Tekmovanja

15. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol – regijsko tekmovanje

Naloge za 1. letnik

A1 Kolikšna je vrednost izraza $|-3| + |1 - |-2|| - ||4| - 2|$?

(**A**) -2 (**B**) 0 (**C**) 2 (**D**) 4 (**E**) 10

A2 Naj bo $mn = 16$ in $m^2 + n^2 = 68$. Kolikšna je vrednost izraza $(-m + n)^2$?

(**A**) -36 (**B**) 36 (**C**) 68 (**D**) 84 (**E**) 100

A3 Kolikšna je obratna vrednost izraza $\frac{3}{x} + \frac{2}{5}$?

(**A**) $\frac{3}{x} - \frac{2}{5}$ (**B**) $\frac{x}{3} + \frac{5}{2}$ (**C**) $\frac{5x}{2x+15}$
(**D**) $\frac{2x+15}{5x}$ (**E**) $\frac{5x}{6}$

A4 Vsota prvega in drugega števila je 11, vsota drugega in tretjega števila je 12. Vsota prvega in tretjega števila 13. Koliko je tretje število?

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

B1. Metka ima 48 gerber, 72 tulipanov in 32 vejic zelenja. V vsak šopek želi dati enako število gerber, enako število tulipanov in enako število vejic zelenja. Vsak šopek bo povezala s svilenim trakom.

a) Največ koliko takšnih šopkov bo lahko izdelala, če mora porabiti vso cvetje in zelenje? Koliko metrov traku bo potrebovala za izdelavo teh šopkov, če za vsak šopek porabi 52 cm traku (na centimeter natančno)?

b) Koliko stane tak šopek, če je cena gerbere 3 evre, cena tulipana 2 evra, vejico zelenja pa prodajajo po 50 centov? Svileni trak je brezplačen.

B2. Točki $A(0, -4)$ in $C(0, 2)$ sta krajišči diagonale kvadrata. Določi dolžino diagonale in koordinati drugih dveh oglijšč. Natančno izračunaj ploščino kvadrata. Nariši skico.

B3. Dani sta dve števili. Če od $40\,\%$ prvega števila odštejemo $25\,\%$ drugega števila, dobimo 41. Vsota za $30\,\%$ povečanega prvega števila in za $20\,\%$ zmanjšanega drugega števila pa je 230. Izračunaj obe števili.

B4. Poenostavi izraz $\frac{(x^3-8)(x-2)^{-1}-7}{1-x^{-2}} - \frac{x^3}{x+1}$.

Naloge za 2. letnik

A1 V trikotniku ABC so zunanji koti v razmerju $2:3:4$. V kolikšnem razmerju so notranji koti trikotnika ABC?

(**A**) $2:3:4$ (**B**) $5:3:1$ (**C**) $4:3:2$

(**D**) $5:4:3$ (**E**) razmerja ne moremo določiti

A2 Izraz $\sqrt{-6+5\cdot 2}\cdot(3x^{-2}y^{4})^{3}\cdot\left(\frac{6^{2}}{4}-\sqrt{25}\right)\cdot\left(y^{-1}\right)^{4}:(x^{-3}y^{4})^{5}$ zapiši v najpreprostejši obliki. Katera izmed navedenih možnosti je pravilna?

(**A**) $(6x^{3}y^{-4})^{3}$ (**B**) $27x^{9}y^{-12}$ (**C**) $216x^{9}y^{12}$

(**D**) $108x^{21}y^{12}$ (**E**) $216x^{9}y^{18}$

A3 Izraz $\left(a^{-\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[3]{a^{4}}\right)^{4}:(a\cdot\sqrt[3]{a})$ poenostavi v najpreprostejšo obliko. Katera izmed navedenih možnosti je pravilna?

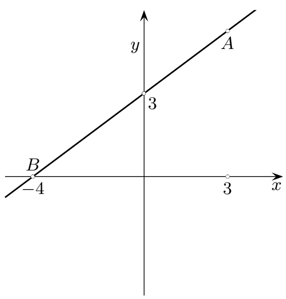
(**A**) $a^{\frac{3}{4}}$ (**B**) $a^{-\frac{3}{4}}$ (**C**) 1 (**D**) a (**E**) a^{2}

A4 Kateri točki sta presečišči premice $3y-x+3=0$ s koordinatnima osema?

(**A**) $M(3,0)$ in $N(0,1)$ (**B**) $M(1,0)$ in $N(0,-1)$ (**C**) $M(3,0)$ in $N(0,-1)$

(**D**) $M(-3,0)$ in $N(0,-1)$ (**E**) $M(4,0)$ in $N(0,-1)$

B1. Na sliki je graf linearne funkcije f. Izračunaj neznano koordinato točke A in točko A zapiši. Izračunaj razdaljo med točkama A in B.



B2. Točki A in B razdelita krožnico s polmerom 5 cm na dva loka, katerih dolžini sta v razmerju $3:7$. Koliko meri obodni kot nad krajšim krožnim lokom med točkama A in B? Kolikšna je dolžina pripadajoče tetive? Dolžino zaokroži na eno decimalno mesto natančno.

B3. Založba izdaja neko knjigo. Stroški za naklado $3\,000$ izvodov so $7\,500$ evrov, za naklado $7\,000$ izvodov pa $9\,500$ evrov. Stroški so linearno odvisni od števila izvodov. Zapiši predpis te funkcije. Izračunaj, koliko bi stala naklada $1\,000$ izvodov in koliko naklada $10\,000$ izvodov.

B4. Poenostavi dani izraz $\frac{x^{n+3}-x^{n+1}}{x^{n+2}-x^{n+1}}\cdot\frac{x-2}{x-1-2x^{-1}}$.

Naloge za 3. letnik

A1 Za katere vrednosti spremenljivke x ima izraz $(x+3)(x-1)-(2x+1)$ negativno vrednost?

(**A**) Za vse x, kjer je $x>-2$. (**B**) Za vse x, kjer je $x<2$.

(**C**) Za vse x, kjer je $-2\leq x\leq 2$. (**D**) Za vse x, kjer je $-2<x<2$.

(**E**) Za vse x, kjer je $(x>2)$ ali $(x<-2)$.

A2 Ploščina pravilnega šestkotnika je $96\sqrt{3}$ cm^2. Koliko meri obseg tega šestkotnika?

(**A**) $o = 48$ cm (**B**) $o = 24$ cm (**C**) $o = 96$ cm
(**D**) $o = 16$ cm (**E**) $o = 36$ cm

A3 Koliko je produkt rešitev enačbe $2^{x^2-\frac{5}{7}x} = \sqrt[7]{4}$?

(**A**) $-\frac{2}{7}$ (**B**) $\frac{2}{7}$ (**C**) $\frac{3}{7}$ (**D**) -2 (**E**) $-\frac{5}{7}$

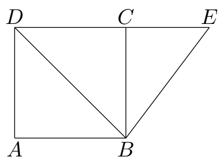
A4 Katera izmed spodnjih enakosti je pravilna?

(**A**) $\log_5(7^2) = (\log_5 7)^2$ (**B**) $\log_{\frac{1}{3}}(9^3) = -6$ (**C**) $\log_3 4 - \log_3 5 = \frac{\log_3 4}{\log_3 5}$
(**D**) $\log 15 = 1 + \log 5$ (**E**) $\log_8 2 = \log 64$

B1. Kvadratna funkcija f je podana s predpisom v temenski obliki $f(x) = \frac{-3}{2}(x-2)^2+6$. Zapiši jo v ostalih dveh oblikah in nariši grafa funkcij $f(x)$ in $g(x) = |f(x)|$.

B2. Naj bo $x, y > 0$. Poenostavi izraz $\log_3\left(\frac{3xy^3 \cdot \sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{9y^{-1}}}\right)$.

B3. Stranica BC kvadrata $ABCD$ je tudi kateta pravokotnega trikotnika BCE. Hipotenuza BE trikotnika BCE meri 12 cm. Diagonala BD kvadrata $ABCD$ in hipotenuza BE pravokotnega trikotnika BCE oklepata kot $75°$. Izračunaj ploščino trikotnika DBE. Skica je simbolna.



B4. Zapiši enačbo simetrijske osi množice točk $T(x, y)$, katerih koordinate zadoščajo enačbi krivulje $y = (x-2)^2 + 3 + x^2 - 4x$. Krivuljo poimenuj.

Naloge za 4. letnik

A1 Koliko različnih vrst sladoleda imajo v slaščičarni, če lahko ponudijo 136 kombinacij z dvema kepicama različnih okusov?

(**A**) 15 (**B**) 16 (**C**) 17 (**D**) 18
(**E**) Ni možno določiti.

A2 Za katere vse vrednosti spremenljivke x je definirana racionalna funkcija f s predpisom $f(x) = \frac{4x}{-x^2-4}$?

(**A**) Za vsa pozitivna realna števila. (**B**) Za vse $x \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.
(**C**) Za vsa realna števila. (**D**) Za vse $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 2\}$.
(**E**) Funkcija ni definirana za nobeno realno število x.

A3 Koliko realnih ničel ima polinom p s predpisom $p(x) = -3(x^2+1)(x^2-4)(x-5)$?

(**A**) Eno ničlo. (**B**) Dve ničli. (**C**) Tri ničle. (**D**) Štiri ničle. (**E**) Pet ničel.

A4 Vsota prvega in sedmega člena aritmetičnega zaporedja je 7. Koliko je vsota tretjega in petega člena tega zaporedja?

(**A**) 7 (**B**) 5 (**C**) 3 (**D**) 1 (**E**) 0

B1. Matiju manjka še 2 900 evrov za nakup avtomobila. Odločil se je, da bo varčeval. Od zaslužka je prvi mesec privarčeval 50 evrov. Vsak naslednji mesec bo privarčeval 10 evrov več kot prejšnji mesec. Koliko časa bo varčeval, da bo zbral potreben znesek? Izračunaj in zapiši odgovor.

B2. Dana je racionalna funkcija f s predpisom $f(x) = \frac{x}{x^2-4x+a}$.

a) Določi vrednost parametra a, da bo graf funkcije f potekal skozi točko $A(2,1)$.

b) Za parameter $a = 4$ določi ničle, pole, asimptoto in skiciraj graf funkcije f.

B3. Reši naslednje:

a) Poenostavi izraz $(2\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - 2\cos x)^2$.

b) Izračunaj vrednost izraza $\frac{\sin x}{2\sin x - 3\cos x}$, če je $\tan x = \frac{1}{2}$.

B4. Določi parametra a in b, tako da bo polinom p s predpisom $p(x) = x^5 - 2x^4 - 7x^3 + ax^2 + bx$ deljiv s polinomom g s predpisom $g(x) = (x-3)(x+1)$. Poišči ničle takega polinoma p.

15. tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol – regijsko tekmovanje

Naloge za vse letnike srednje šole

A1. Katero število naj bo v $\square$, da bo $9210 - 9124 = 210 + \square$?

(**A**) -124 (**B**) -86 (**C**) 86 (**D**) 124 (**E**) 186

A2. Razvrstite vrednosti izrazov:
a. 2^{-1} b. $0{,}5^2$ c. 0^4 d. 1^5 e. $\sqrt[5]{-32}$
od najmanjšega do največjega.

(**A**) ebacd (**B**) abcde (**C**) ecbad (**D**) ebadc (**E**) ebdca

A3. Okno, ki je široko $0{,}5$ m in visoko $1{,}3$ m, ima 1 dm širok okvir. Kolikšna je vidna višina vpetega stekla v okvir?

(**A**) $0{,}3$ m (**B**) $0{,}4$ m (**C**) $1{,}2$ m (**D**) $1{,}1$ m (**E**) $\sqrt{1{,}3}$ m

A4. V cvetličarni *Marjetka* so za 8. marec prodali 756 vrtnic. Četrtino so jih prodali otrokom. Polovico vseh vrtnic so kupili moški, preostale pa so prodali v šopkih po 3 skupaj. Koliko šopkov so prodali?

(**A**) 21 (**B**) 63 (**C**) 84 (**D**) 189 (**E**) 378

A5. Koliko je vredna zlata kocka z robom dolžine 20 cm, če je gostota zlata $19{,}3\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$, odkupna cena pa 30 evrov za gram zlata?

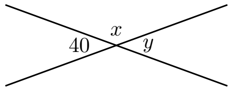
(**A**) 4632 EUR (**B**) 46320 EUR (**C**) 463200 EUR (**D**) 4632000 EUR (**E**) 46320000 EUR

A6. V vrečki je tisoč petsto petinštirideset kroglic. Nekatere so rdeče, nekaj je modrih in nekaj rdeče-modrih. Tisoč petsto kroglic je v celoti ali delno rdeče barve, tri so v celoti rdeče barve. Koliko odstotkov kroglic je v celoti modrih?

(**A**) $0{,}19$ % (**B**) $2{,}72$ % (**C**) $2{,}91$ % (**D**) 45 % (**E**) 150 %

A7. Premici se sekata, kot kaže slika. Kolikšna je razlika kotov $x - y$?

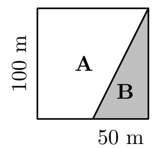
(**A**) $0°$ (**B**) $40°$ (**C**) $60°$ (**D**) $80°$ (**E**) $100°$



A8. Za poln 50-litrski rezervoar goriva je zaradi padca cene nafte potrebno odšteti 3 evre manj kot pred pocenitvijo. Koliko stane liter nafte, če je bilo potrebno za liter nafte pred pocenitvijo odšteti 1,35 evra?

(**A**) 1,20 EUR (**B**) 1,25 EUR (**C**) 1,29 EUR (**D**) 1,30 EUR (**E**) 1,40 EUR

A9. Vrt, ki ima obliko kvadrata, je razdeljen na travnati del A in sadni del B (glej sliko). Kolikšna je ploščina travnatega dela A?



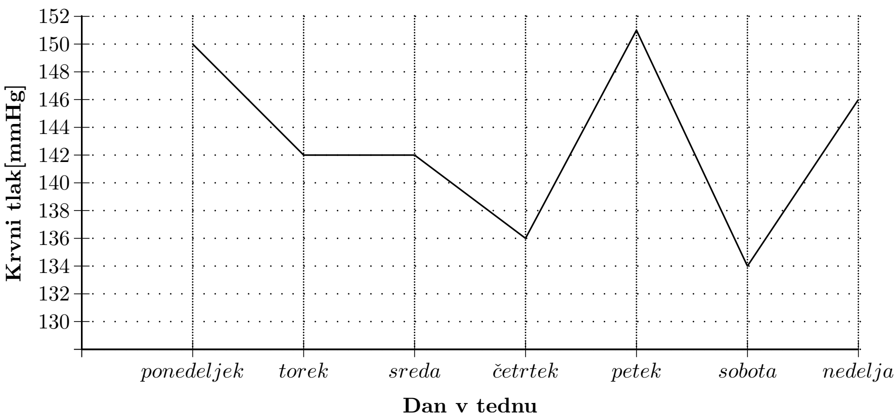
(**A**) 50 m^2 (**B**) 1250 m^2 (**C**) 2500 m^2
(**D**) 5000 m^2 (**E**) 7500 m^2

A10. Na dan 7. 12. 2014 sta Lindsey Vonn in Tina Maze imeli skupaj 85 zmag v svetovnem pokalu. Število zmag za posamezno tekmovalko je predstavljeno v spodnji tabeli s simboli. Koliko zmag več je imela do takrat Lindsay Vonn?

Tina Maze	◇◇◇◇◇
Lindsay Vonn	◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

(**A**) 7 (**B**) 15 (**C**) 25 (**D**) 35 (**E**) 45

B1. Iz grafičnega prikaza so razvidne dnevne meritve krvnega tlaka bolnika Mateja v bolnišnici v enem tednu.



A. Koliko je znašal njegov tlak v ponedeljek?

B. Kateri dan v tednu je imel najvišji tlak?

C. Med katerima zaporednima dnevoma v tednu se tlak ni spremenil?

D. Kolikšna je vrednost povprečnega tedenskega tlaka?

E. Za koliko odstotkov je bil njegov tlak v nedeljo večji od povprečja? Rezultat zaokrožite na eno decimalko.

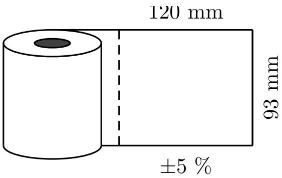
B2. Lena izbira med dvema selitvenima podjetjema. Pri podjetju *Selivček* je začetna cena 20 EUR in dodatnih 0,30 EUR za vsak prevožen kilometer. Pri podjetju *Zdaj tu, zdaj tam* je začetna cena 50 EUR in dodatnih 0,10 EUR za vsak kilometer.

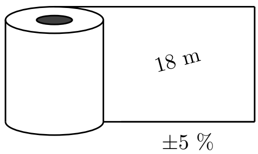
A. Katero podjetje naj Lena izbere, da bo plačala čim manj, če se seli v 120 km oddaljeno mesto?

B. Koliko evrov bo Lena privarčevala, če se bo preselila v 170 km oddaljeno mesto in bo izbrala ugodnejše selitveno podjetje?

C. Za koliko naj bo oddaljen kraj selitve, da bo pri obeh podjetjih plačala enako?

B3. Na embalaži toaletnega papirja sta naslednji sliki:





Pri vsakem vprašanju zapišite odgovor.

A. Koliko lističev je na eni rolici toaletnega papirja?

B. Kolikšne dimenzije je lahko en listič, če upoštevamo zapis $\pm 5\ \%$? Rezultat naj bo natančen.

C. Debelina lističa papirja je $1\ \mathrm{mm}$. Kolikšna je višina nastalega kupčka, če zložimo vse lističe enega vrh drugega? Rezultat naj bo v cm in natančen.

B4. Med počitnicami bo prijatelj z letalom odpotoval na krajši izlet v London. Na pot gre lahko najprej v ponedeljek, vrniti pa se mora do nedelje. V Londonu bo prespal vsaj tri noči. Tabele prikazujejo cene letov na posamezni dan v tednu in urnik odhodov letala.

Ljubljana - London (odhodni let)							
dan	ponedeljek	torek	sreda	četrtek	petek	sobota	nedelja
cena	79 €	59 €	ni leta	47 €	91 €	72 €	93 €

London - Ljubljana (povratni let)							
dan	ponedeljek	torek	sreda	četrtek	petek	sobota	nedelja
cena	49 €	39 €	ni leta	39 €	56 €	54 €	63 €

	Ljubljana - London	London - Ljubljana
odhod letala	11.00	7.50

Opomba: Lokalni čas v Ljubljani je GMT+1, v Londonu pa GMT (1 uro manj).

A. Kateri dan v tednu se mora najkasneje odpraviti na pot, da lahko tam prespi vsaj tri noči?

B. Kolikšna je najnižja cena povratne karte (odhodni + povratni let), če v Londonu prespi vsaj tri noči?

C. Za katera dva dneva (odhod in povratek) plača najnižjo ceno povratne karte?

D. Kolikšen bo natančni končni znesek plačila, če bo za plačilo s kreditno kartico plačal še dodatna $2\ \%$ provizije?

E. Ob kateri uri bo letalo pristalo na ljubljanskem letališču, če bo iz Londona vzletelo z 18-minutno zamudo, let pa traja 2 uri in 15 minut?

15. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol – državno tekmovanje

Naloge za 1. letnik

1. Marko se je odločil, da bo privarčeval 600 evrov, ki jih bo porabil za nakup novega računalnika. Po štirih mesecih varčevanja je ugotovil, da so njegovi mesečni prihranki glede na vrstni red mesecev varčevanja v razmerju $4:3:2:2$. Za nakup novega računalnika mu tako manjka le še polovica najmanjšega mesečnega prihranka. Koliko je Marko privarčeval prvi mesec?

2. Izračunaj naravni števili, katerih vsota je 168, največji skupni delitelj pa 24. Zapiši vse možne rešitve.

3. Naj bo $x \in \mathbb{R}$. Izračunaj vrednost izraza

$$\frac{2^{2014}+2^{2015}-2^{2016}-2^{2017}}{(-3)^{2014}-(-3)^{2016}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2013} \cdot \frac{4^{2x+2}}{(-2)^{4x}}.$$

   Rezultat naj bo točen.

4. V trgovini z oblačili imajo dva tedna akcijsko razprodajo. Prvi teden je kupec pri nakupu treh oblačil dobil najcenejši kos zastonj. Janez je prvi teden kupil jakno, hlače in pulover. Za jakno in hlače je plačal $115{,}01$ evra ter zaradi te akcije prihranil $17{,}85\,\%$ vrednosti oblačil v redni prodaji. Drugi teden imajo akcijo, ki ponuja popust na vse jakne v višini $20\,\%$. Za isti nakup kot v prvem tednu bi Janez v drugem tednu plačal 125 evrov. Izračunaj ceno puloverja, hlač in jakne v redni prodaji.

Naloge za 2. letnik

1. Premica p je dana z enačbo $2x-6y+3=0$.

   a) Točka A z absciso $-\frac{1}{2}$ leži na premici p. Naj bo B presečišče premice p in abscisne osi. Zapiši koordinate točk A in B ter izračunaj koordinati razpolovišča S daljice AB. Rezultat naj bo točen.

   b) Zapiši enačbo premice q, ki je vzporedna premici p in seka ordinatno os v točki -3.

2. **a)** Naj bo $a>0$ in $b>0$. Poenostavi izraz

$$7\left(\frac{a^5}{2b^4}\right)^5 \cdot \left(\frac{2b^2}{a^4}\right)^5 - 3\left(\frac{a}{b^2}\right)^{3+2x} \cdot \left(\frac{a^2}{b^4}\right)^{1-x} + \left(4a^5b\right)^5 : \left(2a^4b^3\right)^5.$$

   b) Izračunaj vrednost izraza za $a=5^{\frac{1}{5}}$ in $b=\sqrt[5]{2}$.

3. Določi parameter $a \in \mathbb{R}$ tako, da bo graf funkcije $f(x)=\frac{3-2a}{a+5}x+\frac{2a-1}{3-a}$ sekal ordinatno os nad koordinatnim izhodiščem in da bo funkcija f padajoča.

4. Konstruiraj trikotnik ABC s podatki: $a=4$ cm, $\beta=75°$, $t_c=5$ cm. Kot konstruiraj s šestilom in ravnilom.

Naloge za 3. letnik

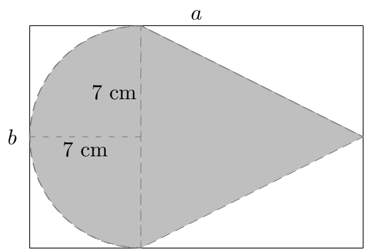
1. Dana je eksponentna funkcija f s predpisom $f(x) = -2^{-x-2} + 1$.

   a) Izračunaj ničlo in začetno vrednost funkcije f ter zapiši enačbo vodoravne asimptote funkcije f.

   b) Nariši graf funkcije f.

2. Določi $m \in \mathbb{R}$ tako, da bo najmanjša vrednost funkcije $f(x) = (m-1)x^2 + (1-3m)x + 2m + 1$ enaka -1.

3. Obseg pravokotnika s stranicama a in b je 90 cm (glej sliko). Izračunaj obseg osenčenega lika. Rezultat naj bo točen.



4. Reši enačbo $\dfrac{4^{\log_3 x}}{6} = \dfrac{2^{\log_3 (x+1)}}{3}$.

Naloge za 4. letnik

1. Izračunaj tak x, da bo zaporedje $x+2,\ 3x,\ x^2+5$ geometrijsko in bodo členi zaporedja cela števila. Izračunaj količnik in zapiši zaporedje.

2. Dana je funkcija f s predpisom $f(x) = A \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$. Določi $A \in \mathbb{R}$ tako, da bo veljalo $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$. Za tako določeno funkcijo f zapiši njeno zalogo vrednosti in nariši njen graf.

3. Iz črk besede LJUBEZNIVOST sestavljamo besede dolžine 4. Črke se ne smejo ponavljati.

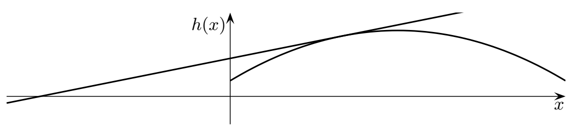
   a) Koliko različnih besed lahko sestavimo?

   b) Koliko različnih besed lahko sestavimo, če uporabimo le samoglasnike?

   c) Izračunaj verjetnost, da iz naključno izbranih črk sestavimo besedo NEBO.

   d) Izračunaj verjetnost, da iz naključno izbranih črk sestavimo besedo, ki se začne in konča s soglasnikom.

4. Luka se je po ravni cesti zapeljal čez gorski prelaz. Na oddaljenosti x metrov v vodoravni smeri od vznožja prelaza se je nahajal na nadmorski višini $h(x) = -\frac{x^2}{20\,000} + \frac{3x}{5} + 560$ metrov (glej sliko).



   a) Na kateri nadmorski višini se nahaja najvišja točka prelaza?

   b) Izračunaj naklon ceste na minuto natančno v točki, ko je bil Luka od vznožja prelaza oddaljen 4000 metrov v vodoravni smeri.

15. tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol – državno tekmovanje

Naloge za vse letnike srednje šole

A1. Koliko je `INPUT`, če je `OUTPUT` enak 32?

$$\boxed{\texttt{INPUT}} \xrightarrow{-8} \boxed{} \xrightarrow{:2} \boxed{} \xrightarrow{+16} \boxed{\texttt{OUTPUT}}$$

(**A**) 16 (**B**) 28 (**C**) 32 (**D**) 36 (**E**) 40

A2. Mama je dala vsakemu od treh otrok enako žepnino. Ko je vsak otrok porabil 20 evrov, jim je skupaj ostalo točno toliko, kot je dobil vsak posamezno. Koliko žepnine so skupaj dobili otroci?

(**A**) 60 EUR (**B**) 65 EUR (**C**) 75 EUR (**D**) 78 EUR (**E**) 90 EUR

A3. Aleš je delal izpit za motor. Njegovo vožnjo je spremljal inštruktor z osebnim avtomobilom. Po 100 km vožnje sta motor in spremljevalni avto skupaj porabila 10 litrov bencina. Razmerje med porabo bencina pri motorju in spremljevalnem avtu je 1:4. Koliko bencina je porabil motor za 50 km vožnje?

(**A**) $0{,}5\ \ell$ (**B**) $0{,}75\ \ell$ (**C**) $1\ \ell$ (**D**) $2\ \ell$ (**E**) $4\ \ell$

A4. Razlika $\alpha-\beta$ med velikostma ostrih kotov pravokotnega trikotnika je $60°$. Koliko je razlika $\beta_1-\alpha_1$ med velikostma pripadajočih zunanjih kotov tega trikotnika?

(**A**) $30°$ (**B**) $60°$ (**C**) $90°$ (**D**) $100°$ (**E**) $120°$

A5. Katera izmed navedenih enačb premic je enačba premice, ki poteka skozi točko $A(-1,5)$?

(**A**) $y=5x-1$ (**B**) $y=\frac{1}{3}x+\frac{16}{3}$ (**C**) $3y=x-5$

(**D**) $y=-\frac{1}{3}x+\frac{16}{3}$ (**E**) $5x+y-1=0$

A6. Anjo, Marjetko in Biserko je zanimala njihova skupna masa. Tehtali sta se po dve skupaj v vseh možnih kombinacijah. Tehtnica je pokazala mase: 112 kg, 113 kg in 115 kg. Koliko je njihova skupna masa?

(**A**) 140 kg (**B**) 150 kg (**C**) 160 kg (**D**) 170 kg (**E**) 180 kg

B1. Osem planincev se je odpravilo v planine. Stehtali so svoje nahrbtnike. Dva njihova nahrbtnika sta tehtala po 12 kg, dva po 15 kg, trije po 16 kg in eden 18 kg.

A. Izračunajte povprečno maso vseh nahrbtnikov.

B. Koliko nahrbtnikov tehta manj kot povprečna masa nahrbtnikov?

C. Koliko odstotkov skupne mase nahrbtnikov predstavlja masa nahrbtnika, ki tehta največ?

D. Zapišite mediano in modus mas vseh nahrbtnikov.

E. K skupini se je priključil še deveti planinec. Koliko je masa njegovega nahrbtnika, če se je povprečna masa nahrbtnikov povečala za 1 kg?

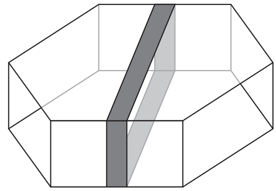
B2. Bonboniera ima obliko pravilne 6-strane prizme z dolžino osnovnega roba 6 cm in višino 3 cm.

A. Koliko je ploščina osnovne ploskve te prizme? Rezultat izrazite v cm^2 in zaokrožite na eno decimalko natančno.

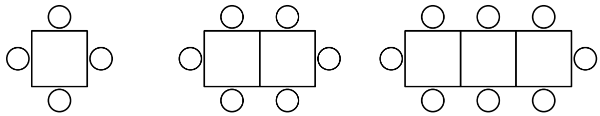
B. Izračunajte prostornino bonboniere. Rezultat izrazite v cm^3 in zaokrožite na eno decimalko natančno.

C. Največ koliko različnih daljic, ki povezujejo dve nesosednji oglišči, lahko narišemo na dno bonboniere?

D. Okoli bonboniere nalepimo okrasni trak (glej sliko). Najmanj koliko cm mora biti dolg? Rezultat zaokrožite na eno decimalko natančno.



B3. Za maturantski ples pripravljajo omizja z eno, dvema, tremi ali več mizami in s stoli tako, kot je prikazano na sliki.



omizje z 1 mizo   omizje z 2 mizama   omizje s 3 mizami

A. Največ koliko gostov bo lahko sedelo za tako pripravljenim omizjem s štirimi mizami?

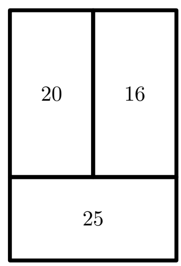
B. Zapišite izraz za število stolov pri tako pripravljenem omizju z n mizami.

C. Najmanj koliko miz bi morali pripraviti za omizje, za katerim bi lahko sedelo 24 gostov?

D. Za maturantski ples so prodali 130 kart. V dvorani je za goste že pripravljenih 8 omizij z eno mizo in 5 omizij s štirimi mizami. Koliko omizij z dvema in koliko omizij s tremi mizami morajo še pripraviti? Vsa omizja bodo v celoti zasedena. Poiščite vse rešitve.

E. Vid bo skupaj z mamo, očetom in sestro sedel za omizjem z eno mizo. Na koliko načinov se lahko posedejo?

B4. Gal je na vsako izmed treh kart napisal po eno število in iz kart sestavil pravokotnik (glej sliko).



A. Izračunajte ploščino tega pravokotnika, če je obseg ene karte $30\ \mathrm{cm}$.

B. Katero je najmanjše število, ki je hkrati deljivo z vsemi tremi števili, ki so zapisana na kartah?

C. Gal želi številu na vsaki karti prišteti neko praštevilo tako, da bodo dobljene tri vsote enake. Katera praštevila naj prišteje posameznim številom na kartah?

7. tekmovanje iz znanja astronomije – šolsko tekmovanje

7. razred

A1. 28. septembra letos je bil tudi iz naših krajev viden popolni Lunin mrk. Kako so si sledile Lunine mene po mrku?

(**A**) Mlaj, prvi krajec, ščip.
(**B**) Zadnji krajec, mlaj, prvi krajec.
(**C**) Prvi krajec, ščip, zadnji krajec.
(**D**) Zadnji krajec, ščip, prvi krajec.

A2. Kako si po navideznem siju na nebu od najsvetlejšega do najšibkejšega sledijo našteta nebesna telesa?

(**A**) Sonce, Luna, Venera, Severnica.
(**B**) Sonce, Luna, Severnica, Venera.
(**C**) Sonce, Severnica, Luna, Venera.
(**D**) Venera, Severnica, Luna, Sonce.

A3. Katera izjava je pravilna?

(**A**) Letni časi so posledica spreminjanja oddaljenosti Zemlje od Sonca med letom.

(**B**) Letni časi so posledica vrtenja Zemlje.

(**C**) Letni časi so posledica tega, da ima Zemlja eliptično orbito okoli Sonca.

(**D**) Letni časi na Zemlji so posledica nagnjenosti Zemljine vrtilne osi glede na ravnino ekliptike.

A4. Svetlobno leto je

(**A**) čas, v katerem pride svetloba od Sonca do nas;

(**B**) čas, v katerem pride Zemlja enkrat okoli Sonca;

(**C**) razdalja, ki jo svetloba prepotuje v enem letu;

(**D**) razdalja do najbližje zvezde.

A5. Koliko lun ima Merkur?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3

A6. Kaj je na sliki desno?

(**A**) Površje Venere.

(**B**) Površje Merkurja.

(**C**) Površje Marsa.

(**D**) Površje Jupitrove lune Evrope.

A7. Katera izjava drži?

(**A**) Pluton je planet. (**B**) Pluton je mali planet.

(**C**) Pluton je planetoid. (**D**) Pluton je pritlikavi planet.

A8. Drugi izraz za utrinek je

(**A**) meteorit; (**B**) meteor; (**C**) meteoroid; (**D**) komet.

A9. Osončju najbližja zvezda Proksima Kentavra je oddaljena približno

(**A**) 4,2 milijona kilometrov; (**B**) 4,2 milijarde kilometrov;

(**C**) 420 milijard kilometrov; (**D**) 4,2 svetlobnega leta.

A10. Po današnjih ocenah se je veliki pok zgodil pred približno

(**A**) 13,8 milijardami let; (**B**) 1,38 milijarde let;

(**C**) 138 milijoni let; (**D**) 13,8 milijoni let.

B1. Z vrtljivo zvezdno karto odgovori na vprašanja.

A Kdaj vzide zvezda Prokijon 10. decembra?

B Kdaj zaide zvezda Kastor 5. februarja?

C Kdaj je zvezda Mizar 1. januarja najvišje na nebu?

D V katerem ozvezdju je Sonce 11. novembra?

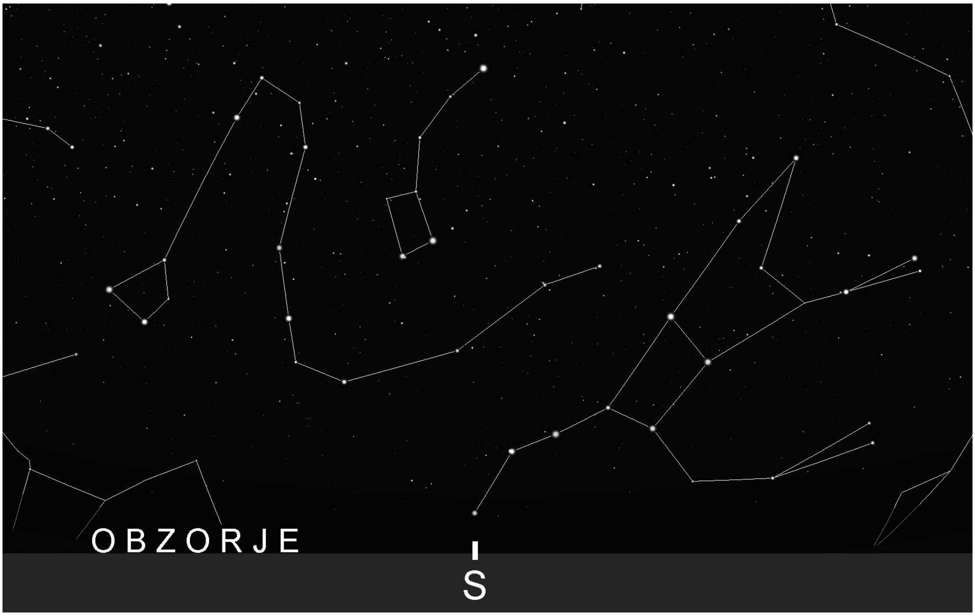
E Kdaj zaide Sonce 11. januarja?.

F Kdaj se 1. marca konča astronomska noč?

B2. Naštej štiri ozvezdja, ki v naših krajih nikoli ne zaidejo.

B3. Na severnem polu, ko je tam poletje, palico zapičimo navpično v vodoravna tla. Kolikšen kot na tleh opiše senca palice, ki jo meče zaradi Sonca, v štirih urah?

B4. Zvezdana, ki živi v Sloveniji, 1. januarja pogleda skozi okno in nad severnim obzorjem vidi zvezde, kot to prikazuje slika. Koliko je takrat kazala njena ura? No, malo smo ti pomagali in nekatere zvezde povezali v znana ozvezdja. Označili smo tudi severno točko obzorja S. Pomagaj si še z vrtljivo zvezdno karto.



B5. Luna je od Zemlje v povprečju oddaljena 385000000 m. Izračunaj, koliko časa potuje svetloba od Lune do Zemlje? Hitrost svetlobe je 300000 km/s.

8. razred

A1. 28. septembra letos je bil tudi iz naših krajev viden popolni Lunin mrk. Kako so si sledile Lunine mene po mrku?

(**A**) Mlaj, prvi krajec, ščip. (**B**) Zadnji krajec, mlaj, prvi krajec.

(**C**) Prvi krajec, ščip, zadnji krajec. (**D**) Zadnji krajec, ščip, prvi krajec.

A2. Kako si po navideznem siju na nebu od najsvetlejšega do najšibkejšega sledijo našteta nebesna telesa?

(**A**) Sonce, Sirij, Severnica, Neptun. (**B**) Sonce, Severnica, Sirij, Neptun.

(**C**) Sonce, Severnica, Neptun, Sirij. (**D**) Neptun, Severnica, Sirij, Sonce.

A3. Katera izjava je pravilna?

(**A**) Letni časi so posledica spreminjanja oddaljenosti Zemlje od Sonca med letom.

(**B**) Letni časi so posledica vrtenja Zemlje.

(**C**) Letni časi so posledica tega, da ima Zemlja eliptično orbito okoli Sonca.

(**D**) Letni časi na Zemlji so posledica nagnjenosti Zemljine vrtilne osi glede na ravnino ekliptike.

A4. Svetlobno leto je

(**A**) čas, v katerem pride svetloba od Sonca do nas;

(**B**) čas, v katerem pride Zemlja enkrat okoli Sonca;

(**C**) razdalja, ki jo svetloba prepotuje v enem letu;

(**D**) razdalja do najbližje zvezde.

A5. V katerem območju je največ asteroidov?

(**A**) Med Marsovo in Jupitrovo tirnico.

(**B**) Med Zemljino in Marsovo tirnico.

(**C**) Med Merkurjevo in Venerino tirnico.

(**D**) Med Jupitrovo in Saturnovo tirnico.

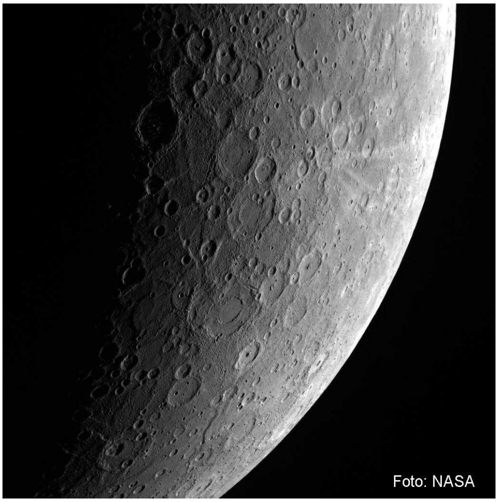
A6. Kaj je na sliki desno?

(**A**) Površje Venere.

(**B**) Površje Merkurja.

(**C**) Površje Marsa.

(**D**) Površje Jupitrove lune Evrope.



A7. Katera izjava drži?

(**A**) Pluton je planet.

(**B**) Pluton je mali planet.

(**C**) Pluton je planetoid.

(**D**) Pluton je pritlikavi planet.

A8. Drugi izraz za utrinek je

(**A**) meteorit;

(**B**) meteoroid;

(**C**) meteor;

(**D**) komet.

A9. Osončju najbližja zvezda Proksima Kentavra je oddaljena približno

(**A**) 4,2 milijona kilometrov;

(**B**) 4,2 milijarde kilometrov;

(**C**) 420 milijard kilometrov;

(**D**) 4,2 svetlobnega leta.

A10. Po današnjih ocenah se je veliki pok zgodil pred približno

(**A**) 13,8 milijardami let;

(**B**) 1,38 milijarde let;

(**C**) 138 milijoni let;

(**D**) 13,8 milijoni let.

B1. Z vrtljivo zvezdno karto odgovori na vprašanja.

A Kdaj vzide zvezda Prokijon 10. decembra?

B Kdaj zaide zvezda Kastor 5. februarja?

C Kdaj je zvezda Mizar 1. januarja najvišje na nebu?

D V katerem ozvezdju je Sonce 11. novembra?

E Kdaj zaide Sonce 11. januarja?.

F Kdaj se 1. marca konča astronomska noč?

B2. Naštej štiri ozvezdja, ki v naših krajih nikoli ne zaidejo.

B3. Jupiter bo 8. marca 2016 v opoziciji s Soncem. Izračunaj, koliko časa takrat potuje svetloba od Jupitra do Zemlje. Zemlja je od Sonca oddaljena 1 astronomsko enoto (a. e.), Jupiter je od Sonca oddaljen 5,2 a. e., 1 a.e. = 150 milijonov kilometrov. Hitrost svetlobe c = 300000 km/s.

B4. Na fotografiji, ki je bila posneta 7. 11. 2015, so Luna, Venera in Mars.

a) Na fotografiji označi Luno, Venero in Mars.

b) Na fotografiji izmeri razdaljo med Venero in Marsom in izračunaj kotno oddaljenost med Venero in Marsom na nebu. Pomoč: Zorni kot Lune na nebu je 0,5°.

B5. Na severnem polu, ko je tam poletje, palico zapičimo navpično v vodoravna tla. V kolikšnem času opiše senca palice, ki jo na tla meče zaradi Sonca, kot 1°?

9. razred

A1. 28. septembra letos je bil tudi iz naših krajev viden popolni Lunin mrk. Kako so si sledile Lunine mene po mrku?

(**A**) Mlaj, prvi krajec, ščip. (**B**) Zadnji krajec, mlaj, prvi krajec.
(**C**) Prvi krajec, ščip, zadnji krajec. (**D**) Zadnji krajec, ščip, prvi krajec.

A2. Kako si po navideznem siju na nebu od najšibkejšega do najsvetlejšega sledijo našteta nebesna telesa?

(**A**) Neptun, Sirij, Severnica, Sonce. (**B**) Sonce, Sirij, Severnica, Neptun.
(**C**) Sonce, Severnica, Neptun, Sirij. (**D**) Neptun, Severnica, Sirij, Sonce.

A3. Katera izjava je pravilna?

(**A**) Letni časi so posledica spreminjanja oddaljenosti Zemlje od Sonca med letom.

(**B**) Letni časi so posledica vrtenja Zemlje.

(**C**) Letni časi na Zemlji so posledica nagnjenosti Zemljine vrtilne osi glede na ravnino ekliptike.

(**D**) Letni časi so posledica tega, da ima Zemlja eliptično orbito okoli Sonca.

A4. Svetlobno leto je

(**A**) razdalja, ki jo svetloba prepotuje v enem letu;

(**B**) čas, v katerem pride svetloba od Sonca do nas;

(**C**) čas, v katerem pride Zemlja enkrat okoli Sonca;

(**D**) razdalja do najbližje zvezde.

A5. Koliko zvezd je v Osončju?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) Zelo veliko.

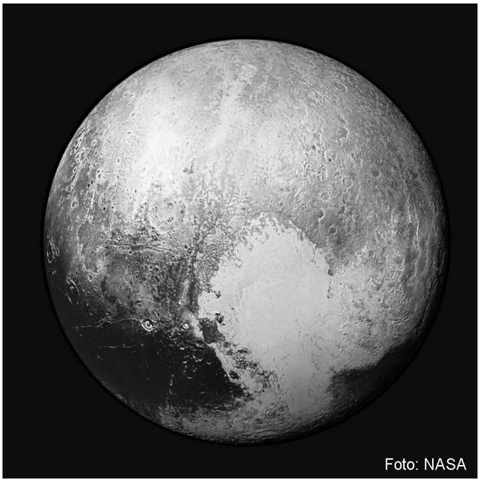
A6. Kaj je na sliki desno?

(**A**) Venera.

(**B**) Merkur.

(**C**) Pluton.

(**D**) Jupitrova luna Evropa.



A7. Drugi izraz za utrinek je

(**A**) meteorit;

(**B**) meteor;

(**C**) meteoroid;

(**D**) komet.

A8. Kaj imajo skupnega Jupiter, Saturn, Uran in Neptun?

(**A**) Enako število lun.

(**B**) Astronomi so jih odkrili s teleskopi.

(**C**) Vsi imajo prstane oz. kolobarje.

(**D**) Enak nagib vrtilne osi glede na njihovo tirnico okoli Sonca.

A9. Osončju najbližja zvezda Proksima Kentavra je oddaljena približno

(**A**) 4,2 milijona kilometrov; (**B**) 4,2 milijarde kilometrov;

(**C**) 420 milijard kilometrov; (**D**) 4,2 svetlobnega leta.

A10. Po današnjih ocenah se je veliki pok zgodil pred približno

(**A**) 13,8 milijardami let; (**B**) 1,38 milijarde let;

(**C**) 138 milijoni let; (**D**) 13,8 milijoni let.

B1. Z vrtljivo zvezdno karto odgovori na vprašanja.

A Kdaj vzide zvezda Prokijon 10. decembra?

B Kdaj zaide zvezda Kastor 5. februarja?

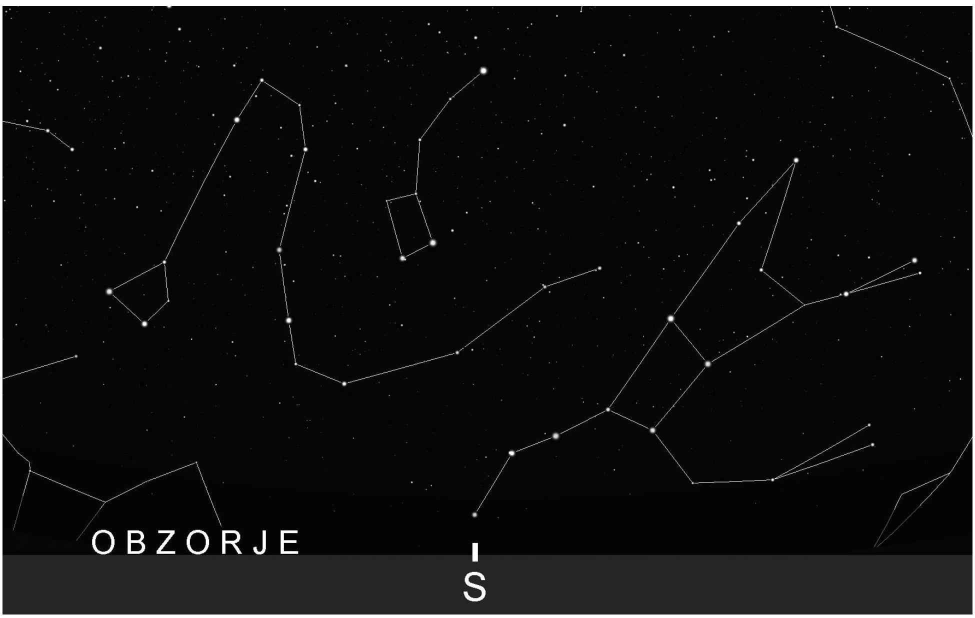
C Kdaj je zvezda Mizar 1. januarja najvišje na nebu?

D V katerem ozvezdju je Sonce 11. novembra?

E Kdaj zaide Sonce 11. januarja?.

F Kdaj se 1. marca konča astronomska noč?

B2. Zvezdana, ki živi v Sloveniji, 1. januarja pogleda skozi okno in nad severnim obzorjem vidi zvezde, kot to prikazuje slika. Koliko je takrat kazala njena ura? No, malo smo ti pomagali in nekatere zvezde povezali v znana ozvezdja. Označili smo tudi severno točko obzorja S.



B3. Naštej štiri ozvezdja, ki so vidna pri nas na nočnem nebu, a so v celoti na južni nebesni polobli.

B4. V kraju na ekvatorju palico zapičimo navpično v vodoravna tla. Kolikšen kot opiše senca palice, ki jo meče zaradi Sonca, na ravnini od vzhoda Sonca do lokalnega poldneva na dan spomladanskega enakonočja?

B5. 10. decembra ob 10. uri po lokalnem času letalo poleti iz kraja na ekvatorju z geografsko dolžino 120° vzhodno in leti proti zahodu ves čas nad ekvatorjem s konstantno hitrostjo 1000 km/h glede na tla. Letalo pristane v kraju na ekvatorju z geografsko dolžino 60° vzhodno. Izračunaj, koliko je ura (lokalni čas) v tem kraju v trenutku pristanka letala. Rezultat zaokroži na minute. Polmer Zemlje je 6400 km. Višina letenja letala nad tlemi je zanemarljivo majhna v primerjavi s polmerom Zemlje.

Srednje šole

A1. Zvezdana opazuje krater na Luni, ki se nahaja na terminatorju – meji med osvetljenim in neosvetljenim delom Lunine ploskvice. Kaj bi videl opazovalec, ki bi bil takrat v tem kraterju? Luna je v prvem krajcu.

(**A**) Zahajanje Sonca. (**B**) Vzhajanje Sonca. (**C**) Lunin mrk. (**D**) Sončev mrk.

A2. Višina neke svetle zvezde se v Ljubljani spreminja približno med $45°$ in $47°$. Katera zvezda je to?

(**A**) Severnica. (**B**) Sirij. (**C**) Vega. (**D**) Arktur.

A3. Katera izjava je pravilna?

(**A**) Letni časi so posledica spreminjanja oddaljenosti Zemlje od Sonca med letom.

(**B**) Letni časi so posledica vrtenja Zemlje.

(**C**) Letni časi so posledica tega, da ima Zemlja eliptično orbito okoli Sonca.

(**D**) Letni časi na Zemlji so posledica nagnjenosti Zemljine vrtilne osi glede na ravnino ekliptike.

A4. 24. decembra 2007 je bil Mars v opoziciji s Soncem. Isti dan ga je okultirala Luna. Katera Lunina mena je bila takrat?

(**A**) Mlaj. (**B**) Prvi krajec. (**C**) Ščip. (**D**) Zadnji krajec.

A5. Na robu Sončeve ploskvice je vidna protuberanca, ki se dviga 1 kotno minuto nad ploskvico. Kolikšna je višina protuberance?

(**A**) 500000 km (**B**) 50000 km (**C**) 5000 km (**D**) 500 km

A6. Kateri od naštetih Messierjevih objektov ni galaksija?

(**A**) M 42 (**B**) M 31 (**C**) M 32 (**D**) M 81

A7. Pluton je

(**A**) mali planet; (**B**) asteroid; (**C**) planetoid; (**D**) pritlikavi planet.

A8. Zvezde v kroglastih kopicah v Galaksiji so tipično

(**A**) mlajše kot v razsutih kopicah; (**B**) enako stare kot v razsutih kopicah;

(**C**) starejše kot v razsutih kopicah. (**D**) Tega sploh ni mogoče ugotoviti.

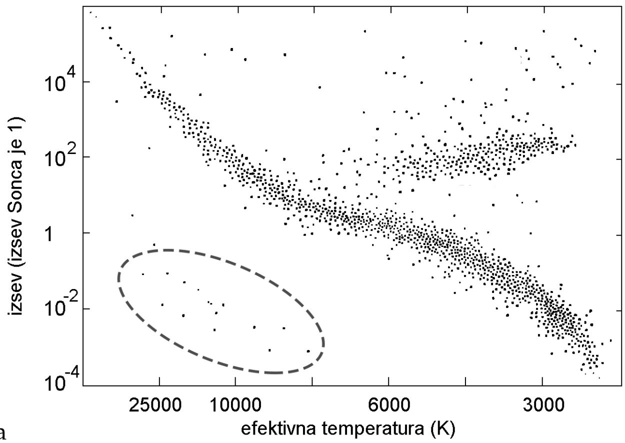
A9. Na Hertzsprung-Russellovem diagramu (shematični prikaz desno) je s črtkano elipso označeno neko območje. Katere zvezde pripadajo temu območju?

(**A**) Rdeče orjakinje.

(**B**) Rjave pritlikavke.

(**C**) Rdeče nadorjakinje.

(**D**) Bele pritlikavke.



A10. Velik rdeči premik v spektrih zelo oddaljenih galaksij je posledica

(**A**) Dopplerjevega pojava zaradi njihovega gibanja po prostoru;

(**B**) širjenja vesolja;

(**C**) prahu v prostoru med galaksijami;

(**D**) drugačne kemične sestave.

B1. Z vrtljivo zvezdno karto odgovori na vprašanja.

A Kdaj je zvezda Sirij 1. februarja najvišje na nebu?

B Neka zvezda ima deklinacijo -20° in rektascenzijo 2h. Kdaj zaide ta zvezda 1. marca?

C Kdaj zaide Sonce 21. januarja?

D Kdaj je zvezda Fomalhaut 10. decembra v spodnji kulminaciji?

B2. Na fotografiji je vzhod polne Lune z opazovalci v ospredju. Oceni oddaljenost opazovalcev od fotografa, če so ti v povprečju visoki 175 cm. Računaj s podatki v nalogi in znanim zornim kotom Lunine ploskvice na nebu. Oceni napako meritve.

B3. Oceni, za koliko je povprečna hitrost Lune, s katero se giblje okoli Sonca, večja od hitrosti, s katero se Zemlja giblje okoli Sonca. Predpostavi, da se Zemlja okoli Sonca giblje po krožni orbiti s polmerom $r = 1,5 \cdot 10^{11}$ m in da se oddaljenost $d = 3,85 \cdot 10^8$ m med Zemljo in Luno ne spreminja. Pomagaš si lahko z znanimi vrednostmi za obhodne čase Zemlje okoli Sonca in Lune okoli Zemlje.

B4. V galaksiji Veliki Magellanov oblak (VMO) je 10^{10} zvezd. Navidezna magnituda VMO (prispevek svetlobe vseh zvezd v VMO) na nebu je +1m. Predpostavi, da so vse zvezde v VMO enake, se ne prekrivajo in so od nas enako oddaljene. Izračunaj navidezno magnitudo posamezne zvezde v VMO.

Rešitve 15. tekmovanja v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol – regijsko tekmovanje

Naloge za 1. letnik

A1. Izračunamo absolutne vrednosti $|-3|+|1-2|-||4|-2| = 3+|1-2|-|4-2| = 3+1-2 = 2$.

A2. Kvadriramo dvočlenik $(-m+n)^2 = m^2 - 2mn + n^2 = m^2 + n^2 - 2mn$ in vstavimo vrednosti danih izrazov $68 - 2 \cdot 16 = 36$.

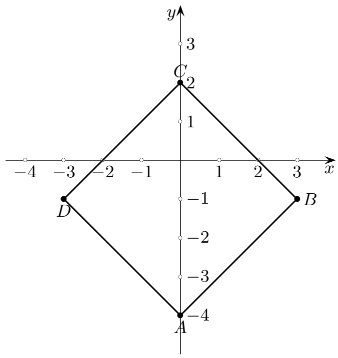
A3. Poenostavimo izraz in zapišimo obratno vrednost $\left(\frac{3}{x} + \frac{2}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{15+2x}{5x}\right)^{-1} = \frac{5x}{2x+15}$.

A4. Zapišemo sistem enačb npr.: $x + y = 11$,$y + z = 12$ in $x + z = 13$. Odštejemo prvo in tretjo enačbo, dobimo npr.: $z - y = 2$ in ji prištejemo drugo enačbo. Dobimo $z = 7$. Tretje število je torej 7.

B1. **a)** Poiščimo največje število šopkov, ki jih Metka lahko naredi. Najprej razcepimo števila 48, 72 in 32 na prafaktorje: $48 = 2^4 \cdot 3$, $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $32 = 2^5$. Ugotovimo, da je največji skupni delitelj $D(48, 72, 32) = 8$ kar pomeni: 8 šopkov po 6 gerber, 9 tulipanov in 4 vejice zelenja. Za izdelavo šopkov porabimo $8 \cdot 52$ cm $= 416$ cm $= 4{,}16$ m traku.

b) Cena enega šopka je $6 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 4 \cdot 0{,}50 = 38$ evrov.

B2. Narišemo ustrezno skico.



Ugotovimo, da je dolžina diagonale 6 enot. Izračunamo ali odčitamo ordinato razpolovišča diagonal $y_1 = \frac{-4+2}{2} = -1$. Abscisi iskanih točk sta -3 in 3, ker je $\frac{d}{2} = 3$. Iskani točki sta $D(-3, -1)$ in $B(3, -1)$. Stranico kvadrata izračunamo po Pitagorovem izreku $a = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Izračunamo še ploščino kvadrata $S = a^2 = \sqrt{18}^2 = 18$.

B3. Naj bo prvo število npr.: x, drugo pa y. Upoštevamo ustrezne odstotke obeh števil v obeh enačbah in zapišemo sistem $0{,}4x - 0{,}25y = 41$ in $1{,}3x + 0{,}8y = 230$. Prvo enačbo pomnožimo s 4, dobimo $1{,}6x - y = 164$. Izrazimo npr.: $y = 1{,}6x - 164$. Vstavimo v drugo enačbo $1{,}3x+0{,}8(1{,}6x-164) = 230$. Enačbo uredimo $1{,}3x+1{,}28x-131{,}2 = 230$, rešimo $2{,}58x = 361{,}2$. Rešitev je $x = 140$. Izračunamo še $y = 1{,}6 \cdot 140 - 164 = 60$. Iskani števila sta torej 140 in 60.

B4. Izraz $(x^3 - 8)(x - 2)^{-1}$ zapišemo v obliki $\frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{x-2}$, okrajšamo in dobimo $x^2 + 2x + 4$. Tako je prvi ulomek $\frac{(x^3-8)(x-2)^{-1}-7}{1-x^{-2}} = \frac{x^2+2x+4-7}{1-\frac{1}{x^2}}$. Uredimo $\frac{x^2+2x-3}{\frac{x^2-1}{x^2}} = \frac{(x+3)(x-1)x^2}{(x+1)(x-1)}$, okrajšamo in dobimo $\frac{(x+3)x^2}{x+1}$. Ulomka odštejemo $\frac{(x+3)x^2}{x+1} - \frac{x^3}{x+1}$ in dobimo $\frac{x^3+3x^2-x^3}{x+1} = \frac{3x^2}{x+1}$.

Naloge za 2. letnik

A1. Iz danega razmerja in uporabe zveze za zunanje kote $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$ zapišemo enačbo npr. $2t + 3t + 4t = 360°$, izračunamo $t = 40°$. Izračunamo velikosti zunanjih kotov $\alpha' = 80°$, $\beta' = 120°$ in $\gamma' = 160°$. Določimo ustrezne notranje kote $100°$, $60°$ in $20°$. Razmerje notranjih kotov poenostavimo in dobimo $5 : 3 : 1$. Pravilen odgovor je B.

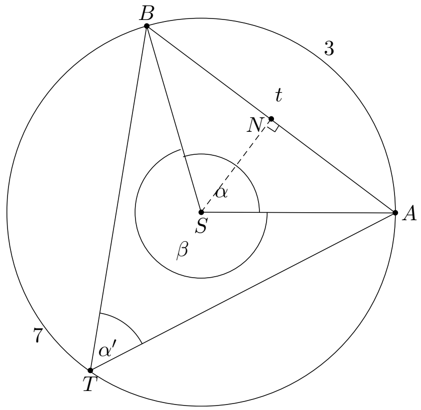
A2. Izračunamo $\sqrt{4} \cdot 3^3x^{-6}y^{12}(9-5)y^{-4} : (x^{-15}y^{20})$, poenostavimo $2^3 \cdot 3^3x^9y^{-12}$, kar je $(6x^3y^{-4})^3$.

A3. Poenostavimo $a^{-3} \cdot a^{\frac{16}{3}} : a^{\frac{4}{3}} = a^{-3} \cdot a^4 = a$.

A4. Premico zapišemo v odsekovni obliki $\frac{x}{3} + \frac{y}{-1} = 1$ in odčitamo koordinati $(3, 0)$ in $(0, -1)$. Ali pa vstavimo $x = 0$ in izračunamo $3y = -3$. Sledi $y = -1$. Vstavimo $y = 0$ ter izračunamo $-x = -3$, torej je $x = 3$.

B1. Premico zapišemo v odsekovni obliki $\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1$. Za neznano kordinato točke A upoštevamo, da je $x = 3$, zapišemo $\frac{3}{-4} + \frac{y}{3} = 1$, poenostavimo $9 - 4y = -12$ in izračunamo $y = \frac{21}{4}$. Zapišemo točko $A\left(3, \frac{21}{4}\right)$. Razdaljo med točkama A in B izračunamo po formuli $d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Vstavimo podatke $\sqrt{(3-(-4))^2 + \left(\frac{21}{4} - 0\right)^2} = \sqrt{49 + \frac{21^2}{16}} = \frac{35}{4}$.

B2. Upoštevamo, da sta središčna kota $\alpha = 3t$ in $\beta = 7t$ ter $\alpha + \beta = 360°$. Izračunamo $t = 36°$. Izračunamo $\alpha = 108°$. Upoštevamo, da je obodni kot dvakrat manjši od središčnega in izračunamo obodni kot $\alpha' = 54°$. Dolžino tetive izračunamo s kotno funkcijo $\sin 54° = \frac{\frac{t}{2}}{r}$, izrazimo $t = 10 \cdot \sin 54° \doteq 8{,}1$ cm.



B3. Naj bo npr. x število izvodov in y stroški za naklado. Ker je zveza linearna, sta točki $A(3\,000,\ 7\,500)$ in $B(7\,000,\ 9\,500)$ na premici, ki predstavlja iskano funkcijo. Izračunamo smerni koeficient premice $k = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{9\,500 - 7\,500}{7\,000 - 3\,000} = \frac{1}{2}$. Uporabimo npr. $y - y_0 = k(x - x_0)$ in dobimo enačbo premice $y = \frac{1}{2}x + 6\,000$. Linearna funkcija, ki opisuje stroške izdaje knjige, je torej $f(x) = \frac{1}{2}x + 6\,000$. Izračunamo stroške za $1\,000$ izvodov $f(1000) = \frac{1}{2} \cdot 1\,000 + 6\,000 = 6\,500$ evrov, podobno dobimo stroške za $10\,000$ izvodov: $f(10000) = \frac{1}{2} \cdot 10\,000 + 6\,000 = 11\,000$ evrov.

B4. Izpostavimo skupni faktor in razstavimo prvi števec $x^{n+3} - x^{n+1} = x^{n+1}\left(x^2 - 1\right) = x^{n+1}(x+1)(x-1)$. Izpostavimo skupni faktor v prvem imenovalcu $x^{n+2} - x^{n+1} = x^{n+1}(x-1)$. Poenostavimo drugi imenovalec $x - 1 - 2x^{-1} = \frac{x^2 - x - 2}{x} = \frac{(x-2)(x+1)}{x}$. To upoštevamo v danem izrazu in dobimo $\frac{x^{n+1}(x+1)(x-1)}{x^{n+1}(x-1)} \cdot \frac{(x-2) \cdot x}{(x-2)(x+1)}$, kar okrajšamo. Rezultat je x.

Naloge za 3. letnik

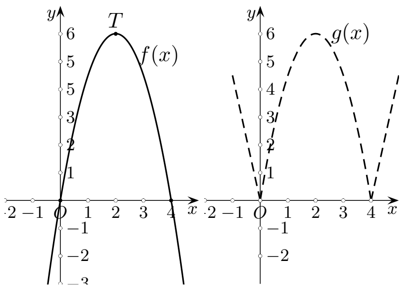
A1. Zapišemo neenačbo $(x+3)(x-1) - (2x+1) < 0$. Odpravimo oklepaje in poenostavimo neenačbo $x^2 - 4 < 0$. Izračunamo $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Upoštevamo predznake in odčitamo rešitev. Rešitev je interval $-2 < x < 2$, zato je pravilen odgovor D.

A2. Ploščino pravilnega šestkotnika izračunamo po formuli $S = 6 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ in enačimo z $96\sqrt{3}$ cm^2. Iz enakosti izračunamo $a = 8$ cm. Obseg pravilnega šestkotnika meri 48 cm, zato je pravilen odgovor A.

A3. Preoblikujemo enačbo in dobimo $2^{x^2 - \frac{5}{7}x} = 2^{\frac{2}{7}}$. Enačimo eksponenta $x^2 - \frac{5}{7}x = \frac{2}{7}$, enačbo uredimo $x^2 - \frac{5}{7}x - \frac{2}{7} = 0$ in iz enačbe odčitamo, da je po Vietovih formulah produkt rešitev enak $-\frac{2}{7}$, zato je pravilen odgovor A.

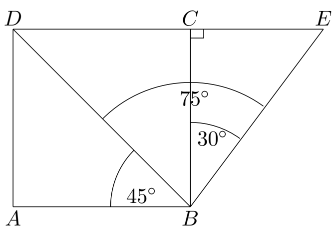
A4. Izračunamo $\log_{\frac{1}{3}}\left(9^3\right) = 3 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 9 = 3 \cdot (-2) = -6$, zato je pravilen odgovor B.

B1. Odpravimo oklepaj in zapišemo predpis kvadratne funkcije v splošni obliki $f(x) = \frac{-3}{2}x^2 + 6x$. Iz splošne enačbe izpostavimo $\frac{-3}{2}x$ in dobimo predpis kvadratne funkcije v razcepni obliki $f(x) = \frac{-3}{2}x(x-4)$. Ničli kvadratne funkcije sta $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, teme kvadratne funkcije je $T(2, 6)$. Narišemo grafa funkcij f in g.



B2. Upoštevamo pravila za računanje z logaritmi in dani izraz zapišemo v obliki $\log_3 \frac{3xy^3 \cdot \sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{9y^{-1}}} = \log_3 3 + \log_3 x + 3\log_3 y + \frac{1}{4}\log_3 x - \left(\frac{1}{6}\log_3 9 - \frac{1}{6}\log_3 y\right)$ ter izraz poenostavimo. Dobimo rezultat $\frac{2}{3} + \frac{5}{4}\log_3 x + \frac{19}{6}\log_3 y$.

B3. Kot CBE meri $30°$.Uporabimo kotno funkcijo $\sin 30° = \frac{|CE|}{|BE|}$. Iz te povezave lahko izračunamo $|CE| = |BE| \cdot \sin 30° = 6$ cm. Uporabimo kotno funkcijo $\cos 30° = \frac{|BC|}{|BE|}$. Iz te povezave izračunamo dolžino stranice kvadrata $ABCD$: $|BC| = |BE| \cdot \cos 30° = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm. Sedaj lahko izračunamo ploščino trikotnika DBE: $S = \frac{a \cdot v}{2} = \frac{(|DC|+|CE|)\cdot|BC|}{2} = \frac{\left(6\sqrt{3}+6\right)\cdot 6\sqrt{3}}{2} = \frac{108+36\sqrt{3}}{2} = \left(54 + 18\sqrt{3}\right)$ cm^2.



B4. Kvadriramo dvočlenik $y = x^2 - 4x + 4 + 3 + x^2 - 4x$ in poenostavimo enačbo krivulje. Dobimo $y = 2x^2 - 8x + 7$. Ugotovimo, da je krivulja parabola in da je enačba simetrijske osi parabole $x = p$. Zapišemo ali uporabimo, da je $a = 2$, $b = -8$. Izračunamo $p = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{4} = 2$ in zapišemo enačbo simetrijske osi $x = 2$. Ali pa enačbo parabole pretvorimo v temensko obliko $y = 2\left(x^2 - 4x + \frac{7}{2}\right) = 2\left((x-2)^2 - 4 + \frac{7}{2}\right) = 2(x-2)^2 - 1$. Odčitamo, da je $p = 2$ in zapišemo enačbo simetrijske osi $x = 2$.

Naloge za 4. letnik

A1. Uporabimo zvezo, $\binom{n}{2} = 136$ ali $C_n^2 = 136$. Zapišemo enakost npr.: $\frac{n\cdot(n-1)}{2} = 136$. Zapišemo enačbo $n^2 - n - 272 = 0$. Rešitev enačbe sta $n_1 = 17$ in $n_2 = -16$, ki pa ne ustreza.

A2. Ugotovimo, da racionalna funkcija f nima polov, torej je definirana za vsa realna števila.

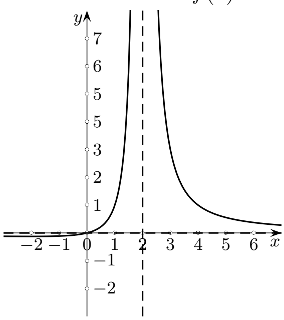
A3. Razstavimo $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. Polinom ima tri realne ničle: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ in $x_3 = 5$.

A4. Upoštevamo, da je vsota prvega in sedmega člena $2a_1+6d=7$. Tudi vsota tretjega in petega člena je $2a_1+6d$, kar je tud 7

B1. Mesečni prihranki varčevanja so členi aritmetičnega zaporedja s prvim členom $a_1=50$, diferenca je $d=10$ in vsoto prvih n členov zaporedja $S_n=2\,900$. Uporabimo obrazec za izračun vsote prvih n členov aritmetičnega zaporedja $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$. Vstavimo podatke in dobimo enačbo $\frac{n}{2}(100+(n-1)\cdot 10)=2900$. Poenostavimo enačbo ter dobimo kvadratno enačbo $n^2+9n-580=0$. Rešitvi te enačbe sta $n_1=-29$ in $n_2=20$. Matija bo varčeval 20 mesecev.

B2. **a)** Upoštevamo, da mora veljati $f(2)=1$. Zapišemo enačbo $1=\frac{2}{-4+a}$, odpravimo ulomek $-4+a=2$ in iz tega izračunamo $a=6$.

b) Dobljena funkcija je $f(x)=\frac{x}{x^2-4x+4}$. Določimo ničlo $x=0$, pol druge stopnje $x=2$, začetno vrednost $f(0)=0$, asimptota $y=0$ ter skiciramo graf racionalne funkcije.



a) Kvadriramo prvi dvočlenik in dobimo $4\sin^2 x+4\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x$. Kvadriramo drugi dvočlenik ter dobimo $\sin^2 x-4\sin x\cdot\cos x+4\cos^2 x$. Ko skrčimo izraz, dobimo $5\sin^2 x+5\cos^2 x$. Izpostavimo 5 in dobimo $5\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$. Upoštevamo povezavo $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Rešitev je 5.

b) I. način
V izrazu $\frac{\sin x}{2\sin x-3\cos x}$ delimo števec in imenovalec s $\cos x$. Dani izraz se spremeni v $\frac{\tan x}{2\tan x-3}$. Vstavimo $\tan x=\frac{1}{2}$. Dobimo $\frac{\frac{1}{2}}{2\cdot\frac{1}{2}-3}$. Rešitev je $-\frac{1}{4}$.
II. način
Z upoštevanjem $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ izračunamo $\cos x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ in $\sin x=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ (obakrat isti predznak). To vstavimo v $(2\sin x+\cos x)^2+(\sin x-2\cos x)^2$ in dobimo rešitev $-\frac{1}{4}$.

B4. I. način
S Hornerjevim algoritmom poiščemo ostanka pri deljenju polinoma p z linearnima polinomoma $x-3$ in $x+1$ in ju enačimo z nič npr.: $9a+3b-108=0$ in $2a+b-28=0$. Rešimo sistem enačb s poljubno metodo in dobimo $a=8$ in $b=12$. Količnik pri deljenju po vstavitvi parametrov a in b je $k(x)=x^3-4x$. Količnik razstavimo $x(x^2-4)=x(x-2)(x+2)$ in dobimo ostale ničle $x_1=0,\ x_2=2,\ x_3=-2$. Iz delitelja zapišemo dve ničli polinoma $x_4=3$ in $x_5=-1$.

II. način
Polinom p delimo s polinomom $q(x)=(x-3)(x+1)=x^2-2x-3$. Pri polinomu p izpostavimo x dobimo $p(x)=x(x^4-2x^3-7x^2+ax+b)$. Upoštevamo, da je polinom p deljiv s polinomom q, potem je je tudi $x^4-2x^3-7x^2+ax+b$ deljiv s polinomom q. Po dveh korakih deljenja $x^4-2x^3-7x^2+ax+b$ s $q(x)=x^2-2x-3$ dobimo količnik $k(x)=x^2-4$ in ostanek $r(x)=(a-8)x+(b-12)$. Upoštevamo, da mora biti ostanek enak 0. To je možno le v primeru, da velja $a=8$ in $b=12$. Polinom p lahko zapišemo v obliki $p(x)=x\cdot q(x)\cdot k(x)$. Iz izpostavljenega x-a dobimo ničlo $x_1=0$, iz $q(x)=(x-3)(x+1)$ dobimo $x_2=-1$ in $x_3=3$, iz $k(x)=x^2-4$ pa dobimo ničli $x_4=2$ in $x_5=-2$.

III. način
Po treh korakih deljenja dobimo količnik $k(x) = x^3 - 4x + a - 8$ in ostanek $r(x) = (2a + b - 4)x + 3a - 24$. Upoštevamo, da je zaradi deljivosti polinoma p s polinomom q ostanek enak 0. Tako je $2a + b - 4 = 0$ in $3a - 24 = 0$. Izračunamo $a = 8$ in $b = 12$. Vrednosti za a in b vstavimo v količnik in dobimo $k(x) = x^3 - 4x$. Količnik razstavimo $x(x-2)(x+2)$. Zapišemo ničle količnika in delitelja.

Rešitve 15. tekmovanja v znanju matematike za dijake poklicnih šol – področno tekmovanje

Naloge za vse letnike srednje šole

A1. V enačbi neznano število označimo z x: $9210 - 9124 = 210 - x$. Linearna enačba ima rešitev $x = -124$.

A2. Izračunamo vrednosti izrazov:

a. $2^{-1} = 0{,}5$
b. $0{,}5^2 = 0{,}25$
c. $0^4 = 0$
d. $1^5 = 1$
e. $\sqrt[5]{-32} = -2$

Razvrstimo jih po velikosti od najmanjšega do največjega in dobimo razvrstitev $ecbad$.

A3. Višina okna je $1{,}3$ m. Po dvakrat odšteti širini okvirja je steklo znotraj okvirja visoko $1{,}1$ m, ker je $1{,}3\ \mathrm{m} - 2 \cdot 0{,}1\ \mathrm{m} = 1{,}1\ \mathrm{m}$.

A4. Otroci so kupili $\frac{1}{4}$ od $756 = 189$ vrtnic, moški pa $\frac{1}{2}$ od $756 = 378$ vrtnic. Od vseh 756 vrtnic jih je ostalo 189, ki so jih prodali v šopkih po tri. Vseh šopkov je $189 : 3 = 63$.

A5. Prostornina kocke $V = a^3 = (20\ \mathrm{cm})^3 = 8000\ \mathrm{cm}^3 = 8\ \mathrm{dm}^3$. Iz enačbe za gostoto snovi $\rho = \frac{m}{V}$ izrazimo in izračunamo maso $m = \rho V = 19{,}3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3} \cdot 8\ \mathrm{dm}^3 = 154{,}4\ \mathrm{kg} = 154400\ \mathrm{g}$. Ker je cena zlata za 1 g 30 EUR, je cena celotne kocke $154400 \cdot 30$ EUR $= 4632000$ EUR.

A6. Med vsemi 1545 kroglicami so 3 v celoti rdeče barve, 1497 pa delno rdeče barve. Ostalih 45 oz. $2{,}91\ \%$ je modrih kroglic.

A7. Kota $40°$ in kot x tvorita iztegnjeni kot, zato je $x = 180° - 40° = 140°$. Velja tudi $x + y = 180°$, zato je $y = 180° - x = 180° - 140° = 40°$. Razlika kotov je $x - y = 140° - 40° = 100°$.

A8. Za 50 l goriva pred pocenitvijo plačamo $50 \cdot 1{,}35$ EUR$= 67{,}50$ EUR. Po pocenitvi pa 3 EUR manj oz. $64{,}50$ EUR. Za 1 l goriva po pocenitvi odštejemo $64{,}50$ EUR$: 50 = 1{,}29$ EUR.

A9. Celotna ploščina vrta $S = 100\ \mathrm{m} \cdot 100\ \mathrm{m} = 10000\ \mathrm{m}^2$. Ploščina sadnega vrta $S_B = \frac{50\ \mathrm{m} \cdot 100\ \mathrm{m}}{2} = 2500\ \mathrm{m}^2$. Razlika med obema je ploščina travnatega dela vrta $S_A = 10000\ \mathrm{m}^2 - 2500\ \mathrm{m}^2 = 7500\ \mathrm{m}^2$.

A10. Tina M. in Lindsey V. sta skupaj dosegli 85 zmag. Vsak narisan simbol zmag $\diamondsuit$ predstavlja 5 zmag. Lindsey ima 7 simbolov zmag več kot Tina oz. $7 \cdot 5 = 35$ zmag več kot Tina.

B1. **A.** V ponedeljek so bolniku izmerili tlak 150 mmHg.

B. Najvišji tlak so mu izmerili v petek.

C. V torek in sredo sta tlaka enaka.

D. Povprečni tedenski tlak $\bar{p} = \frac{150+142+142+136+151+134+146}{7} = 143 \text{ mmHg}$.

E. V nedeljo so bolniku izmerili tlak 146 mmHg, kar je za $2{,}1\ \%$ višji tlak od povprečnega tlaka.

B2. Pri razdalji 120 km bo Leni podjetje:

- *Selivček* zaračunalo 20 EUR$+0{,}30 \cdot 120$ EUR$=56$ EUR.
- *Zdaj tu, zdaj tam* zaračunalo 50 EUR$+0{,}10 \cdot 120$ EUR$=62$ EUR.

Lena naj izbere podjetje *Selivček*.

Pri razdalji 170 km bo Leni podjetje:

- *Selivček* zaračunalo 20 EUR$+0{,}30 \cdot 170$ EUR$=71$ EUR.
- *Zdaj tu, zdaj tam* zaračunalo 50 EUR$+0{,}10 \cdot 170$ EUR$=67$ EUR.

Če bo Lena izbrala cenejše podjetje, bo privarčevala 4 EUR.

Pri razdalji 150 km bi za obe podjetji plačala isto. Zapišemo in rešimo enačbo $20+0{,}30 \cdot x = 50 + 0{,}10 \cdot x$. Enačba ima rešitev $x = 150 \text{ km}$.

B3. Dolžino traku toaletnega papirja 18 m delimo z dolžino enega lističa, ki je dolg 120 mm: $18 \text{ m} : 0{,}12 \text{ m} = 150$ lističev.
$5\ \%$ od dolžine enega lističa, dolgega 120 mm je 6 mm. Lističi so lahko dolgi od 114 mm do 126 mm.
$5\ \%$ od širine enega lističa 93 mm je $4{,}65 \text{ mm}$. Lističi so lahko široki od $88{,}35 \text{ mm}$ do $97{,}65 \text{ mm}$.
Če vse lističe zložimo enega na drugega, dobimo višino $1 \text{ mm} \cdot 150 = 150 \text{ mm} = 15 \text{ cm}$.

B4. Ker se mora vrniti do nedelje, se mora odpraviti na pot najkasneje v četrtek.
Najnižja cena za povratno karto je 110 EUR, če odpotuje v četrtek in se vrne v nedeljo.
Najnižjo ceno plača za odhod v četrtek in za povratni let v nedeljo.
Za plačilo s kreditno kartico plača še dodatna $2\ \%$ ali $2{,}20$ EUR. Končno plačilo je $112{,}20$ EUR.
Letalo vzleti iz Londona ob 7.50, z 18 minutno zamudo pa ob 8.08. Let bo trajal 2 uri 15 min, torej do 10.23. Po lokalnem času bo letalo pristalo v Ljubljani ob 11.23.

Rešitve 15. tekmovanja v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol – državno tekmovanje

Naloge za 1. letnik

1. Označimo po vrsti z $x,\ y,\ z$ in u Markove mesečne prihranke. Iz razmerja mesečnih prihrankov $x:y:z:u=4:3:2:2$ sledijo zveze $x=4t,\ y=3t,\ z=2t,\ u=2t$. Podatek o končnem prihranku nam da še drugo enačbo $x+y+z+u+\frac{u}{2}=600$, oziroma $4t+3t+2t+2t+t=600$. Nato izračunamo $t=50$. Marko je prvi mesec privarčeval $x=4\cdot 50=200$ evrov.

2. Podatek $D(x,y)=24$ nam pove, da obstajata tuji si naravni števili m in n tako, da je $x=24\,m$ in $y=24\,n$. Velja $x+y=168$, oziroma $m+n=7$. Nato poiščemo vse pare naravnih števil, ki ustrezajo temu pogoju: $\{1,6\},\ \{2,5\}$ in $\{3,4\}$. Uporabimo $x=24\,m$ in $y=24\,n$ in dobimo naslednje rešitve $\{24,144\},\ \{48,120\}$ in $\{72,96\}$.

3. Najprej izpostavimo skupni faktor v števcu in imenovalcu prvega ulomka $\frac{2^{2014}\cdot\left(1+2-2^2-2^3\right)}{(-3)^{2014}\cdot(1-3^2)}$ ter potenciramo drugi ulomek $\frac{3^{2013}}{2^{2013}}$. Nato poenostavimo tretji ulomek $\frac{4^{2x+2}}{(-2)^{4x}}=\frac{2^{4x+4}}{2^{4x}}=16$. Zapisan produkt vseh treh ulomkov $\frac{2^{2014}\cdot(-9)}{(-3)^{2014}\cdot(-8)}\cdot\frac{3^{2013}}{2^{2013}}\cdot 16$ okrajšamo in dobimo rezultat 12.

4. Označimo s H ceno hlač, z J ceno jakne in s P ceno puloverja v redni prodaji. Sklepamo, da je prvi teden cena puloverja predstavljala $17,85\,\%$ vrednosti nakupa v redni prodaji in da je $115,01$ evrov enakovredno $82,15\,\%$ vrednosti oblačil v redni prodaji. Uporabimo sklepni račun ali zvezo $p=\frac{d}{c}\cdot 100$. Izračunamo, da je cena vseh izdelkov v redni prodaji enaka 140 evrov in, da je cena puloverja $24,99$ evrov. Za prvi teden lahko zapišemo še enačbo $H+J=115,01$, oziroma $H=115,01-J$. Drugi teden pa za vse tri artikle veljala zveza $24,99+H+0,8J=125$. Rešimo sistem enačb npr: $24,99+115,01-J+0,8J=125$, uredimo $15=0,2J$ in dobimo $J=75$ evrov in $H=40,01$ evrov.

Naloge za 2. letnik

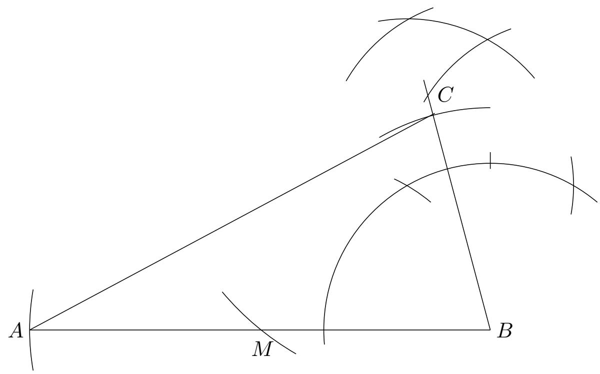
1. **a)** Neznano koordinato točke A izračunamo tako, da vstavimo $x=-\frac{1}{2}$ v enačbo premice $2\cdot\frac{-1}{2}-6y+3=0$. Dobimo $y=\frac{1}{3}$. Pri izračunu koordinat točke B upoštevamo, da je $y=0$ in izračunamo $x=-\frac{3}{2}$. Koordinati razpolovišča daljice AB izračunamo po formuli $S\left(\frac{x_2+x_1}{2},\frac{y_2+y_1}{2}\right)$. Vstavimo podatke $\left(\frac{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{2},\frac{\frac{1}{3}+0}{2}\right)$, poenostavimo in dobimo $S\left(-1,\frac{1}{6}\right)$.

   b) Upoštevamo, da imata vzporedni premici enak smerni koeficient. Premico p zapišemo v eksplicitni obliki $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$. Premica q naredi na ordinatni osi odsek $n=-3$. Uporabimo npr.: $y=kx+n$ in zapišemo enačbo premice $y=\frac{1}{3}x-3$.

2. V prvem členu izraza upoštevamo množenje potenc z enakimi eksponenti in zapišemo $7\left(\frac{a^5\cdot 2b^2}{2b^4\cdot a^4}\right)^5$, okrajšamo in dobimo $7\left(\frac{a}{b^2}\right)^5$. Pri drugem členu drugi faktor uredimo $\left(\frac{a}{b^2}\right)^{2-2x}$. Upoštevamo množenje potenc z enakimi osnovami $3\left(\frac{a}{b^2}\right)^{3+2x+2-2x}=3\left(\frac{a}{b^2}\right)^5$. V tretjem členu upoštevamo npr.: deljenje potenc z enakimi eksponenti $\left(\frac{4a^5b}{2a^4b^3}\right)^5=\left(\frac{2a}{b^2}\right)^5=32\left(\frac{a}{b^2}\right)^5$. Podobne enočlenike združimo $7\left(\frac{a}{b^2}\right)^5-3\left(\frac{a}{b^2}\right)^5+32\left(\frac{a}{b^2}\right)^5=36\left(\frac{a}{b^2}\right)^5=36\frac{a^5}{b^{10}}$. Vstavimo $a=5^{\frac{1}{5}}$ in $b=\sqrt[5]{2}$. Dobimo $\frac{36\cdot\left(5^{\frac{1}{5}}\right)^5}{\left(2^{\frac{1}{5}}\right)^{10}}=\frac{36\cdot 5}{2^2}=45$.

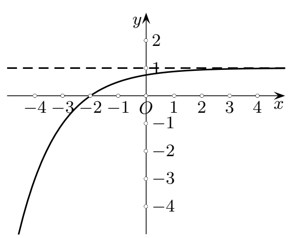
3. Sklepamo, da je $n > 0$, ker graf seka ordinatno os nad koordinatnim izhodiščem in da je $k < 0$, ker je funkcija f padajoča. Dobimo zvezi: $\frac{2a-1}{3-a} > 0$ in $\frac{3-2a}{a+5} < 0$. Rešimo neenačbo $\frac{3-2a}{a+5} < 0$: iz $3-2a < 0$ in $a+5 > 0$ sledi $a > \frac{3}{2}$; iz $3-2a > 0$ in $a+5 < 0$ sledi $a < -5$. Rešimo še neenačbo $\frac{2a-1}{3-a} > 0$: iz $2a-1 > 0$ in $3-a > 0$ sledi $\frac{1}{2} < a < 3$; iz $2a-1 < 0$ in $3-a < 0$ pa ne dobimo rešitve. Delne rešitve predstavimo na številski premici in odčitamo rešitev. Za k velja $(a > \frac{3}{2}) \vee (a < -5)$, za n velja $\frac{1}{2} < a < 3$, kar nam da končno rešitev$\frac{3}{2} < a < 3$.

4. Narišemo skico na kateri označimo dane podatke. Narišemo krak kota β. S šestilom konstruiramo kot $\beta = 75°$.Narišemo lok $k(B, a)$ in dobimo točko C. Narišemo lok $k(C, t_c)$, ki seka krak kota β, presečišče označimo z M. Upoštevamo, da t_c razpolavlja stranico c in s šestilom odmerimo $\frac{c}{2}$. Narišemo lok $k(M, \frac{c}{2})$ in dobimo oglišče A.



Naloge za 3. letnik

1. Za izračun ničle funkcije zapišemo enačbo $-2^{-x-2}+1 = 0$. Enačbo uredimo npr.: $2^{-x-2} = 2^0$, enačimo eksponente $-x - 2 = 0$ in izračunamo $x = -2$. Izračunamo začetno vrednost funkcije $f(0) = -2^{-0-2} + 1 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$. Enačba vodoravne asimptote je $y = 1$. Narišemo graf funkcije f.



2. Najmanjša vrednost kvadratne funkcije f je v temenu, $q = -1$. Upoštevamo koeficiente $a = m-1$, $b = 1-3m$ in $c = 2m+1$. Izračunamo diskriminanto $D = b^2-4ac = (1-3m)^2-4\cdot(m-1)(2m+1)$, kvadriramo in odpravimo oklepaje $1-6m+9m^2-8m^2+4m+4 = m^2-2m+5$. Upoštevamo $q = -\frac{D}{4a}$ in dobimo enačbo $-1 = -\frac{m^2-2m+5}{4(m-1)}$. Odpravimo ulomek in dobimo enačbo $4m - 4 = m^2 - 2m + 5$. Enačbo poenostavimo do oblike $m^2 - 6m + 9 = 0$. Rešitev je $m = 3$ in iskana kvadratna funkcija $f(x) = 2x^2 - 8x + 7$.

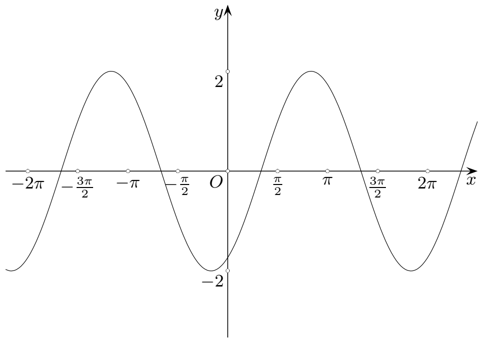
3. Iz slike ugotovimo, da je $b = 2 \cdot 7 = 14$ cm. Iz obrazca za izračun obsega pravokotnika $o = 2a + 2b$ izračunamo $2a + 28 = 90$ in dobimo $a = 31$ cm. Osenčen lik je sestavljen iz polkroga s polmerom $r = 7$ cm in enakokrakega trikotnika z osnovnico $b = 14$ cm ter višino $v = a - 7 = 24$ cm. Za izračun obsega lika potrebujemo še dolžino kraka enakokrakega trikotnika. Izračunamo ga s pomočjo Pitagorovega izreka $s^2 = v^2 + r^2 = 24^2 + 7^2 = 625$. Izračunamo $s = 25$ cm. Obseg osenčenega lika je $o = \frac{2\pi r}{2} + 2s = (7\pi + 50)$ cm.

4. Odpravimo ulomek in dobimo enačbo $4^{\log_3 x} = 2^{\log_3(x+1)} \cdot 2$. Enačbo preoblikujemo in na obeh straneh zapišemo potenco z osnovo 2 ter dobimo $2^{2\cdot\log_3 x} = 2^{\log_3(x+1)+1}$. Enačimo eksponenta $2 \cdot \log_3 x = \log_3(x+1) + 1$. Upoštevamo pravila za računanje z logaritmi in dobimo enačbo $\log_3 \frac{x^2}{x+1} = 1$. Z upoštevanjem definicije logaritma dobimo enačbo $\frac{x^2}{x+1} = 3$, ki jo preoblikujemo v kvadratno $x^2 - 3x - 3 = 0$. Rešitvi kvadratne enačbe sta $x_1 = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$. Preverimo, da so vsi izrazi v prvotni enačbi dobro definirani in ugotovimo, da je rešitev prvotne enačbe $x_1 = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$.

Naloge za 4. letnik

1. Zaporedje je geometrijsko, če je razmerje med sosednjima členoma enako $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$ oziroma $a_2^2 = a_1 \cdot a_3$. Vstavimo dane podatke in dobimo $9x^2 = (x+2)(x^2+5)$. Poenostavimo in dobimo $9x^2 = x^3 + 2x^2 + 5x + 10$, oziroma $x^3 - 7x^2 + 5x + 10 = 0$. S Hornerjevim algoritmom razcepimo enačbo in dobimo $(x^2 - 5x - 5)(x - 2) = 0$. Dobimo tri rešitve $x_1 = 2$ in $x_{2,3} = \frac{5\pm3\sqrt{5}}{2}$. Edina možnost za celoštevilsko zaporedje je $x = 2$. Dobimo člene zaporedja $4,\ 6,\ 9$ in količnik $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{2}$.

2. Upoštevamo $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$. Dobimo $A \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = A \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$. Upoštevamo sodost funkcije in zapišemo $A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Dobimo enakost $A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$. Iz enakosti $A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$ izračunamo $A = -2$. Zapišemo funkcijo $f(x) = -2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$. Zapišemo zalogo vrednosti $[-2,\ 2]$.



3. Vrstni red razporejanja elementov je pomemben. Izbiramo 4 črke - uporabljamo variacije brez ponavljanja n elementov reda 4 ali pa uporabimo parvilo produkta. Variacij je $V_n^4 = n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)$.

a) Izberemo štiri črke izmed 12, kar je $V_{12}^2 = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11\,880$ možnosti.

b) Izberemo štiri črke izmed štirih samoglasnikov, kar je $V_4^4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ ali pa $4!$ možnosti.

c) Števio ugodnih možnosti je 1, število vseh možnosti pa $11\,880$. Verjetnost $P = \frac{m}{n} = \frac{1}{11\,880}$.

d) Prvo in zadnjo črko izbiramo izmed 8 soglasnikov. Ker prvo in zadnjo črko izberemo, nam ostane še 10 črk. Tako je število ugodnih možnosti enako $8 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 9 = 5\,040$. Verjetnost je $P = \frac{5\,040}{11\,880} = \frac{14}{33} \doteq 0,42$.

4. **a)** Za določitev ekstrema potrebujemo odvod $h'(x) = -\frac{2x}{20\,000} + \frac{3}{5}$. Izračunamo ničlo odvoda $-\frac{2x}{20\,000} + \frac{3}{5} = 0$. Uredimo in izračunamo $x = 6\,000$. Pri tem x-u dobimo višino gore $h(6\,000) = -\frac{6\,000^2}{20\,000} + \frac{3 \cdot 6\,000}{5} + 560 = 2\,360$ metrov.

   b) Smerni koeficient tangente dobimo z vrednostjo odvoda v $x = 4\,000$, kar je

$$k = h'(4\,000) = -\frac{2 \cdot 4\,000}{20\,000} + \frac{3}{5} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

   Upoštevamo, da je tangens naklonskega kota enak smernemu koeficientu tangente $\tan\alpha = k = 0,2$. Iz tega izračunamo, da je naklonski kot $\alpha \doteq 11,31° \doteq 11°19'$.

Rešitve 15. tekmovanja v znanju matematike za dijake poklicnih šol – državno tekmovanje

Naloge za vse letnike srednje šole

A1. Ker imamo podan `OUTPUT`, lahko diagram rešimo v nasprotni smeri z uporabo nasprotnih operacij. Od `OUTPUT` 32 odštejemo 16, dobljeni rezultat množimo z 2, prištejemo 8 in dobimo: `INPUT`$= (32 - 16) \cdot 2 + 8 = 40$.

A2. Če je mama dala vsakemu otroku x evrov, so otroci skupaj dobili $3x$ evrov žepnine. Ob upoštevanju dejstva, da otrokom, ko vsak izmed njih porabi 20 evrov, skupaj ostane točno toliko, kot je dobil vsak posamezno, dobimo enačbo $3x - 3 \cdot 20 = x$, ki ima rešitev $x = 30$. Skupaj so torej otroci dobili 90 evrov žepnine.

A3. Iz razmerja porabe bencina pri motorju in spremljevalnem avtomobilu na 100 km izračunamo sorazmernostni faktor $\frac{10\ \ell}{5} = 2\ \ell$. Ker je Aleš za 100 km vožnje porabil $2\ \ell$ bencina, sklepamo, da je za 50 km porabil $1\ \ell$ bencina.

A4. Ob upoštevanju, da je vsota velikosti vsakega notranjega in pripadajočega zunanjega kota enaka $180°$, dobimo enakost $\alpha + \alpha_1 = \beta + \beta_1$ oziroma $\beta_1 - \alpha_1 = \alpha - \beta$, kar pomeni, da je razlika med velikostima zunanjih kotov trikotnika enaka razliki velikosti pripadajočih notranjih kotov trikotnika.

A5. Če točka $A(-1,5)$ leži na premici, morata njeni koordinati zadoščati enačbi premice, kar pa velja samo za enačbo $y = \frac{1}{3}x + \frac{16}{3}$.

A6. Če z A, M in B označimo mase deklet in upoštevamo, da sta se vedno tehtali po dve skupaj, dobimo sistem enačb $A + M = 112$ kg, $A + B = 113$ kg in $B + M = 115$ kg. Ko v sistemu seštejemo vse tri enačbe, dobimo enačbo $2A + 2B + 2M = 340$ kg oziroma $A + B + M = 170$ kg. Dekleta so skupaj tehtala 170 kg.

B1. Povprečna masa vseh nahrbtnikov znaša $\overline{m} = \frac{(2\cdot 12+2\cdot 15+3\cdot 16+18)\ \mathrm{kg}}{8} = \frac{120\ \mathrm{kg}}{8} = 15\ \mathrm{kg}$.
Od povprečne mase sta lažja samo dva nahrbtnika, ki imata maso $12\ \mathrm{kg}$.
Najtežji nahrbtnik z maso $18\ \mathrm{kg}$ predstavlja $\frac{18}{120} = 0{,}15 = 15\ \%$ skupne mase nahrbtnikov.
Če zapišemo vse mase nahrbtnikov po velikosti: 12, 12, 15, 15, 16, 16, 16, 18, ugotovimo, da je mediana zaradi sodega števila podatkov enaka $\frac{(15+16)\ \mathrm{kg}}{2} = 15{,}5\ \mathrm{kg}$. Med nahrbtniki je bilo največ nahrbtnikov z maso $16\ \mathrm{kg}$, kar predstavlja modus mas nahrbtnikov.
Če z x označimo maso nahrbtnika devetega planinca, je skupna masa vseh nahrbtnikov $120 + x$. Ob upoštevanju, da se je po pridružitvi devetega planinca povprečna masa nahrbtnikov povečala za $1\ \mathrm{kg}$, dobimo enačbo $\frac{120+x}{9} = 16$, ki ima rešitev $x = 24$.

B2. Dno bonboniere ima obliko pravilnega šestkotnika s ploščino $S = 6 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \approx 93{,}5\ \mathrm{cm}^2$.
Bonboniera ima obliko pravilne šeststrane prizme s prostornino $V = 6 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3 \approx 280{,}6\ \mathrm{cm}^3$.
Na dno bonboniere, ki ima obliko pravilnega šestkotnika, lahko narišemo $\frac{6\cdot(6-3)}{2} = 9$ daljic.
Okrasni trak lahko razdelimo na 4 dele. Dva sta po dolžini enaka višini prizme, dva pa razdalji med nasprotnima stranicama pravilnega šestkotnika. Ker je pravilni šestkotnik sestavljen iz šestih enakostraničnih trikotnikov, je ta razdalja enaka dvakratniku višine enakostraničnega trikotnika, torej $2 \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm. Najmanjša dolžina okrasnega traku je torej enaka $2 \cdot 3 + 2 \cdot 6\sqrt{3} \approx 26{,}8$ cm.

B3. Za omizjem s štirimi mizami lahko sedi 10 gostov.
Če je omizje pripravljeno tako, da so mize v ravni vrsti ena ob drugi, potem lahko na začetek in konec omizja postavimo po en stol, ob vsaki mizi pa na vsaki strani še po en stol. Skupaj torej $2n + 2$ stolov.
Ker za omizjem z n mizami stoji $2n + 2$ stolov, za omizje s 24 stoli velja $2n + 2 = 24$, kar nam da $n = 11$. Za 24 gostov bi morali pripravili omizje z 11 mizami.

Če označimo z x število omizij z dvema mizama in z y število omizij s tremi mizami, potem imajo omizja skupaj $6x+8y$ stolov. Ob upoštevanju, da je bilo prodanih 130 kart in pripravljenih 8 omizij z eno in 5 omizij s štirimi mizami, dobimo enačbo $6x + 8y = 130 - (8 \cdot 4 + 5 \cdot 10)$ oziroma $6x + 8y = 48$, kar okrajšamo v $3x + 4y = 24$. Ker morata biti x in y nenegativni celi števili, so rešitve enačbe lahko: $x = 0$ in $y = 6$ ali $x = 8$ in $y = 0$ ali $x = 4$ in $y = 3$.
Če upoštevamo, da stoli niso oštevilčeni, je pri prvi osebi vseeno, kateri stol zasede. Druga oseba lahko izbira med tremi stoli, tretja ima dve možnosti in zadnja samo eno možnost. Vidova družina lahko omizje zasede na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načinov.

B4. Karta z dolžino a in širino b ima obseg $o = 2a + 2b$. Iz sestavljenega pravokotnika na sliki je razvidno, da je dolžina karte dvakrat večja od širine karte ($a = 2b$), pri čemer dobimo enačbo $30 = 2 \cdot 2b + 2b$, ki ima rešitev $b = 5$. Robova karte sta dolga $5\ \mathrm{cm}$ in $10\ \mathrm{cm}$, kar pomeni, da je ploščina pravokotnika, ki ga je sestavil Gal, $3 \cdot 10 \cdot 5 = 150\ \mathrm{cm}^2$.
Ko zapisana števila zapišemo s prafaktorji: $16 = 2^4$, $20 = 2^2 \cdot 5$, $25 = 5^2$, ugotovimo, da je najmanjši skupni večkratnik $v(16, 20, 25) = 2^4 \cdot 5^2 = 400$.
Denimo, da Gal k številom prišteje praštevila x, y in z tako, da je

$$x + 20 = y + 16 = z + 25.$$

Iz zgornje enakosti sledi, da so števila x, y in z različna. Števili x in y morata biti ali obe sodi ali obe lihi. Ker ne obstajata dve različni sodi praštevili, morata biti x in y lihi praštevili, torej je število z sodo praštevilo. Sledi $z = 2$ (edino sodo praštevilo), $x = 7$ in $y = 11$.

Rešitve 7. tekmovanja iz znanja astronomije – šolsko tekmovanje

7. razred

A1. (B) Lunin mrk je lahko le takrat, ko je polna Luna oz. ščip. Po ščipu si mene sledijo v tem vrstnem redu: zadnji krajec, mlaj, prvi krajec.

A2. (A) Našteta nebesna telesa si od najsvetlejšega do najšibkejšega sledijo: Sonce, Luna, Venera, Severnica.

A3. (D) Letni časi na Zemlji so posledica nagnjenosti Zemljine vrtilne osi glede na ravnino ekliptike, zaradi česar se med letom spreminja kot, pod katerim padajo Sončevi žarki na različne geografske širine.

A4. (C) Svetlobno leto je razdalja, ki jo svetloba prepotuje v enem letu.

A5. (A) Merkur nima lun.

A6. (C) Na fotografiji je površje Marsa z razpoznavnim robotskim vozilcem Curiosity.

A7. (D) Pluton je po definiciji Mednarodne astronomske zveze IAU od leta 2006 pritlikavi planet.

A8. (B) Drugi izraz za utrinek je meteor.

A9. (D) Osončju najbližja zvezda Proksima Kentavra je oddaljena približno 4,2 svetlobnega leta.

A10. (A) Po današnjih ocenah se je veliki pok zgodil pred približno 13,8 milijardami let.

B1.
A Prokijon 10. decembra vzide ob **20.00**.

B Kastor 5. februarja zaide ob **7.15**.
C Mizar je 1. januarja najvišje na nebu ob **6.40**.

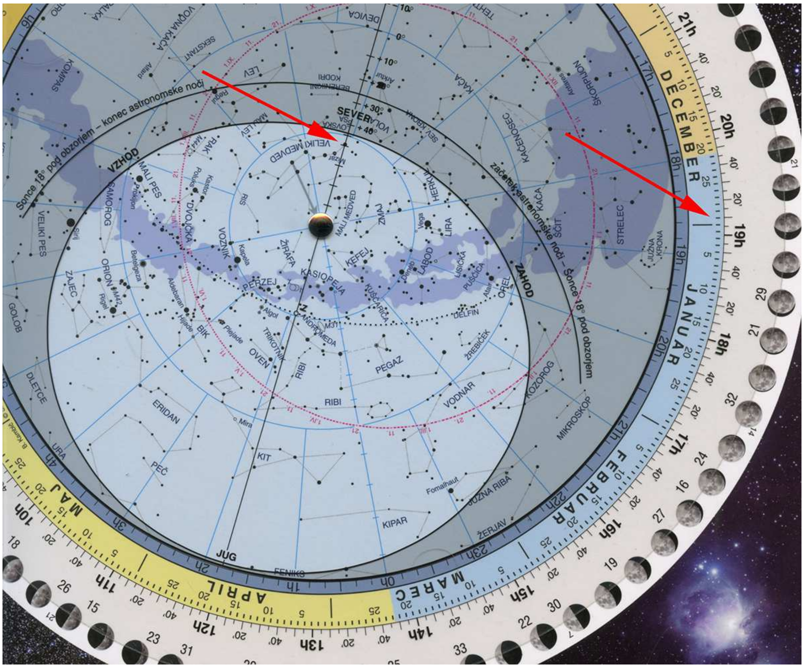
D Sonce je v 11. novembra v ozvezdju **Tehtnica**.

E Sonce 11. januarja zaide ob **16.30**.

F Astronomska noč se 1. marca konča ob **5.10**.
B2.
V naših krajih so v celoti nadobzorniška ozvezdja (nikoli ne zaidejo):
Mali medved, Kasiopeja, Kefej, Zmaj in Žirafa.

B3.
Na severnem polu je poleti Sonce ves čas nad obzorjem in se tekom dneva navidezno giblje vzporedno z obzorjem. Senca, ki jo meče navpična palica na vodoravna tla, se zato giblje enakomerno kot urni kazalec. To pomeni, da v 24 urah senca opiše kot 360°. Sledi, da senca v eni uri opiše kot
$\varphi = 360°/24 = 15°$.
V 4 urah opiše senca kot
$4{\cdot}\varphi = 4{\cdot}15° = 60°$.
Pravilni odgovor je 60°.

B4.
Pri določitvi ure si pomagamo z vrtljivo zvezdno karto. Na sliki z lahkoto prepoznamo asterizem Veliki voz. Iz slike je očitno, da je zadnja zvezda v ojesu Velikega voza (η Malega medveda) točno nad severno točko obzorja. Vrtljivo karto nastavimo tako, da je ta zvezda na nebesnem poldnevniku nad severno točko obzorja (glej sliko) in odčitamo čas za 1. januar.



Zvezdana je skozi okno videla tak položaj zvezd ob 19.05 $\pm$ 20 minut.

B5.
Oddaljenost med Luno in Zemljo označimo z r = 385000000 m = 385000 km.
Hitrost svetlobe c = 300000 km/s.
Če zanemarimo velikost Lune in Zemlje, ki sta majhni v primerjavi z oddaljenostjo teles, lahko za čas potovanja t svetlobe od Lune do nas pišemo
$t = r/c$ = 385000 km/300000 km/s = 1,28 s.
Svetloba od Lune do Zemlje potuje 1,28 sekunde.

8. razred

A1. (B) Lunin mrk je lahko le takrat, ko je polna Luna oz. ščip. Po ščipu si mene sledijo v tem vrstnem redu: zadnji krajec, mlaj, prvi krajec.

A2. (A) Naštete nebesna telesa si od najsvetlejšega do najšibkejšega sledijo: Sonce, Sirij, Severnica, Neptun.

A3. (D) Letni časi na Zemlji so posledica nagnjenosti Zemljine vrtilne osi glede na ravnino ekliptike, zaradi česar se med letom spreminja kot, pod katerim padajo Sončevi žarki na različne geografske širine.

A4. (C) Svetlobno leto je razdalja, ki jo svetloba prepotuje v enem letu.

A5. (A) Največ asteroidov oz. malih planetov je med Marsovo in Jupitrovo orbito. Temu pasu pravimo glavni asteroidni pas.

A6. (B) Na fotografiji je površje Merkurja, kot ga je posnela sonda Messenger.

A7. (D) Pluton je po definiciji Mednarodne astronomske zveze IAU od leta 2006 pritlikavi planet.

A8. (C) Drugi izraz za utrinek je meteor.

A9. (D) Osončju najbližja zvezda Proksima Kentavra je oddaljena približno 4,2 svetlobnega leta.

A10. (A) Po današnjih ocenah se je veliki pok zgodil pred približno 13,8 milijardami let.

B1.

A Prokijon 10. decembra vzide ob **20.00**.

B Kastor 5. februarja zaide ob **7.15**.

C Mizar je 1. januarja najvišje na nebu ob **6.40**.

D Sonce je v 11. novembra v ozvezdju **Tehtnica**.

E Sonce 11. januarja zaide ob **16.30**.

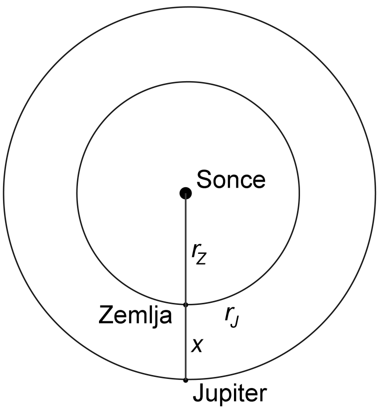
F Astronomska noč se 1. marca konča ob **5.10**.

B2.

V naših krajih so v celoti nadobzorniška ozvezdja (nikoli ne zaidejo):
Mali medved, Kasiopeja, Kefej, Zmaj in Žirafa.

B3.

Oddaljenost Jupitra od Sonca r_J = 5,2 a. e. = 5,2 · 150000000 km = 780000000 km.
Oddaljenost Zemlje od Sonca r_Z = 1 a. e. = 150000000 km.
Hitrost svetlobe c = 300000 km/s.
Ker je Jupiter v opoziciji s Soncem, je v legi, ki jo prikazuje slika.



Sledi, da je oddaljenost med Jupitrom in Zemljo x
$x = r_J - r_Z$ = 780000000 km - 150000000 km = 630000000 km.
Svetloba prepotuje pot x od Jupitra do Zemlje v času t
$t = x/c$ = 630000000 km/300000 km/s = 2100 s = 35 minut.

Ob opoziciji Jupitra svetloba od tega planeta do Zemlje potuje 2100 sekund oz. 35 minut.

B4.

a) Na fotografiji Lune ni težko razpoznati. Venera pa je na nebu vedno svetlejša od Marsa, zato je Venera svetla pika levo spodaj. Pravilne oznake so na sliki.

b) Na fotografiji izmerimo premer Lunine ploskvice $2R$.
Dobimo, da je njen premer $2R$ = 15 mm $\pm$1 mm.
Zorni kot Luniene ploskvice na nebu je 0,5°. To pomeni, da je na fotografiji 15 mm = 0,5° oz. 1° = 30 mm oz. 10 mm = 1/3°. Nato izmerimo razdaljo x med Venero in Marsom.
Dobimo, da je x = 55 mm $\pm$2 mm.
Kotna razdalja med Venero in Marsom na nebu x' je potemtakem
x' = 5,5 · 1/3° = 1,8°.
Kotna razdalja med Venero in Marsom je 1,8° $\pm$ 0,2°.

B5.
Na severnem polu je poleti Sonce ves čas nad obzorjem in se tekom dveva navidezno giblje vzporedno z obzorjem. Senca, ki jo meče navpična palica na vodoravna tla, se zato giblje enakomerno kot urni kazalec na uri. To pomeni, da v enem dnevu t_0 = 24 ur senca opiše kot 360°. Sledi, da senca kot 1° opiše v času
t = 24 h/360° = 0,0666 h.
Bolje je čas enega dneva izraziti v minutah t_0 = 24 · 60 min = 1440 min.
t = 1440 min/360 = 4 minute.
Senca opiše kot 1° v 4 minutah.

9. razred

A1. (B) Lunin mrk je lahko le takrat, ko je polna Luna oz. ščip. Po ščipu si mene sledijo v tem vrstnem redu: zadnji krajec, mlaj, prvi krajec.

A2. (D) Našteta nebesna telesa si od najšibkejšega do najsvetlejšega sledijo: Neptun, Severnica, Sirij, Sonce.

A3. (C) Letni časi na Zemlji so posledica nagnjenosti Zemljine vrtilne osi glede na ravnino ekliptike, zaradi česar se med letom spreminja kot, pod katerim padajo Sončevi žarki na različne geografske širine.

A4. (A) Svetlobno leto je razdalja, ki jo svetloba prepotuje v enem letu.

A5. (B) V Osončju je ena zvezda - Sonce.

A6. (C) Na fotografiji je Pluton, kot ga je posnela sonda New Horizons.

A7. (B) Drugi izraz za utrinek je meteor.

A8. (C) Jupiter, Saturn, Uran in Neptun imajo od naštetih lastnosti skupno to, da imajo prstane oz. kolobarje.

A9. (D) Osončju najbližja zvezda Proksima Kentavra je oddaljena približno 4,2 svetlobnega leta.

A10. (A) Po današnjih ocenah se je veliki pok zgodil pred približno 13,8 milijardami let.

B1.

A Prokijon 10. decembra vzide ob **20.00**.

B Kastor 5. februarja zaide ob **7.15**.

C Mizar je 1. januarja najvišje na nebu ob **6.40**.

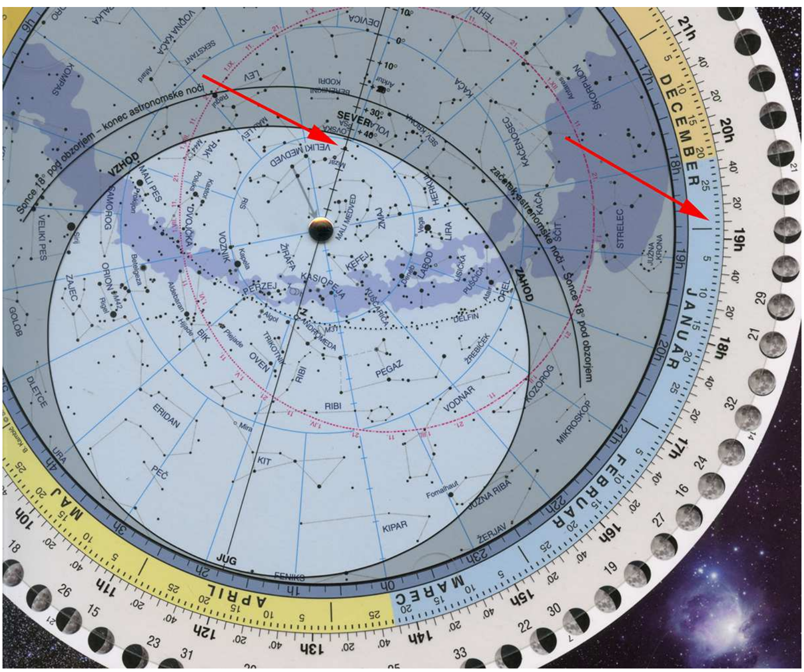
D Sonce je v 11. novembra v ozvezdju **Tehtnica**.

E Sonce 11. januarja zaide ob **16.30**.

F Astronomska noč se 1. marca konča ob **5.10**.

B2.

Pri določitvi ure si pomagamo z vrtljivo zvezdno karto. Na sliki z lahkoto prepoznamo asterizem Veliki voz. Iz slike je očitno, da je zadnja zvezda v ojesu Velikega voza (η Malega medveda) točno nad severno točko obzorja. Vrtljivo karto nastavimo tako, da je ta zvezda na nebesnem poldnevniku nad severno točko obzorja (glej sliko) in odčitamo čas za 1. januar.

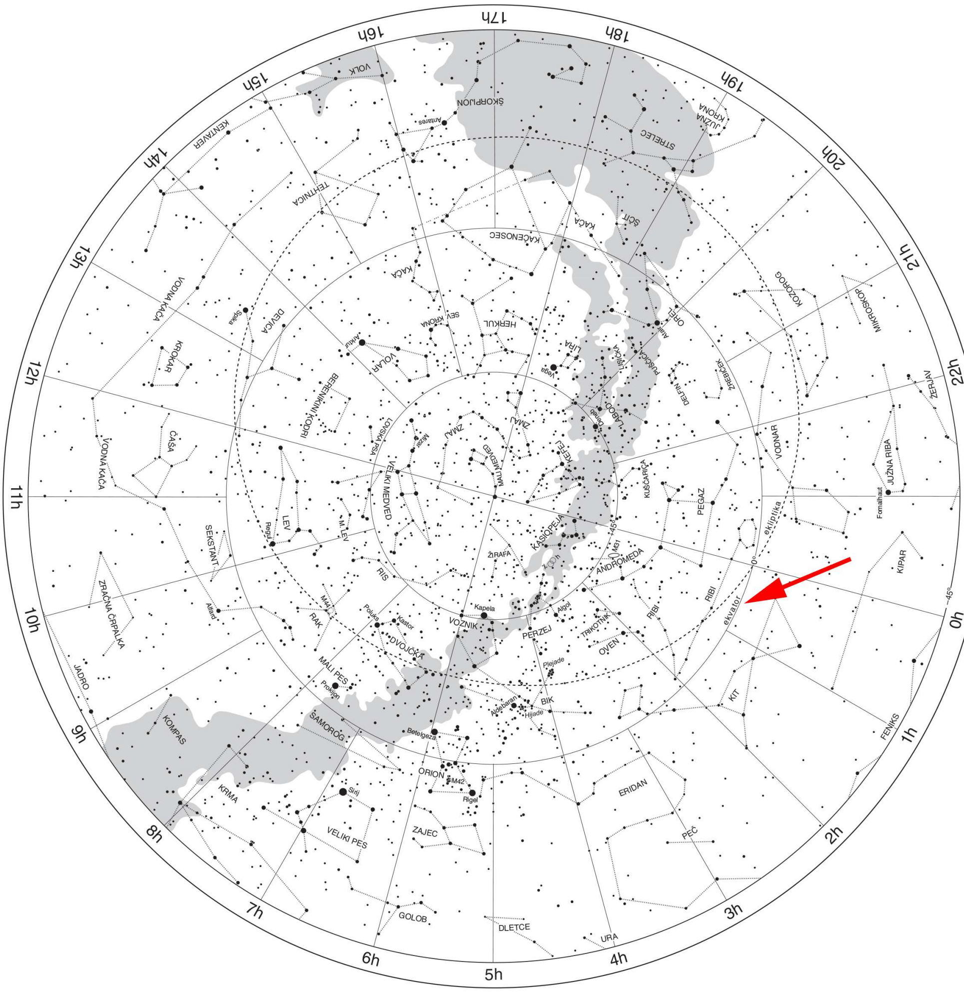


Zvezdana je skozi okno videla tak položaj zvezd ob 19.05 $\pm$ 20 minut.

B3.

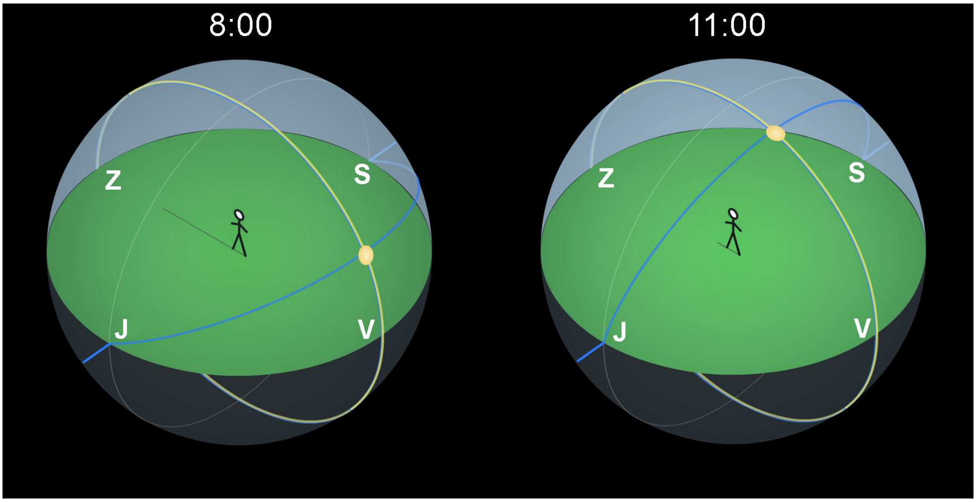
V naših krajih z geografsko širino okoli 46° vidimo tudi približno polovico južnega neba. Pri iskanju južnih ozvezdij si pomagamo z vrtljivo zvezdno karto. Poiščemo nebesni ekvator (na sliki označen s puščico) in poiščemo taka ozvezdja, ki so v celoti pod nebesnim ekvatorjem (negativna deklinacija):

Kipar, Vodnar, Južna riba, Žerjav, Kozorog, Mikroskop, Ščit, Strelec, Južna krona, Škorpijon, Tehnica, Volk, Kentaver, Krokar, Čaša, Sekstant, Zračna črpalka, Jadro, Kompas, Krma, Veliki pes, Zajec, Golob, Dletce, Ura, Eridan, Peč, Feniks.



B4.

Na dan spomladanskega enakonočja je Sonce na nebesnem ekvatorju, zato v krajih na ekvatorju vzhaja točno v vzhodni točki obzorja, gre čez zenit in zaide v zahodni točki obzorja (glej sliko). Senca navpične palice od vzida Sonca do lokalnega poldneva zato ves čas kaže proti zahodu, le krajša se do poldneva, ko je palica sploh ne meče. Popoldne pa do zaida Sonca senca ves čas kaže proti vzhodu. Zato je odgovor enostaven.



Senca navpične palice na ekvatorju na dan spomladanskega enakonočja od vzhoda Sonca do lokalnega poldneva ne opiše nobenega kota.

Kot, ki ga opiše palica je 0°

B5.
Čas odhoda t_0 = 10. 12. ob 10:00.
Začetna geografska dolžina λ_1 = 120° V.
Končna geografska dolžina λ_2 = 60° V.
Hitrost letala v = 1000 km/h.
Polmer Zemlje R = 6400 km.
Najprej izračunamo razdaljo med krajema odhoda in pristanka letala x. Ker se letalo ves čas giblje po ekvatorju, njegova višina nad tlemi pa je zanemarljiva, lahko njegovo pot x zapišemo kot krožni lok φ, ki ga opiše med 120° V in 60° V:
φ = 120° V - 60° V = 60°.
Obseg O ekvatorja (velikega kroga)
$O = 2{\cdot}\pi \cdot R = 2{\cdot}\pi{\cdot}$ 6400 km = 40212 km.
Letalo preleti samo del tega obsega:
x = (60°/360°) $\cdot O$ = 1/6 · 40212 km = 6702 km ≈ 6700 km.
To pot letalo preleti v času
$t = x/v$ = 6700 km / 1000 km/h = 6,7 h = 6 h 42 min.
Po uri iz kraja, iz katerega je letalo poletelo, pristane ob

$t_0 + t$ = 10 h + 6 h 42 min = 16 h 42 min.
Ker pa je kraj pristanka 60° zahodno od prvega kraja, je v kraju pristanka, ki je 60/15 = 4 časovne pasovove zahodno, 4 ure manj.
Čas pristanka letala po uri v kraju pristanka je 16 h 42 min - 4 h = 12 h 42 min.

Pravilni odgovor je 12 h 42 min.

A1. (B) Ker je Luna v prvem krajcu, pomeni, da se osvetljeni del njene ploskvice veča, torej Sonce na neosvetljenem delu Lune postopoma vzhaja do ščipa. To pomeni, da bi opazovalec na terminatorju videl vzhod Sonca.

A2. (A) Deklinacija Severnice je približno 89° in je torej približno 1° od severnega nebesnega pola. Zemljepisna širina Ljubljane je približno 46°, kar pomeni, da se višina Severnice nad obzorjem spreminja med 45° in 47°.

A3. (D) Letni časi na Zemlji so posledica nagnjenosti Zemljine vrtilne osi glede na ravnino ekliptike, zaradi česar se med letom spreminja kot, pod katerim padajo Sončevi žarki na različne geografske širine.

A4. (C) Ker je bil Mars v opoziciji s Soncem, je bil na nebu na nasprotni strani od Sonca. Ker ga je Luna takrat okultirala, je tudi ta morala biti na nasprotni strani neba kot Sonce. To pomeni, da je bil takrat Lunin ščip.

A5. (B) Navidezni premer Sončeve ploskvice na nebu je približno 0,5° oz. 30 kotnih minut. Premer Sonca je približno 1,5 milijona kilometrov. Višina protuberance je bila 1′, torej 1/30 Sončevega premera, kar pomeni, da je bila njena prava višina 1,5·10^6 km/30 = 50000 km.

A6. (A) M 42 je znana Orionova meglica in ni galaksija.

A7. (D) Pluton je po definiciji Mednarodne astronomske zveze IAU od leta 2006 pritlikavi planet.

A8. (C) Zvezde v kroglastih kopicah so med najstarejšimi zvezdami v vesolju, v razustih kopicah pa so relativno mlade zvezde.

A9. (D) Na H-R diagramu je označeno območje belih pritlikavk, ki imajo veliko površinsko (efektivno) temperaturo, a sorazmerno majhen izsev v primerjavi z drugimi zvezdami.

A10. (B) Rdeči premik v oddaljenih galaksijah je kozmološke narave in posledica širjenja vesolja.

B1.
A Sirij je 1. februarja najvišje na nebu ob **22.00**.
B Zvezda z deklinacijo -20° in rektascenzijo 2h (zvezda je v ozvezdju Kit) 1. marca zaide ob **20.00**.

C Sonce 21. januarja zaide ob **16.40**.

D Fomalhaut je 10. decembra v spodnji kulminaciji ob **5.40**.

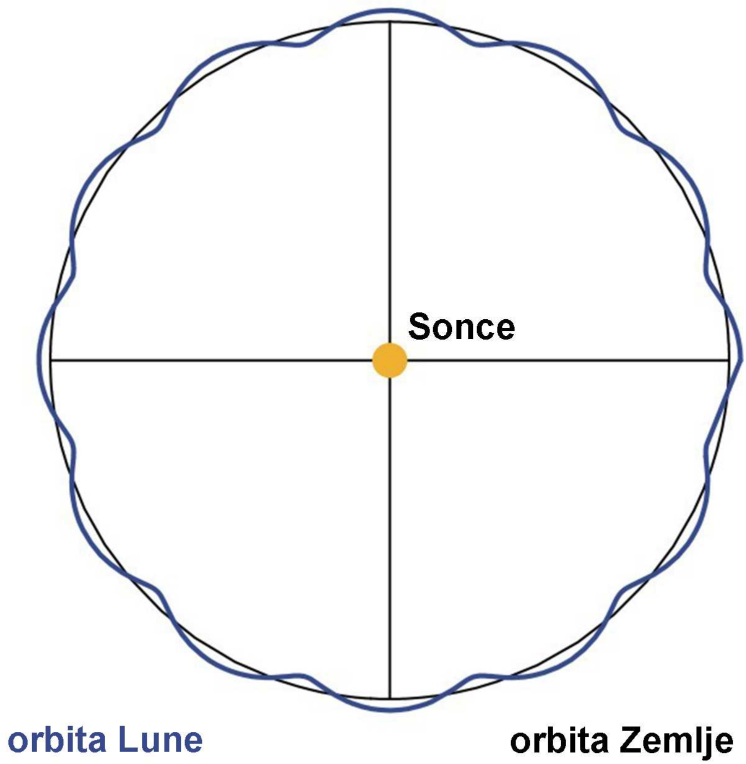
B2.
Višina opazovalcev h = 175 cm.
Zorni kot Lune na nebu φ_L = 0,5°.
Če hočemo določiti oddaljenost x med opazovalci in fotografom, moramo dobiti oceno za zorni kot opazovalcev na sliki To dobimo s primerjavo znanega zornega kota polne Lune na nebu. Na sliki izmerimo premer Lune r_L in višino opazovalcev h_O. Dobimo:
r_L = 112 mm $\pm$ 2 mm,
h_O = 10 mm $\pm$ 1 mm

Izračunamo razmerje
h_O / r_L = 0,09 $\pm$ 0,01, (1)
ki je enako razmerju zornih kotov Lune in opazovalcev φ_O:
h_O / r_L = φ_O / φ_L.
Sledi
φ_O =φ_L h_O / r_L = 0,5° (0,09 $\pm$ 0,01) = 0,045° $\pm$ 0,005° = 0,045° $\pm$ 11 %. (2)
Za iskano oddaljenost fotografa sledi:
x = h / $\tan \varphi_O$ = 1,75 m / $\tan$ 0,045° = 2200 m $\pm$ 240 m.
Ker je φ_O majhen, lahko $\tan \varphi_O$ nadomestimo kar z φ_O v radianih.

Fotograf je od opazovalcev oddaljen 2200 m $\pm$ 240 m oziroma 2200 m $\pm$ 11 %.

Opomba: Tudi če je bila pola natisnjena v neoriginalnem formatu, se sicer izmerjene vrednosti r_L in h_O razlikujejo, razmerje h_O / r_L pa je enako.

B3.
Polmer Zemljine orbite okoli Sonca $r = 1,5 \cdot 10^{11}$ m.
Polmer Lunine orbite okoli Zemlje $d = 3,85 \cdot 10^{8}$ m.
Luna pravzaprav ne kroži okoli Zemlje, temveč se giblje okoli Sonca po orbiti, ki je perturbirana zaradi Zemljine težnosti. Lunina orbita okoli Sonca zato ni elipsa oz. v poenostavljenem modelu krožnica, temveč vijuga okoli Zemljine orbite (glej sliko; avtorja T. Kranjc in N. Razpet).



Na sliki je velikosti vijug Lunine orbite nesorazmerno velika, saj v pravem razmerju ne bi bile vidne, ker so zelo majhne v primerjavi z oddaljenostjo od Sonca. Luna orbita okoli Sonca je zaradi "vijuganja"daljša od orbite Zemlje, prepotuje pa jo v enem letu, prav tako kot Zemlja, zato je povprečna hitrost Lune večja. Ocene razlike povprečne hitrosti Lune Δv_L in Zemlje se lahko lotimo na več načinov. Eden od možnih načinov reševanja s podanimi podatki brez gravitacijskega zakona je enostaven razmislek glede ocene, koliko je v enem letu pot Lune daljša od poti Zemlje. Luna v enem letu približno 12-krat navidezno obide Zemljo, zato je njena pot okoli Sonca Δr_L daljša za približno 12 navideznih orbit okoli Zemlje:

Δr_L = 12 · $2\pi d$ = 12· 2π ·3,85· 10^8 m = 2,9·10^{10} m.

Sledi, da je razlika hitrosti Lune in Zemlje:

Δv_L = Δr_L/ 1 leto = 2,9·10^{10} m / 31536000 s = 920 m/s.

Tekmovalec lahko sklepa tudi drugače. Luna vsak mesec (približno 30 dni) poleg poti, ki jo naredi skupaj z Zemljo okoli Sonca, naredi še en navidezni obhod okoli Zemlje. Pri tem naredi pot:
r' = $2\pi d$ = 2π ·3,85· 10^8 m = 2,4·10^9 m.
Luna ima zaradi tega dodatno hitrost:
Δv_L = r'/ 30 dni = 2,4·10^9 m / 2592000 s = 933 m/s.

Ocena, za koliko je povprečna hitrost Lune okoli Sonca večja od hitrosti Zemlje, je okoli 1000 m/s oz. 1 km/s.

B4.
Število zvezd v Velikem Magellanovem oblaku (VMO) N = 10^{10}.
Navidezna magnituda VMO m = +1.
Navidezni sij VMO in z njim povezana gostota svetlobnega toka galaksije j je vsota svetlobnih tokov j_z vse zvezd v njem:
j = 10^{10} · j_z.
Ker nas zanima, koliko znaša navidezna magnituda posamezne zvezde m_z, zapišemo Pogsonov zakon za razliko magnitud dveh nebesnih teles:
$m - m_z = -2,5\log(j/j_z)$,
$m - m_z = -2,5\log(10^{10} j_z/j_z)$,
j_z se okrajša in dobimo:
$m_z = m + 25 = +1 + 25 = +26$.

Magnituda posamezne zvezde v Velikem Magellanovem oblaku je +26.

Tekmovalec lahko nalogo reši tudi na drugačen način. Svetlobni tok dveh nebesnih teles, ki se po navideznem siju razlikujeta za 5 magnitud, je pri manj svetlem telesu 100-krat manjši kot pri svetlejšem. Ker svetlobni tok VMO sestavlja j = 10^{10} · j_z, sklepamo, da je svetlobni tok posamezne zvezde 10^{10}-krat manjši kot VMO, zato vsak faktor 100 = 10^2 pomeni 5 magnitud manj, skupaj torej 5· 5m = 25 m. Sledi, da je magnituda posamezne zvezde
$m_z = m + 25 = +1 + 25 = +26$.