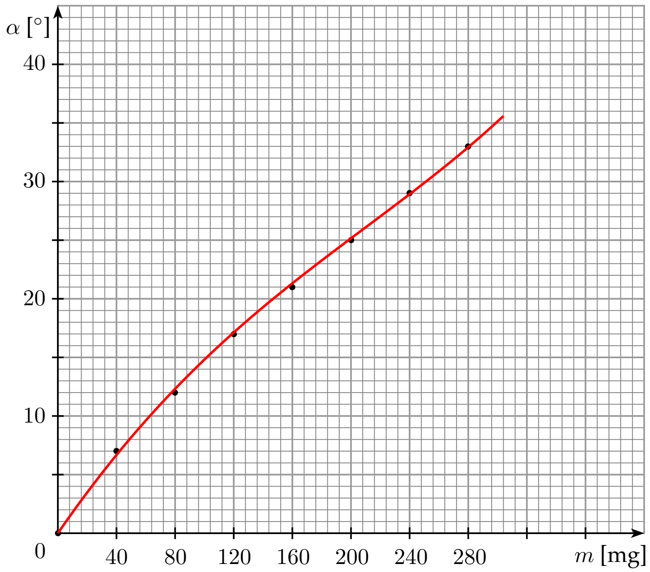
(d) Razpočeno koruzno zrno ima za približno 15 % (med 10 % in 20 %) manjšo maso kot surovo koruzno zrno.

(e) Čeprav so zrna sušena, je v surovem koruznem zrnu še vedno nekaj vode. Ko zrno segrevamo, se voda v zrnu upari. Ker ima zrno ovojnico, voda ne more zlahka iz zrna, zato zrno raznese. Hkrati se v njem spremeni tudi škrob. Razpočeno koruzno zrno ima manjšo maso od surovega, ker je iz zrna ušla uparjena voda.

(f) Primer meritev je v razpredelnici.

m [mg]	α [°]
0	0
40	7
80	12
120	17
160	21
200	25
240	29
280	33

(g) Umeritvena krivulja za mikrotehtnico, ki kaže povezavo med odklonom tehtnice od ravnovesne lege α in maso uteži m.



(h) Občutljivost mikrotehtnice se spremeni, če se spremeni
   (i) dolžina krakov tehtnice (slamic),
   (ii) masa posodice na enem kraku in masa plastelina za uravnoteženje na drugem kraku,

(iii) razporeditev mase na krakih (če posodica ne bi visela s krajišča kraka, ali če bi namesto dveh sponk za papir uporabili manj ali več sponk, in bi visela posodica višje ali nižje, ali če bi drugi krak uravnovesili s plastelinom v drugi posodici, ki bi visela z drugega kraka)

(iv) trenje v ležaju,

(v) ukrivljenost krakov (s tem se posredno spremeni razporeditev mase glede na os tehtnice).

(i) Da občutljivost tehtnice **povečamo**, naštete parametre spremenimo tako:

(i) dolžino krakov tehtnice **povečamo** (povečamo ročico),

(ii) maso posodice na enem kraku in maso plastelina za uravnoteženje na drugem kraku **zmanjšamo** (zmanjšamo maso gibljivih sestavnih delov tehtnice),

(iii) razporeditev mase na krakih: posodico **odmaknemo** še bolj stran **od osi** (šivanke), namesto dveh sponk za papir uporabimo **manj** sponk in bi posodica visela **višje**, plastelin na drugem kraku stisnemo ob krak,

(iv) trenje v ležaju **zmanjšamo**,

(v) ukrivljenost krakov **zmanjšamo**.