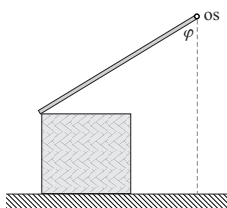


Tekmovanja

Naloge z regijskega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2014/15

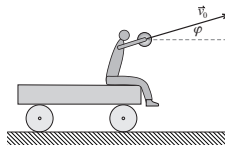
Skupina I

- Dijak se uči streljati z lokom. Cilja središče okrogle tarče z radijem 0,5 m. Puščica vedno zapusti lok s hitrostjo 60 m/s in v višini središča tarče. Zanemari zračni upor.
 - Pri kolikšni najmanjši razdalji od tarče bo dijak popolnoma zgrešil tarčo, če puščico izstrelil v vodoravni smeri?
 - Pod kolikšnim kotom pa mora izstreliti puščico, da bo pri razdalji, izračunani pri a), zadel središče tarče? Mogoče boš potreboval zvezo $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$.
- Vrtljivo vpeto loputo z maso 1 kg podpremo z zabojem z maso 2 kg tako, da loputa zanemarljivo malo sega čez rob zaboja, med loputo in navpičnico pa je kot $\varphi = 60^\circ$ (glej sliko). Med zabojem in loputo ni lepenja, med zabojem in tlemi pa je.
 - S kolikšno silo deluje loputa na zaboj?
 - S kolikšno silo pritiska zaboj pravokotno na vodoravna tla?
 - Kolikšna je sila lepenja med zabojem in tlemi?
 - Kolikšen mora biti najmanj koeficient lepenja, da zaboj ne zdrsne?



- Fantiček se na mirujočem vozičku z lahкими kolesi igra z medicinko (težka žoga). V nekem trenutku jo vrže z vozička s hitrostjo $v_0 = 1 \text{ m/s}$ in pod kotom $\varphi = 10^\circ$ glede na okolico, kot kaže slika.
 - Kolikšna je relativna hitrost medicinke v vodoravni smeri glede na voziček?
 - Koliko dela je opravil fantiček?

Masa medicinke je 1 kg, masa fantička skupaj z vozičkom pa 20 kg.



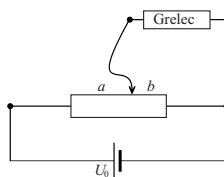
Skupina II

1. Dve okrogli stekleni posodi povežemo z dolgo ozko vodoravno cevko s polmerom 2 mm, kot kaže slika. Sredino cevke zapira majhna kapljica živega srebra. Kapljica tako deli sestavljeno posodo, v kateri je zrak s temperaturo 27°C , v dva dela. Prostornina leve posode skupaj z delom cevke do kapljice je 100 cm^3 , prostornina desne prav tako z delom cevke do kapljice pa je 60 cm^3 . Za koliko se v cevki premakne kapljica živega srebra, če zrak v levi posodi segrejemo za 1°C , v desni pa za toliko ohladimo? Raztezanje posode je pri tem zanemarljivo.



2. Fizik želi v dveh urah izpariti en deciliter vode z začetno temperaturo 20°C . Grelec z uporom $500\ \Omega$ poveže z drsnim upornikom z uporom $223\ \Omega$, ki ga veže v vezje kot potenciometer (glej sliko, puščica je simbol za drsnik). Celotno vezje nato priključi na napetostni enosmerni izvir $U_0 = 380\text{ V}$ z zanemarljivim notranjim uporom. Grelec porabi le polovico moči za segrevanje vode.

Specifična izparilna toplota vode je $2,26\text{ MJ/kg}$.



- a) Kolikšna mora biti moč grelca?
 - b) Kolikšna je potem napetost na grelcu?
 - c) Kolikšno je razmerje dolžin $\frac{a}{b}$, označenih na sliki?
3. Iz posode v obliki kocke s stranico 10 cm napravimo ploščati kondenzator, tako da (vodoravni) zgornja in spodnja ploskev predstavljata plošči kondenzatorja. Med plošči priključimo napetost 40 V.
 - a) Za koliko se spremeni naboj na ploščah, če posodo napolnimo z dielektrično tekočino z dielektričnostjo $\varepsilon = 4$? (Če je v kondenzatorju snov z dielektričnostjo ε , se kapaciteta kondenzatorja poveča za faktor ε v primerjavi s praznim kondenzatorjem.)

- b) Odtočimo polovico tekočine. Za koliko se spremeni naboj na ploščah?
- c) Posodo obrnemo za 90° , tako da sta sedaj plošči kondenzatorja na (navpičnih) stranskih ploskvah posode. Za koliko se spremeni naboj na ploščah?

Skupina III

1. V dolgem pokončnem valju je brez trenja gibljiv bat z maso 2 kg in ploščino 20 cm^2 , ki zapira 2 l zraka s temperaturo 27°C . Na batu je utež z maso 10 kg. Valj in bat so iz snovi z dobro toplotno izolacijo. Tlak okolišnega zraka je 100 kPa.

- a) Kolikšni sta masa in tlak zraka v valju?

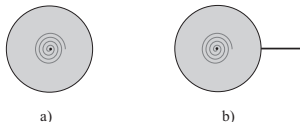
Utež hitro odstranimo in bat se začne dvigati.

- b) Kolikšen je tlak zraka v valju, ko je bat v ravnovesni legi?
- c) Kolikšna je temperatura zraka v valju, ko je bat v ravnovesni legi?
- d) Koliko dela opravi zrak do trenutka, ko doseže bat ravnovesno lego?

Specifična toplota zraka pri konstantnem volumnu je 720 J/kgK , pri konstantnem tlaku pa 1010 J/kgK .

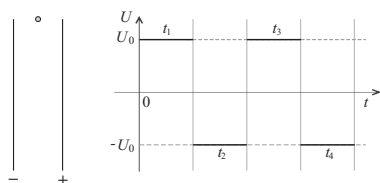
2. Torzijsko nihalo sestavljata okoli vodoravne geometrijske osi vrtljiv valj in polžasta vzmet (slika a)). Eno krajišče polžaste vzmeti je pripeto na os valja, drugo krajišče pa je togo vpeto izven valja. Polmer valja je 0,1 m, masa valja je 3 kg, sučni koeficient polžaste vzmeti pa $D = 0,20 \text{ Nm}$.

- a) Kolikšen je nihajni čas nihala?
- b) Na obod valja pritrdimo palico z maso 0,5 kg in dolžino 0,1 m. Palica je vodoravna in ima radialno smer glede na valj (slika b)). Kolikšen je sedaj nihajni čas?



3. Majhno nabito kroglico z nabojem $+0,5 \mu\text{As}$ in maso 1 g postavimo na sredino med ploščama in na vrh nabitega, navpično postavljenega velikega ploščatega kondenzatorja z razdaljo med ploščama 5 cm (glej sliko). Kroglico spustimo ob času $t = 0$. Napetost na kondenzatorju se spreminja, kot je prikazano na grafu na sliki, pri čemer je $U_0 = 100 \text{ V}$. Dolžina posameznih časovnih intervalov t_n na grafu je enaka 0,3 s. Ob času $t = 0$ je polariteta kondenzatorja takšna, kot kaže slika.

- a) Čez koliko časa kroglica prvič zadene ploščo in kolikšna je takrat hitrost kroglice v vodoravni smeri?



- b) Za koliko se spusti kroglica in koliko je oddaljena od leve plošče po času t_1 ? Kolikšni sta po tem času vodoravna in navpična komponenta hitrosti in v kateri smeri se giblje kroglica?
- c) Za koliko je oddaljena kroglica od leve plošče, ko pade za 80 cm? Kolikšni sta takrat vodoravna in navpična komponenta hitrosti in v kateri smeri se giblje kroglica?

Predpostavi, da je žogica obdana z izolatorjem in da so vsi trki prožni.

Naloge z državnega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2014/15

Skupina I

1. Igralec namiznega tenisa želi nasprotniku servirati žogico tako, da jo v višini mrežice požene z začetno hitrostjo v_0 v vodoravni smeri pravokotno na mrežo. Dolžina celotne mize je 273 cm, mrežica deli mizo po dolžini na dve polovici.

Pri servisu mora žogica enkrat pasti na polovico mize, ki pripada igralcu s servisem. Zračni upor zanemari in žogico obravnavaj kot prožno točkasto telo.

- a) S kolikšno hitrostjo v_0 mora poleteti žogica, da bo letela tik nad mrežico, ki je visoka 15,25 cm?
- b) Pod kolikšnim kotom in s kolikšno hitrostjo v_0 pa mora poleteti žogica v primeru, da je na začetku servisa v višini mize, se na razdalji $\frac{2}{3}$ od začetka serviserjeve polovice mize odbije in poleti tik nad mrežo?
2. Dve enaki vrvici s prožnostnima koeficientoma po 800 N/m pritrdimo na strop v razmiku 60 cm. Nanju obesimo umetniško sliko z maso 3,0 kg, tako da sta vrvici navpični. Ker težišče slike ni neposredno pod sredino med vrvicama, je slika nagnjena za kot 1° .
 - a) Za koliko je sila v daljši vrvici večja od sile v krajši vrvici?
 - b) Kolikšni sta sili v posameznih vrvicah?
 - c) Za koliko je v vodoravni smeri težišče slike oddaljeno od sredinske navpične črte med vrvicama?

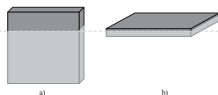
3. S 7 m visokega balkona vržemo v vodoravni smeri polno vrečko peska z maso 1 kg v škatlo, ki leži na tleh.

- Kolikšni sta navpična in vodoravna komponenta gibalne količine vrečke peska tik preden zadene škatlo, če je škatla na oddaljenosti 4 m od balkona, merjeno v vodoravni smeri?
- Kako blizu balkona moramo postaviti škatlo, da ne bo zdrsnila, ko vrečka pade v škatlo? Koeficient lepenja med škatlo in tlemi je 0,2.

Trk traja tako kratek čas, da je sunek teže zanemarljiv.

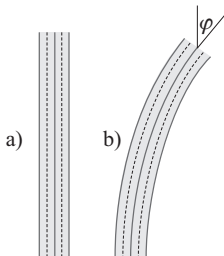
4. Kvader iz lesa z gostoto 700 kg/m^3 plava v vodi. Dimenzije kvadra so $100 \text{ cm} \times 100 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$.

- Najmanj koliko dela je potrebno, da potopimo kvader na sliki a)? *Namig:* Razmisli, kako se pri tem spreminja sila vzgona.
- Pokaži, da dobiš enak rezultat, če delo računaš prek sprememb potencialnih energij. Poleg težnostne potencialne energije $W_g = mgh$ lahko vpeljemo potencialno energijo vzgona kot $W_v = -m_v g h_v$, pri čemer je m_v masa in h_v težišče izpodrinjene vode.
- Na podlagi ugotovitve pri b) (ali kako drugače) izračunaj, koliko najmanj dela je potrebno, da kvader obrnemo iz lege b) v lego a)?

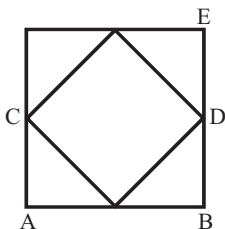


Skupina II

- Bimetal je naprava iz dveh kovinskih trakov z različnimi temperaturnimi koeficienti dolžinskega raztezka, zvarjenih skupaj po stiku (glej sliko a). (Na sliki je črtkano narisana sredina traku.) Pred segrevanjem je bimetal raven, ob segrevanju pa se ukrivi. Predpostavi, da se ukrivi v obliki krožnega loka in se sredina traku raztegne v skladu z enačbo za dolžinski raztezek. Trakova sta iz materialov s temperaturnima koeficientoma dolžinskega raztezka $2,31 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ in $1,08 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. Debelina posameznega traku je 0,5 mm, dolžina pa 10 cm.



- a) Temperatura se je spremenila za 50 K. Kolikšna bi bila razlika v dolžini trakov, če bi se raztezala neodvisno drug od drugega?
- b) Za koliko se je spremenila temperatura, če se je bimetal ukrivil tako, da je kot φ na sliki b) 30° ?
2. Iz železnih palic s krožnim presekom in debelino 1,0 mm sestavimo kvadratni okvir, kakršen je na sliki: kvadratni okvir ima vdolan še en kvadratni okvir, nagnjen pod kotom 45° . Dolžina stranice manjšega okvira je 20 cm. Specifični upor železa je $0,10 \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$.
- a) Kolikšen je upor stranice manjšega okvira in kolikšen stranice večjega okvira?



Kolikšen je nadomestni upor vezja, če priključka napetostnega izvira postavimo v točki

- b) C in D?
- c) A in E?
3. Iz posode v obliki kocke s stranico 10 cm napravimo ploščati kondenzator, tako da nasprotni navpični ploskvi predstavljata plošči kondenzatorja. Kondenzator nabijemo z napetostjo 40 V in potem odklopimo izvir.
- a) Za koliko se spremeni napetost na ploščah, če posodo napolnimo z dielektrično tekočino z dielektričnostjo $\varepsilon = 4$? (Če je v kondenzatorju snov z dielektričnostjo ε , se kapaciteta kondenzatorja poveča za faktor ε v primerjavi s praznim kondenzatorjem.)
- b) Na dnu posode odpremo ventil, tako da se nivo tekočine enakomerno spušča in v 10 s pade na 0. Na grafu skiciraj, kako se spreminja napetost na ploščah v odvisnosti od časa. Osí opremi s podatki.
- c) Plošči povežemo preko upornika. Kolikšen naj bo njegov upor, da bo napetost med ploščama med iztekanjem tekočine konstantna?
4. Trije dolgi vodniki so vzporedni med seboj in v enaki medsebojni oddaljenosti $a = 0,4 \text{ m}$. V prvem vodniku z leve teče tok 10 A v list, v drugem 10 A iz lista in v tretjem 20 A iz lista (glej sliko).

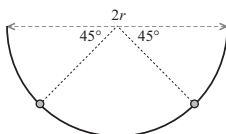


- a) S kolikšno silo in v kateri smeri moramo delovati na vsak meter vodnika, po katerem teče tok 20 A, da bo v ravnovesju?
- b) Kje na osi x , merjeno od prvega vodnika z leve, je gostota magnetnega polja nič?

Skupina III

1. Dva prevodna trakova z dolžino 1 m in širino 10 cm sta postavljena vzporedno drug nad drugega v razmiku 10 cm. Na enem krajišču sta povezana preko upornika za $1000\ \Omega$, na drugem pa priključena na napetost 24 V. Upor traku je zanemarljiv v primerjavi z uporom upornika. Teže pri nalogi ne upoštevamo.
 - a) Kolikšna je magnetna sila med trakovima? Pri računanju magnetnega polja in sile lahko trak nadomestiš z vodnikom, ki gre po sredini traku.
 - b) Kolikšen naboj se nabere na trakovih? Trakova lahko v tem primeru obravnavaš kot ploščati kondenzator.
 - c) Se trakova privlačita ali odbijata?
 - d) Ali obstaja vrednost upora, pri kateri se smer rezultante spremeni?
2. Curek laserske svetlobe z valovno dolžino 633 nm razcepimo na dva delna curka; prvi curek pošljemo skozi kiveto (kiveta je steklena posoda v obliki kvadra) z dolžino 30 mm, napolnjeno z okoliškim zrakom, drugega pa usmerimo na zaslon, kjer interferira s prvim curkom. Poti curkov so tolikšne, da dobimo ravno maksimalno ojačenje. Nato zrak v kiveti segrejemo za 12°C . Kiveta je odprta, tako da je tlak v kiveti ves čas enak zunanjemu zračnemu tlaku. Interferenčna slika na zaslonu se spremeni; namesto ojačenja dobimo oslabitev. Kolikšen je lomni kvocient n (okoliškega) zraka?

Za pline velja, da je $n - 1$ premo sorazmerno z gostoto plina. Zunanja temperatura je 18°C , zunanji zračni tlak pa 97 kPa. Namig: Pogoji za oslabitev dveh valovanj lahko zapišemo na dva načina: razlika optičnih poti (nd) mora biti enaka lihemu večkratniku polovične valovne dolžine, ali: razlika časov potovanja mora biti enaka lihemu večkratniku polovice nihajnega časa.
3. Žica je zvita v polkrog s polmerom 5 cm in stoji pokončno v zemeljskem težnem polju. Na žici sta dve enaki kroglici s polmerom 0,625 cm, z maso po 0,1 g in enakim nabojem. Kroglici lahko drsita po žici brez trenja. Kroglici sta v ravnovesju v legi, ki je narisana na sliki.



- a) Kolikšen je naboj posamezne kroglice?

- b) Koliko dela moramo opraviti, da kroglici iz ravnovesne lege premaknemo na dno polkrožne žice tako, da se ravno še ne stikata? Privzemi, da je polmer kroglice dosti manjši od polmera obroča.
- c) S kolikšno hitrostjo kroglici zletita z žice potem, ko ju spustimo?
4. Na vrstico s prožnostnim koeficientom 500 N/m obesimo utež z maso 1 kg .
- a) Koliko smemo največ povleči tako sestavljeno nihalo iz ravnovesne lege navzdol, da bo še nihalo sinusno?
- b) Utež iz ravnovesne lege povlečemo navzdol za $4,0 \text{ cm}$ in nato spustimo. Izračunaj nihajni čas takega nihala.

Upoštevaj, da prožna sila v vrstici deluje le, ko je napeta. Za težni pospešek vzemi 10 m/s^2 .

Tekmovanje v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike za srednje šole v šolskem letu 2014/15 – šolsko tekmovanje

1. skupina – Poslovna matematika

1. naloga

Skupina 10 delavcev je v 12 dneh izkopala jarek, dolg 250 m , širok 100 cm in globok 80 cm . Na dan so kopali po 8 ur in pri tem zaostali za normo za 20% .

- a) Koliko dni bi kopala jarek dvakrat večjih dimenzij skupina 16 delavcev pri delavniku, ki je za $\frac{1}{4}$ časa daljši in normi preseženi za $\frac{1}{5}$?
- b) Koliko dni več oziroma manj rabi za izkop jarka druga skupina v primerjavi s prvo? Izrazite v odstotkih.

2. naloga

V živalskem vrtu razdelijo vsak dan 150 kg hrane: petino štirim medvedom, 45 odstotkov petim odraslim pumam in ostanek štirim levom.

- a) Kako si živali razdelijo hrano, če vsak medvedji mladiček poje 1 kg mesa manj kot odrasel medved, mladička pa sta dva; odrasle pume pojejo vse enako; vsaka od dveh levinj poje dvakrat manj hrane od samcev? Rešitve vpišite v tabelo.

Št.	ŽIVALI V ŽIVALSKEM VRTU					
Živali	Medvedi	q v kg	Pume	q v kg	Levi	q v kg
1	Odrasli medved		Odrasla puma		Samec	
2	Odrasli medved		Odrasla puma		Samec	
3	Medvedji mladič		Odrasla puma		Levinja	
4	Medvedji mladič		Odrasla puma		Levinja	
5	////////////////	////	Odrasla puma		////////////////	////////////////
	Medvedi		Pume		Levi	

- b) Katera od živali poje največ in katera naimani?

- c) Za koliko odstotkov več hrane dobijo pume v primerjavi z medvedi?
Koliko hrane pojedjo pume v petih dneh?
- d) Ali dobi levinja več hrane kot medvedji mladič? Koliko več ali koliko manj?

3. naloga

Anej in Brina sta imela na začetku visokošolskega študija enaki mesečni štipendiji, vsak po 222,00 EUR. Višina štipendije se jima je povečevala z novim študijskim letom, in sicer Aneja za 8 odstotkov, Brini pa za 25,00 EUR.

- a) Kolikšno mesečno štipendijo bo imel Anej po dveh letih?
- b) Kateri od njiju bo imel višjo mesečno štipendijo po dveh letih ter za koliko EUR in za koliko odstotkov?
- c) Izračunajte vrednost izplačanih štipendij za Aneja in za Brino po treh letih visokošolskega študija?

4. naloga

Banka uporablja navadni obrestni račun, dekurzivno obrestovanje in sistem štetja dni (K, 365).

- a) Koliko EUR moramo vložiti v banko 1. aprila, da bi 3. avgusta istega leta lahko dvignili z obrestmi vred 14.572,00 EUR, če banka obrestuje vloge s 4,8 % letno obrestno mero?
- b) Za koliko % bi morala banka povečati obrestno mero, da bi bil dvig glavnice z obrestmi vred 3. avgusta večji za 2,5 %?
- c) Za koliko odstotnih točk bi morala banka povečati obrestno mero, da bi bil dvig glavnice z obrestmi vred 3. avgusta večji za 2,5 %?

2. skupina – Statistika

1. NALOGA

Dijaki 4. letnikov Srednje šole »Čebelica« so na šoli izvedli anketo, s katero so želeli ugotoviti način prihoda dijakov v šolo. V ta namen so anketirali dijake 3. in 4. letnika. Rezultati ankete so prikazani v spodnji tabeli.

Tabela 1: Dijaki Srednje šole »Čebelica« po načinu prihoda v šolo in po letnikih izobraževanja 1. septembra 2014

Način prihoda v šolo	Letnik izobraževanja		
	3. letnik	4. letnik	Skupaj
Peš	17	19	36
Z avtobusom	25	26	51
Z avtomobilom	19	28	47
Z vlakom	15	13	28
Skupaj	76	86	162

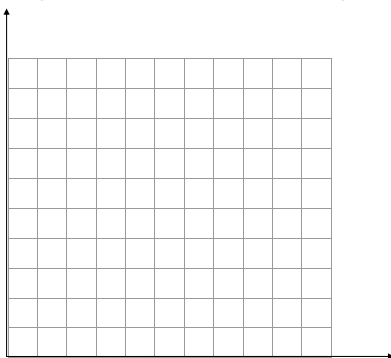
Vir: Anketa, 1. september 2014

- a) Izračunajte strukturo dijakov po načinu prihoda v šolo za oba letnika izobraževanja na Srednji šoli »Čebelica« in jo izrazite v odstotkih (*na 1 decimalno mesto natančno*).

Tabela 2: **Struktura dijakov Srednje šole »Čebelica« po načinu prihoda v šolo 1. septembra 2014** (v odstotkih)

Način prihoda v šolo	Letnik izobraževanja		
	3. letnik	4. letnik	Skupaj
Peš			
Z avtobusom			
Z avtomobilom			
Z vlakom			
Skupaj			

- b) Razložite izračunano strukturo dijakov 3. letnika po načinu prihoda v šolo.
- c) Strukturo dijakov po načinu prihoda v šolo za oba letnika izobraževanja na Srednji šoli »Čebelica« grafično prikažite s strukturnimi stolpci.



2. NALOGA

Za državo »Koromandijo« imamo dane naslednje podatke o številu podjetij, številu zaposlenih na podjetje in številu upravnih enot (UE) 1. 1. 2014.

Tabela 3: **Število podjetij, število zaposlenih na podjetje in število upravnih enot po območjih v državi »Koromandiji« dne 1. 1. 2014**

Območje	Število podjetij	Število zaposlenih na podjetje	Število upravnih enot
Hrib	270	88	35
Grič	376	55	43
Gora	144	201	21
Planota	92	89	64

Vir: Prirejeni podatki

- a) Izračunajte število zaposlenih na posameznih območjih. (*Rezultate vpišite v tabelo 4 spodaj.*)
- b) Koliko je bilo zaposlenih na upravno enoto na posameznih območjih? (*Rezultate vpišite v tabelo 4 spodaj.*)
- c) Koliko podjetij pride na eno upravno enoto na vsakem območju? (*Rezultate vpišite v tabelo 4 spodaj.*)

Tabela 4: Število zaposlenih, število zaposlenih na upravno enoto in število podjetij na upravno enoto po območjih v državi »Koromandiji« dne 1. 1. 2014

Območje	Št. zaposlenih	Št. zaposlenih /UE	Št. Podjetij/UE
Hrib			
Grič			
Gora			
Planota			

- d) Kako bi s koeficientom izrazili, da je v nekem podjetju območja Hrib v določenem času vsak zaposleni ustvaril povprečno 850 EUR dohodka?

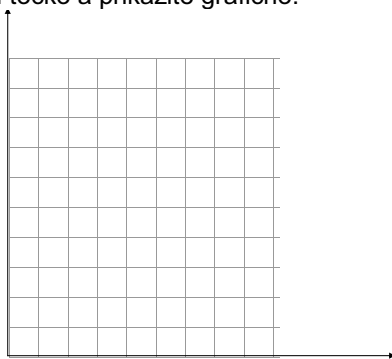
3. NALOGA

Tabela 5: Tujci v Sloveniji v letih od 2010 do 2014
(stanje 1.1. v posameznem letu)

Leto	Št. tujcev	Izračunani indeksi
2010	82.316	
2011	82.746	
2012	85.555	
2013	91.385	
2014	96.608	

Vir: Statistični urad RS

- a) Z ustreznimi indeksi izračunajte odstotne spremembe tujcev iz leta v leto v Sloveniji. (Rezultate vpišite v tabelo 5 zgoraj)
- b) Izračunane indekse pod točko a prikažite grafično.



- c) **Dopolnite naslednji stavek.**

Leta 2013 je bilo v Sloveniji 91.385 tujcev, kar je bilo za _____ % _____ kot leta _____.

- d) Predvidevamo, da se bo naslednji dve leti število tujcev v Sloveniji vsako leto povečalo za 3 %. Ocenite število tujcev v Sloveniji leta 2016.
- e) Zapišite koeficient rasti za leto 2015, če bi se število tujcev leta 2015 zmanjšalo za 3,5 %.

4. NALOGA

Za 80 dijakov 4. letnika Srednje šole »Čebelica« smo zbrali podatke o telesni masi in jih izrazili v obliki relativnih frekvenc. Podatki so prikazani v tabeli 6.

Tabela 6: Relativne frekvence za frekvenčno porazdelitev telesnih mas 80 dijakov 4. letnika Srednje šole »Čebelica«

Telesna masa v kg	f_j^o	f_j	y_j	$y_j \cdot f_j$
nad 40 do 50	0,100			
nad 50 do 60	0,250			
nad 60 do 70	0,300			
nad 70 do 80	0,200			
nad 80 do 90	0,100			
nad 90 do 100	0,050			
Skupaj	1,000			

Vir: Prirejeni podatki

- Zapišite število dijakov po razredih. (Rezultate vpišite v tabelo 6 zgoraj.)
- Izračunajte kumulativo relativne frekvence drugega razreda.
- Kaj nam pove izračunana kumulativa relativne frekvence drugega razreda?
- Koliko dijakov ima telesno maso nad 60 do 90 kg?
- Izračunajte povprečno telesno maso na dijaka.

Tekmovanje v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike za srednje šole v šolskem letu 2014/15 – državno tekmovanje

1. skupina – Poslovna matematika

1. NALOGA

Tiskarna vsako noč štiri ure tiska časopis, ki izide naslednji dan. Pri tem lahko na petih strojih natisne 100.000 izvodov časopisa s 30 stranmi. V noči iz petka na soboto k vsakemu izvodu natisnejo še »sobotno prilogo«.

- Kolikšna bo naklada časopisa, če bo tiskarna k 30 stranem časopisa dodala še prilogo z 10 stranmi, pri tem pa ima za tisk na voljo en stroj več?
- Največ koliko strani lahko ima priloga, če morajo v tiskarni natisniti 100.000 izvodov časopisa, na voljo pa imajo en stroj več, ki je za 50 % zmogljivejši od ostalih?
- Kakšen pa bi bil rezultat, če bi vseh pet strojev, s katerimi tiskarna tiska, nadomestila z novimi, ki so za 10 % zmogljivejši od starih?

2. NALOGA

- Povodenj je prizadela štiri kmete in povzročila škodo: prvemu 60.000,00 EUR, drugemu 25.000,00 EUR, tretjemu 5.000,00 EUR in četrtemu 45.000,00 EUR. Prvotne vrednosti njihovih posestev so bile ocenjene na 500.000,00 EUR, 250.000,00 EUR, 100.000,00 EUR oziroma 300.000,00 EUR.

Kmetje so dobili pomoč v znesku 105.525,00 EUR, ki so jo razdelili po obeh kriterijih hkrati, in sicer premo sorazmerno nastali škodi in premo sorazmerno vrednosti posestev. Izračunajte, koliko EUR pomoči je dobil posamezni kmet.

- b) Štiri delovne skupine morajo očistiti 5.700 m vodotokov. Dnevno očistijo 40 m, 50 m, 60 m oziroma 20 m vodotokov. Druga skupina začne z delom 4 dni za prvo, tretja 10 dni za prvo in četrta šele 5 dni za tretjo. Kolikšni bodo deli, ki jih bo opravila posamezna skupina in kdaj bo delo opravljeno?

3. NALOGA

Prebivalstvo nekega mesta se je v preteklem letu povečalo za 12,5 %, tako da je mesto ob koncu leta imelo 46.572 ljudi.

- a) Koliko je bilo med njimi moških in koliko žensk, če je bilo razmerje med njimi enako kot prejšnje leto, ko je bilo v mestu 22.458 moških?
- b) Za koliko odstotkov je v tem mestu letos več žensk od moških?

4. NALOGA

Študentka Lina kupuje prenosni računalnik. Le-ta stane v dveh različnih trgovinah 1.000,00 EUR.

- a) Ker kupuje preko spleta, mora 20 % plačati takoj, ostali dolg pa po devetih mesecih z obrestmi vred. Izračunajte dolžni znesek, če ji na ostanek dolga zaračunajo 6-% obresti po navadnem obrestnem računu. Koliko EUR jo v tem primeru dejansko stane računalnik?
- b) V drugi trgovini mora prav tako 20 % plačati takoj, ostanek dolga pa po devetih mesecih z obrestmi vred. Izračunajte dolžni znesek, če ji na ostanek dolga zaračunajo 9-% obresti po obrestno obrestnem računu pri mesečni kapitalizaciji in relativni obrestni meri. Koliko EUR jo v tem primeru dejansko stane računalnik?
- c) V kateri trgovini so zanjo nakupni pogoji finančno ugodnejši in za koliko EUR?
- d) Za koliko časa (let, dni) bi morala privarčevani denar 855,65 EUR vezati v banki, da bi lahko plačala računalnik po ceni 1.000,00 EUR? Banka vezane vloge obrestuje z obrestno obrestnim računom po 9-% letni obrestni meri in celoletni kapitalizaciji?

2. skupina – Statistika

1. NALOGA

Tabela 1: Gostje po vrstah občin v Sloveniji v letu 2013

Vrsta občine	P ₁ %	Delne vsote	Število gostov	
Zdraviliške občine		23,3		
Gorske občine		49,5		
Obmorske občine		67,0		
Ljubljana		81,9		
Mestne občine		90,7		
Druge občine		100,0		
Skupaj				

Vir: Statistični urad RS

- a) Izračunajte strukturne odstotke za posamezne občine (na 1 decimalno mesto natančno).
- b) Razložite izračunani strukturni odstotek za obmorske občine.
- c) Izračunajte število gostov po posameznih občinah, če je bilo skupno 3,384.491 gostov v Sloveniji v letu 2013. (Rezultate zaokrožite na celo število.)

d) Strukturo gostov po vrstah občin grafično prikažite s strukturnim krogom.

2. NALOGA

Tabela 2: Živorojeni otroci v Sloveniji po spolu v letih od 2007 do 2013

Leto	Živorojeni otroci - skupaj	Živorojeni otroci - dečki	Živorojeni otroci - deklice	a)	b)	c)	d)
2007	19.097	9.784	9.313				
2008	21.055	10.756	10.299				
2009	21.180	10.948	10.232				
2010	21.538	11.091	10.447				
2011	21.164	10.870	10.294				
2012	21.185	10.947	10.238				
2013	20.383	10.424	9.959				

Vir: Statistični urad RS

- Izračunajte spremembe v skupnem številu živorojenih otrok glede na leto 2010.
- Izračunajte spremembe v številu živorojenih dečkov od leta do leta v obliki indeksov.
- Koliko deklic več oz. manj se je rodilo v posameznem letu glede na predhodno leto?
- Izračunajte koeficiente rasti za skupno število živorojenih otrok po letih.
- Razložite vse izračunane kazalce za leto 2009.
- Koliko bi znašalo skupno število živorojenih deklic v letu 2014, če bi bila stopnja rasti za število živorojenih deklic $-0,6\%$?

3. NALOGA

Naselje »Niga« šteje 150 hiš. Ko so zbirali podatke o starosti posamezne nepremičnine (v dopolnjenih letih), so ugotovili, da je 12 % nepremičnin starih do 5 let, 28 % do 10 let, 60 % do 15 let, 80 % do 20 let, 90 % do 25 let, 96 % do 30 let, 98 % do 35 let. Nobena hiša v naselju ni starejša od 40 let.

Tabela 3: Frekvenčna porazdelitev starosti hiš v naselju »Niga«

Starost hiše v letih				

- Opreделите razrede za razvrstitev hiš glede na starost nepremičnine.
- Izračunajte frekvence, relativne frekvence, kumulativno absolutnih in kumulativno relativnih frekvenc.
- Kolikšen odstotek hiš je starih od 11 do 15 let?
- Koliko hiš je starih do 25 let?

4. NALOGA

V podjetju »Elektronček«, d. o. o. z desetimi zaposlenimi so izvedli analizo dopusta po zaposlenih. Dobili so naslednje rezultate: dva delavca imata 29 dni letnega dopusta, po en delavec 26, 25 in 24 dni letnega dopusta, dva 23 dni, ostali pa imajo manj kot 23 dni dopusta.

- Izračunajte tisto število dni dopusta, od katerega je polovica delavcev imela manj ali kvečjemu toliko dni dopusta.
- Ali lahko določimo modus iz zgoraj navedenih neurejenih podatkov? Odgovor utemeljite.
- Podatke je vestna administratorka uredila v naslednji tabeli. Tokrat ji pomagajte izračunati najpogostejše število dni dopusta iz urejenih podatkov. Rezultat tudi razložite. Izračun podkrepite z oceno iz grafičnega prikaza.

Tabela 4: Frekvenčna porazdelitev števila dni dopusta za 10 zaposlenih v podjetju »Elektronček«, d.o.o.

Število dni dopusta	Število delavcev
do 22	3
od 23 do 25	4
od 26 do 28	1
od 29 do 31	2
Skupaj	10

Vir: Prirejeni podatki

Rešitve nalog z regijskega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2014/15

Skupina I

1. Podatki: $r = 0,5 \text{ m}$, $v_0 = 60 \text{ m/s}$.

a) V vodoravni smeri se puščica giblje enakomerno in naredi pot $x = v_0 t$, v navpični pa pada enakomerno pospešeno, $y = \frac{1}{2} g t^2$, in doseže spodnji rob tarče ($y = r$) ob času

$$t = \sqrt{\frac{2r}{g}}.$$

V tem času opravi pot

$$x = v_0 t = v_0 \sqrt{\frac{2r}{g}} = 19,2 \text{ m}.$$

Najmanjša razdalja, pri kateri zgreši tarčo, je 19,2 m.

b) V tem primeru veljajo enačbe za poševni met:

$$x = v_0 t \cos \varphi, \quad y = v_0 t \sin \varphi - \frac{1}{2} g t^2.$$

Iz zahteve $y = 0$ sledi

$$v_0 t \sin \varphi - \frac{1}{2} g t^2 = 0, \quad t = \frac{2 v_0 \sin \varphi}{g}$$

in iz enačbe za x :

$$x = v_0 \frac{2 v_0 \sin \varphi \cos \varphi}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}.$$

Končno

$$\sin 2\varphi = \frac{gx}{v_0^2}, \quad \varphi = 1,5^\circ.$$

Puščico mora izstreliti po kotom $1,5^\circ$ proti vodoravnici.

(Lahko izhajamo iz enačbe za domet pri poševnem metu.)

2. Podatki: $m = 1 \text{ kg}$, $M = 2 \text{ kg}$, $\varphi = 60^\circ$.

a) Sila lopute na zaboj (F) deluje v pravokotni smeri glede na loputo; nasprotno enaka sila deluje na loputo. Iz ravnovesja navorov na loputo sledi:

$$mg \frac{1}{2} l \sin \varphi = F l, \quad F = \frac{mg \sin \varphi}{2} = \frac{mg\sqrt{3}}{4} = 4,24 \text{ N}.$$

b) Na tla pritiska navpična komponenta sile F in teža zaboja:

$$F_{\perp} = Mg + F \sin \varphi = \left(M + \frac{m \sin^2 \varphi}{2} \right) g = \left(M + \frac{3m}{8} \right) g = 23,3 \text{ N}.$$

c) Sila lepenja mora uravnovesiti vodoravno komponento sile lopute na zaboj:

$$F_l = F \cos \varphi = \frac{mg \sin \varphi \cos \varphi}{2} = \frac{mg\sqrt{3}}{8} = 2,12 \text{ N}.$$

d) Koeficient lepenja mora biti vsaj

$$k_l = \frac{F_l}{F_{\perp}} = \frac{\sqrt{3} m}{8M + 3m} = 0,091.$$

3. Podatki: $m = 1 \text{ kg}$, $M = 20 \text{ kg}$, $v_0 = 1 \text{ m/s}$, $\varphi = 10^\circ$.

a) Ohranja se vodoravna komponenta skupne gibalne količine. Na začetku je enaka 0, na koncu je enaka vsoti gibalne količine vozička s fantičkom, ki se giblje s hitrostjo v v levo, in vodoravne komponente gibalne količine medicinke:

$$0 = Mv + mv_0 \cos \varphi, \quad v = -\frac{mv_0 \cos \varphi}{M}.$$

(Predznak pove, da se voziček s fantičkom giblje v levo.)

Relativna hitrost glede na voziček je razlika vodoravne komponente hitrosti medicinke in hitrosti vozička s fantičkom:

$$v_r = v_0 \cos \varphi - v = v_0 \cos \varphi + \frac{mv_0 \cos \varphi}{M} = \frac{M+m}{M} v_0 \cos \varphi = 1,03 \text{ m/s}.$$

b) Delo se porabi za povečanje kinetične energije medicinke in vozička s fantičkom:

$$A = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \left(1 + \frac{m}{M} \cos^2 \varphi\right) = 0,524 \text{ J}.$$

Skupina II

1. Podatki: $V_1 = 100 \text{ cm}^3$, $V_2 = 60 \text{ cm}^3$, $T_0 = 27^\circ\text{C}$, $\Delta T = 1^\circ\text{C}$, $r = 2 \text{ mm}$.

Zapišimo splošno plinsko enačbo za spremembo v levi posodi:

$$\frac{p(V_1 + \Delta V)}{T_0 + \Delta T} = \frac{p_0 V_1}{T_0},$$

pri čemer smo s p_0 označili začetni tlak v posodi, s p tlak po spremembi temperature in z ΔV povečanje prostornine.

Ker je kapljica na začetku in na koncu spremembe v ravnovesju, sta tlaka v desni posodi na začetku in na koncu enaka tistima v levi posodi. Prostornina v desni posodi se zmanjša za toliko, za kolikor se v levi poveča. Splošna plinska enačba za zrak v desni posodi ima potem obliko:

$$\frac{p(V_2 - \Delta V)}{T_0 - \Delta T} = \frac{p_0 V_2}{T_0},$$

Prvo enačbo delimo z V_1 , drugo pa z V_2 . Ker sta sedaj desni strani enačb enaki, lahko izenačimo tudi levi strani. Po okrajšanju p dobimo:

$$\frac{V_1 + \Delta V}{V_1(T_0 + \Delta T)} = \frac{V_2 - \Delta V}{V_2(T_0 - \Delta T)}.$$

Po preureditvi sledi

$$[(V_1 + V_2) T_0 + (V_1 - V_2) \Delta T] \Delta V = 2V_1 V_2 \Delta T$$

in končno

$$\Delta V = \frac{2V_1 V_2 \Delta T}{(V_1 + V_2) T_0 + (V_1 - V_2) \Delta T} \approx \frac{2V_1 V_2 \Delta T}{(V_1 + V_2) T_0} = 0,25 \text{ cm}^3,$$

saj je drugi člen v imenovalcu majhen in ga lahko zanemarimo.

Za premik kapljice dobimo

$$\Delta l = \frac{\Delta V}{\pi r^2} = 1,9 \text{ cm}.$$

2. Podatki: $t = 2 \text{ h}$, $V = 0,1 \text{ l}$, $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, $R_g = 500 \text{ }\Omega$, $R_0 = 223 \text{ }\Omega$, $U_0 = 380 \text{ V}$, $\eta = 0,5$, $q_i = 2,26 \text{ MJ/kg}$.

a) Toplota se porabi za segretje vode od začetne temperature T_0 do vrelišča $T_v = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ in za izparitev vode ($m = \rho V = 100 \text{ g}$):

$$Q = mc_p(T_v - T_0) + mq_i = 260 \text{ kJ}.$$

Grelec mora dovesti dva krat toliko energije, zato je celotna moč grelca:

$$P = \frac{2Q}{t} = 72 \text{ W}.$$

b) Iz $P = U_g^2/R_g$ sledi za napetost na grelcu:

$$U_g = \sqrt{PR_g} = 190 \text{ V}.$$

c) Upor dela tuljave z dolžino a in upor dela tuljave z dolžino b zapišemo kot

$$R_a = \frac{a}{a+b} R_0, \quad R_b = \frac{b}{a+b} R_0.$$

Veze lahko predstavimo kot zaporedno vezan upornik R_a z vzporedno vezanima grelcem z uporom R_g in upornikom R_b . Za nadomestni upor grelca in upornika R_b velja

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{R_g} + \frac{1}{R_b}, \quad R_n = \frac{R_g R_b}{R_g + R_b}.$$

Gonilna napetost U_0 se razdeli v razmerju uporov:

$$\frac{R_a}{R_n} = \frac{U_a}{U_b} = \frac{U_0 - U_b}{U_b} = \frac{U_0 - U_g}{U_g} \equiv k.$$

Parameter k je v našem primeru enak 1. Dobimo

$$R_a = R_0 - R_b = k R_n = \frac{k R_g R_b}{R_g + R_b}$$

in po preureditvi kvadratno enačbo za R_b :

$$R_b^2 + ((k+1)R_g - R_0)R_b - R_g R_0 = 0,$$

s splošno rešitvijo

$$R_b = \frac{R_0 - (k+1)R_g \pm \sqrt{(R_0 - (k+1)R_g)^2 + 4R_g R_0}}{2}.$$

Smiselna je rešitev s pozitivnim predznakom, $R_b = 124 \text{ }\Omega$.

Za iskano razmerje dobimo:

$$\frac{a}{b} = \frac{R_a}{R_b} = \frac{R_0 - R_b}{R_b} = \frac{99 \text{ }\Omega}{124 \text{ }\Omega} = 0,80.$$

3. Podatki: $a = 10 \text{ cm}$, $U_0 = 40 \text{ V}$, $\varepsilon = 4$.

a) Kapaciteta prazne posode je

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{a} = \frac{\varepsilon_0 a^2}{a} = \varepsilon_0 a = 0,89 \text{ pF},$$

ko je napolnjena, pa $C = \varepsilon C_0$. Sprememba naboja na ploščah je enaka

$$\Delta e = CU - C_0 U = (\varepsilon - 1)C_0 U = 107 \cdot 10^{-12} \text{ As}.$$

b) Posodo, napolnjeno do polovice, lahko predstavimo kot zaporedno vezana kondenzatorja z razdaljo med ploščama $\frac{1}{2}a$.

$$C_1 = \frac{2\varepsilon_0 S}{a}, \quad C_2 = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 S}{a}.$$

Za nadomestno kapaciteto C' velja

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{a}{2\varepsilon_0 S} + \frac{a}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{a(\varepsilon + 1)}{2\varepsilon\varepsilon_0 a^2}, \quad C' = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 a}{\varepsilon + 1} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1} C_0.$$

Sprememba naboja na ploščah je enaka

$$\Delta e' = C'U - CU = -\frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon}{\varepsilon + 1} C_0 U = -80 \cdot 10^{-12} \text{ As}.$$

c) Vezje sedaj lahko predstavimo kot vzporedno vezana kondenzatorja s polovično ploščino, od katerih je eden prazen, drugi pa napolnjen z dielektrično tekočino

$$C'' = \frac{\varepsilon_0 S}{2a} + \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{2a} = \frac{\varepsilon + 1}{2} C_0.$$

Sprememba naboja na ploščah je enaka

$$\Delta e'' = C''U - C'U = \left(\frac{\varepsilon + 1}{2} - \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1} \right) C_0 U = \frac{(\varepsilon - 1)^2}{2(\varepsilon + 1)} C_0 U = 32 \cdot 10^{-12} \text{ As}.$$

Skupina III

1. Podatki: $m_b = 2 \text{ kg}$, $m_u = 10 \text{ kg}$, $T_0 = 27^\circ\text{C}$, $V_0 = 2 \text{ l}$, $p_0 = 100 \text{ kPa}$, $S = 20 \text{ cm}^2$, $c_V = 720 \text{ J/kgK}$, $c_p = 1010 \text{ J/kgK}$.

a) Tlak v posodi je enak vsoti zunanega zračnega tlaka in tlaka zaradi teže uteži in bata:

$$p_a = p_0 + \frac{(m_u + m_b)g}{S} = 159 \text{ kPa}.$$

Maso zraka dobimo iz splošne plinske enačbe:

$$\frac{p_a V_0}{T_0} = \frac{m}{M} R, \quad m = \frac{M p_a V_0}{R T_0} = 3,7 \text{ g}.$$

b) Po odstranitvi uteži je v ravnovesju tlak enak

$$p_b = p_0 + \frac{m_b g}{S} = 110 \text{ kPa}.$$

c) Sprememba je adiabatna in veljata enačbi:

$$p_a V_0^\kappa = p_b V^\kappa \quad \text{in} \quad \frac{p_a V_0}{T_0} = \frac{p_b V}{T},$$

pri čemer je $\kappa = c_p/c_V = 1,4$.

Prvo enačbo potenciramo

$$p_a^{1/\kappa} V_0 = p_b^{1/\kappa} V,$$

in delimo z drugo enačbo. Dobimo

$$p_a^{1/\kappa-1} T_0 = p_b^{1/\kappa-1} T, \quad T = T_0 \left(\frac{p_b}{p_a} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 270 \text{ K}.$$

d) Delo je pri adiabatni spremembi enako negativni spremembi notranje energije:

$$A = -\Delta W_n = m c_V (T_0 - T) = 80 \text{ J}.$$

2. Podatki: $M = 3 \text{ kg}$, $R = 10 \text{ cm}$, $m = 0,5 \text{ kg}$, $l = 10 \text{ cm}$, $D = 0,20 \text{ Nm}$.

a) Koeficient D igra pri sučnem nihalu enako vlogo kot koeficient k pri nihalu na vijačno vzmet, vztrajnostni moment pa enako vlogo kot masa. Vztrajnostni moment valja je $J = \frac{1}{2}MR^2$, nihajni čas pa

$$t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} = 1,72 \text{ s}.$$

b) V tem primeru moramo upoštevati še vztrajnostni moment palice, ki pa se suče okoli osi, ki ne gre skozi težišče palice. Težišče je oddaljeno od osi za $R + \frac{1}{2}l$ in iz Steinerjevega izreka sledi

$$J_{\text{palica}} = m \left(R + \frac{1}{2}l \right)^2 + \frac{ml^2}{12}.$$

Celotni vztrajnostni moment je vsota vztrajnostnega momenta valja in vztrajnostnega momenta palice. Za nihajni čas dobimo

$$t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J + J_{\text{palica}}}{D}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2}MR^2 + mR(R + l) + \frac{1}{3}ml^2}{D}} = 2,29 \text{ s}.$$

3. Podatki: $e = +0,5 \mu\text{As}$, $m = 1 \text{ g}$, $d = 5 \text{ cm}$, $U_0 = 100 \text{ V}$, $t_1 = 0,3 \text{ s}$, $h = 80 \text{ cm}$.

a) V navpični smeri kroglica enakomerno pospešeno pada s težnim pospeškom g , v vodoravni smeri pa se giblje pospešeno s pospeškom, ki je posledica električnega polja v kondenzatorju:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m} = \frac{eU_0}{md} = 1 \text{ m/s}^2.$$

in kaže proti levi plošči. Ob času t_1 pa se smer pospeška spremeni.

Do trka s ploščo prepotuje v vodoravni smeri razdaljo $\frac{1}{2}d$. Za iskani čas poto-vanja do plošče t_a velja

$$\frac{1}{2}d = \frac{1}{2}at_a^2, \quad t_a = \sqrt{\frac{d}{a}} = \sqrt{\frac{md^2}{eU_0}} = 0,224 \text{ s}.$$

V tem času doseže hitrost v vodoravni smeri

$$v_{xa} = at_a = 22,4 \text{ cm/s}.$$

Račun je upravičen, saj se v tem času smer pospeška še ni spremenila.

b) V času t_1 kroglica pade za

$$h_b = \frac{1}{2}gt_1^2 = 44,1 \text{ cm}$$

in doseže v navpični smeri hitrost

$$v_{yb} = gt_1 = 294 \text{ cm/s}.$$

V vodoravni smeri se kroglica odbije z nasprotno enako hitrostjo. Sila sedaj zavira gibanje s pojemkom, ki je po velikosti enak a . Os x usmerimo v desno in njeno izhodišče postavimo v levo ploščo. Za vodoravno komponento hitrosti v času t_1 potem velja

$$v_{xb} = v_{xa} - a(t_1 - t_a) = 14,7 \text{ cm/s}.$$

Komponenta hitrosti je pozitivna in kaže v smeri osi x . Torej se kroglica giblje od leve plošče proti desni.

V vodoravni smeri v tem času opravi pot:

$$x_b = v_{xa}(t_1 - t_a) - \frac{1}{2}a(t_1 - t_a)^2 = 1,42 \text{ cm}.$$

c) Globino h doseže ob času t_c , za katerega velja

$$h = \frac{1}{2}gt_c^2, \quad t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,404 \text{ s}.$$

in v tem času doseže v navpični smeri hitrost

$$v_{yc} = gt_c = 396 \text{ cm/s}.$$

Ker se polariteta na ploščah zamenja, se ob času t_1 spremeni predznak pospeška a , ki ima sedaj isto smer kot hitrost. Za vodoravno komponento hitrosti ob času t_c dobimo

$$v_{xc} = v_{xb} + a(t_c - t_1) = 25,1 \text{ cm/s}.$$

Komponenta hitrosti v navpični smeri kaže navzdol, komponenta v vodoravni smeri pa od leve plošče proti desni. (Kota ni potrebno računati.)

Za odmik od leve plošče sledi

$$x_c = x_b + v_{xb}(t_c - t_1) + \frac{1}{2}a(t_c - t_1)^2 = 3,49 \text{ cm}.$$

Rešitve nalog z državnega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2014/15

Skupina I

1. Podatki: $h = 15,25 \text{ cm}$, $l = 273 \text{ cm}$.

- a) Izračunamo čas leta do mreže

$$t = 2 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,35 \text{ s},$$

nato pa iz tega hitrost

$$v_0 = \frac{s}{2t} = 3,9 \text{ m/s}.$$

- b) Lahko upoštevamo simetrijo trajektorije in si s tem olajšamo delo. Žogica se dva krat dvigne do višine h in enkrat spusti s te višine. Čas leta je enak

$$t = 3 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,53 \text{ s}.$$

Od tod lahko nato enostavno določimo začetno hitrost v smeri x

$$v_x = \frac{s}{2t} = 2,58 \text{ m/s}.$$

Hitrost v smeri y lahko določimo prek energije ali z uporabo že izračunanega časa

$$v_y = \sqrt{2gh} = 1,73 \text{ m/s}.$$

Tako dobimo končni rezultat

$$v_0 = 3,11 \text{ m/s}$$

in

$$\tan \varphi = \frac{v_y}{v_x}, \quad \varphi = 34^\circ.$$

2. Podatki: $k = 800 \text{ N/m}$, $d = 60 \text{ cm}$, $m_s = 3,0 \text{ kg}$, $\varphi = 1^\circ$.

Sili v levi in desni vrvi označimo s F_l in F_d , raztezka leve in desne vrvice pa z x_l in x_d .

a) Ker je slika nagnjena, sta vrvi raztegnjeni na različno dolžino, zato sta sili v vrvicah različni. Po Hookovem zakonu vemo

$$F_l = k x_l, \quad F_d = k x_d.$$

Iz geometrije lahko razliko raztezkov povežemo s kotom nagnjenja slike:

$$\Delta x = x_d - x_l = d \tan \varphi = 1,05 \text{ cm}.$$

Za razliko sil sledi

$$\Delta F = F_d - F_l = k \Delta x = k d \tan \varphi = 8,4 \text{ N}.$$

b) Velja $F_d + F_l = m_s g$ in

$$F_d = \frac{m_s g + k d \tan \varphi}{2} = 18,9 \text{ N}$$

in

$$F_l = \frac{m_s g - k d \tan \varphi}{2} = 10,5 \text{ N}.$$

c) Če os postavimo na sredino med obe vrvi, oddaljenost težišča v vodoravni smeri od središča pa označimo z x_s , dobimo za ravnovesje navorov

$$m_s g x_s + F_l d / 2 = F_d d / 2.$$

Za x_s dobimo

$$x_s = \frac{k d (x_d - x_l)}{2 m_s g} = \frac{k d^2 \tan \varphi}{2 m_s g} = 8,5 \text{ cm}.$$

3. Podatki: $h = 7 \text{ m}$, $m = 1 \text{ kg}$, $k = 0,2$, $s = 4 \text{ m}$.

a) Čas padanje vrečke je

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1,20 \text{ s}.$$

Hitrosti v vodoravni in navpični smeri sta

$$v_x = \frac{s}{t} = 3,35 \text{ m/s}, \quad v_y = g t = 11,7 \text{ m/s}.$$

in gibalni količini

$$G_x = m v_x = 3,35 \text{ Ns}, \quad G_y = m v_y = 11,7 \text{ Ns}.$$

b) Če vrečka obmiruje na škatli, je sunek sile, s katero deluje vrečka na škatlo, enak gibalni količini vrečke tik pred trkom:

$$F_x \Delta t = mv_x = m \frac{x}{t}, \quad F_y \Delta t = mv_y = m g t.$$

Silo v vodoravni smeri uravnovesi sila lepenja, v navpični pa pravokotna sila podlage: $F_x = F_l$, $F_y = F_n$. V mejnem primeru je $F_l = k F_n$.

Z deljenjem enačb za sunek sile sledi:

$$\frac{F_x}{F_y} = \frac{F_l}{F_n} = k = \frac{x}{gt^2} = \frac{x}{2h}.$$

Škatla sme bit oddaljena največ

$$x = v_x t = \frac{k G_x}{m} t = 2kh = 2,8 \text{ m}.$$

4. Podatki: $\rho = 700 \text{ kg/m}^3$, $a = 100 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$.

a) Če l označimo višino potopljenega dela in zapišemo maso kvadra kot $m = \rho S a = \rho a^2 b$, velja

$$\rho_v g S l = \rho g S a, \quad S = ab, \quad l = \frac{\rho}{\rho_v} a = 0,7 a.$$

Če se kvader potopi za x , je sila, s katero potiskamo, enako

$$F = F_v - mg = \rho_v g S x, \quad 0 \leq x \leq a - l.$$

Povprečna sila je

$$\bar{F} = \rho_v g S \frac{a - l}{2}$$

in delo na poti $a - l$

$$A = \bar{F}(a - l) = \rho_v g S \frac{(a - l)^2}{2} = \frac{\rho_v g a^3 b}{2} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_v}\right)^2 = 44 \text{ J}.$$

b) V končni legi je težišče kvadra v globini $h = -\frac{1}{2}a$, v začetni pa v $h' = -(l - \frac{1}{2}a)$; težišče izpodrinjene vode je na koncu pri $h_v = -\frac{1}{2}a$ in na začetku pri $h'_v = -\frac{1}{2}l$, vse merjeno od gladine. Masa izpodrinjene vode je na koncu $m_v = \rho_v S a$, na začetku pa $m'_v = \rho_v S l = m$. Delo je enako: $A = \Delta W_g + \Delta W_v$,

$$\Delta W_g = mg(-\frac{1}{2}a + l - \frac{1}{2}a) = m_v g \frac{l}{a}(l - a) = \rho_v g S l(l - a),$$

$$\Delta W_v = m_v g \frac{a}{2} - mg \frac{l}{2} = m_v g \left(\frac{a}{2} - \frac{l^2}{2a}\right) = \rho_v g S \left(\frac{a^2}{2} - \frac{l^2}{2}\right),$$

$$A = \rho_v g S \left(\frac{a^2 - l^2}{2} - l(a - l)\right) = \rho_v g S \frac{(a - l)^2}{2},$$

enako kot pri a).

c) V začetni legi je kvader potopljen za $s = \frac{\rho}{\rho_v} b = 0,7 b$. Težišče je na $h' = -(s - \frac{1}{2}b)$, težišče izpodrinjene vode pa pri $h'_v = -\frac{1}{2}s$. Končna lega je enaka začetni v primeru b). Masa izpodrinjene vode je v obeh legah enaka masi kvadra. Velja:

$$\Delta W_g = mg(-l - \frac{1}{2}a) + (s - \frac{1}{2}b), \quad \Delta W_v = mg(\frac{1}{2}l - \frac{1}{2}b),$$

$$A = \frac{1}{2} mg(a - l - (b - s)) = \frac{\rho g a^2 b (a - b)}{2} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_v}\right) = 93 \text{ J}.$$

Skupina II

1. *Podatki:* $\alpha_1 = 2,31 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $\alpha_2 = 1,08 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $d = 0,5 \text{ mm}$, $l = 10 \text{ cm}$, $\Delta T = 50 \text{ K}$, $\varphi = 30^\circ$.

a)

$$\Delta l = l(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T = 61 \text{ } \mu\text{m}.$$

b) Trakova ležita na krožnicah s skupnim središčem. Če z r označimo razdaljo od sredine desnega traku do središča krožnice, sledi za desni in levi lok:

$$s_2 = r\varphi, \quad s_1 = (r + d)\varphi, \quad \varphi = \frac{2\pi}{12}.$$

Za razliko velja

$$\Delta s = l(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T' = d\varphi$$

in

$$\Delta T' = \frac{d\varphi}{l(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{\pi d}{6l(\alpha_1 - \alpha_2)} = 213 \text{ K}.$$

2. *Podatki:* $d = 1,0 \text{ mm}$, $a = 20 \text{ cm}$, $\varphi = 45^\circ$, $\xi = 0,10 \text{ } \Omega\text{mm}^2/\text{m}$.

a) Označimo debelino palice z d , njen presek s S , specifični upor z ξ , dolžino daljših prečk z b , dolžino krajših prečk pa z a . Okrogel presek palice izračunamo po enačbi

$$S = \pi d^2/4. \quad (1)$$

Z geometrijo ugotovimo, da sta dolžini daljših in krajših palic povezani prek

$$b = \sqrt{2}a, \quad (2)$$

od koder za upora obeh tipov palic sledi

$$R_a = \xi a/S = 4\xi a/(\pi d^2) = 25,5 \text{ m}\Omega, \quad (3)$$

$$R_b = \xi b/S = 4\xi b/(\pi d^2) = \sqrt{2}R_a = 36,0 \text{ m}\Omega. \quad (4)$$

b) Če priključimo izvir napetosti na točki C in D , potem sta zgornja in spodnja polovica okvirja vzporedni veji. Vsaka veja ima zaporedno vezavo dveh vzporednih vej, torej je upor v vsaki veji enak

$$R_{veja} = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b} + \frac{R_a R_b}{R_a + R_b} = 2 \frac{R_a R_b}{R_a + R_b}. \quad (5)$$

Skupna vezava dveh takih vzporednih vej ima tako nadomestni upor

$$R_{okvir} = \frac{R_{veja} R_{veja}}{R_{veja} + R_{veja}} = R_{veja}/2 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b}, \quad (6)$$

$$R_{okvir} = \frac{\sqrt{2} R_a^2}{R_a(1 + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} R_a = 14,9 \text{ m}\Omega. \quad (7)$$

c) Če priključimo izvor napetosti med točki A in E , potem je vezje simetrično glede na diagonalno AE . To pomeni, da bodo pripadajoči tokovi enaki, npr. tok na AL bo enak toku na AC , itd. Stranici CL in DM sta prečni glede na simetrijsko os; zaradi simetrije pride na obeh krajiščih prečnih stranic do enakega padca napetosti glede na točko A , zato sta prečna tokova nič in prečni veji sta mrtvi. Potemtakem lahko vezje obravnavamo kot dve vzporedni veji, pri čemer je vsaka sestavljena iz treh zaporedno vezanih komponent; druga od teh komponent ima dve vzporedni veji. Imamo torej

$$R_{veja} = R_b/2 + \frac{R_b R_a}{R_b + R_a} + R_b/2 = R_b + \frac{R_b R_a}{R_b + R_a} = R_b \left(1 + \frac{R_a}{R_b + R_a} \right). \quad (8)$$

Nadomestni upor vezja je potem

$$R_{vezja} = R_{veja}/2 = \left(1 + \frac{R_a}{R_a + R_b} \right) R_b/2 = R_a = 25,5 \text{ m}\Omega. \quad (9)$$

3. Podatki: $a = 10 \text{ cm}$, $U_0 = 40 \text{ V}$, $\varepsilon = 4$, $t_0 = 10 \text{ s}$.

a) Naboj se ohranja: $e = U_0 C_0 = UC = U \varepsilon C_0$, $U = U_0/\varepsilon = 10 \text{ V}$.

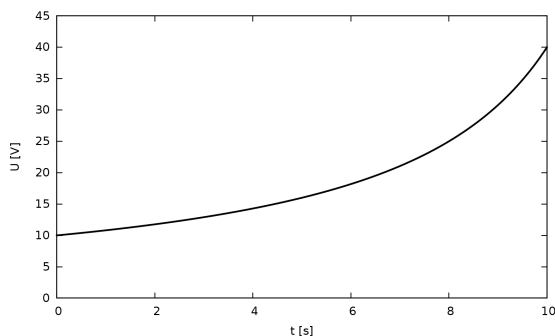
b) Če višino tekočine označimo z x , $x = a - vt$, se kapaciteta zmanjšuje kot

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon x a}{a} + \frac{\varepsilon_0 (a - x) a}{a} = \varepsilon_0 ((\varepsilon - 1)x + a),$$

$$C(t) = \varepsilon_0 a ((\varepsilon - 1)(a - vt) + a) = C_0 \left(\varepsilon - (\varepsilon - 1) \frac{t}{t_0} \right),$$

$$U(t) = \frac{e}{C(t)} = \frac{U_0 C_0}{C(t)} = \frac{U_0}{\varepsilon - (\varepsilon - 1) \frac{t}{t_0}}.$$

Lahko izračunamo vmesno točko, npr. $t = 5 \text{ s}$, $U = 16 \text{ V}$.



c) Ker se kapaciteta zmanjšuje, se mora zmanjševati tudi naboj na ploščah, če naj bo napetost konstantna.

$$\Delta e(t) = U \Delta C(t) = U \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \Delta x = -U \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) v \Delta t = -C_0 U (\varepsilon - 1) \frac{\Delta t}{t_0}.$$

Tok je potem enak

$$I = -\frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{(\varepsilon - 1) C_0 U}{t_0}$$

in upor

$$R = \frac{U}{I} = \frac{t_0}{(\varepsilon - 1) C_0} = \frac{t_0}{(\varepsilon - 1) \varepsilon_0 a} = 3,7 \cdot 10^{12} \Omega.$$

4. Podatki: $a = 0,4 \text{ m}$, $I_1 = 10 \text{ A}$, $I_2 = 10 \text{ A}$, $I_3 = 20 \text{ A}$ $l = 1 \text{ m}$.

a) Magnetna sila je enaka

$$F = \frac{\mu_0 I_3 I_1 l}{2\pi a} - \frac{\mu_0 I_3 I_2 l}{4\pi a} = \frac{\mu_0 I_3 l}{2\pi a} \left(\frac{I_1}{2} - I_2 \right) = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ N}.$$

in je privlačna. Sila, s katero delujemo na tretji vodnik, je nasprotno enaka magnetni in kaže v desno.

b) Razdaljo od prvega vodnika označimo z x :

$$B = \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi x} - \frac{\mu_0 I_2 l}{2\pi(x - a)} - \frac{\mu_0 I_3 l}{2\pi(x - 2a)} = 0.$$

Okrajšamo in upoštevamo $I_1 = I_2 = \frac{1}{2} I_3$:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x - a} - \frac{2}{x - 2a} = 0.$$

Dobimo kvadratno enačbo

$$2x^2 - ax - 2a^2 = 0,$$

z rešitvama

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4} a,$$

$$x_1 = 1,28 a = 51 \text{ cm}, \quad x_2 = -0,78 a = -31 \text{ cm}.$$

Skupina III

1. Podatki: $a = 100 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$, $d = 10 \text{ cm}$, $R = 1000 \text{ } \Omega$, $U = 24 \text{ V}$.

a) Po trakovih in skozi upornik teče tok:

$$I = \frac{U}{R} = 24 \text{ mA}.$$

Magnetna sila med vodnikoma (trakovima) je enaka

$$F_m = \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi d} = \frac{\mu_0 U^2 a}{2\pi d R^2} = 1,15 \cdot 10^{-9} \text{ N}.$$

Sila je **odbojna**, ker tokova tečeta v nasprotnih smereh.

b) Kapaciteta kondenzatorja in naboj na ploščah (trakovih) sta

$$C = \frac{\varepsilon_0 ab}{d}, \quad e = CU = \frac{\varepsilon_0 ab U}{d} = 2,14 \cdot 10^{-10} \text{ As}.$$

c) Sila med ploščama je

$$F_e = eE_{\text{plošča}} = e \frac{e}{2\varepsilon_0 ab} = \frac{\varepsilon_0 ab U^2}{2d^2} = 25,6 \cdot 10^{-9} \text{ N}.$$

Sila je **privlačna**, ker sta plošči nabiti z nasprotno predznačenima nabojema.

Ker je privlačna električna sila večja od odbojne magnetne, se trakova **privla-čita**.

d) Če se upor zmanjša, se tok poveča in zato se poveča tudi magnetna sila. Naboj na ploščah pa ni odvisen od upora, zato ostane električna sila enaka kot prej. Predznak rezultante se spremeni, ko sta sili (nasprotno) enaki:

$$\frac{\mu_0 U^2 a}{2\pi d R^2} = \frac{\varepsilon_0 ab U^2}{2d^2},$$

$$R = \sqrt{\frac{d}{\pi b}} R_{\text{vac}}, \quad R_{\text{vac}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377 \text{ } \Omega, \quad R = 212 \text{ } \Omega.$$

(Izraz R_{vac} je znan kot impedanca vakuumu.)

2. Podatki: $\lambda = 633 \text{ nm}$, $l = 30 \text{ mm}$, $\Delta T = 12 \text{ K}$, $T_0 = 18 \text{ } ^\circ\text{C}$, $p_0 = 97 \text{ kPa}$.

Če je $n = k\rho + 1$, lahko razliko optičnih poti in pogoj za oslabitev zapišemo kot

$$nl - n'l = kl(\rho - \rho') = \frac{1}{2}\lambda.$$

Iz splošne plinsko enačbe dobimo gostoti pri začetni in končni temperaturi:

$$\rho = \frac{Mp_0}{RT_0}, \quad \rho' = \frac{Mp_0}{R(T_0 + \Delta T)}.$$

Pogoj za oslabitev preuredimo:

$$\frac{klMp_0}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_0 + \Delta T} \right) = \frac{klMp_0\Delta T}{RT_0(T_0 + \Delta T)} = \frac{\lambda}{2}$$

in izrazimo

$$k = \frac{\lambda R T_0 (T_0 + \Delta T)}{2 l M p_0 \Delta T}.$$

Za lomni kvocient dobimo:

$$n = 1 + k \rho = 1 + \frac{k M p_0}{R T_0} = 1 + \frac{\lambda (T_0 + \Delta T)}{2 l \Delta T} = 1,000265.$$

3. Podatki: $r = 5$ cm, $r_0 = 0,625$ cm, $m = 0,1$ g.

a) V ravnovesju vodoravna komponenta sile podlage uravnovesi električno silo, navpična pa težo:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(\sqrt{2}r)^2} = F_p \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad mg = F_p \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Torej

$$\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} = mg$$

in

$$e = \sqrt{8\pi\epsilon_0 r^2 mg} = 2,3 \cdot 10^{-8} \text{ As}.$$

b) Delo je enako razliki elektrostatske in potencialne energije kroglic:

$$A = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 2r_0} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{2}r} - 2mgr \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

pri čemer smo potencialno energijo šteli od končne lege. Izraz $e^2/4\pi\epsilon_0$ izrazimo iz enačbe za ravnovesje in dobimo

$$A = 2mgr \left(\frac{r}{2r_0} - 1\right) = 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ J}.$$

c) Ohranja se kinetična, potencialna in elektrostatska energija kroglic:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 2r_0} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 2r} + 2mgr + 2 \frac{1}{2}mv^2$$

ali

$$mv^2 = 2mgr \left(\frac{r}{2r_0} - \frac{1}{2} - 1\right),$$
$$v = \sqrt{2gr \left(\frac{r}{2r_0} - \frac{3}{2}\right)} = 1,57 \text{ m/s}.$$

Opomba: upoštevali bomo tudi rešitev, pri kateri je tekmovalec elektrostatsko energijo dveh kroglic štel dvakrat. V tem primeru je delo enako 0,62 mJ in hitrost 2,4 m/s.

4. Podatki: $k = 500 \text{ N/m}$, $m = 1 \text{ kg}$, $y = 4 \text{ cm}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$.

a) Dolžino neraztegnjene vrvice označimo z l , elastični koeficient vrvice s k , maso uteži pa z m . Ko na vrvico obesimo utež, se bo raztegnila. V ravnovesni legi bo vsota sil enaka nič in s tem dobimo

$$mg = kx, \quad (10)$$

kjer x označuje raztezek vrvice do ravnovesne lege.

Vrvico iz ravnovesne lege še dodatno raztegnemo za y ; nihalo bo ravno še nihalo sinusno, če bo najvišja točka, ki jo doseže utež, ustrezala prvotni dolžini vrvice (do koder vrvica še deluje z neko silo). Če zapišemo energijski izrek za spodnjo in zgornjo točko takega nihanja, ter upoštevamo enačbo (10) za ravnovesni raztezek, dobimo

$$\frac{1}{2}k(x+y)^2 = mg(x+y), \quad (11)$$

$$k(x+y) = 2mg = 2kx, \quad (12)$$

$$y = x = mg/k = 2,0 \text{ cm}. \quad (13)$$

Utež smemo torej povleči navzdol ravno toliko, kolikor se je sama spustila zaradi lastne teže.

b) Označimo dodatni raztezek vrvice ponovno z y . Pri nihanju takega nihala so štiri pomembne točke: najnižjo lego označimo z A , ravnovesno lego označimo z B , mesto, ko je vrvica ravno neraztegnjena, označimo s C , najvišjo lego pa z D . Nihalo niha sinusno med točkama A in C , medtem ko med točkama C in D sila vrvice ne deluje in gre zato za prosti pad. Razdaljo med točkama C in D označimo z oznako z . Če izenačimo elastično prožnostno energijo v točki A s potencialno energijo v točki D , dobimo

$$\frac{1}{2}k(x+y)^2 = mg(x+y+z), \quad (14)$$

$$z = \frac{k(x+y)^2}{2mg} - x - y. \quad (15)$$

Nihajni čas nihala bo sestavljen iz časov na treh različnih odsekih: na odseku AB , na odseku BC in na odseku CD :

Zdaj upoštevamo, da med A in C nihalo z vrvico niha enako kot bi nihalo vzmetno nihalo. Od točke A do točke B je torej $1/4$ nihaja:

$$t_{AB} = t'_0/4 = \frac{1}{2}\pi\sqrt{m/k}. \quad (19)$$

Za sinusno nihanje okrog ravnovesne lege B s krožilno frekvenco ω in amplitudo y (kolikor smo vrvico raztegnili iz ravnovesne lege), velja

$$h(t) = y \sin(\omega t), \quad (20)$$

iz česar lahko določimo čas od ravnovesne lege B do točke C , ki je oddaljena x :

$$x = y \sin(\omega t_{BC}), \quad (21)$$

$$t_{BC} = \arcsin(x/y)/\omega = \arcsin(x/y)\sqrt{m/k}. \quad (22)$$

Čas med C in D pa izračunamo iz prostega pada z višine z :

$$z = gt_{CD}^2/2, \quad (23)$$

$$t_{CD} = \sqrt{2z/g}. \quad (24)$$

Celoten nihajni čas je po enačbi (16), ob upoštevanju enačb (10) in (15), enak

$$t_0 = (\pi + 2 \arcsin(x/y)) \sqrt{m/k} + 2\sqrt{2z/g}, \quad (25)$$

$$t_0 = \left(\pi + 2 \arcsin \left(\frac{mg}{ky} \right) \right) \sqrt{m/k} + 2\sqrt{\frac{2}{g} \left(\frac{k(x+y)^2}{2mg} - x - y \right)}, \quad (26)$$

$$t_o = \sqrt{m/k} \left(\pi + 2 \arcsin \left(\frac{mg}{ky} \right) + 2\sqrt{\left(\frac{ky}{mg} \right)^2 - 1} \right) = 0,34 \text{ s}. \quad (27)$$

V končni enačbi lahko preverimo, da za $y = x$ dobimo običajen nihajni čas $2\pi\sqrt{m/k}$, kar bi znašalo 0,28 s.

Kinematična rešitev

a) V ravnovesni legi je raztezek

$$x = \frac{mg}{k} = 2,0 \text{ cm}.$$

Amplituda nihanja je enaka začetnemu raztezkju y od mirovne lege. V zgornji točki se nihalo lahko dvigne do prvotne lege krajšiča neraztegnjene vzmeti, torej

$$y = x = 2,0 \text{ cm}.$$

b) Nihalo sedaj niha z amplitudo $2y$. Za odmik od mirovne lege velja

$$s = -2y \cos(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Ko doseže točko, ko vzmet ni napeta, velja

$$-2y \cos(\omega t_1) = y, \quad \omega t_1 = \frac{2\pi}{3}, \quad t_1 = \frac{2\pi}{3\omega} = 0,0937 \text{ s}.$$

V tem trenutku je hitrost uteži

$$v = 2y\omega \sin(\omega t_1) = y\omega\sqrt{3}.$$

Najvišjo točko doseže v času

$$t_2 = \frac{v}{g} = 0,0775 \text{ s}.$$

V začetno lego se ponovno vrne čez:

$$t = 2t_1 + 2t_2 = 0,34 \text{ s}.$$

Rešitve tekmovanja v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike za srednje šole v šolskem letu 2014/15 – šolsko tekmovanje

1. skupina – Poslovna matematika

1. naloga

a)

10 delavcev	12 dni	250 m(d)	100 cm (š)	80 cm (g)	8 ur	80 %
↓	↑	↑	↑	↑	↓	↓
16 delavcev	x dni	500 m (d)	200 cm š	160 cm (g)	10 ur	120 %

$$x = \frac{12 \times 10 \times 500 \times 200 \times 160 \times 8 \times 80}{16 \times 250 \times 100 \times 80 \times 10 \times 120} = 32 \text{ dni}$$

b)

12 dni		100 %
20 dni		x %

$$x = \frac{20 \times 100}{12} = 166,67\%$$

2. naloga

a)

Rešitev k tč. a)

- $\frac{1}{5}$ od 150 kg = 30 kg za medvede
 $x + x + (x - 1) + (x - 1) = 30$
 $x = \underline{8,00}$
- 45 % od 150 kg = 67,50 kg za pume
Pume: 67,50 kg : 5 = 13,50 kg
- Ostanek: 35 % od 150 kg = 52,50 kg za leve (dva samca + dve levinji)
 $x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x = 52,50$
 $x = \underline{17,50}$

ŽIVALI V ŽIVALSKEM VRTU						
Št.	Medvedi	Q v kg	Pume	Q v kg	Levi	Q v kg
1	Odrasli medved	8,00	Odrasla puma	13,50	Samec	17,50
2	Odrasli medved	8,00	Odrasla puma	13,50	Samec	17,50
3	Medvedji mladič	7,00	Odrasla puma	13,50	Levinja	8,75
4	Medvedji mladič	7,00	Odrasla puma	13,50	Levinja	8,75
5	Medvedji mladič	7,00	Odrasla puma	13,50	Levinja	8,75
	Medvedi	Σ 30,00	Pume	Σ 67,50	Levi	Σ 52,50
Σ 150 kg hrane						
Rešitev k točkam b, c in d						
b) Katera od živali poje največ in katera najmanj?						
Največ hrane poje levji samec (17,50 kg), najmanj pa medvedji mladič (7,00 kg).						
c) Za koliko odstotkov več hrane dobijo pume v primerjavi z medvedi?						
Medvedi Razlika med pumani in medvedi 30 kg 100 % 37,50 kg x % } x = 125 %						
Koliko hrane pojedjo pume v petih dneh?						
Izračun: 37,50 * 5 = 337,50 kg						
V 5 dneh pojedjo 337,50 kg hrane.						
d) Ali dobi levinja več hrane kot medvedji mladič? Koliko več ali koliko manj?						
Odg.: Levinja dobi več hrane kot medvedji mladič, in sicer za 1,75 kg več.						

3. naloga

- a)
- Izračun štipendije za Aneja s koeficienti: $222,00 * 1,08 * 1,08 = 258,94 \text{ EUR}$
ali po korakih:
za prvo leto: $222,00 * 1,08 = 239,76 \text{ EUR}$; za drugo: $239,76 * 1,08 = 258,94 \text{ EUR}$
- b)
- Anej: **258,94 EUR**
Brina: $222,00 + 25,00$ (za prvo leto) + $25,00$ (za drugo leto) = **272,00 EUR**
Brina ima višjo štipendijo za **13,06 EUR**, kar predstavlja **5,04 %**.
- c)
- Σ Anejeve štipendije = $(222,00 * 12) + (239,76 * 12) + (258,94 * 12) = 8.648,40 \text{ EUR}$
 Σ Brinine štipendije = $(222,00 * 12) + (247 * 12) + (272 * 12) = 8.892,00 \text{ EUR}$

4. naloga

- a)
- $G^+ = 14.572,00$
 $p = 4,8 \%$
 $d = 124 \text{ dni}$
 $G = ?$
 $G^+ = G + \frac{G \cdot p \cdot d}{36500}$
- $G = \frac{36500 \cdot G^+}{36500 + p \cdot d} = 14.338,19$
- b)
- $G^+ = 14.572,00 * 1,025 = 14.936,30$
 $p = ? \%$
 $o = 14936,30 - 14338,19 = 598,11$
- $p = \frac{36500 \cdot o}{G^+ \cdot d} = \frac{36500 \cdot 598,11}{14338,19 \cdot 124} = 12,28 \%$

$$\begin{array}{l} 4,8 \% \dots\dots\dots 100 \% \\ 7,48 \% \dots\dots\dots x \% \end{array}$$

$$x = \frac{100 \cdot 7,48}{4,8} = \underline{155,83 \%}$$

c)

Izračun: $12,28 \% - 4,8 \% = 7,48$ odstotne točke

2. skupina – Statistika

1. NALOGA

a)

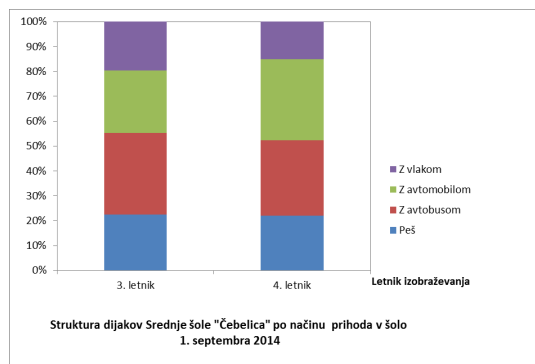
Tabela 2: Struktura dijakov Srednje šole »Čebelica« po načinu prihoda v šolo
1. septembra 2014 (v odstotkih)

Način prihoda v šolo	Letnik izobraževanja		
	3. letnik	4. letnik	Skupaj
Peš	22,4	22,1	22,2
Z avtobusom	32,9	30,2	31,5
Z avtomobilom	25,0	32,6	29,0
Z vlakom	19,7	15,1	17,3
Skupaj	100,0	100,0	100,0

b)

22,4 odstotka dijakov 3. letnika prihaja v šolo peš, 32,9 odstotka dijakov se vozi z avtobusom, 25 odstotkov dijakov se vozi z avtomobilom, 19,7 odstotka dijakov pa se vozi v šolo z vlakom.

c)



2. NALOGA

Tabela 4: Število zaposlenih, število zaposlenih na upravno enoto in število podjetij na upravno enoto po območjih v državi »Koromandiji« dne 1. 1. 2014

Območje	Št. zaposlenih	Št. zaposlenih /UE	Št. Podjetij/UE
Hrib	23.760	678,86	7,71
Grič	20.680	480,93	8,74
Gora	28.944	1378,29	6,86
Planota	8.188	127,94	1,44

d)

K = 850 EUR/ 1 zaposlenega

3. NALOGA

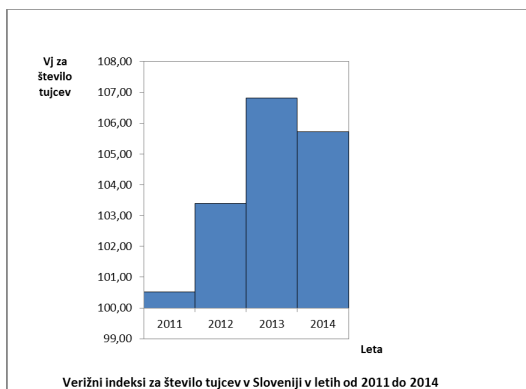
a)

Tabela 5: Tujci v Sloveniji v letih od 2010 do 2014
(stanje 1.1. v posameznem letu)

Leto	Št. tujcev	Izračunani indeksi
2010	82.316	-
2011	82.746	100,52
2012	85.555	103,39
2013	91.385	106,81
2014	96.608	105,72

Vir: Statistični urad RS

b)



c)

Leta 2013 je bilo v Sloveniji 91.385 tujcev, kar je bilo za **3,39 % več** kot leta **2012**.

d)

Leta 2016 bi bilo 102.491 tujcev.

e)

$$K_{2015} = (-3,5 + 100) / 100 = 0,965$$

4. NALOGA

a)

Tabela 6: Relativne frekvence za frekvenčno porazdelitev telesnih mas 80 dijakov 4. letnika Srednje šole »Čebelica«

Telesna masa v kg	f_j^o	f_j	y_j	$y_j \cdot f_j$
nad 40 do 50	0,100	8	45	360
nad 50 do 60	0,250	20	55	1100
nad 60 do 70	0,300	24	65	1560
nad 70 do 80	0,200	16	75	1200
nad 80 do 90	0,100	8	85	680
nad 90 do 100	0,050	4	95	380
Skupaj	1,000	80		5280

Vir: Prirejeni podatki

b)

$$F_2^0 = 0,100 + 0,250 = 0,350$$

c)

35 odstotkov dijakov 4. letnika je imelo telesno maso nad 40 do 60 kg.

d)

48 dijakov.

e)

$$M = \frac{5280}{80} = 66 \text{ kg}$$

Povprečna telesna masa dijaka je znašala 66 kg.

Rešitve tekmovanja v znanju poslovne in finančne matematike ter statistike za srednje šole v šolskem letu 2014/15 – državno tekmovanje

1. skupina – Poslovna matematika

1. naloga

a)

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \uparrow \\ 5 \text{ strojev} \\ \downarrow \\ 6 \text{ strojev} \end{array} & \begin{array}{c} \uparrow \\ 100.000 \text{ izvodov} \\ \downarrow \\ x \text{ izvodov} \end{array} & \begin{array}{c} \downarrow \\ 30 \text{ strani} \\ \uparrow \\ 40 \text{ strani} \end{array} \\ \hline x = \frac{100.000 \cdot 6 \cdot 30}{5 \cdot 40} = \underline{\underline{90.000 \text{ izvodov}}} \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \uparrow \\ 5 \text{ strojev} \\ \downarrow \\ 6,5 \text{ strojev} \end{array} & \begin{array}{c} \uparrow \\ 30 \text{ strani} \\ \downarrow \\ x \text{ strani} \end{array} \\ \hline x_1 = \frac{30 \cdot 6,5}{5} = \underline{\underline{39 \text{ strani}}} \rightarrow \text{Odg.: Priloga ima lahko največ } \underline{\underline{9 \text{ strani}}}. \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \uparrow \\ 30 \text{ strani} \\ \downarrow \\ x \text{ strani} \end{array} & \begin{array}{c} \uparrow \\ 100 \% \\ \downarrow \\ 110 \% \end{array} \\ \hline x_2 = \frac{30 \cdot 110}{100} = \underline{\underline{33 \text{ strani}}} \rightarrow \text{Odg.: Priloga ima lahko največ } \underline{\underline{3 \text{ strani}}}. \end{array}$$

2. naloga

a)

Kmetije	Kriterij delitve		Enostavna razmerska števila	Odgovor
	Škoda	Vrednost posesti		
1.	60.000,00 ⁽¹⁰⁰⁰⁰⁾ ; 60	500.000,00 ⁽¹⁰⁰⁰⁰⁰⁾ ; 50	3000 x	63.000,00 EUR
2.	25.000,00 ⁽¹⁰⁰⁰⁰⁾ ; 25	250.000,00 ⁽¹⁰⁰⁰⁰⁰⁾ ; 25	625 x	13.125,00 EUR
3.	5.000,00 ⁽¹⁰⁰⁰⁰⁾ ; 5	100.000,00 ⁽¹⁰⁰⁰⁰⁰⁾ ; 10	50 x	1.050,00 EUR
4.	45.000,00 ⁽¹⁰⁰⁰⁰⁾ ; 45	300.000,00 ⁽¹⁰⁰⁰⁰⁰⁾ ; 30	1350 x	28.350,00 EUR

$$5025 x = 105.525,00$$

$$x = \underline{\underline{21,00}}$$

b)

Kmetje	Kriterij delitve		Enostavna razmerska števila	Odgovor
	Dolžina vodotoka v m	Število dni		
1.	40	x	40 x	1.600 m; 40 dni
2.	50	(x - 4)	50 x - 200	1.800 m; 36 dni
3.	60	(x - 10)	60 x - 600	1.800 m; 30 dni
4.	20	((x - 10) - 5)	20 x - 300	500 m; 25 dni

$$170x - 1100 = 5.700 \text{ m}$$

$$\underline{x = 40 \text{ dni}}$$

3. naloga

a)

$$p = 12,5 \text{ ‰}$$

$$C^+ = 46.572$$

$$M : \dot{Z} = 22.458 : (C - 22.458)$$

$$C = ?$$

$$1012,5 \text{ ‰} \dots\dots\dots 46.572 \text{ prebivalcev}$$

$$1000 \text{ ‰} \dots\dots\dots x \text{ prebivalcev}$$

$$x = \frac{1000 \cdot 46.572}{1012,5} = 45.997,04 = \underline{\underline{45.997 \text{ prebivalcev}}}$$

$$d = 22.458 \text{ (moški)}$$

$$C = 45.997$$

$$p = ? \text{ ‰ moških}$$

$$d = \frac{C \cdot p}{100}$$

$$p = \frac{100 \cdot d}{C} = \frac{22.458 \cdot 100}{45.997} = \underline{\underline{48,82492336 \text{ ‰ moških}}}$$

$$\% \text{ žensk} = 100 \% - 48,82 \% = \underline{\underline{51,17507664 \text{ ‰ žensk}}}$$

Letos:

$$C = 46.572$$

$$p_1 \text{ (moški)} = 48,82492336 \text{ ‰}$$

$$p_2 \text{ (ženske)} = 51,17507664 \text{ ‰}$$

$$d_1 \text{ (moški), } d_2 \text{ (ženske)} = ?$$

$$d_1 = \frac{C \cdot p_1}{100} = \frac{46572 \cdot 48,82492336}{100} = 22738,74 = \underline{\underline{22.739 \text{ moških}}}$$

$$d_2 = \frac{C \cdot p_2}{100} = \frac{46572 \cdot 51,17507664}{100} = 23833,26 = \underline{\underline{23.833 \text{ žensk}}}$$

$$\Sigma d_1 + \Sigma d_2 = 46.572 \text{ prebivalcev}$$

b)

$$22.739 \text{ moških} \dots\dots\dots 100 \% \quad x = \frac{1094 \cdot 100}{\dots\dots\dots} = 4,81 \%$$

$$\underline{\underline{1.094 \text{ žensk} \dots\dots\dots x \%}}$$

4. naloga

a)

$$20 \% \text{ od } 1.000,00 = \frac{1.000,00 \cdot 20}{100} = \mathbf{200,00 \text{ EUR}}$$

$$1.000,00 - 200,00 = \mathbf{800,00 \text{ EUR}}$$

$$G + o = 800,00 + \frac{800,00 \cdot 6 \cdot 9}{1200} = \mathbf{836,00 \text{ EUR}} \text{ (dolžni znesek)}$$

Dolžni znesek je 836,00 EUR. Računalnik jo dejansko stane **1.036,00 EUR**.

b)

$$20 \% \text{ od } 1.000,00 = \frac{1.000,00 \cdot 20}{100} = 200,00 \text{ EUR}$$

$$1.000,00 - 200,00 = 800,00 \text{ EUR}$$

$$r' = 1 + \frac{p'}{100} = 1 + \frac{0,75}{100} = 1,0075$$

$$G_n = G_0 \cdot r'^{(n \cdot m)}$$

$$G_n = 800,00 \cdot (1,0075)^{(9)} = \mathbf{855,65 \text{ EUR}}$$

Dolžni znesek je 855,65 EUR. Računalnik jo dejansko stane **1.055,65 EUR**.

c)

$$\text{Izračun: } 1.055,65 - 1.036,00 = \mathbf{19,65 \text{ EUR}} \text{ (ugodnejše preko spleta)}$$

d)

$$r = 1 + \frac{p}{100} = 1 + \frac{9}{100} = 1,09$$

$$G_n = G_0 \cdot r^n$$

$$n = \frac{\log \frac{G_n}{G_0}}{\log r} = \frac{\log \left(\frac{1.000,00}{855,65} \right)}{\log 1,09} = \mathbf{1,81 \text{ let}} \rightarrow \text{tj. 1 leto in 296 dni}$$

Odgovor: Privarčevani denar bi morala vezati v banki za 1 leto in 296 dni.

2. skupina – Statistika

1. naloga

a, c)

Tabela 1: Gostje po vrstah občin v Sloveniji v letu 2013

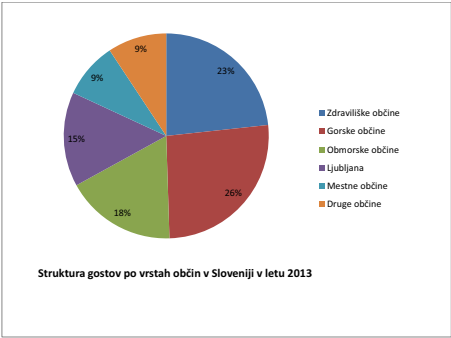
Vrsta občine	P _i %	Delne vsote	P _j ⁰	Število gostov
Zdraviliške občine	23,3	23,3	84	788.586
Gorske občine	26,2	49,5	94	886.737
Obmorske občine	17,5	67,0	63	592.286
Ljubljana	14,9	81,9	54	504.289
Mestne občine	8,8	90,7	32	297.835
Druge občine	9,3	100,0	33	314.758
Skupaj	100,0		360	3.384.491

Vir: Statistični urad RS

b)

V obmorskih občinah je bilo v letu 2013 17,5 % gostov.

d)



2. naloga
a, b, c, d)

Leto	Živorojeni otroci - skupaj	Živorojeni otroci - dečki	Živorojeni otroci - deklice	a)	b)	c)	d)
2007	19.097	9.784	9.313	88,67	-	-	-
2008	21.055	10.756	10.299	97,76	109,93	986	1,103
2009	21.180	10.948	10.232	98,34	101,79	-67	1,006
2010	21.538	11.091	10.447	100,00	101,31	215	1,017
2011	21.164	10.870	10.294	98,26	98,01	-153	0,983
2012	21.185	10.947	10.238	98,36	100,71	-56	1,001
2013	20.383	10.424	9.959	94,64	95,22	-279	0,962

Vir: Statistični urad RS

e)

$I_{2009/2010} = 98,34$ Leta 2009 je bilo za 1,66 % manj živorojenih otrok kot leta 2010.

$V_{2009} = 101,79$ Leta 2009 je bilo za 1,79 % več živorojenih dečkov kot leta 2008.

$D_{2009/2008} = -67$ Leta 2009 se je rodilo 67 deklic manj kot leta 2008.

$K_{2009} = 1,006$ Leta 2009 je bilo za 0,6 % več živorojenih otrok kot leta 2008.

f)

Št. deklic 2014 = $9.959 \times 0,994 = 9.899$ živorojenih deklic

3. naloga
a, b)

Tabela 3: Frekvenčna porazdelitev starosti hiš v naselju »Niga«

Starost hiše v letih	f_j	f_j^o	F_j	F_j^o
do 5	18	0,120	18	0,120
od 6 do 10	24	0,160	42	0,280
od 11 do 15	48	0,320	90	0,600
od 16 do 20	30	0,200	120	0,800
od 21 do 25	15	0,100	135	0,900
od 26 do 30	9	0,060	144	0,960
od 31 do 35	3	0,020	147	0,980
od 36 do 40	3	0,020	150	1,000
Skupaj	150	1,000		

c)

32 odstotkov hiš je starih od 11 do 15 let.

e)

135 hiš je starih do 25 let.

4. naloga

a)

R_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y_i	< 23			23	23	24	25	26	29	29

$$R = \frac{N + 1}{2} = \frac{10 + 1}{2} = 5,5$$

$$Me = \frac{23 + 24}{2} = 23,5 \text{ dni dopusta}$$

b)

Modusa NE moremo določiti, ker ne vemo nič o morebitnem večkratnem pojavljanju istega števila dni dopusta treh delavcev z najmanjšim dopustom.

c)

Tabela 4: Frekvenčna porazdelitev števila dni dopusta za 10 zaposlenih v podjetju »Elektronček«, d.o.o.

Število dni dopusta	Število delavcev
do 22	3
od 23 do 25	4
od 26 do 28	1
od 29 do 31	2
Skupaj	10

Vir: Prirejeni podatki

$$Mo = y_{o,\min} + d_o \cdot \frac{f_o - f_{-1}}{2 \cdot f_o - f_{-1} - f_{+1}}$$

$$Mo = 22,5 + 3 \cdot \frac{4 - 3}{2 \cdot 4 - 3 - 1} = 23,25 \text{ dni}$$

Odgovor: Najpogostejše število dni dopusta je 23,25 dneva.

