Tekmovanja

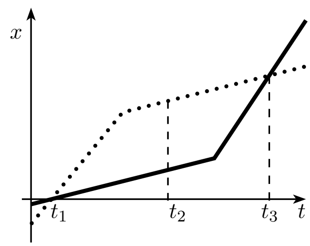
Tekmovanje iz fizike za zlato Stefanovo priznanje – državno tekmovanje

8. razred

A1 V koordinatnem sistemu sta grafa, ki kažeta, kako se je lega dveh tekačev spreminjala s časom. Prvi graf je narisan s polno črto, drugi s pikčasto. Ali sta bili hitrosti tekačev v katerem od označenih trenutkov enaki?

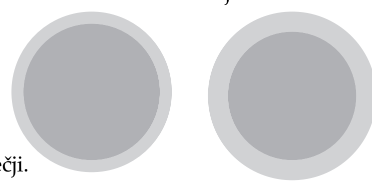
(**A**) Da, ob t_1. (**B**) Da, ob t_2.

(**C**) Da, ob t_3. (**D**) Ne.



A2 Na sliki sta senci in polsenci dveh balonov na osončenih vodoravnih tleh. Katera izjava o velikosti balonov je pravilna?

(**A**) Balon A je opazno večji od balona B.
(**B**) Balon A je opazno manjši od balona B.
(**C**) Balona A in B sta približno enako velika.
(**D**) S slike ne moremo ugotoviti, kateri balon je opazno večji.



A3 Nejc iz Ljubljane in John iz Cape Towna (ki je skoraj na isti zemljepisni dolžini kot Ljubljana) v Južnoafriški republiki sta 27. marca 2015 hkrati in vsak s svojega konca Zemlje opazovala prvi lunin krajec. Ob kateri uri sta opazovala in kateri sliki sta videla?

(**A**) Oba ob 19^{h}, oba sta videla sliko A.

(**B**) Oba ob 19^{h}, Nejc je videl sliko A, John pa sliko B.

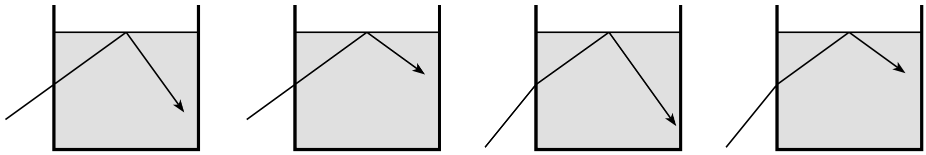
(**C**) Nejc ob 19^{h}, John ob 7^{h}, oba sta videla sliko A.

(**D**) Nejc ob 19^{h}, John ob 7^{h}, Nejc je videl sliko A, John pa sliko B.

A

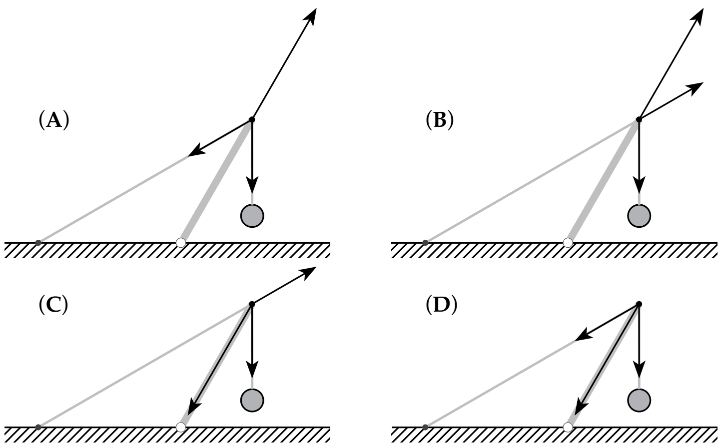
B

A4 V steklenem akvariju s tankimi stenami je voda. Skozi steno akvarija pošljemo curek laserske svetlobe tako, da se na vodni gladini popolnoma odbije. Katera slika kaže pravilno pot curka?

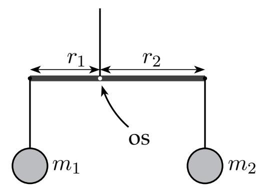


(**A**) (**B**) (**C**) (**D**)

A5 Na enem krajišču je drog (narisan z debelejšo sivo črto) vrtljivo vpet v tla, na drugem krajišču pa z rinke na drogu visi vrv z utežjo. Za ravnovesje poskrbi dodatna vrvica, narisana s tanjšo sivo črto. Katera slika pravilno kaže sile, ki delujejo na mirujočo rinko?



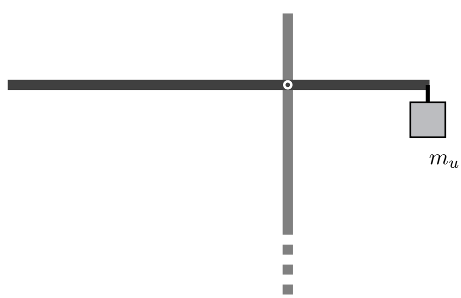
B1 Spomni se, da je **lahka** prečka v vodoravni ravnovesni legi, ko velja $m_1 \cdot r_1 = m_2 \cdot r_2$, kjer sta r_1 in r_2 razdalji med pritrdiščema vrvic, na katerih visita kroglici z masama m_1 in m_2, in osjo, kot kaže slika.



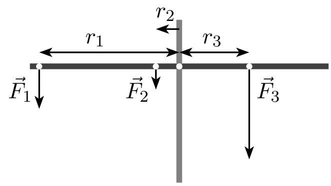
Žiga sestavi model žerjava. Popolnoma togo prečko na **tretjini** njene dolžine vrtljivo vpne v stojalo, kot kaže **spodnja** slika. **Prečka ima maso** $m = 200$ g, dolžino 60 cm in povsod enak prečni presek.

Predstavljaj si, da je vsa masa prečke zbrana v njenem središču (težišču). Prečko, ki miruje, drži v vodoravni ravnovesni legi utež z maso m_u, ki je obešena na krajišče krajšega dela prečke.

(a) Kolikšna je masa uteži m_u?

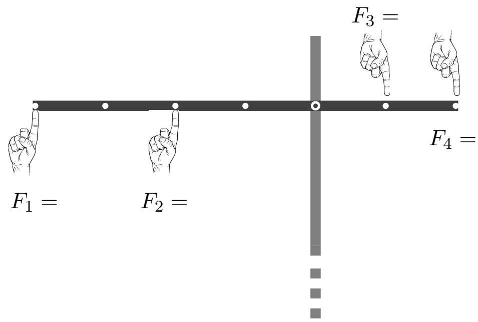


(b) Na sliko modela žerjava nariši vse sile na prečko v merilu, v katerem 1 cm pomeni silo 1 N. Sile poimenuj in označi.

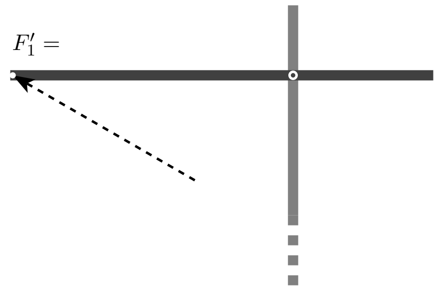


Enačbo za vodoravno ravnovesje zapišemo bolj splošno s **silami**. Če delujejo sile **pravokotno** na prečko, velja (za primer na sliki) $F_1 \cdot r_1 + F_2 \cdot r_2 = F_3 \cdot r_3$. Če ima posamezna sila - npr. F_2 - ravno **obratno smer** od narisane, to upoštevaš v predznaku sile: tedaj velja $F_1 \cdot r_1 - F_2 \cdot r_2 = F_3 \cdot r_3$.

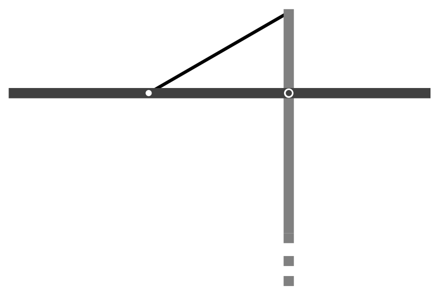
(c) Žiga utež sname in samo prečko zadržuje v vodoravni legi tako, da tišči krajši del prečke v smeri pravokotno **navzdol** ali daljši del prečke pravokotno **navzgor**. Žiga podpre ali tišči prečko na **enem** od štirih različnih mest, ki so označena na sliki. Zraven vsake slike roke zapiši velikost sile, s katero Žiga na tistem mestu podpira ali tišči prečko.



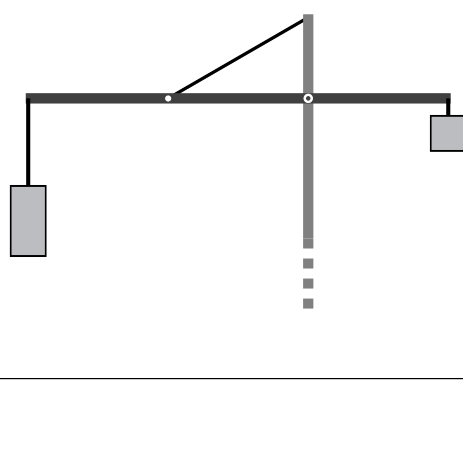
(d) Sila, ki prečko zadržuje v vodoravni ravnovesni legi, **ni nujno pravokotna** na prečko. V tem primeru so s silami, ki si jih zapisal pri vprašanju (c), določene velikosti njihovih komponent, **pravokotnih** na prečko. Zapiši velikost sile F_1', ki deluje na prečko v smeri, narisani na sliki. Pomagaj si z načrtovanjem.



(e) Žiga pritrdi prečko na stojalo z vrvico, kot kaže slika. Kolikšna je sila F_v, ki napenja vrvico?



(f) Prečka visi na vrvici, s krajišča njenega krajšega dela visi utež z maso 0,3 kg. S krajišča daljšega dela prečke na levi strani visi breme s težo 10 N. Kolikšna je sila F_{v2}, ki napenja vrvico?



B2 V medijih so 24. septembra 2011 objavili novico, da so v švicarskem raziskovalnem centru CERN v Ženevi izmerili, da se nevtrini zelo verjetno gibljejo s hitrostjo, večjo od svetlobne hitrosti v vakuumu. Zapisali so, da so za pot na razdalji 730,000 km med CERN-om in podzemnim detektorjem v Gran Sassu v Italiji nevtrini potrebovali 60 nanosekund manj, kot za isto prepotovano razdaljo potrebuje svetloba. Hitrost svetlobe v vakuumu je $299\,792\,458\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Pozneje so odkrili napako v eksperimentu in so novico preklicali.

(a) V kolikšnem času prepotuje svetloba razdaljo med CERN-om in Gran Sassom? Odgovor zapiši na 6 mest natančno v enotah ms.

(b) Koliko časa med CERN-om in Gran Sassom, po podatkih iz novice, potujejo nevtrini?

(c) Kolikšna bi bila hitrost nevtrinov v enotah $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, če bi bila novica resnična, in za koliko odstotkov bi bila večja od hitrosti svetlobe?

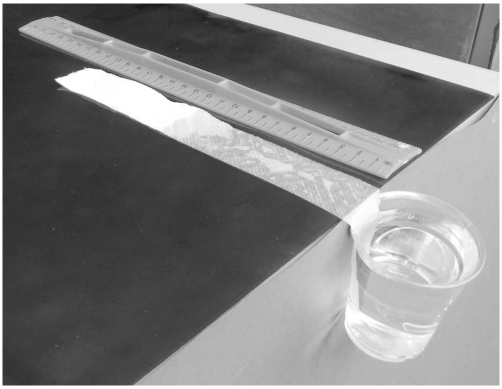
(d) Predpostavi, da v CERN-u kreneta svetloba in nevtrino na pot sočasno. Za kolikšno razdaljo prehitijo nevtrini svetlobo, glede na podatke v novici?

(e) Razdaljo med CERN-om in Gran Sassom so izmerili tako natančno, da so se pri tem zmotili za kvečjemu ± 20 cm. Čas so merili z atomskimi urami tako natančno, da so se pri meritvi zmotili za največ ± 10 nanosekund. Če upoštevaš, da so nevtrini opravili pot, ki se za 20 cm razlikuje od 730 km in da so se pri merjenju časa zmotili za 10 nanosekund, ugotoviš, da bi bila hitrost nevtrinov vseeno večja od hitrosti svetlobe. Najmanj za koliko $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$?

C – eksperimentalna naloga: OMOČENJE

Pripomočki
– 2,5 cm široki trakovi, izrezani iz papirnate brisače
– štoparica
– ravnilo
– lonček z vodo
– stojalo
– lepilni trak ali kit
– brisače za brisanje mokre mize

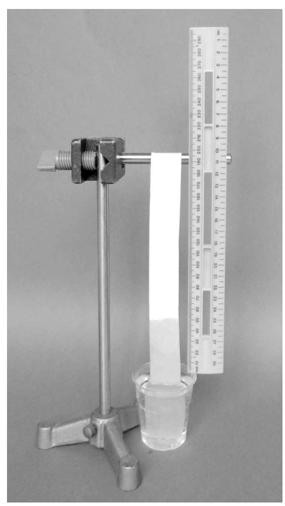
(a) V kozarec, ki je pritrjen ob rob mize, nalij vodo. Na mizo položi papirnat trak tako, da boš lahko ob začetku meritve v kozarec namestil eno krajišče papirnatega traku. Merilo postavi vzporedno s trakom. Zaznamek 0 cm na merilu naj bo ob robu mize, ob delu traku, ki je pri kozarcu.



Meri, kako se dolžina omočenega dela traku spreminja s časom. Trenutek $t = 0$ naj bo tedaj, ko voda po traku prileze do zaznamka 0 cm. Priporočamo, da izmerke najprej zapišeš na pomožni list in jih šele nato vpišeš v razpredelnico v stolpec $t_{\leftrightarrow}$.

(b) Meritve opravi še s trakom, ki ga obesiš na stojalo, njegovo spodnje krajišče pa potopiš v kozarec z vodo. Ob papirnat trak z lepilom (ali kitom) na stojalo pritrdi tudi merilo. Izmerke vpiši v isto razpredelnico, v stolpec $t_{\updownarrow}$.

pot s [cm]	(a) $\leftrightarrow$ $t_{\leftrightarrow}$ [s]	(b) $\updownarrow$ $t_{\updownarrow}$ [s]
0	0:00	0:00
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		



(c) Izračunaj povprečno hitrost vode v obeh primerih na celotni poti.

$\bar{v}_{\leftrightarrow} =$ ________________

$\bar{v}_{\updownarrow} =$ ________________

(d) Izračunaj hitrost, s katero se po traku giblje voda na 1. cm poti oziroma na 10. cm poti v posameznem primeru.

	$v_{\leftrightarrow}$	$v_{\updownarrow}$
1. cm		
10. cm		

(e) V isti koordinatni sistem nariši grafa, ki kažeta, kako se pot, ki jo voda opravi, ko leze po traku, spreminja s časom v obeh primerih. S sklenjeno črto nariši graf za trak, ki leži vodoravno na mizi, in s črtkano črto za trak, ki je obešen na stojalo.

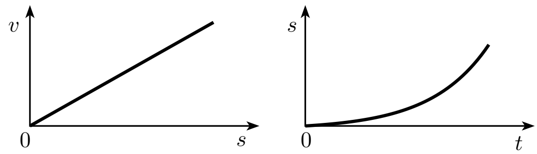
(f) Navedi vsaj dve okoliščini, ki vplivata na to, da pojav v obeh primerih **ne** poteka povsem **enako**.

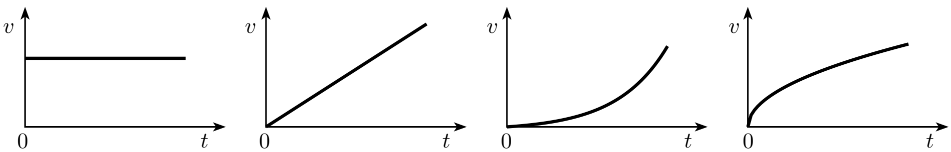
(g) Navedi vsaj tri okoliščine, ki bi lahko vplivale na potek pojava, a v našem primeru na oba vplivajo **enako**.

(h) Predpostavi, da vode v kozarčku ne zmanjka (ker jo dolivaš). Se lezenje vode po traku, ki je lahko poljubno dolg (in enkrat visi, drugič pa leži), lahko kdaj ustavi? Pojasni svoj odgovor za vsakega od obeh primerov.

9. razred

A1 Hitrost hitrostnih drsalcev se takoj po startu spreminja premo enakomerno s predrsano **potjo**, kot kaže prvi graf. Pri tem predrsana pot s **časom** narašča, kot kaže drugi graf. Kateri od grafov na spodnji sliki kaže, kako se s **časom** spreminja hitrost drsalca?





(**A**) (**B**) (**C**) (**D**)

A2 Nejc iz Ljubljane in John iz Cape Towna (ki je skoraj na isti zemljepisni dolžini kot Ljubljana) v Južnoafriški republiki sta 27. marca 2015 hkrati in vsak s svojega konca Zemlje opazovala prvi lunin krajec. Ob kateri uri sta opazovala in kateri sliki sta videla?

(**A**) Oba ob 19^{h}, oba sta videla sliko A.

(**B**) Oba ob 19^{h}, Nejc je videl sliko A, John pa sliko B.

(**C**) Nejc ob 19^{h}, John ob 7^{h}, oba sta videla sliko A.

(**D**) Nejc ob 19^{h}, John ob 7^{h}, Nejc je videl sliko A, John pa sliko B.

A

B

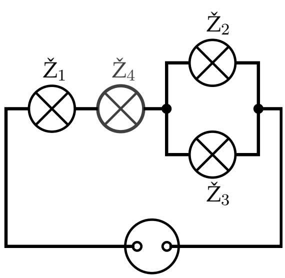
A3 Janez je v toplotno izolirano posodo vlil najprej 1 dl vode s temperaturo $5\,^\circ\mathrm{C}$ in 3 dl vode s temperaturo $9\,^\circ\mathrm{C}$. Potem je v posodo dolil še 4 dl vode s temperaturo $16\,^\circ\mathrm{C}$. Kolikšna je temperatura vode v posodi na koncu?

(**A**) $10\,^\circ\mathrm{C}$. (**B**) $11{,}5\,^\circ\mathrm{C}$. (**C**) $12\,^\circ\mathrm{C}$. (**D**) $14{,}4\,^\circ\mathrm{C}$.

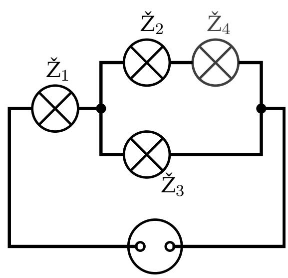
A5 *Gostota energijskega toka* j je sestavljena fizikalna količina z enoto $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$. Katera je možna definicija j?

(**A**) $j = \frac{A}{S}$ (**B**) $j = \frac{A}{\Delta t}$ (**C**) $j = \frac{\Delta W}{\Delta t \cdot S}$. (**D**) $j = \frac{F \cdot v}{\Delta t}$

A5 Na vir napetosti so vezane tri žarnice: $\check{Z}_1$, $\check{Z}_2$ in $\check{Z}_3$. V vezje vežemo še četrto žarnico $\check{Z}_4$. Najprej jo vežemo, kot kaže slika A, in nato kot kaže slika B. Katera izjava je pravilna?



A



B

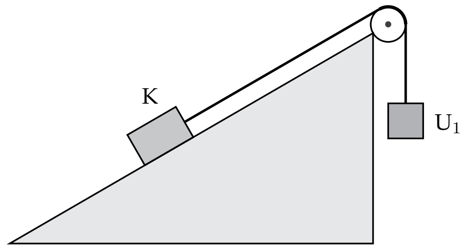
(**A**) V obeh primerih se po vezavi žarnice $Ž_4$ skupni tok skozi vir poveča.

(**B**) V obeh primerih se po vezavi žarnice $Ž_4$ skupni tok skozi vir zmanjša.

(**C**) Po vezavi žarnice $Ž_4$ se v primeru A skupni tok skozi vir poveča, v primeru B pa zmanjša.

(**D**) Po vezavi žarnice $Ž_4$ se v primeru A skupni tok skozi vir zmanjša, v primeru B pa poveča.

B1 Na vrhu klanca je lahek škripec, prek katerega je speljana lahka vrvica, ki povezuje klado K in utež U_1, kot kaže slika. Klada ima maso $m = 3$ kg in lahko drsi po klancu brez trenja.



(a) Klada miruje. Nariši vse sile, ki delujejo na klado, v merilu, v katerem 1 cm pomeni silo 10 N. Sile poimenuj in zapiši njihove velikosti.

(b) Kolikšna je masa uteži m_1?

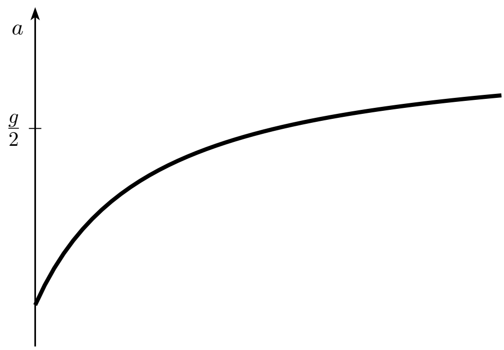
(c) S kolikšnim pospeškom se giblje klada, ko utež U_1 zamenjamo z utežjo U_2 z maso $m_2 = 2$ kg?

(d) S kolikšno silo deluje vrvica med gibanjem na klado in s kolikšno na utež U_2?

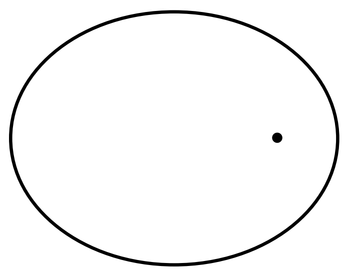
(e) Gladko podlago, po kateri klada drsi brez trenja, zamenjamo s hrapavo podlago, naklona klanca pa ne spremenimo. Klada, ki je preko škripca povezana z utežjo U_2, na tej podlagi ravno še miruje, ker jo zadržuje največja možna sila lepenja. Kolikšna je ta največja sila lepenja, ki na klancu lahko deluje na klado?

(f) Klada na hrapavi podlagi miruje, ko utež U_2 zamenjamo z lažjo utežjo U_1 in s še lažjo utežjo U_3: kolikšna je najmanjša masa uteži U_3, da klada na hrapavi podlagi **miruje**?

(g) Spodnji graf kaže, kako je pospešek klade na klancu, po katerem klada drsi **brez trenja**, odvisen od mase uteži. Opremi graf z osjo, ki ni prikazana. Os označi in napiši skalo. Določi ničlo za obe osi. Upoštevaj, da je pospešek pozitiven, če je rezultanta sil na klado usmerjena po klancu navzgor, in negativen, če je usmerjena po klancu navzdol.



B2 Komet Čurjumov - Gerasimenko opravi obhod okoli Sonca v 6,5 letih, pri čemer je njegova eliptična tirnica dolga 19,6 astronomskih enot ($a.e.$). Tirnica je v merilu narisana na sliki. Ko je komet najbližje Soncu (ki je na sliki označeno s piko), je od njega oddaljen $1{,}24\,a.e.$



(a) S kolikšno povprečno hitrostjo se giblje komet? Izrazi jo v enotah $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

(b) Kolikšna je največja oddaljenost kometa od Sonca? Izrazi jo v astronomskih enotah.

(c) Ker je tirnica kometa eliptična, njegova hitrost ni stalna. Ko je na kometu pristajal modul *Philae*, se je komet gibal s hitrostjo $55 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ glede na Sonce. Predpostavi, da se je v času pristajanja *Philae* komet gibal premo enakomerno. *Philae* se je od sonde *Rosette* odcepil 7 ur pred svojim pristankom na kometu v višini $22{,}5$ km nad kometom. Kolikšna je bila povprečna hitrost modula glede na komet med spuščanjem na komet?

(d) Kolikšna je bila hitrost *Philae* med približevanjem kometu za opazovalca, ki je miroval glede na Sonce? Obkroži pravilen odgovor. Približno

(**A**) $1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. (**B**) $1\,000\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. (**C**) $55 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. (**D**) $2 \cdot 55 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

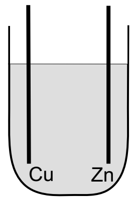
(e) Hitrost kometa se na njegovi poti okoli Sonca spreminja. Ko je komet Soncu najbližje, je hitrost največja, ko je najdlje, je najmanjša (približno $4{,}5$- krat manjša). Nariši graf, ki **približno** kaže, kako **pot** kometa Čurjumov - Gerasimenko narašča s časom, od trenutka, ko je Soncu najbližje, do trenutka, ko naredi en cel obhod. Graf ustrezno označi.

(f) Na grafu in na začetni sliki elipse približno označi eno točko, kjer je bil komet, ko je imel hitrost $55 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

C – eksperimentalna naloga: GALVANSKI ČLEN

Pripomočki	
– različne elektrode, po 3 (Cu, Zn, Fe)	– žice
– 3 plastične posodice	– krokodilčki
– vrč z vodno raztopino kuhinjske soli	– sveteča dioda (LED)
– voltmeter	

(a) V posodico nalij slanico in vanjo postavi bakreno elektrodo, ki jo s krokodilčkom pripneš ob steno posodice. V isto posodico nasproti bakrene elektrode pripni z drugim krokodilčkom še elektrodo iz cinka. Izmeri napetost tako izdelanega galvanskega člena. Na sliko posodice z elektrodama shematično doriši ostale elemente vezja, ki si ga uporabil za merjenje napetosti. Na sliki označi, na katera vhoda voltmetra si vezal elektrodi.



Napetost člena (Cu - Zn) je _______________

(b) Izmeri še napetosti galvanskih členov iz ostalih dveh parov elektrod in ju vpiši v razpredelnico.

par elektrod	U [V]
Cu - Fe	
Zn - Fe	

(c) Izpolni razpredelnico s podatki o napetosti členov iz že opravljenih in novih meritev. Označi tudi **predznake** napetosti: če je pri merjenju napetosti elektroda, zapisana v sivem **stolpcu**, vezana na +, je izmerjena napetost člena **pozitivna**, če je pri merjenju napetosti na + vezana elektroda iz sive **vrstice**, je izmerjena napetost člena **negativna**.

U [V]	Cu	Fe	Zn
Cu (baker)			
Fe (železo)			
Zn (cink)			

(d) Več galvanskih členov, ki so vezani **zaporedno**, sestavlja **baterijo**. Izmeri **skupno** napetost dveh galvanskih členov za člene, zapisane v razpredelnici. Vsak galvanski člen sestavi v svoji posodici in člena potem poveži zaporedno. Za kombinacijo členov v drugi vrstici razpredelnice (Cu - Zn) in (Cu - Zn) nariši shemo celotnega vezja, zraven elektrod napiši simbol elementa, iz katerega je elektroda. Sistematično upoštevaj vrstni red elektrod.

pari členov	U [V]
(Cu - Zn) in (Zn - Cu)	
(Cu - Zn) in (Cu - Zn)	
(Cu - Zn) in (Fe - Zn)	
(Cu - Fe) in (Fe - Zn)	
(Fe - Zn) in (Fe - Cu)	
(Cu - Fe) in (Zn - Cu)	
(Zn - Cu) in (Fe - Cu)	

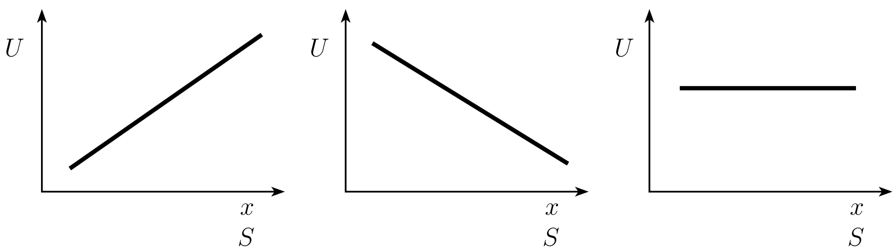
(e) Zamisli si, da imaš še četrto elektrodo el4 iz neznane snovi. Napetost člena (el4 - Zn) je $0{,}2$ V. V razpredelnico napiši, kolikšne so pričakovane napetosti členov v razpredelnici.

členi in zaporedja členov	U [V]
(el4 - Fe) in (Fe - el4)	
(Cu - el4)	
(el4 - Fe)	
(Zn - el4) in (el4 - Cu)	
(el4 - Fe) in (Fe - Zn) in (Zn - el4)	
(el4 - Cu) in (el4 - Zn) in (el4 - Cu)	

(f) Uporabi par elektrod, ki da največjo napetost. S poskusom ugotovi, kateri graf najpravilneje kaže, kako je napetost galvanskega člena odvisna od

(i) razdalje x med (vzporednima) elektrodama, A B C

(ii) površine S dela elektrode, ki je potopljen pod gladino. A B C



(**A**) (**B**) (**C**)

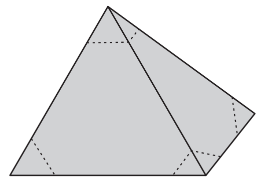
(g) Med pripomočki imaš tudi svetečo (LED) diodo. Zapiši njeno številko. Sveteče diode se razlikujejo od navadnih žarnic. Sestavi baterijo treh členov in nanjo priključi diodo tako, da posveti. Kakšne barve je svetloba, ki jo tvoja dioda oddaja? Nariši celotno vezje z baterijo členov in diodo, označi elektrode in zapiši, na katero elektrodo si vezal **rdeči priključek** diode.

številka diode: __________ barva svetlobe: _________________________

59. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – regijsko tekmovanje

1. letnik

A1. Enakorobi piramidi z robom dolžine 5 cm odrežemo vseh pet oglišč, tako da so vsi robovih odrezanih majhnih piramid krajši od 1 cm. Kateri od naštetih večkotnikov ni mejna ploskev nastalega telesa?



(**A**) trikotnik (**B**) štirikotnik (**C**) petkotnik
(**D**) šestkotnik (**E**) osemkotnik

A2. Lili je ugotovila, da je povprečje števk letnice 2015 enako 2, saj je $\frac{2+0+1+5}{4} = 2$. Kolikokrat v $21.$ stoletju po letu 2015 bo imela letnica enako povprečje števk kot letnica 2015?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 9

A3. Prvo šolsko uro sta bili števili fantov in deklet v razredu v razmerju $3 : 4$. Ko so pred drugo šolsko uro v razred prišla še 4 dekleta, 4 fantje pa so razred zapustili, je to razmerje postalo $2 : 5$. Koliko več deklet kot fantov je bilo v razredu drugo šolsko uro?

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 12

B1. Kvadratu s stranico dolžine a včrtamo pravilni osemkotnik tako, da ležijo 4 stranice osemkotnika na stranicah kvadrata. Izrazi dolžino stranice včrtanega osemkotnika z a.

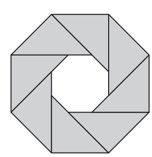
B2. Jure je na tablo zapisal naravna števila od 1 do 2015. Urška je nato po vrsti pregledovala zapisana števila od najmanjšega do največjega in pobrisala vsako, ki ni bilo deljivo s 3. Izmed števil, ki so ostala na tabli, je zatem od najmanjšega do največjega pobrisala vsako, ki ni bilo deljivo s 3^2. Izmed preostalih števil je nato od najmanjšega do največjega pobrisala vsako, ki ni bilo deljivo s 3^3, in tako dalje. Katero število je Urška pobrisala zadnje?

B1. Kvadratu s stranico dolžine a včrtamo pravilni osemkotnik tako, da ležijo 4 stranice osemkotnika na stranicah kvadrata. Izrazi dolžino stranice včrtanega osemkotnika z a.

(6 točk)

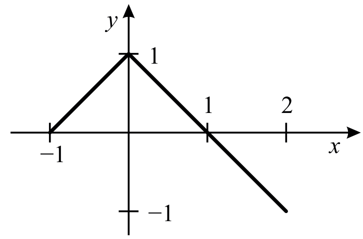
2. letnik

A1. Iz osmih enakokrakih pravokotnih trikotnikov sestavimo pravilen osemkotnik z osemkotno luknjo, kot to prikazuje slika. Dolžina stranice pravilnega osemkotnika je enaka 1 cm. Koliko centimetrov je dolga stranica osemkotne luknje?



(**A**) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (**B**) $\frac{1}{2}$ (**C**) $2-\sqrt{2}$ (**D**) $\sqrt{2}-1$ (**E**) $\sqrt{3}$

A2. Na sliki je prikazan graf neke funkcije na intervalu $[-1,2]$. Katera funkcija je to?



(**A**) $f(x)=x-1$ (**B**) $f(x)=|x|-1$

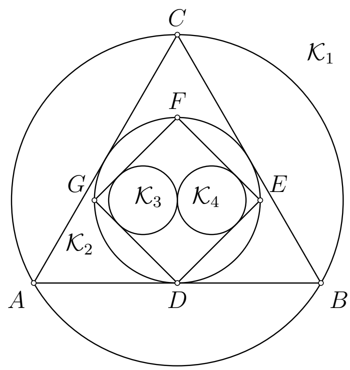
(**C**) $f(x)=|x-1|$ (**D**) $f(x)=-|x|+1$

(**E**) $f(x)=||x|-1|$

A3. Koliko je vrednost izraza $\sqrt{0.04^3}$?

(**A**) $\frac{1}{5}$ (**B**) $\frac{1}{25}$ (**C**) $\frac{1}{125}$ (**D**) 0.04 (**E**) 0.016

B1. Krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ na sliki sta očrtana in včrtana krožnica enakostraničnega trikotnika ABC. Krožnici $\mathcal{K}_2$ je včrtan kvadrat $DEFG$, pri čemer točka D leži na stranici AB. Krožnici $\mathcal{K}_3$ in $\mathcal{K}_4$ sta enako veliki in se med seboj dotikata, vsaka od njiju pa se dotika še dveh stranic kvadrata $DEFG$. Določi razmerje dolžin polmerov krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_4$.



B2. Koliko četveric naravnih števil (a,b,c,d) zadošča neenakostim

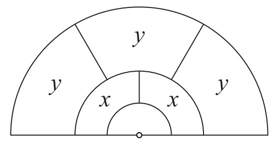
$$a>b>c>d \quad \text{in} \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}>2?$$

B3. Poišči vsa realna števila x, ki zadoščajo enačbi

$$\sqrt[3]{2x+13}-\sqrt[3]{2x-13}=2.$$

3. letnik

A1. Slika prikazuje tri koncentrične polkroge s polmeri 1, 2 in 4. Območji, označeni z X, imata ploščino x, območja, označena z Y, pa ploščino y. Kolikšno je razmerje med ploščinama x in y?



(**A**) $1:3$ (**B**) $1:2$ (**C**) $2:3$ (**D**) $3:8$ (**E**) $4:9$

A2. Za katero celo število n velja

$$(n-1)(n-3)\ldots(n-2015)=n(n+2)(n+4)\ldots(n+2014)?$$

(**A**) -4028 (**B**) -2014 (**C**) 2015 (**D**) 4030 (**E**) Nobeno.

A3. Dan je polinom $p(x)=2015x^{2013}-2$ in realno število h, za katerega velja $p(h)=-2015$. Koliko je vrednost $p(-h)$?

(**A**) 2011 (**B**) 2012 (**C**) 2013 (**D**) 2014 (**E**) 2015

B1. Če polinom p delimo s polinomom $2-x$, dobimo količnik $2x^2-x+3$. Določi ostanek tega deljenja, če veš, da je zmnožek vseh ničel polinoma p enak $\frac{11}{2}$.

B2. Koliko je naravnih števil, manjših od $100\,000$, katerih vsota števk je deljiva z 9 ali s 5?

B3. Simetrala kota pri A ter višina in težiščnica iz oglišča A trikotnika ABC razdelijo kot pri A na 4 enake dele. Določi velikosti kotov trikotnika ABC.

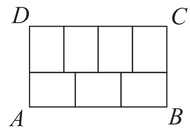
4. letnik

A1. Na nogometnem turnirju je sodelovalo n ekip. Vsaka ekipa je z vsako drugo odigrala natanko eno tekmo. Skupaj je bilo na turnirju odigranih $2015n$ tekem. Koliko ekip je sodelovalo na turnirju?

(**A**) 2015 (**B**) 4029 (**C**) 4030 (**D**) 4031

(**E**) Nemogoče je določiti.

A2. Pravokotnik $ABCD$ na sliki je razdeljen na 7 skladnih pravokotnikov. Koliko znaša razmerje $|BC| : |AB|$?



(**A**) $2:3$ (**B**) $4:5$ (**C**) $7:12$ (**D**) $8:15$

(**E**) Razmerje je odvisno od velikosti pravokotnikov.

A3. Sara išče trimestno naravno število $\overline{xyz}$ (z so enice, y desetice in x stotice), za katerega velja $1 \leq x < y < z$ in da je vsota števil $\overline{xyz}$, $\overline{yzx}$ in $\overline{zxy}$ trimestno število, ki ima vse števke enake. Največ koliko takih trimestnih števil lahko Sara najde?

(**A**) 3 (**B**) 5 (**C**) 7 (**D**) 9 (**E**) 11

B1. Poišči vsa realna števila x, ki zadoščajo neenakosti

$$2\sin^2 2x \geq 3\cos 2x.$$

B2. Naj bo $a_1, a_2, a_3, \ldots$ aritmetično zaporedje. Za poljubno naravno število k značimo $S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$. Dokaži, da za vsaki naravni števili m in n velja

$$S_n - S_m = \frac{n-m}{n+m} S_{n+m}.$$

B3. Naj bo $\mathcal{K}$ trikotniku ABC očrtana krožnica, I pa središče trikotniku ABC včrtane krožnice. Razpolovišče tistega loka BC krožnice $\mathcal{K}$, ki ne vsebuje točke A, označimo z D, razpolovišče tistega loka CA krožnice $\mathcal{K}$, ki ne vsebuje točke B, pa označimo z E. Naj bo F zrcalna slika točke I pri zrcaljenju čez stranico AB in denimo, da F leži na krožnici $\mathcal{K}$. Koliko je velik kot $\sphericalangle DFE$?

59. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje

1. letnik

1. Eva, Igor, Marko in Maruša so na list papirja zapisali vsak svoje naravno število. Če bi izbrisali zadnjo števko Evinega števila, bi dobili Igorjevo število. Če bi izbrisali zadnjo števko Igorjevega števila, bi dobili Markovo število. Če pa bi izbrisali zadnjo števko Markovega števila, bi dobili Marušino število. Vsota vseh štirih zapisanih števil je bila 3838. Katera števila so zapisali Eva, Igor, Marko in Maruša?

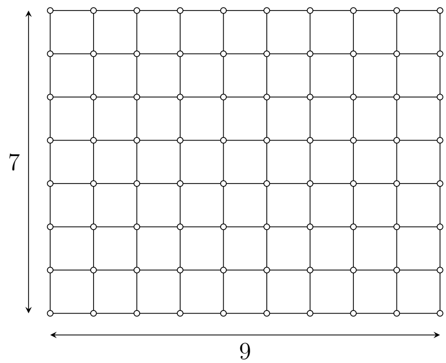
2. Za realni števili x in y velja

$$x^3 + x^2 + xy + x + y + 2 = 0 \quad \text{in} \quad y^3 - y^2 + 3y - x = 0.$$

   Določi vrednost izraza $x - y$.

3. Dan je kvadrat $ABCD$ in taki točki E in F izven kvadrata, da sta trikotnika BEC in CFD enakostranična. Dokaži, da je tudi trikotnik AEF enakostraničen.

4. Dana je pravokotna mreža velikosti 7×9 (glej sliko). V spodnjem levem vozlišču mreže je kolonija mravelj, v zgornjem desnem vozlišču pa je njihovo mravljišče. V vseh ostalih vozliščih mreže je po eno zrno riža. Vsaka mravlja iz kolonije se na poti do mravljišča sprehaja po povezavah mreže, vendar le v smereh desno ali navzgor. Na svoji poti pobere vsa zrna riža, na katera naleti, in ko pride do mravljišča, tam tudi ostane. Najmanj koliko mravelj bi moralo biti v koloniji, da bi lahko pobrale vsa zrna riža?



2. letnik

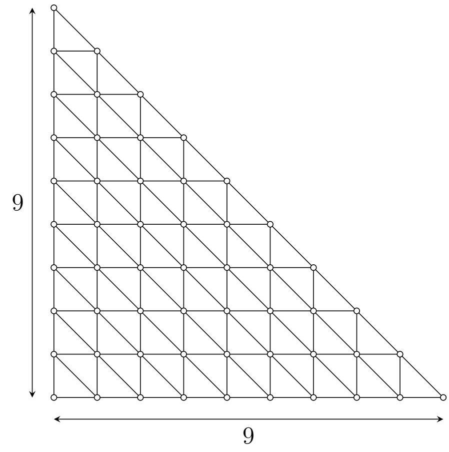
1. Poišči vse pare realnih števil x in y, ki zadoščajo enačbama

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{y - x} &= 1, \\ y + \frac{1}{x - y} &= 2. \end{aligned}$$

2. Poišči vse pare naravnih števil a in b, za katere je $a - b = 101$ in je ab popoln kvadrat.

3. Naj bo P razpolovišče stranice AB trikotnika ABC. Zrcalna slika poltraka PC pri zrcaljenju čez premico AB seka trikotniku ABC očrtano krožnico v točki D. Naj bo E drugo presečišče premice CP s trikotniku ABC očrtano krožnico. Dokaži, da je $|AE| = |BD|$.

4. Dana je trikotna mreža velikosti 9×9 (glej sliko). V zgornjem vozlišču mreže je kolonija mravelj, v desnem vozlišču pa je njihovo mravljišče. V vseh ostalih vozliščih mreže je po eno zrno riža. Vsaka mravlja iz kolonije se na poti do mravljišča sprehaja po povezavah mreže, vendar le v smereh desno, navzdol ali diagonalno desno-navzdol. Na svoji poti pobere vsa zrna riža, na katera naleti, in ko pride do mravljišča, tam tudi ostane. Najmanj koliko mravelj bi moralo biti v koloniji, da bi lahko pobrale vsa zrna riža?



3. letnik

1. Za koliko naravnih števil n, $n \leq 2015$, ulomek $\dfrac{3n-1}{2n^2+1}$ ni okrajšan?

2. Poišči vse polinome p lihe stopnje z realnimi koeficienti, za katere velja

$$p(p(x)) \leq (p(x))^3$$

za vse $x \in \mathbb{R}$ in ki imajo koeficient pri x^2 enak 0.

3. Naj bo $ABCD$ štirikotnik, za katerega velja $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACB = 20^\circ$, $\sphericalangle DCA = 30^\circ$ in $\sphericalangle CAD = 40^\circ$. Določi velikost kota $\sphericalangle CBD$.

4. V vrsti stoji n luči, $n \geq 3$, ki so oštevilčene s števili od 1 do n. Na začetku je vsaka liha luč v vrsti prižgana, vsaka soda luč pa ugasnjena. V vsaki potezi lahko hkrati zamenjamo stanje treh zaporednih luči v vrsti (ugasnjene prižgemo, prižgane pa ugasnemo).

   (a) Dokaži, da vrstni red izvajanja potez za končno stanje luči ni pomemben.

   (b) Za katera števila n lahko v končno mnogo potezah pridemo do stanja, v katerem bo vsaka liha luč v vrsti ugasnjena, vsaka soda luč pa prižgana?

4. letnik

1. Poišči vse pare naravnih števil a in b, za katere je $2a^b = ab + 3$.

2. Naj bo $a_1, a_2, a_3, \ldots$ zaporedje neničelnih realnih števil, za katerega velja $a_n^2 = -a_{n+1}a_{n-1}$ za vsa naravna števila n, $n \geq 2$. Dokaži, da je zaporedje $a_2, a_4, a_6, \ldots$ geometrijsko.

3. Naj bosta D in E zaporedoma razpolovišči stranic BC in CA trikotnika ABC. Premici AD in BE sekata trikotniku ABC očrtano krožnico zaporedoma še v točkah P in Q. Denimo, da je $|DP| = |EQ|$. Dokaži, da je trikotnik ABC enakokrak z vrhom C.

4. V podjetju, ki ga vodi več direktorjev, imajo sef, ki je zaklenjen s šestimi ključavnicami. Vsak direktor ima tri ključe, s katerimi lahko odklene tri različne ključavnice. Z vsakim ključem lahko odklene natanko eno ključavnico.

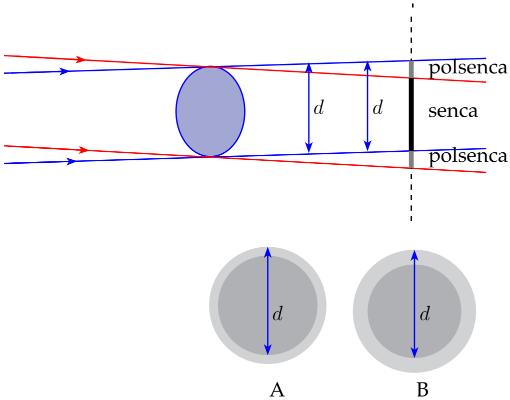
   Nobena dva direktorja ne moreta odkleniti istih treh ključavnic in nobena dva direktorja skupaj ne moreta odpreti sefa. Največ koliko direktorjev vodi to podjetje?

Rešitve tekmovanja iz fizike za zlato Stefanovo priznanje – državno tekmovanje

8. razred

A1 Na grafu lege v odvisnosti od časa ponazarja strmina grafa hitrost; strmini obeh grafov in hitrosti tekačev sta enaki ob t_2.

A2 Balona sta približno enako velika in balon B je dlje od tal kot balon A. Slika kaže balon širine d. Z večanjem razdalje med balonom in tlemi se pas polsence širi, območje polne sence pa oži.



A3 Prvi krajec je nad obzorjem približno od poldneva do polnoči ne glede na to, odkod z zemeljske oble ga opazujemo. Ker Cape Town leži pod južnim povratnikom, je John pri opazovanju Lune obrnjen proti severu in vidi zrcalno podobo Lune (glede na Nejca, ki opazuje Luno proti jugu).

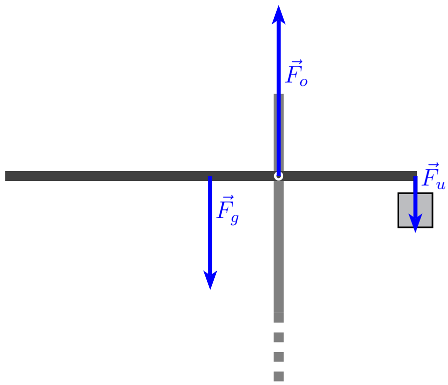
A4 Žarek se pri prehodu skozi tanko steno akvarija iz zraka v vodo lomi proti vpadni pravokotnici. Na gladini se popolnoma odbije po odbojnem zakonu: vpadni kot je enak odbojnemu.

A5 Rinka na krajišču droga miruje: vsota sil, ki nanjo delujejo, je nič. Sile se seštejejo v nič le na sliki (A). Poleg tega sile v vrveh lahko delujejo le vzdolž vrvi in jih le napenjajo.

B1 Sile so zapisane z vektorskim znakom, ko je to potrebno. Ko zapišemo oznako za silo brez vektorskega znaka, to pomeni pozitivno velikost sile, smer upoštevamo v predznaku.

(a) Predstavljamo si, da je vsa masa prečke $m = 200$ g zbrana v težišču prečke, na razdalji $r^* = 10$ cm od osi v smeri proti levemu krajišču prečke. Utež z maso m_u je na desnem krajišču prečke v oddaljenosti $r_u = 20$ cm od osi. V ravnovesju velja $m \cdot r^* = m_u \cdot r_u$, odkoder dobimo $m_u = 100$ g.

(b) Na vodoravno prečko delujejo tri sile. Izven osi delujeta nanjo dve sili: na desnem krajišču, v oddaljenosti r_u od osi, prijemlje sila uteži, po velikosti enaka teži uteži ($F_u = 1$ N), v središču prečke, na razdalji $r^* = 10$ cm od osi proti levemu krajišču, pa prijemlje teža prečke $F_g = 2$ N. V osi, kjer je prečka vpeta na stojalo, deluje na prečko sila stojala, ki uravnoveša prvi dve sili in meri $F_o = 3$ N.



(c) Na prečko delujeta izven osi v vsakem primeru dve sili: teža prečke $F_g = 2$ N, ki prijemlje na oddaljenosti $r^* = 10$ cm od osi proti levi, in ena od sil F_1, ..., F_4, ki prijemljejo pri $r_1 = 40$ cm, $r_2 = 20$ cm, $r_3 = 10$ cm in $r_4 = 20$ cm. V skladu s pojasnilom o smereh sil lahko zapišemo enačbe

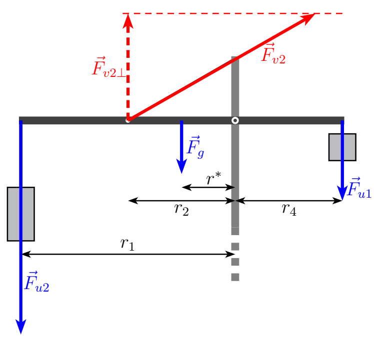
$$\begin{aligned}
-F_1 \cdot r_1 + F_g \cdot r^* &= 0\,, \\
-F_2 \cdot r_2 + F_g \cdot r^* &= 0\,, \\
F_g \cdot r^* &= F_3 \cdot r_3\,, \\
F_g \cdot r^* &= F_4 \cdot r_4\,.
\end{aligned}$$

Od tod dobimo $F_1 = 0{,}5$ N, $F_2 = 1$ N, $F_3 = 2$ N in $F_4 = 1$ N.

(d) Sila $\vec{F'}_1$ prijemlje pri $r_1 = 40$ cm. Na prečko pravokotna komponenta sile $\vec{F'}_1$ je po velikosti enaka sili F_1 v primeru (c), $F_1 = 0{,}5$ N. Ko narišemo pravokotno komponento sile $\vec{F'}_1'$ (v poljubnem merilu) in izmerimo dolžino daljice, ki predstavlja silo $\vec{F'}_1$, ugotovimo, da je $\vec{F'}_1$ po velikosti dvakrat tolikšna kot njena pravokotna komponenta, $F_1' = 1$ N $\pm\, 0{,}1$ N.

(e) V tem primeru drži prečko v vodoravni legi vrvica. Ker je kot vrvice glede na prečko enak kotu, pod katerim je na prečko delovala sila $\vec{F'}_1$ pri (d), meri sila vrvice $\vec{F}_v$ dvakrat toliko kot njena pravokotna komponenta. Velikost pravokotne komponente sile $\vec{F}_v$ je enaka velikosti sile $F_2 = 1$ N, ker prijemlje pri isti oddaljenosti od osi $r_2 = 20$ cm. Velikost sile vrvice je $F_v = 2$ N.

(f) Slika kaže sile, ki delujejo na prečko. **Sile niso narisane v merilu**, njihove smeri in prijemališča pa so točni.



Vrvica je na prečko pritrjena v enaki oddaljenosti kot prej, pri $r_2 = 20$ cm. Utež na desni je od osi oddaljena za $r_4 = 20$ cm, utež na levi za $r_1 = 40$ cm, teža prečke pa prijemlje pri $r^* = 10$ cm od osi. Enačba za ravnovesje prečke je

$$F_{u2} \cdot r_1 - F_{v2\perp} \cdot r_2 + F_g \cdot r^* = F_{u1} \cdot r_4\,,$$

kjer so sile $F_{u2} = 10$ N, $F_{u1} = 3$ N, $F_g = 2$ N. Ko v enačbo vstavimo znane oddaljenosti in sile, dobimo

$$40\,\mathrm{N} - 2 \cdot F_{v2\perp} + 2\,\mathrm{N} = 6\,\mathrm{N} \qquad \text{in odtod} \qquad F_{v2\perp} = 18\,\mathrm{N}\,.$$

Sila vrvice je po velikosti dvakrat tolikšna kot njena pravokotna komponenta,

$$F_{v2} = 36\,\mathrm{N}\,.$$

B2 (a) Čas, v katerem svetloba prepotuje pot $s = 730{,}000$ km $= 730\,000$ m s hitrostjo c, je

$$t_s = \frac{s}{c} = \frac{730\,000\,\mathrm{m}\ \cdot\ \mathrm{s}}{299\,792\,458\,\mathrm{m}} = 0{,}002\,435\,018\,\mathrm{s} = 2{,}435\,018\,\mathrm{ms}\,.$$

(b) Nevtrini isto pot prepotujejo v času $t_n = t_s - 60$ ns $= 0{,}002\,434\,958\,\mathrm{s} = 2{,}434\,958\,\mathrm{ms}$.

(c) Hitrost nevtrinov bi bila

$$c_n = \frac{s}{t_n} = \frac{730\,000\,\mathrm{m}}{0{,}002\,434\,958\,\mathrm{s}} = 299\,799\,845\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,,$$

za faktor

$$\frac{c_n}{c} = \frac{299\,799\,845\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{299\,792\,458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 1{,}000\,024\,641$$

(d) Glede na podatke v novici nevtrini prehitijo svetlobo za razdaljo, ki jo svetloba opravi v $\Delta t = 60$ ns,

$$\Delta s = c \cdot \Delta t = 299\,792\,458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 60\ \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s} = 17{,}9875\,\mathrm{m} \approx 18\,\mathrm{m}\,.$$

(e) Manjšo hitrost nevtrinov izračunamo, če je pot nevtrinov **krajša** in čas potovanja **daljši**. Da dobimo najmanjšo hitrost nevtrinov $c_{n,min}$ iz podatkov o meritvah, pri katerih upoštevamo natančnost meritve, vzamemo krajšo pot $s_1 = s - 20$ cm $= 729\,999{,}8$ m in daljši čas potovanja $t_1 = t_n + 10$ ns $= 0{,}002\,434\,968\,\mathrm{s}$. V tem primeru je hitrost nevtrinov

$$c_{n,min} = \frac{s_1}{t_1} = \frac{729\,999{,}8\,\mathrm{m}}{0{,}002\,434\,968\,\mathrm{s}} = 299\,798\,532\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,(\pm\,20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})$$

in je še vedno za

$$c_{n,min} - c = 299\,798\,532\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,(\pm\,20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}) - 299\,792\,458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 6\,074\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,(\pm\,20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})$$

večja od hitrosti svetlobe c. V oklepaju je napisana napaka zaradi zaokroževanja pri računanju.

Eksperimentalna naloga

C Na meritve vplivata vlažnost in temperatura zraka v prostoru.

(a), (b) Primer rezultatov meritev je v razpredelnici. Rezultati, napisani v teh rešitvah, se nanašajo na merske podatke v tej razpredelnici.

pot s [cm]	(a) $\leftrightarrow$ $t_{\leftrightarrow}$ [s]	(b) $\updownarrow$ $t_{\updownarrow}$ [s]
0	0:00	0:00
1	0:03	0:01
2	0:09	0:04
3	0:17	0:10
4	0:29	0:25
5	0:46	0:49
6	1:07	1:30
7	1:29	2:35
8	1:58	4:10
9	2:29	6:10
10	3:03	9:35
11	3:41	
12	4:20	
13	5:09	
14	6:01	
15	6:55	

(c) Povprečna hitrost vode na celotni poti v primeru (a) je

$$\bar{v}_{\leftrightarrow} = \frac{s_{\leftrightarrow}}{t_{sk,\leftrightarrow}} = \frac{15\,\mathrm{cm}}{415\,\mathrm{s}} = 0{,}036\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}\,.$$

kjer je $s_{\leftrightarrow} = 15$ cm in $t_{sk,\leftrightarrow} = 6$ min 55 s $= 415$ s.
Povprečna hitrost vode na celotni poti v primeru (b) je

$$\bar{v}_{\updownarrow} = \frac{s_{\updownarrow}}{t_{sk,\updownarrow}} = \frac{10\,\mathrm{cm}}{575\,\mathrm{s}} = 0{,}017\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}\,.$$

kjer je $s_{\updownarrow} = 10$ cm in $t_{sk,\updownarrow} = 9$ min 35 s $= 575$ s.

(d) Hitrost, s katero se giblje voda po vodoravnem papirnatem traku na 1. cm poti:

$$v_{\leftrightarrow,1} = \frac{s_1}{t_{\leftrightarrow,1}} = \frac{1\,\mathrm{cm}}{3\,\mathrm{s}} = 0{,}33\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}\,.$$

kjer je pot $s_1 = 1$ cm in je čas $\Delta t_{\leftrightarrow,1}$ čas, v katerem voda prepotuje 1. cm poti, $\Delta t_{\leftrightarrow,1} = 3$ s.
Hitrost, s katero se giblje voda po vodoravnem papirnatem traku na 10. cm poti:

$$v_{\leftrightarrow,10} = \frac{s_1}{\Delta t_{\leftrightarrow,10}} = \frac{1\,\mathrm{cm}}{34\,\mathrm{s}} = 0{,}029\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}\,.$$

kjer je pot $s_1 = 1$ cm in je čas $\Delta t_{\leftrightarrow,10}$ čas, v katerem voda prepotuje 10. cm poti, $\Delta t_{\leftrightarrow,10} =$ 3 min 3 s -2 min 29 s $=$ 34 s.
Hitrost, s katero se giblje voda po navpičnem papirnatem traku na 1. cm poti:

$$v_{\updownarrow,1} = \frac{s_1}{t_{\updownarrow,1}} = \frac{1\,\mathrm{cm}}{1\,\mathrm{s}} = 1\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}\,.$$

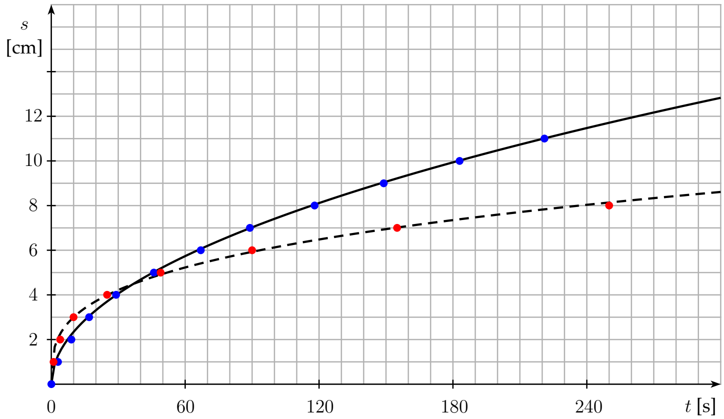
kjer je pot $s_1 = 1$ cm in je čas $\Delta t_{\updownarrow,1}$ čas, v katerem voda prepotuje 1. cm poti, $\Delta t_{\updownarrow,1} = 1$ s.

Hitrost, s katero se giblje voda po navpičnem papirnatem traku na 10. cm poti:

$$v_{\updownarrow,10} = \frac{s_1}{\Delta t_{\updownarrow,10}} = \frac{1\,\mathrm{cm}}{205\,\mathrm{s}} = 0{,}0049\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}\,.$$

kjer je pot $s_1 = 1$ cm in je čas $\Delta t_{\updownarrow,10}$ čas, v katerem voda prepotuje 10. cm poti, $\Delta t_{\updownarrow,10} =$ 9 min 35 s -6 min 10 s $=$ 3 min 25 s $=$ 205 s.

(e) Grafa, ki kažeta, kako se pot, ki jo voda opravi, spreminja s časom v obeh primerih. Graf, narisan s sklenjeno črto, je za vodoravni trak, graf, narisan s črtkano črto, je za navpični trak.



(f) Okoliščine, ki vplivajo na to, da pojav v obeh primerih ne poteka povsem enako, so

(i) nagib papirnatega traku: sila teže vode, ki leze po traku, je v prvem primeru pravokotna na smer gibanja vode, v drugem pa nasprotna smeri gibanja vode,

(ii) ko trak leži na mizi, je ena stran tesno ob mizi, druga na zraku; ko trak visi, je na obeh straneh zrak. Od tega je odvisno izhlapevanje vode s traku,

(iii) smer rezanja trakov iz brisače (dopustna domneva).

(g) Okoliščine, ki bi lahko vplivale na potek pojava, a v našem primeru vplivajo na oba enako, so na primer

(i) vlažnost zraka v prostoru, kjer izvajamo poskus,

(ii) temperatura zraka v prostoru, kjer izvajamo poskus,

(iii) vpojne lastnosti papirnate brisače, iz katere je trak izrezan (če bi bila trakova iz različnih brisač ali pa odrezana v različnih smereh),

(iv) različna širina trakov,

(v) različna debelina trakov.

(h) Ko trak visi, se plezanje vode v višino ustavi, ker (kohezijskim) silam med vodo in vlakni papirnate brisače, ki vlečejo vodo iz kozarca navgor, nasprotuje teža. Prej ali slej teža stolpca vode, dvignjenega nad gladino vode v kozarcu, uravnovesi kohezijske sile.

Tudi ko trak leži vodoravno, se lezenje vode po traku ustavi - voda ne prileze poljubno daleč, ker neprestano s papirnatega traku tudi izhlapeva, trak se suši. Izhlapelo vodo v stacionarnem stanju nadomešča novo prispela voda.

A1 Graf $v(s)$ kaže premosorazmerje med hitrostjo in predrsano potjo, kar pomeni, da lahko hitrost zapišemo kot $v = k \cdot s$, kjer je k koeficient premega sorazmerja. Drugi graf podaja odvisnost $s(t)$, in ker sta v in s premo-sorazmerni, velja tudi $v(t) = k \cdot s(t)$, kar pomeni, da ima graf $v(t)$ enako obliko kot graf $s(t)$.

A2 Prvi krajec je nad obzorjem približno od poldneva do polnoči ne glede na to, odkod z zemeljske oble ga opazujemo. Ker Cape Town leži pod južnim povratnikom, je John pri opazovanju Lune obrnjen proti severu in vidi zrcalno podobo Lune (glede na Nejca, ki opazuje Luno proti jugu).

A3 Označimo zmesno temperaturo s T_z. Izmenjavo toplote med deli sistema opišemo z enačbo

$$m_1 \cdot c \cdot (T_z - T_1) + m_2 \cdot c \cdot (T_z - T_2) + m_3 \cdot c \cdot (T_z - T_3) = 0\,,$$

kjer so $m_1 = 100$ g, $m_2 = 300$ g, $m_3 = 400$ g, $T_1 = 278$ K, $T_2 = 282$ K in $T_3 = 289$ K. Iz enačbe izrazimo T_z,

$$\begin{aligned} T_z &= \frac{m_1 \cdot T_1 + m_2 \cdot T_2 + m_3 \cdot T_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \\ &= \frac{0{,}1\,\mathrm{kg}\ \cdot 278\,\mathrm{K} + 0{,}3\,\mathrm{kg}\ \cdot 282\,\mathrm{K} + 0{,}4\,\mathrm{kg}\ \cdot 289\,\mathrm{K}}{0{,}8\,\mathrm{kg}} = 285\,\mathrm{K} = 12\,^\circ\mathrm{C}\,. \end{aligned}$$

(V prvi enačbi bi lahko uporabili pri temperaturah tudi enoto °C, ker so pomembne le spremembe temperature in se konstanta 273 K odšteje.)

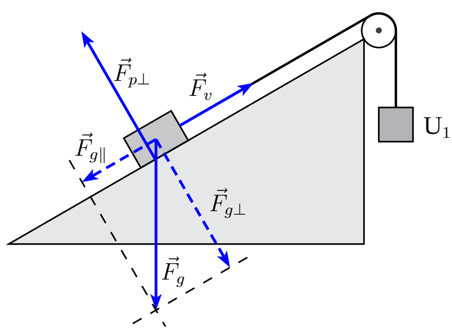
Nalogo lahko rešimo tudi s sklepanjem po korakih. Najprej zmešamo masi vode v razmerju 1:3. Interval 4° med temperaturama obeh delov vode razdelimo v enakem razmerju 1:3. Zmesna temperatura je bližje temperaturi vode, ki jo je bilo na začetku več: 8°C. Ko primešamo tej vodi enako maso vode z višjo temperaturo, je končna temperatura na sredini med njima: 12°C.

A4 Enoti $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ ustreza le količina $j = \frac{\Delta W}{\Delta t \cdot S}$. Gostoto energijskega toka uporabimo, da opišemo, koliko energije (na primer z valovanjem, tudi toplote pri prevajanju) se pretoči skozi (ali vpade na) $1\ \mathrm{m}^2$ veliko ploskev v 1 s.

A5 Z **zaporedno** vezavo dodatne žarnice se skupni upor vezja poveča, tok skozi vir pa zmanjša ne glede na to, kateremu porabniku v krogu vežemo žarnico zaporedno.

B1 Sile so zapisane z vektorskim znakom, ko je potrebno. Ko zapišemo oznako za silo brez vektorskega znaka, to pomeni pozitivno velikost sile, smer upoštevamo v predznaku.

(a) Na klado, ki miruje na klancu, delujejo teža $\vec{F}_g$ (ki jo razstavimo na pravokotni komponenti $\vec{F}_{g\perp}$ in $\vec{F}_{g\|}$), sila vrvice $\vec{F}_v$ in pravokotna sila podlage $\vec{F}_{p\perp}$. Sile so v ravnovesju, njihova vsota je nič. Sila vrvice $\vec{F}_v$ uravnoveša dinamično komponento teže $\vec{F}_{g\|}$, pravokotna sila podlage $\vec{F}_{p\perp}$ uravnoveša statično komponento teže $\vec{F}_{g\perp}$. Velikosti sil določimo z načrtovanjem, pri katerem sile narišemo v merilu. Vemo da je $F_g = 30$ N, dobimo $F_{g\|} = F_v = 15$ N, $F_{g\perp} = F_{p\perp} = 25$ N.



(b) Na utež U$_1$, ki miruje, delujeta nasprotno enaki teža uteži $\vec{F}_{gU_1}$ in sila vrvice $\vec{F}_{v1}$. Sila vrvice na utež $\vec{F}_{v1}$ je po velikosti enaka sili vrvice $\vec{F}_v$ na klado, $F_{v1} = F_v = 15$ N. Masa uteži U$_1$ je $m_1 = 1{,}5$ kg.

(c) Ko utež U$_1$ zamenjamo z utežjo U$_2$ z maso $m_2 = 2$ kg, deluje na sistem klade K in uteži U$_2$ rezultanta sil, po velikosti enaka razliki med težo uteži $F_{gU_2} = 20$ N in dinamično komponento teže klade $F_{g\|} = 15$ N. Utež U$_2$ se spušča, klada K pa se giblje po klancu navzgor s pospeškom

$$a = \frac{F_{gU_2} - F_{g\|}}{m + m_2} = \frac{20\,\mathrm{N} - 15\,\mathrm{N}}{3\,\mathrm{kg} + 2\,\mathrm{kg}} = \frac{5\,\mathrm{N}}{5\,\mathrm{kg}} = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

(d) Na klado in na utež U$_2$ delujeta med njunim gibanjem po velikosti enaki sili vrvice. Lahko zapišemo 2. Newtonov zakon samo za utež, na katero delujeta teža in sila vrvice F_{v2}, $m_2 \cdot a = F_{gU_2} - F_{v2}$, in dobimo

$$F_{v2} = F_{gU_2} - m_2 \cdot a = 20\,\mathrm{N} - 2\,\mathrm{kg}\,\cdot\,1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 18\,\mathrm{N}\,.$$

Če zapišemo 2. Newtonov zakon le za klado, $m \cdot a = F_{vk} - F_{g\|}$, dobimo

$$F_{vk} = F_{g\|} + m \cdot a = 15\,\mathrm{N} + 3\,\mathrm{kg}\,\cdot\,1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 18\,\mathrm{N}\,.$$

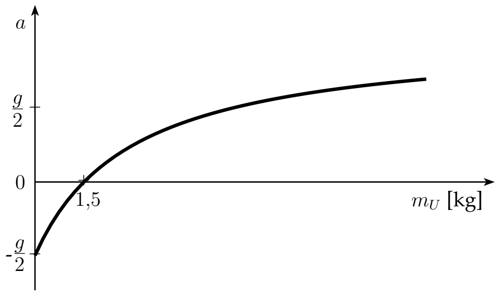
(Vidimo, da res dobimo enaki sili vrvice na utež in klado, $F_{v2} = F_{vk}$.)

(e) Na hrapavi podlagi sistem miruje. Dokler klada miruje, deluje nanjo sila lepenja $\vec{F}_l$, ki je vzporedna s podlago. Ta sila deluje v smeri, ki je **nasprotna** smeri, v katero bi se klada premaknila zaradi delovanja vseh ostalih sil. Velikost sile lepenja se do svoje največje možne vrednosti prilagaja ostalim silam tako, da je skupna vsota vseh sil na klado enaka 0 - klada miruje. Ko vsota ostalih sil na klado preseže vrednost, ki jo lahko uravnovesi največja možna sila lepenja $\vec{F}_{l,max}$, se klada premakne.

Obravnavamo mejni primer, ko je sila lepenja na klado največja, $F_l = F_{l,max}$, in sistem klade in uteži U$_2$ miruje. Sila vrvice $\vec{F'}_{v2}$ na utež U$_2$ uravnoveša njeno težo, ki je $F_{g2} = 20$ N, torej velja tudi $\vec{F'}_{v2} = 20$ N. S po velikosti enako silo $F_{vk2} = 20$ N vleče vrvica na svojem drugem krajišču vzdolž klanca navzgor klado, ki na podlagi miruje. To pomeni, da silo vrvice na klado $\vec{F}_{vk2}$ uravnovešata dinamična komponenta teže $F_{g\|} = 15$ N, in največja možna sila lepenja, $F_{l,max} = 5$ N. Sila lepenja na klado je vzporedna s podlago in v tem primeru usmerjena po klancu navzdol.

(f) Če utež U$_2$ nadomestimo z lažjo utežjo U, ki pa je hkrati še vedno težja od U$_1$, se sila vrvice zmanjša, a je še vedno večja od dinamične komponente teže klade. Klada miruje, ker silo v vrvici $\vec{F}_{vk}$ uravnoveša še sila lepenja $\vec{F}_l$, ki ima isto smer kot dinamična komponenta teže, po velikosti pa je zdaj manjša od največje možne sile lepenja $\vec{F}_{l,max}$. Dokler klada miruje, velja $F_{g\|} + F_{lep} = F_{vk}$. Če je masa uteži U manjša od mase uteži U$_1$, pa deluje na klado sila lepenja (dokler klada miruje) v smeri, ki je **nasprotna** smeri dinamične komponente teže in pomaga sili vrvice $\vec{F}_{vk}$ to komponento teže uravnovesiti. Dokler klada miruje, velja $F_{g\|} = F_{vk} + F_{lep}$. Ker je največja možna sila lepenja po velikosti enaka 5 N, vidimo, da je najmanjša sila vrvice F_{vk}, ki skupaj s silo lepenja še zagotavlja mirovanje klade, po velikosti enaka 10 N. Taka sila vrvice ustreza uteži U$_3$ z maso 1 kg.

(g) Graf:



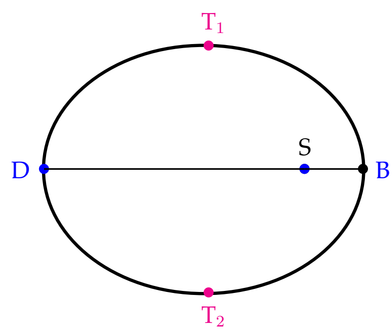
V skrajnem primeru, ko je masa uteži zelo majhna, $m_U \to 0$ (ali ko uteži sploh ni), na klado vzdolž klanca deluje rezultanta vseh sil, ki je kar enaka dinamični komponenti teže $\vec{F}_{g\|}$, ki meri pol teže. Klada drsi po klancu navzdol s pospeškom $-\frac{1}{2}\,g$, ker upoštevamo dogovor o predznaku pospeška a glede na smer gibanja klade. Zdaj lahko

narišemo vodoravno os na sredini med vrednostjo pospeška pri $m_U = 0$ in vrednostjo $\frac{1}{2}\,g$, označeno na navpični osi. Kjer graf seka vodoravno os, velja $a = 0$, klada miruje (ali se giblje premo enakomerno): taka vrednost pospeška utreza primeru z utežjo U_1, ki ima maso $m_1 = 1{,}5$ kg (glej vprašanje (b)).

B2 (a) Povprečna hitrost kometa je

$$\bar{v} = \frac{s}{t_0} = \frac{19{,}6\,a.e.}{6{,}5\,\text{let}} = \frac{19{,}6\,\cdot 150\,\cdot 10^6\,\text{km}}{6{,}5\,\cdot\,365\,\cdot 24\,\text{h}} = 51{,}6\,\cdot\,10^3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\,.$$

(b) Tirnica kometa je v merilu narisana na sliki. Razdalja med točko S, ki označuje lego Sonca, in točko B, ki je Soncu najbližje, meri na sliki 1 cm, kar ustreza v naravi razdalji $1{,}24\,a.e.$ Razdalja med točko, ki označuje lego Sonca, in točko D, ki je od vseh točk na tirnici najdlje od Sonca, meri na sliki $4{,}6$ cm $\pm\,0{,}1$ cm, kar ustreza v naravi razdalji $r_{max} = (4{,}6\,\pm\,0{,}1)\cdot\,1{,}24\,a.e. = 5{,}7\,a.e.\,\pm\,0{,}1\,a.e.$



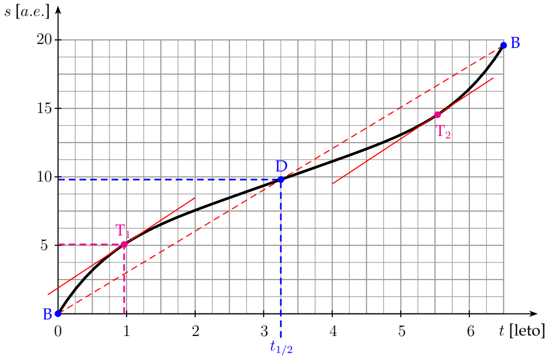
(c) Povprečna hitrost modula med pristajanjem na kometu je bila glede na komet

$$\bar{v}_P = \frac{h}{t_p} = \frac{22{,}5\,\text{km}}{7\,\text{h}} = 3{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 0{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

(d) Pravilni odgovor je (**C**). Modul se med približevanjem kometu giblje **glede na komet** z majhno hitrostjo $0{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, skupaj s kometom pa se gibljeta **glede na Sonce** s hitrostjo kometa $55\,\cdot\,10^3\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

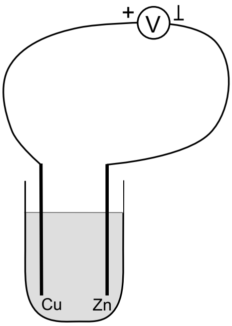
(e) Graf na sliki (črna sklenjena debelejša črta) **približno** kaže, kako pot kometa narašča s časom med enim kometovim obhodom Sonca. Trenutek $t = 0$ je tedaj, ko je komet

Soncu najbližje. Na sliki pri vprašanju (b) je ta lega označena s točko B. V okolici te točke je hitrost kometa največja, kar se pozna v strmini grafa: graf je v B najbolj strm. Komet ima najmanjšo hitrost v legi, ki je na sliki pri (b) označena s točko D, ki leži na polovici poti ($s_D = 9{,}8\,a.e.$ in $t_{1/2} = 3{,}25$ let), ki jo komet opravi v enem obhodu. Graf je v D najpoložnejši. Če bi koordinatno izhodišče postavili v točko D, bi bil graf poti kometa v odvisnosti od časa $s(t)$ **liha** funkcija.



(f) Točki T_1 in T_2, v katerih bi lahko bil komet, ki se je v obdobju pristajanja modula gibal glede na Sonce s hitrostjo $55 \cdot 10^3\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, sta označeni na grafu pri vprašanju (e). Hitrost kometa je bila tedaj nekoliko večja od njegove povprečne hitrosti $\bar{v}$, ki jo ponazarja strmina daljice (rdeča črtkana črta), ki povezuje točki B na grafu. Na grafu $s(t)$ najdemo dve točki, v katerih je trenutna hitrost kometa (ki jo ponazarja strmina tangente na graf v teh točkah, tangenti sta narisani z rdečo črto) malce večja od povprečne hitrosti kometa. Ti dve točki sta **približno** (glede na graf) po času eno leto oddaljeni od točke B, po poti pa za četrtino celotnega obhoda ($5\,a.e.$). Prikazani sta na sliki pri (b).

C (a) Napetost člena (Cu - Zn) je $U_1 = 0{,}8$ V $\pm\, 0{,}1$ V.
Vezavo pri merjenju napetosti člena kaže slika.



(b) Napetost preostalih dveh parov galvanskih členov je zapisana v razpredelnici.

par elektrod	U [V]
Cu - Fe	$U_2 = 0{,}3 \pm 0{,}1$
Zn - Fe	$U_3 = 0{,}5 \pm 0{,}1$

(c) Napetost galvanskih členov (upoštevamo dogovor o predznaku napetosti):

U [V]	Cu	Fe	Zn
Cu (baker)	$0 \pm 0{,}01$	$0{,}3 \pm 0{,}1$	$0{,}8 \pm 0{,}1$
Fe (železo)	$-0{,}3 \pm 0{,}1$	$0 \pm 0{,}01$	$0{,}5 \pm 0{,}1$
Zn (cink)	$-0{,}8 \pm 0{,}1$	$-0{,}5 \pm 0{,}1$	$0 \pm 0{,}01$

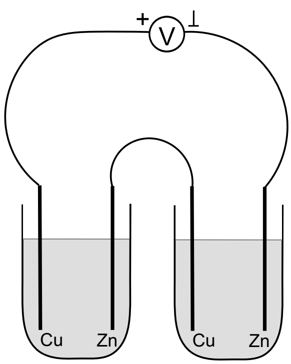
U [V]	Cu	Fe	Zn
Cu (baker)	0	U_2	U_1
Fe (železo)	$-U_2$	0	U_3
Zn (cink)	$-U_1$	$-U_3$	0

Izmerjena napetost člena, v katerem sta elektrodi iste vrste elektrodi, je približno 0 V. Odstopanje dobimo zaradi nečistoč na elektrodah. Napetost člena (el1 - el2) je po velikosti enaka, po predznaku pa nasprotna napetosti člena (el2 - el1). Tega ne moremo izmeriti z voltmetri, ki imajo ničlo pri strani. Vemo, da se izmerjeni napetosti spremeni predznak, če obrnemo priključka na voltmetru.

(d) Izmerjene napetosti dveh zaporedno vezanih členov so v razpredelnici.

pari členov	U [V]	U
(Cu - Zn) in (Zn - Cu)	$0 \pm 0{,}1$	$U_1 - U_1 = 0$
(Cu - Zn) in (Cu - Zn)	$1{,}6 \pm 0{,}2$	$U_1 + U_1 = 2U_1$
(Cu - Zn) in (Fe - Zn)	$1{,}3 \pm 0{,}2$	$U_1 + U_3$
(Cu - Fe) in (Fe - Zn)	$0{,}8 \pm 0{,}1$	$U_2 + U_3$
(Fe - Zn) in (Fe - Cu)	$0{,}2 \pm 0{,}1$	$U_3 - U_2$
(Cu - Fe) in (Zn - Cu)	$-0{,}5 \pm 0{,}1$	$U_2 - U_1$
(Zn - Cu) in (Fe - Cu)	$-1{,}1 \pm 0{,}2$	$-U_1 - U_2$

Slika kaže vezje z dvema zaporedno vezanima členoma (Cu - Zn) (2. vrstica meritev v razpredelnici).

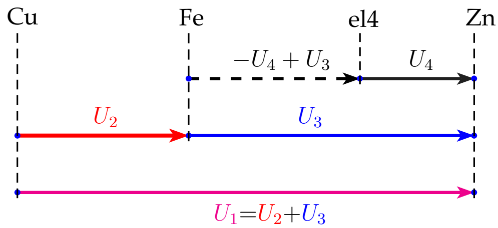


Vrednosti izmerjenih napetosti pri tej nalogi se morajo ujemati z napetostmi, izmerjenimi pri nalogah (a) in (b) (in zapisanih v razpredelnico pri (c)), sicer se točk za meritve ne dobi.

(e) Napetost člena (el4 - Zn) označimo z $U_4 = 0{,}2$ V. Pričakovane vrednosti napetosti členov in zaporedij členov so zapisane v razpredelnici:

členi in zaporedja členov	U [V]	U
(el4 - Fe) in (Fe - el4)	0	$U_4 - U_4 = 0$
(Cu - el4)	$0{,}6 \pm 0{,}1$	$U_1 - U_4$
(el4 - Fe)	$-0{,}3 \pm 0{,}1$	$-U_3 + U_4$
(Zn - el4) in (el4 - Cu)	$-0{,}8 \pm 0{,}1$	$-U_1$
(el4 - Fe) in (Fe - Zn) in (Zn - el4)	0	$U_4 - U_3 + U_3 - U_4 = 0$
(el4 - Cu) in (el4 - Zn) in (el4 - Cu)	$-1{,}0 \pm 0{,}2$	$2(U_4 - U_1) + U_4 = 3U_4 - 2U_1$

Uvidimo pravilo za seštevanje napetosti galvanskih členov, ki ga lahko enostavno ponazorimo z diagramom.



(f) Napetost galvanskega člena **ni** odvisna od razdalje med elektrodama x in **ni** odvisna od površine S dela elektrode, ki je potopljen pod gladino. Pri obeh podvprašanjih je pravilen odgovor C.

(g) Največjo napetost baterije galvanskih členov dobimo, če vežemo zaporedno tri enake člene, ki dajo posamezno največjo napetost. V našem primeru so to členi (Cu - Zn). Na to baterijo členov priključimo diodo, ki je asimetrična. Če vežemo priključek diode, označen z rdečim lakom, na Cu elektrodo, dioda sveti, če vežemo ta priključek diode na Zn elektrodo, dioda **ne** sveti.

Rešitve 59. matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije – regijsko tekmovanje

1. letnik

A1. Tista stranska ploskev, ki je bila prej osnovna ploskev piramide, je sedaj osemkotnik. Ploskve, ki so bile prej stranske ploskve piramide, so sedaj šestkotniki. Pri oglišču, ki je bilo prej vrh piramide, nastane ploskev, ki je štirikotnik, pri ostalih ogliščih piramide pa nastanejo ploskve, ki so trikotniki. Nobena od stranskih ploskev nastalega telesa ni petkotnik.

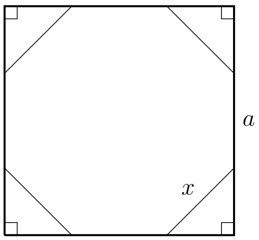
A2. Vsota števk take letnice mora biti 8. Ker gre za letnico v 21. stoletju, sta prvi dve števki 2 in 0. Vsota zadnjih dveh števk mora zato biti enaka 6. Takih letnic po letu 2015 je pet, to so $2024, 2033, 2042, 2051$ in 2060.

A3. Označimo število fantov v razredu prvo šolsko uro z f število deklet pa z d. Potem je $\frac{f}{d} = \frac{3}{4}$. Drugo šolsko uro je v razredu $f-4$ fantov in $d+4$ deklet, zato je razmerje enako $\frac{f-4}{d+4} = \frac{2}{5}$. Iz prve enačbe izrazimo $f = \frac{3}{4}d$ in vstavimo v drugo enačbo, da dobimo

$$\frac{\frac{3}{4}d - 4}{d+4} = \frac{2}{5}.$$

Enačbo preuredimo do $\frac{7}{4}d = 28$, torej je $d = 16$ in $f = 12$. Drugo šolsko uro je torej v razredu 8 fantov in 20 deklet, kar pomeni, da je 12 deklet več kot fantov.

B1.



Označimo z x dolžino stranice včrtanega osemkotnika. Štirje trikotniki, ki nastanejo ob ogliščih kvadrata, so enakokraki pravokotni trikotniki. Ker je njihova hipotenuza dolga x, so njihovi kraki dolgi $\frac{x}{\sqrt{2}}$. Torej velja $a = x + 2\frac{x}{\sqrt{2}} = x + x\sqrt{2} = x(\sqrt{2}+1)$. Iz zapisane enačbe izrazimo

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}+1} = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{2-1} = \sqrt{2}a - a.$$

B2. Po tem, ko je Urška prvič pregledala vsa zapisana števila, so na tabli ostala le števila deljiva s 3. Ko je skozi števila šla drugič, so ostala le števila deljiva s 3^2. Po tretjem pregledu so ostala le števila deljiva s 3^3, in tako dalje. Največja potenca števila 3, ki je manjša od 2015, je $3^6 = 729$, saj je $3^7 = 2187$. Ko je torej Urška šestič pregledala števila, so ostala na tabli le števila deljiva s 729, to sta 729 in 1458. V naslednjem pregledu je pobrisala obe ti dve števili, saj nista deljivi z 2187. Kot zadnje je Urška pobrisala število 1458.

B3. Dano enakost pomnožimo z $(1+a^2)(1+b^2) \neq 0$ in poenostavimo, da dobimo ekvivalentno enakost $a^2b^2 = 1$. Torej je $ab = \pm 1$. Tudi dani izraz poenostavimo

$$(a+b)\left(\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2}\right) = (a+b)\frac{a+ab^2+b+a^2b}{(1+a^2)(1+b^2)} = (a+b)\frac{(a+b)(1+ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} = $$
$$= \frac{(a^2+b^2+2ab)(1+ab)}{1+a^2+b^2+a^2b^2}.$$

Če je $ab = -1$, je vrednost tega izraza enaka 0, če pa je $ab = 1$, je vrednost tega izraza enaka

$$\frac{(a^2+b^2+2)\cdot 2}{a^2+b^2+2} = 2.$$

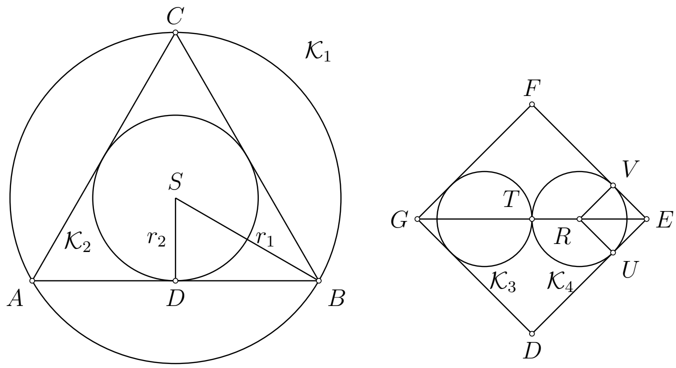
Poračunamo lahko, da sta ti dve vrednosti tudi dejansko doseženi. Vrednost 0 je na primer dosežena, ko je $a = 1$ in $b = -1$, vrednost 2 pa, ko je $a = b = 1$.

2. letnik

A1. Kateti posameznega pravokotnega trikotnika sta dolgi 1 cm, njegova hipotenuza pa $\sqrt{2}$ cm. Stranica osemkotne luknje je torej dolga $\sqrt{2}-1$ cm.

A2. To je funkcija $f(x)=-|x|+1$. Vse preostale funkcije imajo v točki 2 vrednost 1.

A3. Poračunamo $\sqrt{0.04^3}=\sqrt{\left(\frac{4}{100}\right)^3}=\left(\sqrt{\frac{4}{100}}\right)^3=\left(\frac{2}{10}\right)^3=\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{1}{125}$.



B1.

Označimo z r_1, r_2, r_3 in r_4 polmere krožnic $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$ in $\mathcal{K}_4$, pri čemer vemo, da velja $r_3=r_4$. Ker je trikotnik ABC enakostraničen, imata krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ skupno središče, ki ga označimo z S. Trikotnik BSD je polovica enakostraničnega trikotnika, zato velja $r_1=|SB|=2|SD|=2r_2$. Ker je GE premer krožnice $\mathcal{K}_2$, je $|GE|=2r_2=r_1$. Izrazimo dolžino $|GE|$ še na drug način z r_4. Naj bo T dotikališče krožnic $\mathcal{K}_3$ in $\mathcal{K}_4$. Središče krožnice $\mathcal{K}_4$ označimo z R, njeni dotikališči s stranicama DE in EF kvadrata $DEFG$ pa z U in V. Ker sta krožnici $\mathcal{K}_3$ in $\mathcal{K}_4$ enako veliki, je T središče kvadrata $DEFG$, torej velja $|GE|=2|TE|$. Štirikotnik $RUEV$ je kvadrat s stranico dolžine r_4, zato je njegova diagonala dolga $|RE|=\sqrt{2}r_4$. Od tod izrazimo $|GE|=2|TE|=2(|TR|+|RE|)=2(r_4+\sqrt{2}r_4)=(2+2\sqrt{2})r_4$. Iz obeh izražav dolžine $|GE|$ sledi $r_1=(2+2\sqrt{2})r_4$, torej je $\frac{r_1}{r_4}=(2+2\sqrt{2})$.

B2. Če je $d\geq 2$, potem je $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\leq 4\cdot\frac{1}{2}=2$, kar je protislovje. Torej je $d=1$. Če je $c\geq 3$, potem je $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\leq 3\cdot\frac{1}{3}+1=2$, kar je spet protislovje. Torej je $c=2$. Podobno sledi, da mora biti $b=3$, saj bi sicer imeli $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\leq 2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1=2$. Torej mora biti $\frac{1}{a}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}>2$, oziroma $\frac{1}{a}>\frac{1}{6}$. Ker je $a>b=3$, je lahko le $a=4$ ali $a=5$. Neenakostim zadoščata dve četverici, $(4,3,2,1)$ in $(5,3,2,1)$.

B3. Enačbo potenciramo na tretjo potenco, da dobimo

$$(2x+13)-3\left(\sqrt[3]{2x+13}\right)^2\sqrt[3]{2x-13}+3\sqrt[3]{2x+13}\left(\sqrt[3]{2x-13}\right)^2-(2x-13)=8.$$

Nato jo preuredimo

$$26-3\sqrt[3]{2x+13}\sqrt[3]{2x-13}\left(\sqrt[3]{2x+13}-\sqrt[3]{2x+13}\right)=8$$

in upoštevamo, da je $\sqrt[3]{2x+13}-\sqrt[3]{2x+13}=2$, da dobimo

$$26-6\sqrt[3]{2x+13}\sqrt[3]{2x-13}=8.$$

Enačbo spet preuredimo do $\sqrt[3]{2x+13}\sqrt[3]{2x-13} = 3$ in potenciramo na tretjo potenco, da dobimo $(2x+13)(2x-13) = 27$ oziroma $4x^2 - 169 = 27$. Od tod sledi $x^2 = 49$ in zato $x = \pm 7$.

2. način. Enačbo preuredimo v $\sqrt[3]{2x+13} = \sqrt[3]{2x-13} + 2$ in nato potenciramo na tretjo potenco, da dobimo

$$2x + 13 = 2x - 13 + 6\left(\sqrt[3]{2x-13}\right)^2 + 12\sqrt[3]{2x-13} + 8.$$

Vse člene nesemo na eno stran in poenostavimo do

$$6\left(\sqrt[3]{2x-13}\right)^2 + 12\sqrt[3]{2x-13} - 18 = 0.$$

Če vpeljemo novo spremenljivko $y = \sqrt[3]{2x-13}$ in enačbo delimo s 6 dobimo kvadratno enačbo $y^2 + 2y - 3 = 0$ oziroma $(y+3)(y-1) = 0$, ki ima dve rešitvi, $y = -3$ in $y = 1$. Iz enačbe za novo spremenljivko izrazimo $x = \frac{y^3+13}{2}$. Ko je $y = -3$, je $x = -7$, ko pa je $y = 1$, je $x = 7$. Začetna enačba ima torej dve rešitvi, $x = -7$ in $x = 7$.

3. letnik

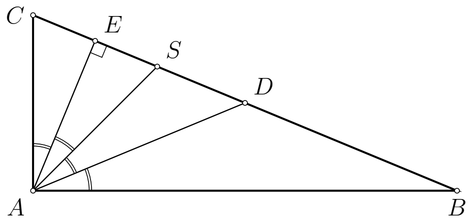
A1. Ploščine treh polkrogov so enake $\frac{\pi}{2}$, $\frac{4\pi}{2}$ in $\frac{16\pi}{2}$. Ploščina območja x je zato enaka $\frac{\frac{4\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{3\pi}{4}$, ploščina območja y pa $\frac{\frac{16\pi}{2} - \frac{4\pi}{2}}{3} = 2\pi$. Iskano razmerje je torej $\frac{3\pi}{4} : 2\pi = 3 : 8$.

A2. Če je n liho celo število, je leva stran enakosti soda, desna pa liha. Za liha cela števila torej enakost ni izpolnjena. Podobno sklepamo, če je n sodo celo število. V tem primeru je leva stran enakosti liha, desna pa soda. Torej nobeno celo število ne ustreza enakosti.

A3. Iz podatkov sledi $2015h^{2013} - 2 = -2015$ oziroma $2015h^{2013} = -2013$. Zato je $p(-h) = 2015(-h)^{2013} - 2 = -2015h^{2013} - 2 = -(-2013) - 2 = 2011$.

B1. Po izreku o deljenju je $p(x) = (2x^2 - x + 3)(2 - x) + o$, kjer je o ostanek pri deljenju polinoma $p(x)$ s polinomom $2 - x$. Ker smo delili s polinomom stopnje 1, je ostanek o neka konstanta. Torej je prosti člen polinoma $p(x) = -2x^3 + 5x^2 - 5x + (6 + o)$ enak $6 + o$, vodilni koeficient pa -2. Po Vietovem pravilu je produkt vseh ničel polinoma $p(x)$ torej enak $-\frac{6+o}{-2} = \frac{11}{2}$. Od tod izračunamo ostanek $o = 5$.

B2. Naravna števila, katerih vsota števk je deljiva z 9, so natanko tista, ki so deljiva z 9. Takih števil, manjših od $100\,000$, je torej $\frac{99\,999}{9} = 11\,111$. Vsako naravno število manjše od $100\,000$ je oblike $\overline{abcde}$, kjer je vsaj ena od števk a, b, c, d in e različna od 0. Če zadnje štiri števke fiksiramo in označimo njihovo vsoto s k, potem moramo a izbrati tako, da bo $k + a$ deljivo s 5. Neglede na to, kaj je k, imamo za a natanko 2 možnosti; $a = 0, 5$, če je k deljivo s 5, $a = 4, 9$, če ima k ostanek 1 pri deljenju s 5, $a = 3, 8$, če ima k ostanek 2 pri deljenju s 5, $a = 2, 7$, če ima k ostanek 3 pri deljenju s 5, in $a = 1, 6$, če ima k ostanek 4 pri deljenju s 5. Torej zadnje štiri števke lahko izberemo poljubno, za prvo števko pa nam ostaneta dve možnosti. Takih števil je zato $10^4 \cdot 2 - 1 = 19\,999$, saj smo šteli tudi število $0 = \overline{00000}$. Prešteti moramo še števila, katerih vsota števk je deljiva s 5 in 9, torej s 45. Toda vsota števk števila manjšega od $100\,000$ je kvečjemu $5 \cdot 9 = 45$ in to le takrat, ko so vse števke enake 9. Tako število je zato eno samo, tj. $99\,999$. Števil, po katerih sprašuje naloga je torej $11\,111 + 19\,999 - 1 = 31\,109$.

B3. 

Naj bo D razpolovišče stranice BC, E nožišče višine iz A, S pa presečišče simetrale kota pri A s stranico BC. Ker simetrala razdeli kot na dva enaka dela, mora simetrala nujno ležati med višino in težiščnico. Torej točka S leži med točkama E in D. Imamo dve možnosti, bodisi D leži med B in S ter E med S in C ali pa E leži med B in S ter D med S in C. Zaradi simetrije lahko obravnavamo le prvi primer.

Označimo kot $\sphericalangle BAC$ s 4α, pri čemer motra biti $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$. Potem je

$$|BE| = |AE| \operatorname{tg} 3\alpha, \qquad |DE| = |AE| \operatorname{tg} 2\alpha \qquad \text{in} \qquad |CE| = |AE| \operatorname{tg} \alpha.$$

Od tod izpeljemo

$$|BD| = |BE| - |DE| = |AE|(\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha)$$

in

$$|CD| = |CE| + |DE| = |AE|(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\alpha).$$

Ker je D razpolovišče stranice BC, sledi $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\alpha$ oziroma

$$\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha = 0.$$

Levo stran lahko preuredimo

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} \alpha - 2 \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 2\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \\
&= \frac{\sin 3\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos 3\alpha}{\cos \alpha \cos 3\alpha} - 2\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha \cos 3\alpha} - 2\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \\
&= \frac{\sin 2\alpha(\cos 2\alpha - 2\cos \alpha \cos 3\alpha)}{\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha} = -\frac{\sin 2\alpha \cos 4\alpha}{\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha},
\end{aligned}$$

kjer smo pri četretem enačaju upoštevali adicijski izrek za sinus

$$\sin 2\alpha = \sin(3\alpha - \alpha) = \sin 3\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos 3\alpha,$$

pri zadnjem enačaju pa formulo za produkt kosinusov

$$2\cos \alpha \cos 3\alpha = \cos(3\alpha + \alpha) + \cos(3\alpha - \alpha) = \cos 4\alpha + \cos 2\alpha.$$

Iz izpeljanega sledi $\sin 2\alpha = 0$ ali $\cos 4\alpha = 0$, torej je $2\alpha = k\pi$ ali $4\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Ker mora biti $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, je edina možnost $\alpha = \frac{\pi}{8}$. Torej je $\sphericalangle BAC = 4\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle ACB = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{3\pi}{8}$ in $\sphericalangle CBA = \frac{\pi}{8}$.

Z upoštevanjem obeh simetričnih primerov smo ugotovili, da so koti trikotnika ABC bodisi $\sphericalangle BAC = \frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle ACB = \frac{3\pi}{8}$ in $\sphericalangle CBA = \frac{\pi}{8}$ ali pa $\sphericalangle BAC = \frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle ACB = \frac{\pi}{8}$ in $\sphericalangle CBA = \frac{3\pi}{8}$.

4. letnik

A1. Na turnirju je bilo odigranih $\binom{n}{2}$ tekem, torej velja $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = 2015n$. Od tod izračunamo $n = 4031$.

A2. Označimo dolžino daljše stranice 7 skladnih pravokotnikov z a, dolžino krajše stranice pa z b. Potem je $|AB| = |DC| = 4b = 3a$ oziroma $b = \frac{3}{4}a$. Iskano razmerje je tako enako

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{a+b}{4b} = \frac{a+\frac{3}{4}a}{3a} = \frac{\frac{7}{4}}{3} = \frac{7}{12}.$$

A3. Vsota števil $\overline{xyz}$, $\overline{yzx}$ in $\overline{zxy}$ je enaka $100(x+y+z) + 10(y+z+x) + (z+x+y)$. Ker mora biti to trimestno število, je $x+y+z < 10$ in v tem primeru so vse števke tega števila avtomatično enake. Iščemo torej število trojic štvk (x, y, z), za katere velja $1 \leq x < y < z$ in $x+y+z < 10$. Takih trojic je natanko 7, to so $(1,2,3)$, $(1,2,4)$, $(1,2,5)$, $(1,2,6)$, $(1,3,4)$, $(1,3,5)$ in $(2,3,4)$. Sara ima na izbiro 7 takih trimestnih števil.

B1. Upoštevamo formule za kotne funkcije dvojnih kotov, da dobimo

$$8\sin^2 x\cos^2 x \geq 3\cos^2 x - 3\sin^2 x.$$

Z upoštevanjem zveze $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ neenakost preuredimo do

$$8\sin^4 x - 14\sin^2 x + 3 \leq 0.$$

Če vpeljemo novo spremenljivko $y = \sin^2 x$, dobimo neenačbo $8y^2 - 14y + 3 \leq 0$ oziroma $(4y-1)(2y-3) \leq 0$. Ker je $0 \leq y \leq 1$, je člen $(2y-3)$ avtomatično negativen. Dana neenakost je zato ekvivalentna neenakosti $4y - 1 \geq 0$ oziroma $\sin^2 x \geq \frac{1}{4}$. Slednja neenakost velja takrat, ko je bodisi $\sin x \geq \frac{1}{2}$, torej $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ali pa $\sin x \leq -\frac{1}{2}$, torej $-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Skupna reštev so torej vsa števila x, ki zadoščajo neenakosti $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + k\pi$ za neko celo število k.

B2. Označimo z d razliko dveh zaporednih členov tega aritmetičnega zaporedja. Po formuli za vsoto členov aritmetičnega zaporedja velja

$$S_k = ka_1 + \frac{k(k-1)}{2}d.$$

S pomočjo te zveze izračunamo

$$S_{n+m} = (n+m)a_1 + \frac{(n+m)(n+m-1)}{2}d = (n+m)\left(a_1 + (n+m-1)\frac{d}{2}\right)$$

in

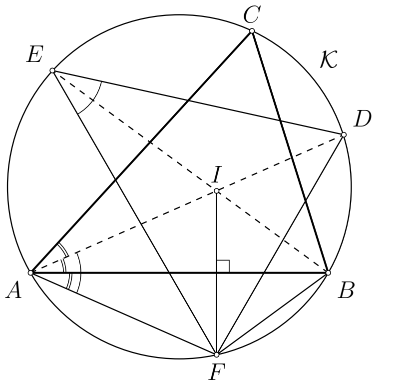
$$S_n - S_m = (n-m)a_1 + \Big(n(n-1) - m(m-1)\Big)\frac{d}{2} = (n-m)a_1 + (n-m)(n+m-1)\frac{d}{2} =$$
$$= (n-m)\left(a_1 + (n+m-1)\frac{d}{2}\right)$$

V obeh rezultatih je drugi faktor enak, zato velja

$$(n+m)(S_n - S_m) = (n-m)S_{n+m},$$

od koder sledi željena enakost, saj je $n + m \neq 0$.

B3.



Ker sta točki D in E razpolovišči ustreznih lokov krožnice $\mathcal{K}$, ležita na simetralah kotov $\sphericalangle BAC$ in $\sphericalangle CBA$. Zaradi zrcaljenja je $\sphericalangle FAB = \sphericalangle BAI = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$, torej je $\sphericalangle FED = \sphericalangle FAD = \sphericalangle BAC$. Podobno dobimo $\sphericalangle EDF = \sphericalangle CBA$. Sledi $\sphericalangle DFE = \sphericalangle ACB$. Izračunajmo torej velikost kota $\sphericalangle ACB$. Točke F, B, C in A so konciklične, zato je $\sphericalangle ACB = \pi - \sphericalangle BFA$. Ker je F zrcalna slika točke I, velja

$$\begin{aligned}\sphericalangle BFA = \sphericalangle AIB = \pi - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC - \frac{1}{2}\sphericalangle CBA = \pi - \frac{1}{2}(\sphericalangle BAC + \sphericalangle CBA) = \\ = \pi - \frac{1}{2}(\pi - \sphericalangle ACB) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB.\end{aligned}$$

Torej je $\sphericalangle ACB = \pi - (\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sphericalangle ACB$, od koder sledi $\sphericalangle ACB = \frac{\pi}{3}$ in zato tudi $\sphericalangle DFE = \frac{\pi}{3}$.

Rešitve 59. matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje

1. letnik

I/1. Evino število mora biti vsaj štirimestno, da lahko trikrat zaporedoma izbrišemo zadnjo števko in še vedno dobimo naravno število. Hkrati pa Evino število ne more biti več kot štirimestno, saj je vsota vseh štirih števil štirimestna. Označimo torej Evino število z $\overline{abcd}$, kjer so a, b, c in d števke. Potem je Igorjevo število $\overline{abc}$, Markovo število $\overline{ab}$ in Marušino število $\overline{a}$. Vsota vseh štirih števil je enaka

$$1000a + 100(a+b) + 10(a+b+c) + (a+b+c+d) = 3838.$$

Ker so a, b, c in d števke, je $a + b + c + d \leq 36$. Ker pa so enice števila 3838 enake 8, mora biti $a + b + c + d \leq 28$. Torej se pri računu k deseticam prenese največ 2. Ker je $a+b+c+2 \leq 29$, se k stoticam prenese največ 2. Ker je $a+b+2 \leq 20$ in so stotice števila 3838 enake 3, se k tisočicam prenese največ 1. Od tod sledi, da je a enak 2 ali 3. Možnost $a = 2$ odpade, saj bi v tem primeru moralo veljati $10 \leq a + b = 2 + b \leq 11$, zato bi se pri računu k stoticam moralo prenesti vsaj 7, kar pa ni mogoče. Torej je $a = 3$.

Ker se k stoticam prenese največ 2, je b enak $3, 4$ ali 5. Možnost $b = 5$ odpade, saj bi v tem primeru moralo veljati $8 \leq 8 + c = a + b + c \leq 9$, zato bi se k deseticam moralo prenesti vsaj 4, kar pa ni mogoče. Tudi možnost $b = 3$ odpade. V tem primeru bi se namreč k stoticam moralo prenesti 2. Toda ker se k deseticam prenese največ 2, bi veljalo $a + b + c + 2 = 8 + c < 20$ in zato bi se k stoticam preneslo največ 1. Torej je $b = 4$.

Ker se k deseticam prenese največ 2, je c enak $4, 5$ ali 6. Možnost $c = 6$ odpade, saj bi v tem primeru moralo veljati $13 + c = a + b + c + d \leq 9$, kar pa ni res. Če bi bil $c = 4$, bi se k deseticam moralo prenesti 2. V tem primeru bi imeli $a + b + c + d = 11 + d$, zato bi moral biti $d = 9$. Toda potem bi bile enice vsote števil enake 0, kr pa je protislovje. Torej je $c = 5$ in zato $d = 6$.

Eva, Igor, Marko in Maruša so zapisali števila $3456, 345, 34$ in 3.

I/2. 1. način. Enačbi odštejemo, da dobimo

$$x^3 - y^3 + x^2 + y^2 + xy + 2x - 2y + 2 = 0.$$

Levo stran preoblikujemo

$$\begin{aligned}
&x^3 - y^3 + x^2 + y^2 + xy + 2x - 2y + 2 = \\
&= (x - y)(x^2 + xy + y^2) + (x^2 + xy + y^2) + 2(x - y + 1) = \\
&= (x - y + 1)(x^2 + xy + y^2) + 2(x - y + 1) = \\
&= (x - y + 1)(x^2 + xy + y^2 + 2).
\end{aligned}$$

Ker je $x^2 + xy + y^2 + 2 = \frac{1}{2}(x^2 + (x + y)^2 + y^2) + 2 > 0$, mora biti $x - y + 1 = 0$. Vrednost izraza $x - y$ je enaka -1.

2. način. Iz druge enačbe izrazimo $x = y^3 - y^2 + 3y$ in vstavimo v prvo enačbo ter poenostavimo, da dobimo

$$y^9 - 3y^8 + 12y^7 - 18y^6 + 34y^5 - 19y^4 + 21y^3 + 11y^2 + 4y + 2 = 0.$$

S precej spretnosti lahko levo stran enačbe razstavimo

$$(y^3 - y^2 + 2y + 1)(y^6 - 2y^5 + 8y^4 - 7y^3 + 13y^2 + 2) = 0.$$

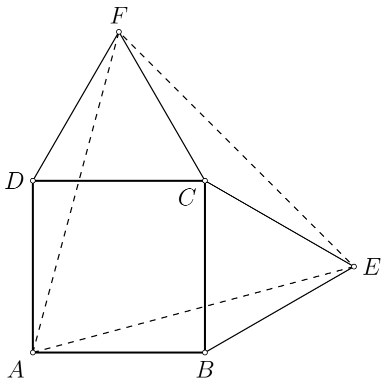
Ker je

$$\begin{aligned}
y^6 - 2y^5 + 8y^4 - 7y^3 + 13y^2 + 2 &= y^4(y^2 - 2y + 1) + 7y^2\left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) + \frac{45}{4}y^2 + 2 = \\
&= y^4(y - 1)^2 + 7y^2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{45}{4}y^2 + 2 > 0,
\end{aligned}$$

mora biti $y^3 - y^2 + 2y + 1 = 0$ oziroma $y = y^3 - y^2 + 3y + 1$. Torej je

$$x - y = (y^3 - y^2 + 3y) - (y^3 - y^2 + 3y + 1) = -1.$$

I/3.



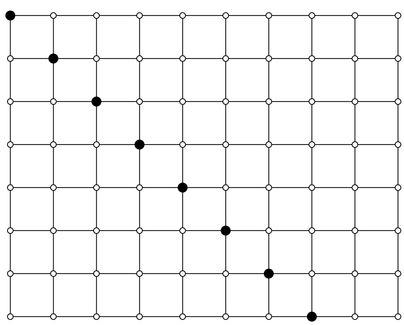
1. način. Ker je $ABCD$ kvadrat in sta trikotnika BEC in CFD enakostranična, je $|EB| = |BA| = |AD| = |DF|$. Torej sta trikotnika EBA in ADF enakokraka z vrhoma pri B in D in imata enako dolge krake. Hkrati velja $\sphericalangle EBA = \sphericalangle ADF = 90° + 60° = 150°$, zato sta omenjena trikotnika skladna. Sledi $|AE| = |AF|$. Poleg tega velja $\sphericalangle FAD = \sphericalangle BAE = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle EBA) = 15°$, zato je $\sphericalangle EAF = 90° - \sphericalangle BAE - \sphericalangle FAD = 60°$. Torej je trikotnik EAF enakokrak s kotom $60°$ pri vrhu A, od koder sledi, da je enakostraničen.

2. način. Ker je $ABCD$ kvadrat in sta trikotnika BEC in CFD enakostranična, je $|EB| = |BA| = |AD| = |DF| = |CE| = |CF|$. Trikotniki EBA, ADF in ECF so torej enakokraki. Velja $\sphericalangle EBA = \sphericalangle ADF = 90°+60° = 150°$ ter $\sphericalangle ECF = 360°-90°-2\cdot 60° = 150°$. Trikotniki EBA, ADF in ECF se torej ujemajo v dveh stranicah in kotu med njima, zato so skladni. Sledi $|EA| = |AF| = |EF|$, zato je trikotnik AEF enakostraničen.

I/4. Kolonija mora vsebovati najmanj 8 mravelj.

Dokažimo najprej, da 8 mravelj lahko pobere vsa zrna riža. To lahko storijo na primer tako, da se i-ta od teh 8 mravelj sprehodi najprej navpično navzgor do i-te vrstice mreže, nato po i-ti vrstici v desno do skrajnega desnega roba mreže in nazadnje navzgor do mravljišča. Tako teh 8 mravelj pobere vsa zrna riža, saj i-ta mravlja izprazni celotno i-to vrstico mreže.

Sedaj pa dokažimo, da 7 mravelj ne more pobrati vseh zrn riža. Oglejmo si zrna riža, ki ležijo na označenih vozliščih mreže.



Ker se mravlje lahko sprehajajo le v desno ali navzgor, nobena mravlja ne more pobrati dveh izmed teh zrn riža. Torej 7 mravelj ne more pobrati vseh teh 8 zrn riža.

2. letnik

II/1. 1. način. Enačbi seštejemo in dobimo $x+y=3$. Od tod izrazimo $y=3-x$ in vstavimo v prvo enačbo, da dobimo $x+\frac{1}{3-2x}=1$. Odpravimo ulomke in preoblikujemo do $2x^2-5x+2=0$. Levo stran te enačbe lahko razstavimo $2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$. Sledi $x=2$ ali $x=\frac{1}{2}$. V prvem primeru je $y=1$, v drugem pa $y=\frac{5}{2}$. Ker je v obeh primerih $x-y\neq 0$, sta $(2,1)$ in $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$ res rešitvi danega sistema enačb.

2. način. Enačbi odštejemo in dobimo $y-x-\frac{2}{y-x}=1$. Z uvedbo spremenljivke $a=y-x$ preoblikujemo do $a^2-a-2=0$. Levo stran te enačbe lahko razstavimo $(a+1)(a-2)=0$. Sledi $a=-1$ in $a=2$. Za vsak primer a vstavimo v prvo enačbo in dobimo $x=2$ in $x=\frac{1}{2}$. V prvem primeru iz $a=y-x$ sledi $y=1$, v drugem pa $y=\frac{5}{2}$. Ker je v obeh primerih $y-x\neq 0$, sta $(2,1)$ in $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$ res rešitvi danega sistema enačb.

II/2. 1. način. Naj bo d največji skupni delitelj števil a in b. Torej je $a=dm$ in $b=dn$, kjer sta m in n tuji naravni števili. Ker je $ab=d^2mn$ popoln kvadrat in sta m in n tuji števili, sta tudi m in n popolna kvadrata. Pišimo $m=x^2$ in $n=y^2$, kjer sta x in y naravni števili. Sledi $101=a-b=d(x+y)(x-y)$. Ker je 101 praštevilo in je $x+y\geq 2$, mora veljati $d=x-y=1$ in $x+y=101$. Od tod izračunamo $x=51$ in $y=50$, torej je $a=51^2=2601$ in $b=50^2=2500$.

2. način. Naj bo d največji skupni delitelj števil a in b. Ker d deli 101 in je 101 praštevilo, je lahko le $d=1$ ali $d=101$.

Če je $d=1$, sta si a in b tuji števili. Ker je ab popoln kvadrat, sledi, da sta tudi a in b popolna kvadrata. Pišimo $a=x^2$ in $b=y^2$, kjer sta x in y naravni števili. Tedaj je $101=a-b=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$, od koder sledi $x-y=1$ in $x+y=101$, saj je 101 praštevilo in $x+y\geq 2$. Iz teh dveh enačb zlahka izračunamo $x=51$ in $y=50$, torej je $a=51^2=2601$ in $b=50^2=2500$.

Če je $d=101$, lahko zapišemo $a=101m$ in $b=101n$, kjer sta m in n tuji naravni števili. Ker je $ab=101^2mn$ popoln kvadrat in sta si m in n tuji števili, sledi da sta tudi m in n popolna kvadrata. Pišimo $m=u^2$ in $n=v^2$, kjer sta u in v naravni števili. Tedaj je $101=a-b=101(m-n)=$ oziroma $1=m-n=(u+v)(u-v)$, kar pa je protislovje, saj je $u+v\geq 2$.

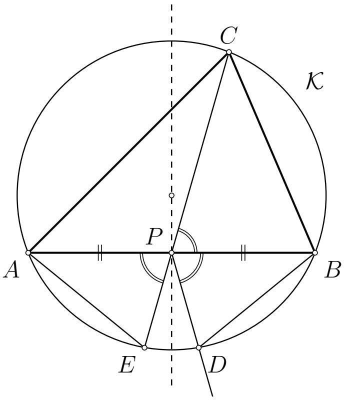
Edina rešitev naloge je torej par $a=2601$ in $b=2500$.

3. način. Zapišimo $a=b+101$ in izračunamo $ab=b(b+101)=n^2$ za neko naravno število n. Od tod izrazimo $n^2-b^2=(n-b)(n+b)=101b$. Ker je 101 praštevilo, velja $101|(n-b)$ ali $101|(n+b)$. Obravnavamo obe možnosti.

Če $101|(n-b)$, lahko zapišemo $n-b=101k$ za neko naravno število k. Iz enačbe $(n-b)(n+b)=101b$ sledi $kn=b(1-k)$, kar je protislovje, ker je leva stran enačbe strogo pozitivna, desna pa manjša ali enaka nič.

Če $101|(n+b)$, lahko zapišemo $n+b=101l$ za neko naravno število l. Iz enačbe $(n-b)(n+b)=101b$ sledi $l(101l-2b)=b$, oziroma $101l^2=b(2l+1)$, od koder izrazimo $b=\dfrac{101l^2}{2l+1}$, kar mora biti naravno število. Torej $2l+1$ deli $101l^2$. Ker je 101 praštevilo, mora veljati $(2l+1)|101$, zato lahko zapišemo $101=(2l+1)c$, kjer je $c\in\mathbb{N}$. Ker je $2l+1>1$, mora veljati $c=1$ in $2l+1=101$. Od tod izračunamo $l=50$ in $b=50^2=2500$. Nato izračunamo še $a=2601$.

II/3.

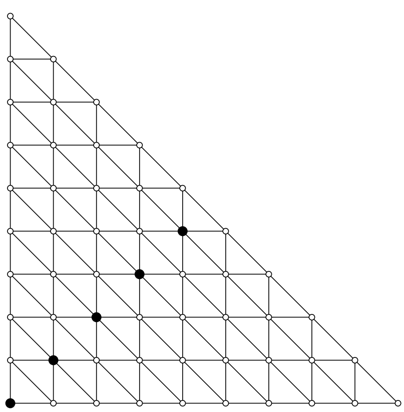


1. način. Naj bo $\mathcal{K}$ trikotniku ABC očrtana krožnica. Ker je poltrak PD zrcalna slika poltraka PC pri zrcaljenju čez premico AB, velja $\sphericalangle DPB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle APE$. Oglejmo si zrcaljenje preko simetrale stranice AB. Točka A se prezrcali v točko B. Ker je P središče stranice AB, se pri zrcaljenju ohrani. Iz zgornje enakosti kotov zato sledi, da se poltrak PE prezrcali v poltrak PD. Ker simetrala stranice AB poteka skozi središče krožnice $\mathcal{K}$, se krožnica $\mathcal{K}$ prezrcali sama vase. Torej se presečišče poltraka PE in krožnice $\mathcal{K}$, tj. točka E, prezrcali v presečišče poltraka PD in krožnice $\mathcal{K}$, tj. točko D. Pokazali smo, da se daljica AE prezrcali v daljico BD. Ker zrcaljenje ohranja razdalje, je $|AE| = |BD|$.

2. način. Naj bo $\mathcal{K}$ trikotniku ABC očrtana krožnica. Ker je poltrak PD zrcalna slika poltraka PC pri zrcaljenju čez premico AB, velja $\sphericalangle DPB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle APE$. Velja tudi $|AP| = |PB|$. Pokazati želimo še $|PE| = |PD|$. Ker tocka P leži na simetrali AB in gre simetrala skozi središče krožnice $\mathcal{K}$ (označimo ga z O) velja: $|OE| = |OD|$, $\sphericalangle APO = \sphericalangle BPO$ in $\sphericalangle EPA = \sphericalangle DPB$. Ker imata trikotnika EPO in DPO še skupno stranico OP, sta skladna in zato je tudi $|PE| = |PD|$. Torej sta si trikotnika AEP in BDP skladna in je $|AE| = |BD|$.

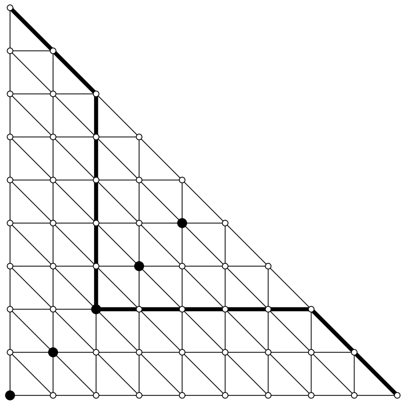
II/4. Kolonija mora vsebovati najmanj 5 mravelj.

Dokažimo najprej, da 4 mravlje ne morejo pobrati vseh zrn riža. Oglejmo si zrna riža, ki ležijo na petih označenih vozliščih mreže.



Ker se mravlje lahko premikajo le desno, navzdol ali diagonalno desno-navzdol, lahko vsaka mravlja pobere največ eno izmed teh zrn riža, zato 4 mravlje ne morejo pobrati vseh.

Sedaj dokažimo, da 5 mravelj lahko pobere vsa zrna riža. To lahko storijo na primer tako, da se i-ta izmed teh 5 mravelj najprej sprehodi diagonalno desno-navzdol i-tega stolpca mreže, nato po njem navzdol do enega od označenih vozlišč mreže, nato po vrstici v desno do roba mreže in nazadnje diagonalno desno-navzdol do mravljišča. Na sliki je prikazana pot tretje mravlje.



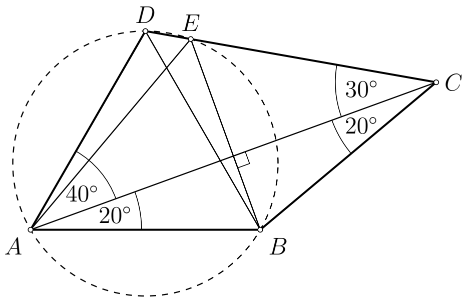
Teh 5 mravelj res pobere vsa zrna riža, saj prva mravlja izprazni prvi stolpec in zadnjo vrstico mreže, druga mravlja izprazni drugi stolpec in predzadnjo vrstico in tako naprej.

3. letnik

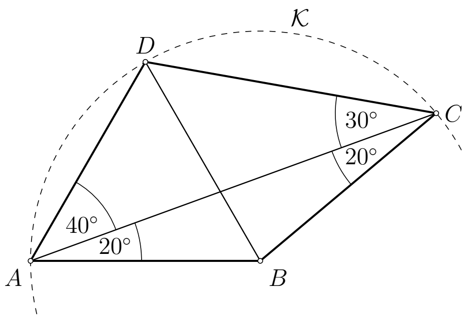
III/1. Denimo, da ulomek $\frac{3n-1}{2n^2+1}$ ni okrajšan. Potem obstaja naravno število a, različno od 1, ki deli $3n-1$ in $2n^2+1$. Sledi, da a deli tudi $3(2n^2+1)-2n(3n-1)=2n+3$ in zato tudi $3(2n+3)-2(3n-1)=11$. Ker je 11 praštevilo, sledi $a=11$, torej 11 deli $3n-1$ in $2n^2+1$. To pomeni, da obstaja celo število k, da je $3n-1=11k$. Od tod izrazimo $n=\frac{11k+1}{3}$. Da bo to celo število, mora 3 deliti $11k+1$ oziroma $2k+1$, kar pa se zgodi natanko tedaj, ko je k oblike $k=3m+1$ za neko celo število m. V tem primeru je $n=11m+4$ in tudi število $2n^2+1=2(11m+4)^2+1=2\cdot 11^2m^2+4\cdot 11m+33$ je deljivo z 11. Ker mora biti $1\le n\le 2015$, je $0\le m\le 182$. Dan ulomek torej ni okrajšan za 183 naravnih števil n.

III/2. Pišimo $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$, kjer je $a_n\neq 0$. Vodilni člen polinoma $p(p(x))$ je enak $a_n(a_nx^n)^n=a_n^{n+1}x^{n^2}$, vodilni člen polinoma $p(x)^3$ pa $(a_nx^n)^3=a_n^3x^{3n}$, oba sta lihe stopnje. Ker je polinom $p(x)^3-p(p(x))$ povsod nenegativen, mora biti sode stopnje, zato se morata omenjena vodilna člena pokrajšati. Torej je $a_n^{n+1}x^{n^2}=a_n^3x^{3n}$ oziroma $n^2=3n$ in $a_n^{n+1}=a_n^3$. Sledi $n=3$ in $a_n=1$, saj je $a_n\neq 0$, tj. p je polinom stopnje 3 z vodilnim koeficientom 1. Ker je koeficient polinoma p pri x^2 enak 0, je polinom p oblike $p(x)=x^3+ax+b$. Ko slednje upoštevamo v dani neenakosti in neenakost poenostavimo, dobimo $ax^3+a^2x+ab+b\le 0$ za vsak $x\in\mathbb{R}$. Slednje je mogoče le, če je $a=0$, saj polinom lihe stopnje vedno zavzame tudi pozitivne vrednosti. Neenakost se v tem primeru poenostavi do $b\le 0$. Polinomi, ki zadoščajo pogojem naloge so natanko polinomi oblike $p(x)=x^3+b$, kjer je $b\le 0$.

III/3.



1. način. Opazimo da je trikotnik ABC enakokrak z vrhom pri B. Naj bo E taka točka na premici CD, da je $\sphericalangle CAE = 30°$, tako da bo tudi trikotnik ACE enakokrak z vrhom pri E. Ker je $\sphericalangle CAD = 40°$, točka E leži med C in D. Potem je štirikotnik $ABCE$ deltoid, zato se njegovi diagonali AC in BE sekata pod pravim kotom. Torej velja $\sphericalangle BEC = 90° - 30° = 60°$ in zato $\sphericalangle BAD = 60° = \sphericalangle BEC = 180° - \sphericalangle DEB$. To pomeni, da so točke A, B, E in D konciklične. Po izreku o obodnih kotih velja $\sphericalangle EBD = \sphericalangle EAD = 40° - 30° = 10°$, zato je $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CBE + \sphericalangle EBD = (90° - 20°) + 10° = 80°$.



2. način. Opazimo da je trikotnik ABC enakokrak z vrhom pri B. Naj ko $\mathcal{K}$ krožnica s središčem B, ki gre skozi točki A in C. Dokažimo, da tudi točka D leži na krožnici $\mathcal{K}$. Iz podatkov naloge izračunamo $\sphericalangle ADC = 180° - 40° - 30° = 110°$ in $\sphericalangle CBA = 180° - 20° - 20° = 140°$. Torej je središčni kot nad lokom $\widehat{AC}$ enak $\sphericalangle ABC = 360° - \sphericalangle CBA = 220°$ in je dvakratnik kota $\sphericalangle ADC$. Po izreku o središčnem in obodnem kotu je torej $\sphericalangle ADC$ obodni kot nad lokom $\widehat{AC}$, kar pomeni, da točka D leži na krožnici $\mathcal{K}$. Od tod sledi, da je trikotnik CBD enakokrak z vrhom pri B, zato je $\sphericalangle CBD = 180° - 2\sphericalangle DCB = 180° - 100° = 80°$.

izvedenih potez, ki stanje te luči zamenjajo, ni pa odvisno od vrstnega izvajanja potez. Torej tudi končno stanje vseh luči ni odvisno od vrstnega reda izvajanja potez, ampak le od tega, katere poteze izvedemo.

(b) To je mogoče natanko za tiste n, ki so deljivi s 3.

Denimo najprej, da je n deljiv s 3 in pokažimo, da v tem primeru res lahko pridemo do željenega stanja. Naj bo P_i poteza, pri kateri zamanjamo stanja i-te, $(i+1)$-ve in $(i+2)$-ge luči v vrsti. Ker je n deljiv s 3 in vsaka poteza spremeni stanje 3 luči, lahko v tem primeru z $\frac{n}{3}$ potezami, to so $P_1, P_4, P_7, \ldots, P_{n-2}$, spremenimo stanje vseh luči v vrsti in s tem pridemo do željenega stanja.

Sedaj pa pokažimo, da je do željenega stanja mogoče priti le v primeru, če je n deljiv s 3. Ker po točki (a) vrstni red potez ni pomemben, lahko predpostavimo, da poteze P_i izvajamo po vrsti, najprej tiste z manjšim i. Če potezo P_i izvedemo dvakrat, se stanje luči ohrani. Torej lahko nadalje predpostavimo, da vsako potezo P_i izvedemo kvečjemu enkrat. Gremo torej po vrsti po potezah $P_1, P_2, P_3, \ldots$ in se za vsako odločimo, ali jo izvedemo ali ne. Ob koncu mora biti vsaka liha luč ugasnjena, vsaka soda pa prižgana. Ker moramo stanje 1. luči spremeniti, spremeni pa ga lahko le poteza P_1, moramo potezo P_1 nujno izvesti. Po tej potezi so prve tri luči že v pravem stanju. Ker od preostalih potez stanje 2. luči spremeni le poteza P_2, te poteze ne smemo izvesti. Med potezami $P_3, P_4, P_5, \ldots$ stanje 3. luči spremeni le poteza P_3, zato tudi te poteze ne smemo izvesti. Sedaj smo pri potezi P_4 in razmišljamo podobno. Stanje 4. luči moramo spremeniti, zato moramo potezo P_4 izvesti. Po tej potezi so 4., 5. in 6. luč v pravem stanju, zato poteze P_5 ne smemo izvesti in poteze P_6 tudi ne. Nadaljujemo v enakem smislu, potezo P_7 moramo izvesti, potez P_8 in P_9 pa ne, in tako dalje. S tem smo ugotovili, da moramo nujno izvesti zaporedje potez $P_1, P_4, P_7, \ldots$. Da bo to zaporedje spremenilo stanje vseh luči v vrsti, mora biti n deljiv s 3. Če ima namreč n ostanek 1 pri deljenju s 3, potem stanja zadnje luči ne bomo spremenili, saj poteza P_n ni dopustna, ker bi spremenila stanje le ene same luči. Podobno, če ima n ostanek 2 pri deljenju s 3, potem stanja zadnjih dveh luči ne bomo spremenili, saj potezi P_{n-1} in P_n nista dopustni.

4. letnik

IV/1. 1. način. Ker je b naravno število, a deli $2a^b$ in ab, torej a deli tudi 3. Ker je 3 praštevilo, je $a = 1$ ali $a = 3$. Če je $a = 1$, dobimo enačbo $2 = b + 3$, ki pa nima rešitev v naravnih številih. Torej je $a = 3$, od koder sledi $2 \cdot 3^b = 3b + 3$ oziroma $2 \cdot 3^{b-1} = b + 1$. Ena rešitev je te enačbe je $b = 1$. Dokažimo, da drugih rešitev v naravnih številih ni. To bomo storili tako, da bomo z indukcijo na b dokazali, da velja $2 \cdot 3^{b-1} > b + 1$ za vse $b \geq 2$. Za $b = 2$ je to res, saj je $2 \cdot 3^1 = 6 > 3 = 2 + 1$. Predpostavimo, da velja $2 \cdot 3^{b-1} > b + 1$ za nek $b \geq 2$. Potem je $2 \cdot 3^b = 3 \cdot 2 \cdot 3^{b-1} > 3(b + 1) > b + 2$. Indukcija je s tem končana. Torej res velja $2 \cdot 3^{b-1} > b + 1$ za vse $b \geq 2$, kar pomeni, da je $b = 1$ edina rešitev enačbe $2 \cdot 3^{b-1} = b + 1$ v naravnih številih.

Dano enačbo reši le par $a = 3$ in $b = 1$.

2. način. Kot v prvi rešitvi sklepamo, da velja $a = 3$ in $2 \cdot 3^b = 3b + 3$. Oglejmo si funkciji $f(x) = 3x + 3$ in $g(x) = 2 \cdot 3^x$. Realne rešitve enačbe $2 \cdot 3^b = 3b + 3$ so tiste točke, pri katerih se grafa funkcij f in g sekata. Funkcija f je linearna funkcija, funkcija g pa je skalarni večkratnik eksponentne funkcije. Grafa takih dveh funkcij se sekata kvečjemu dvakrat. Ker je $f(1) = 6 = g(1)$, je eno presečišče pri $x = 1$. Drugo presečišče leži na intervalu med -1 in 0, saj velja $f(-1) = 0 < \frac{2}{3} = g(-1)$ in $f(0) = 3 > 2 = g(0)$. Enačba $2 \cdot 3^b = 3b + 3$ ima torej dve realni rešitvi, od katerih pa je le $b = 1$ naravno število.

Dano enačbo reši torej le par $a = 3$ in $b = 1$.

IV/2. 1. način. Za vsak $n \geq 2$ lahko dano rekurzivno formulo preoblikujemo v $\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{a_n}{a_{n-1}}$. S pomočjo te formule izračunamo

$$\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = \frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} \cdot \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \left(-\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\right) \cdot \left(-\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}\right) = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}.$$

Z dvakratno zaporedno uporabo te enakosti dobimo

$$\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = \frac{a_{2n}}{a_{2n-2}},$$

kar pomeni, da je zaporedje $a_2, a_4, a_6, \ldots$ geometrijsko.

2. način. Potem, ko formulo preoblikujemo v $\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{a_n}{a_{n-1}}$, vidimo, da je zaporedje pozitivnih realnih števil $|a_1|, |a_2|, |a_3|, \ldots$ geometrijsko, torej obstajata pozitivni realni števili a in q, da je $|a_n| = aq^{n-1}$ za vsa naravna števila n. Sledi, da je za vsak n bodisi $a_n = aq^{n-1}$ bodisi $a_n = -aq^{n-1}$. Če v enačbo, s katero je prvotno zaporedje definirano, vstavimo $2n+1$ namesto n, dobimo $a_{2n+2}a_{2n} = -a_{2n+1}^2 \leq 0$, zato sta v zaporedju $a_2, a_4, a_6, \ldots$ sosednja člena nasprotnega predznaka. Od tod sklepamo, da je bodisi

$$a_{2n} = (-1)^n aq^{2n-1} = -aq(-q^2)^{n-1}$$

za vse n bodisi

$$a_{2n} = aq(-q^2)^{n-1}$$

za vse n. V obeh primerih je $a_2, a_4, a_6, \ldots$ geometrijsko zaporedje.

3. način. Enakost $a_n^2 = -a_{n+1}a_{n-1}$ kvadriramo, da dobimo $(a_n^2)^2 = a_{n+1}^2 a_{n-1}^2$. To formulo preoblikujemo v $\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} = \frac{a_n^2}{a_{n-1}^2}$ in vidimo, da je zaporedje pozitivnih realnih števil $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots$ geometrijsko, torej obstajata pozitivni realni števili a in q, da je $a_n^2 = aq^{n-1}$ za vsa naravna števila n. Sledi, da je za vsak n bodisi $a_n = \sqrt{a}\sqrt{q^{n-1}}$ bodisi $a_n = -\sqrt{a}\sqrt{q^{n-1}}$. Podobno kot pri 2. načinu dobimo, da je bodisi

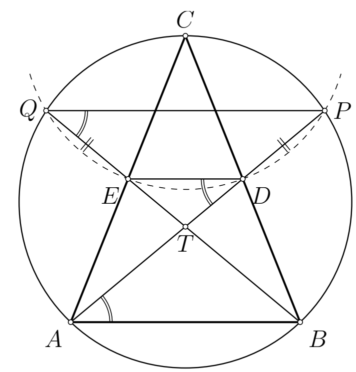
$$a_{2n} = (-1)^n\sqrt{a}\sqrt{q^{2n-1}} = (-1)^n\sqrt{a}\sqrt{q}\sqrt{q^{2n-2}} = (-1)^n\sqrt{aq}q^{n-1} = -\sqrt{aq}(-q)^{n-1}$$

za vse n bodisi

$$a_{2n} = -(-1)^n\sqrt{a}\sqrt{q^{2n-1}} = \sqrt{aq}(-q)^{n-1}$$

za vse n. V obeh primerih je $a_2, a_4, a_6, \ldots$ geometrijsko zaporedje.

IV/3.



1. način. Ker sta D in E razpolovišči daljic BC in AC, sta premici DE in AB vzporedni. Od tod sledi $\sphericalangle EDA = \sphericalangle BAD$, po izreku o obodnih kotih pa velja $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAP = \sphericalangle BQP$. Torej je $\sphericalangle EQP = \sphericalangle EDA = \pi - \sphericalangle PDE$, kar pomeni, da je štirikotnik $EDPQ$ tetiven, trikotnika TED in TPQ pa sta si podobna. Naj bo T težišče trikotnika ABC in $x = |DP| = |EQ|$. Iz podobnosti trikotnikov TED in TPQ izpeljemo

$$\frac{|TD| + x}{|TE|} = \frac{|TP|}{|TE|} = \frac{|TQ|}{|TD|} = \frac{|TE| + x}{|TD|}.$$

To enakost lahko preoblikujemo do

$$(|TD| - |TE|)(|TD| + |TE| + x) = 0,$$

od koder sledi $|TE| = |TD|$, saj je $|TD| + |TE| + x > 0$. Trikotnik DET je torej enakokrak z vrhom pri T. Zaradi vzporednosti premic AD in BE, je tudi trikontnik ABT enakokrak

z vrhom pri T, torej velja $|BE| = |BT| + |TE| = |AT| + |TD| = |AD|$. Od tod sledi, da sta trikotnika ABE in BAD skladna, saj imata dva para enako dolgih stranic in enak kot med njima $\sphericalangle EBA = \sphericalangle BAD$. Torej je $|AE| = |BD|$ in zato $|AC| = |BC|$.

2. način. Kot v prvi rešitvi dokažemo, da sta premici DE in AB vzporedni in da je štirikotnik $EDPQ$ tetiven. Zato je $\sphericalangle EPD = \sphericalangle EQD$. Ker sta tetivi DP in EQ enako dolgi, pa je $\sphericalangle DEP = \sphericalangle QDE$. Zato je $\sphericalangle PDE = \sphericalangle DEQ$, kar pomeni, da je štirikotnik $EDPQ$ enakokrak trapez. Torej je $\sphericalangle TED = \sphericalangle EDT = \sphericalangle BAT$ oziroma $\sphericalangle BED = \sphericalangle BAD$. To pomeni, da je štirikotnik $ABDE$ tetiven. Ker pa sta premici AB in ED vzporedni, je tudi štirikotnik $ABDE$ enakokrak trapez. Sledi $|AE| = |BD|$ in zato $|AC| = |BC|$.

IV/4. 1. način. Podjetje vodi največ **10** direktorjev.

Označimo ključavnice oziroma pripadajoče ključe s številkami od 1 do 6. Vsak direktor ima set 3 ključev od 3 različnih ključavnic in nobena dva direktorja nimata enakih setov. Zato najprej preštejmo, koliko različnih setov 3 ključev obstaja. Za posamezen set ključev imamo na izbiro 6 ključavnic, med katerimi moramo izbrati 3. Gre torej za kombinacije, pri katerih izmed 6 elementov izberemo 3. Takih kombinacij je $\binom{6}{3} = 20$ (preštejemo jih lahko tudi tako, da si izpišemo vse možnosti). Vsakemu setu 3 ključev pripada *komplementarni* set 3 ključev, to je set, v katerem so ključi preostalih 3 ključavnic. Tako na primer setu ključev $\{2, 3, 5\}$ pripada komplementarni set ključev $\{1, 4, 6\}$. Množico vseh različnih setov ključev razbijemo na 10 parov komplementarnih si setov ključev. Ker vsak tak par ključev skupaj odklene sef, nobena dva direktorja ne moreta imeti komplementarnih si setov ključev. Torej je direktorjev lahko največ 10, saj iz vsakega para komplementarnih si setov ključev kvečjemu en set pripada nekemu direktorju.

Pokažimo, da 10 direktorjev res lahko vodi podjetje, torej da obstaja 10 setov ključev, ki ustrezajo pogojem naloge. Vse kar moramo storiti je, da iz vsakega para komplementarnih si setov ključev izberemo po en set (na primer tistega, ki vsebuje ključ 1). Tako ima lahko 10 direktorjev na primer naslednje sete ključev: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 2, 6\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 3, 6\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{1, 4, 6\}$, $\{1, 5, 6\}$.

2. način. Označimo ključavnice oziroma pripadajoče ključe s številkami od 1 do 6. Zapišimo vse možne različne kombinacije treh ključev in sicer v parih:

- $\{1,2,3\}$ in $\{4,5,6\}$,
- $\{1,2,4\}$ in $\{3,5,6\}$,
- $\{1,2,5\}$ in $\{3,4,6\}$,
- $\{3,4,5\}$ in $\{1,2,6\}$,
- $\{1,3,4\}$ in $\{2,5,6\}$,
- $\{1,3,5\}$ in $\{2,4,6\}$,
- $\{2,4,5\}$ in $\{1,3,6\}$,
- $\{1,4,5\}$ in $\{2,3,6\}$,
- $\{2,3,5\}$ in $\{1,4,6\}$,
- $\{2,3,4\}$ in $\{1,5,6\}$.

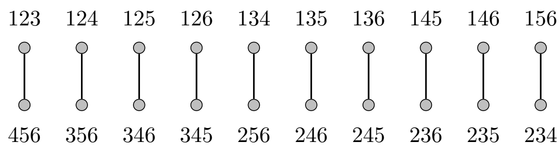
Opazimo, da vsak od teh parov kombinacij kjučev vsebuje vseh 6 ključev, torej kvečjemu ena kombinacija iz vsakega para pripada nekemu direktorju. Ker je teh parov 10, podjetje vodi največ 10 direktorjev.

Vidimo tudi, da 10 direktorjev res lahko vodi podjetje, saj imajo lahko ti direktorji na primer prve kombinacije ključev iz vsakega para. Nobeni dve kombinaciji iz tega izbora ne vsebujeta vseh šestih ključev, saj pri vsaki od njih manjka ključ 6.

3. način. Naj predstavlja $\mathcal{K} = \{1,2,3,4,5,6\}$ množico vseh ključev. Vsak direktor ima 3 različne ključe, torej neko podmnožico množice $\mathcal{K}$, ki ima natanko 3 elemente. Označimo vse take podmnožice s $\binom{\mathcal{K}}{3}$. Ker nobena dva direktorja nimata enakega kompleta ključev, vsak element $\binom{\mathcal{K}}{3}$ predstavlja set ključev enega potencialnega direktorja. Naj bosta $A, B \subset \binom{\mathcal{K}}{3}$ kompleta ključev dveh različnih direktorjev. Če bi veljalo $A \cup B = \mathcal{K}$, bi lahko ta dva direktorja skupaj odprla sef. Naj bo G graf, kjer je

$$V(G) = \binom{\mathcal{K}}{3} \quad \text{in} \quad \{A,B\} \in E(G) \iff A \cup B = \mathcal{K}.$$

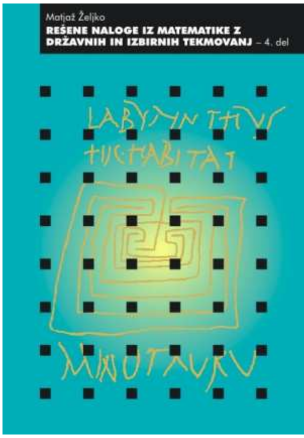
Vsaka neodvisna množica tega grafa ustreza neki skupini direktorjev, ki zadošča pogojem naloge. Nas zanima največja neodvisna množica. Naj $\alpha(G)$ označuje moč največje neodvisne množice v grafu G. Graf G je prikazan na spodnji sliki (vozlišča smo zaradi preglednosti označili kar s števili, katerih števke so elementi množic, ki ustrezajo vozliščem grafa):



Če je $G = G_1 + G_2$, tj. disjunkna unija dveh grafov, potem velja $\alpha(G) = \alpha(G_1) + \alpha(G_2)$. Ker je $\alpha(K_2) = 1$, je $\alpha(G) = 10$, saj je $G \cong \underbrace{K_2 + K_2 + \cdots + K_2}_{10}$.

ZBIRKE NALOG S TEKMOVANJ IZ MATEMATIKE

Vsako šolsko leto na šolah potekajo različna tekmovanja v znanju matematike. Za lažjo pripravo vam ponujamo nekaj zbirk tekmovalnih nalog z rešitvami.



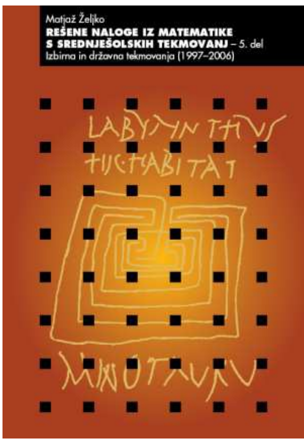
Matjaž Željko

REŠENE NALOGE IZ MATEMATIKE Z DRŽAVNIH IN IZBIRNIH TEKMOVANJ – 4. del

Državna tekmovanja 1988–1996
Izbirna tekmovanja 1992–1996

142 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

12,49 EUR



Matjaž Željko

REŠENE NALOGE IZ MATEMATIKE S SREDNJEŠOLSKIH TEKMOVANJ – 5. del

Izbirna in državna tekmovanja 1997–2006

172 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

21,24 EUR

Poleg omenjenih lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog različnih zahtevnosti za osnovnošolce, srednješolce in študente s tekmovanj v znanju matematike, fizike, logike, astronomije in računalništva. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite s popustom:

`http://www.dmfa-zaloznistvo.si/tekmovanja/`

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553.