Tekmovanja

Tekmovanje iz fizike za bronasto Stefanovo priznanje – šolsko tekmovanje

8. razred

A1 Merilniki hitrosti v ameriških avtomobilih prikazujejo hitrost v miljah na uro. Avtomobil se premika s hitrostjo 50 milj na uro. Koliko bi kazal merilnik hitrosti v $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$? (Milja meri približno 1600 m.)

(**A**) Manj kot $50\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. (**B**) $50\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

(**C**) Več kot $50\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ in manj kot $100\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. (**D**) $100\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

A2 Avto vozi polovico časa s hitrostjo $60\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, drugo polovico časa pa s hitrostjo $40\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Kolikšna bi morala biti hitrost avta, ki bi vozil s stalno hitrostjo, da bi v enakem skupnem času opravil enako skupno pot?

(**A**) $20\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. (**B**) $48\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. (**C**) $50\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. (**D**) $100\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

A3 Na osončenih vodoravnih tleh opazujemo nekega dne okoli poldne senci dveh enako velikih balonov. Rdeči balon je 1 m oddaljen od tal, modri balon je 2 m oddaljen od tal. Katera izjava o velikosti senc obeh balonov je pravilna?

(**A**) Senca rdečega balona je večja od sence modrega balona.

(**B**) Senca modrega balona je večja od sence rdečega balona.

(**C**) Senci obeh balonov sta približno enako veliki.

(**D**) Katera od senc je večja je odvisno od višine Sonca.

A4 Normalna telesna temperatura zdravega človeka je $36\,^\circ$C. V Reaumurjevi temperaturni lestvici voda zmrzne pri $0\,^\circ$ in zavre pri $80\,^\circ$. Kolikšna je normalna telesna temperatura zdravega človeka v tej lestvici? Približno

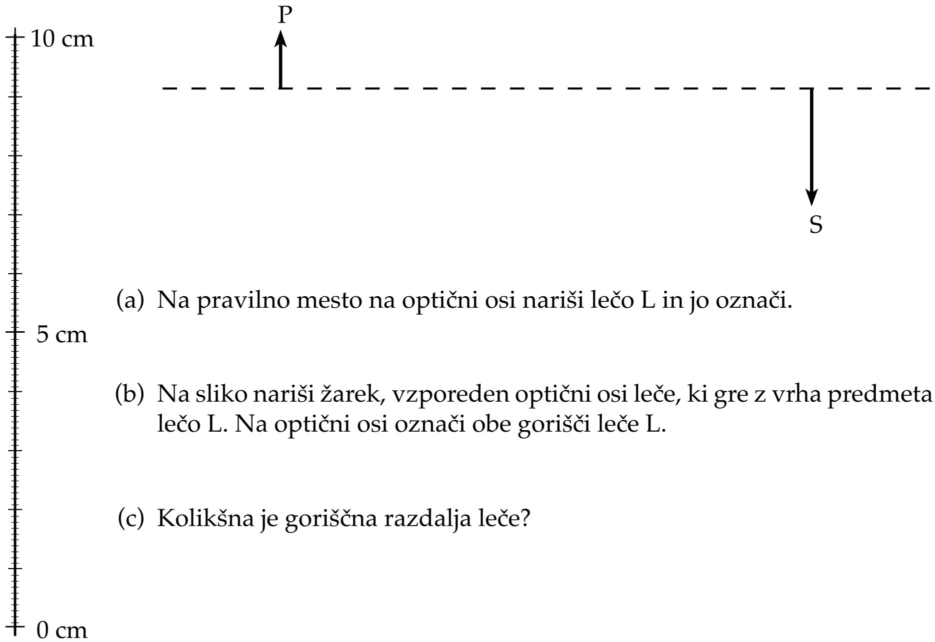
(**A**) $24\,^\circ$. (**B**) $29\,^\circ$. (**C**) $36\,^\circ$. (**D**) $45\,^\circ$.

A5 Jure iz Ljubljane bo opazoval polno luno. Ob približno kateri uri je polna luna najvišje na nebu in v kateri smeri jo Jure tedaj opazuje?

(**A**) Ob 12. uri, proti S. (**B**) Ob 12. uri, proti J.

(**C**) Ob 24. uri, proti S. (**D**) Ob 24. uri, proti J.

B1 Zbiralna leča L preslika predmet P v realno sliko S. Predmet P, slika S in optična os leče so narisana na sliki, kjer 1 cm pomeni 3 cm v naravi.

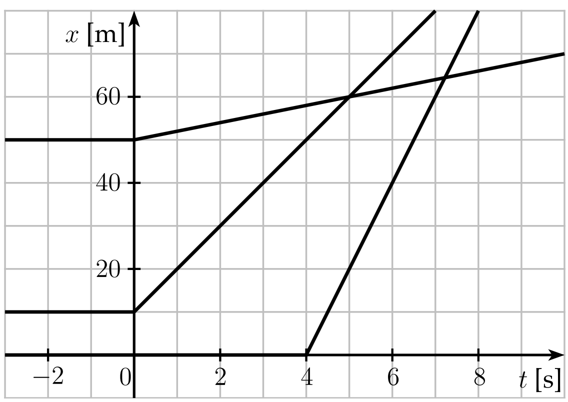


(a) Na pravilno mesto na optični osi nariši lečo L in jo označi.

(b) Na sliko nariši žarek, vzporeden optični osi leče, ki gre z vrha predmeta P skozi lečo L. Na optični osi označi obe gorišči leče L.

(c) Kolikšna je goriščna razdalja leče?

B2 Na ravni cesti najprej mirujejo, potem pa se gibljejo enakomerno, avto, motorist in tekač. Avto je najhitrejši, tekač je najpočasnejši. Grafi kažejo, kako se njihove lege spreminjajo s časom.



(a) K vsakemu od grafov zapiši, komu pripada.
(b) Preberi iz grafov, ob katerih časih t_a, t_m in t_t se pričnejo premikati avto, motorist in tekač?
(c) Kolikšne so njihove hitrosti v_a, v_m in v_t, ko se gibljejo?
(d) Ob katerem času motorist dohiti tekača?
(e) Predpostavi, da se vsi trije še v naslednjih nekaj minutah gibljejo z nespremenjenimi hitrostmi. Kolikšna je razdalja med tekačem in avtom 1 minuto zatem, ko tekač prične teči?

B3 Na kopališču imajo dva bazena, otroškega in velikega. Dno otroškega bazena meri $15\ \mathrm{m} \times 42\ \mathrm{m}$, dno velikega bazena meri $42\ \mathrm{m} \times 20\ \mathrm{m}$. Oba bazena, ki sta povsem prazna, pričnejo polniti hkrati. V vsakega od bazenov napeljejo svojo cev, iz katere priteče vsako minuto 525 litrov vode.

(a) V otroškem bazenu je na koncu polnjenja globina vode $0{,}8$ m, v velikem bazenu pa $1{,}5$ m. Koliko m^3 je v vsakem od bazenov vode, ko sta polna?

(b) Koliko časa so polnili vsakega od bazenov?

(c) V isti koordinatni sistem nariši grafa, ki kažeta, kako se višini gladine vode v obeh bazenih spreminjata s časom 2 dni od trenutka $t = 0$, ko ju začnejo polniti, in ju označi.

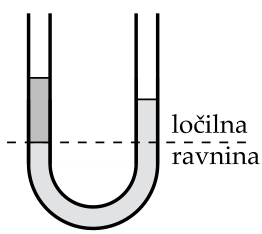
(d) Koliko vode bi moralo iz cevi priteči v veliki bazen vsako minuto, da bi s polnjenjem obeh bazenov končali hkrati?

9. razred

A1 Avto vozi polovico časa s hitrostjo $60\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, drugo polovico časa pa s hitrostjo $40\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Kolikšna bi morala biti hitrost avta, ki bi vozil s stalno hitrostjo, da bi v enakem skupnem času opravil enako skupno pot?

(A) $20\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. **(B)** $48\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. **(C)** $50\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. **(D)** $100\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

A2 V cevki oblike U je v enem kraku voda in v drugem laneno olje, kot kaže slika (ki ni narisana v merilu). Gladina vode je 45 mm nad ločilno ravnino. Do katere višine nad ločilno ravnino sega laneno olje?



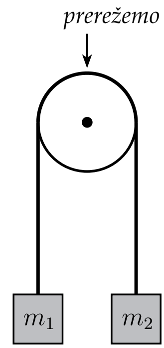
(A) $40{,}5$ mm.

(B) 50 mm.

(C) $90{,}5$ mm.

(D) 100 mm.

A3 Preko škripca obesimo lahko vrv in na njeni krajišči dve uteži z različnima masama $m_1 = 1$ kg in $m_2 = 4$ kg, kot kaže slika. Uteži držimo v ravnovesju na isti višini. Katera utež prej pade na tla potem, ko vrvico nad njima prerežemo? Zračni upor je zanemarljiv.



(**A**) Utež z maso m_1 prej pade na tla.

(**B**) Utež z maso m_2 prej pade na tla.

(**C**) Uteži padeta hkrati na tla.

(**D**) Ne moremo napovedati, ker nimamo dovolj podatkov.

A4 Katera enota **ni** enota za delo?

(**A**) Pa $\cdot$ m^3. (**B**) $\dfrac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$. (**C**) N $\cdot$ m. (**D**) $\dfrac{\text{Pa} \cdot \text{m}}{\text{s}}$.

A5 Skokica prosto pada. Zračni upor lahko zanemarimo. Katera izjava je pravilna? Med padanjem skokice

(**A**) se W_p skokice veča, W_k skokice se manjša.

(**B**) je W_p skokice enaka W_k skokice.

(**C**) je vsota $W_p + W_k$ skokice stalna.

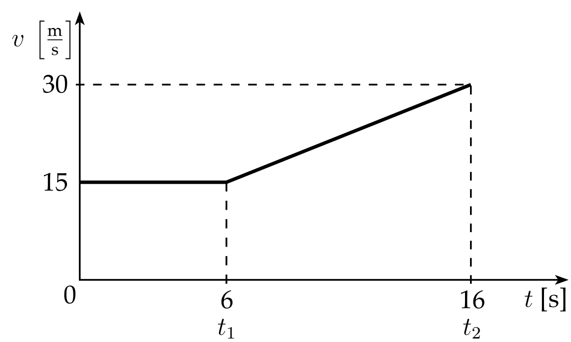
(**D**) je sprememba vsote $W_p + W_k$ skokice enaka delu teže.

B1 Jaka potiska sani po vodoravnih tleh s stalno silo, vzporedno s podlago. Hitrost sani se na poti 10 m poveča z $0{,}4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ na $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Skupna masa sani s tovorom je 50 kg, na sani pa deluje tudi stalna sila trenja 25 N.

(a) Za koliko se na poti 10 m spremeni kinetična energija sani in tovora?
(b) Kolikšno delo opravi na tej poti sila trenja?
(c) Kolikšno delo opravi na isti poti sila, s katero Jaka potiska sani?
(d) S kolikšno silo potiska Jaka sani?
(e) S kolikšnim pospeškom se gibljejo sani?

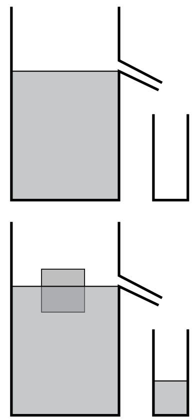
B2 Graf kaže, kako se s časom spreminja hitrost motorista Dragana.

(a) Kolikšna je Draganova povprečna hitrost v obdobju med $t_1 = 6$ s in $t_2 = 16$ s?



(b) Kolikšno pot opravi Dragan od $t = 0$ do t_2?
(c) Kolikšna je Draganova povprečna hitrost v obdobju med $t = 0$ in t_2?
(d) Kolikšen je v obdobju med t_1 in t_2 Draganov pospešek?
(e) Nariši graf, ki kaže, kolikšen je med $t = 0$ in t_2 Draganov pospešek.

B3 V posodi, ki ima ob strani prelivno cev, kot kaže slika, je voda nalita do cevi. Višina vode v posodi je 50 cm. Zračni tlak je 1 bar.



(a) Kolikšen je hidrostatični tlak na dnu posode s prelivno cevjo? Tlak zapiši v barih.

(b) V vodo damo leseno kocko, ki na gladini plava, kot kaže slika. Pri tem izteče 100 cm^3 vode skozi cev v merilno posodo. Kolikšen je sedaj hidrostatični tlak na dnu posode s cevjo?

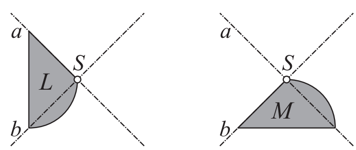
(c) Kolikšen je vzgon na kocko?

(d) Kocka je izdelana iz smrekovega lesa. Kolikšna je prostornina kocke? Prostornino zapiši v cm^3.

Tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje – področno tekmovanje

7. razred

A1. S katero transformacijo se lik L preslika v lik M?



(**A**) vrtež za $90°$ okrog S (**B**) vrtež za $270°$ okrog S
(**C**) zrcaljenje čez premico a (**D**) zrcaljenje čez premico b
(**E**) zrcaljenje čez točko S

A2. Jure se je odpravil na planinski izlet na Krn. Od koče na planini Kuhinja se je odpravil med $8.$ in $9.$ uro, ko sta se urna kazalca prekrivala. H koči na vrhu Krna je prispel med $14.$ in $15.$ uro, ko sta urna kazalca oklepala kot $180°$. Koliko časa je trajal pohod?

(**A**) 5 ur 43 min (**B**) 6 ur (**C**) 6 ur 43 min (**D**) 5 ur 17 min (**E**) 6 ur 30 min

A3. Koliko števil izmed prvih 500 naravnih števil je hkrati deljivih s 3, 4 in 5?

(A) 8 **(B)** 10 **(C)** 12 **(D)** 16 **(E)** 120

A4. Od tretjine števila 246 odštejemo devetkratnik razlike števil 14 in 5. Kolikšna je vrednost te razlike?

(A) 1 **(B)** 55 **(C)** 67 **(D)** 68 **(E)** 81

A5. Koliko naravnih števil deli število 2015?

(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7 **(E)** 8

A6. Na ligaškem tekmovanju vsaka zmaga prinese 2 točki, neodločen izid 1 točko in poraz 0 točk. Moštvo je v desetih tekmah zbralo 15 točk. Največ koliko neodločenih izidov je lahko doseglo?

(A) 1 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 7

A7. Za kateri x bosta vrednosti ulomkov $\frac{x}{\frac{1}{5}-\frac{2}{15}}$ in $\frac{\frac{2}{15}+0.1}{0.12-\frac{1}{15}}$ enaki?

(A) 2015 **(B)** 1 **(C)** $\frac{7}{24}$ **(D)** $\frac{1}{5}$ **(E)** $\frac{7}{450}$

A8. Simetrali dveh notranjih kotov trikotnika oklepata 100° velik kot. Koliko je velik tretji notranji kot trikotnika?

(A) 20° **(B)** 80° **(C)** 100° **(D)** 160°

(E) ni možno izračunati

B1. Velikost $\frac{3}{5}$ zunanjega kota ob vrhu enakokrakega trikotnika je $52^\circ 6'$. Izračunaj velikosti notranjih kotov tega trikotnika.

B2. Prva tri mesta neke šestmestne telefonske številke oblikujejo trimestno število, manjše od trimestnega števila, ki ga oblikujejo zadnja tri mesta te telefonske številke. Obe števili imata na mestu desetic števko 7 in sta deljivi s 45. Poišči to telefonsko številko. Svoj odgovor utemelji.

B3. Poišči največji ulomek, s katerim lahko po vrsti delimo $\frac{12}{35}$, $\frac{16}{15}$ in $\frac{8}{21}$ ter so dobljeni količniki naravna števila.

8. razred

A1. Koliko je $\frac{1}{32}$ od 2^{2015}?

(A) 1 **(B)** 2^{2020} **(C)** 2^{403} **(D)** 1^{2015} **(E)** 2^{2010}

A2. Kolikšna je vrednost izraza $((((1-2)^{2015}-4)-5)+6)(-5)-(-2)^4+2015^0$?

(A) 2015 **(B)** 37 **(C)** 5 **(D)** -8 **(E)** 2019

A3. Kolikšna je vrednost izraza $\sqrt{40^4-30^4}$?

(A) 100 **(B)** 10 **(C)** $500\sqrt{7}$ **(D)** 700 **(E)** $1000\sqrt{7}$

A4. Tim je zaklenil ključavnico na kovčku in pozabil kombinacijo. Spominja se, da so na začetku tri števke izmed števk 7, 8 ali 9 (lahko se ponavljajo), nato jim sledita dve črki izmed črk F, G in H (lahko sta enaki). Največ koliko kombinacij mora preveriti, da bo lahko odprl kovček?

(A) 12 **(B)** 25 **(C)** 72 **(D)** 243 **(E)** 729

A5. Kolikšna je najmanjša vrednost naravnega števila n, za katerega vrednost izraza n^2+n+11 ni praštevilo?

(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 10 (**E**) 11

A6. Nekatera naravna trimestna števila imajo lastnost, da je srednja števka enaka aritmetični sredini prve in tretje števke. Koliko je takih števil?

(**A**) 45 (**B**) 40 (**C**) 35 (**D**) 30 (**E**) 10

A7. Velikost kota ob vrhu enakokrakega trikotnika ABC je trikrat tolikšna kot velikost kota ob osnovnici. Kolikšna je velikost ostrega kota med nosilkama višin na kraka trikotnika?

(**A**) $54°$ (**B**) $72°$ (**C**) $90°$ (**D**) $108°$ (**E**) $120°$

A8. Blago se je dvakrat zapored podražilo za enako odstotkov. Po drugi podražitvi je bilo dražje za 44 % glede na prvotno ceno. Za koliko odstotkov se je blago podražilo prvič?

(**A**) 72 % (**B**) 44 % (**C**) 22 % (**D**) 20 % (**E**) 18 %

B1. Izračunaj vrednost izraza

$$\frac{\sqrt{3^{2015}}+1}{\sqrt{3^{2008}}}-\frac{2}{2\cdot 3^{1004}}$$

in rezultat delno koreni.

B2. Delavci so dobili naročilo za prepleskanje sten v pediatrični kliniki. Vseh 18 delavcev bi pleskalo 24 dni, da bi bilo delo opravljeno. Po 6 dneh je tretjina delavcev zbolela, preostali pa so nadaljevali z delom. V kolikem času od začetka je bilo delo opravljeno?

B3. Oglišča 5-kotnika s skladnimi daljicami povežemo s točko M v njegovi notranjosti. Dobimo dva enakostranična trikotnika ter 3 skladne enakokrake. Koliko je velik najmanjši notranji kot v nastalih trikotnikih?

9. razred

A1. Kateti pravokotnega trikotnika sta dolgi 4 cm in 6 cm. Koliko je dolga višina na hipotenuzo?

(**A**) $\frac{\sqrt{13}}{13}$ cm (**B**) $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ cm (**C**) $\frac{6\sqrt{13}}{13}$ cm (**D**) $\frac{12\sqrt{13}}{13}$ cm (**E**) $\sqrt{13}$ cm

A2. Tomaž je na testu pravilno odgovoril na $\frac{4}{5}$ vprašanj od 5 v sklopu A, 60 % vprašanj od 20 v sklopu B ter 20 % vprašanj od 15 v sklopu C. Na koliko odstotkov vseh vprašanj na testu je pravilno odgovoril?

(**A**) 40 % (**B**) 47 % (**C**) 47.5 % (**D**) 48 % (**E**) 53.3 %

A3. V učilnici je bilo na začetku šolske ure enako deklet in fantov. Ko je 8 deklet zapustilo učilnico, je v njej ostalo dvakrat toliko fantov kot deklet. Koliko je bilo vseh učencev v učilnici na začetku ure?

(**A**) 8 (**B**) 16 (**C**) 24 (**D**) 32 (**E**) 40

A4. Za pravokotnik $ABCD$ velja $|AB|=2|BC|$. Točka E leži na stranici AB, da velja $\sphericalangle DEA=\sphericalangle CED$. Koliko je velik kot $\sphericalangle DEA$?

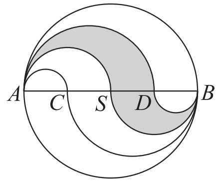
(**A**) $45°$ (**B**) $60°$ (**C**) $75°$ (**D**) $90°$

(**E**) nič od naštetega

A5. Vsoto kvadratov treh zaporednih naravnih lihih števil zmanjšamo za 5. S katerim od spodnjih števil je zagotovo deljiva dobljena razlika?

(**A**) 0 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 12

A6. Točke C, S in D delijo premer AB dolžine 2 na enake dele. Kolikšna je ploščina osenčenega območja?



(A) $\frac{\pi}{8}$ **(B)** $\frac{\pi}{4}$ **(C)** $\frac{3\pi}{16}$ **(D)** $\frac{\pi}{2}$ **(E)** π

A7. Za koliko parov naravnih števil m in n velja: $m^2 - n^2 = 2015$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

A8. Za tri števila x, y in z veljata naslednji razmerji $x : y = 9 : 4$ in $y : z = 5 : 3$. Kolikšno je razmerje $(x - y) : (y - z)$?

(A) $7 : 12$ **(B)** $25 : 8$ **(C)** $4 : 1$ **(D)** $5 : 12$

(E) ni možno izračunati

B1. Klavdija sestavlja štirimestna števila po naslednjem pravilu:
– prva števka je sodo število,
– druga števka je praštevilo,
– tretja števka je liho število,
– četrta števka je sestavljeno število.
Koliko različnih štirimestnih števil lahko zapiše po tem pravilu?

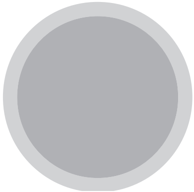
B2. Diagonala razdeli trapez na trikotnika, katerih ploščini sta v razmerju $5 : 7$. V kolikšnem razmerju sta ploščini likov, na katera srednjica razdeli ta trapez?

B3. Določi vsa naravna števila n, za katera sta z izrazoma $2(n - 3)(n + 1)$ in $(n - 2)(2n - 1)$ podani zaporedni naravni števili.

Tekmovanje iz fizike za srebrno Stefanovo priznanje – področno tekmovanje

8. razred

A1 Na s soncem obsijanih vodoravnih tleh vidimo senco balona, kot kaže slika. Upoštevaj, da Sonce **ni** točkasto svetilo. Svetlo sivo je prikazana polsenca. Kateri parameter vpliva na širino polsence?



(**A**) Oddaljenost balona od tal. (**B**) Premer balona.

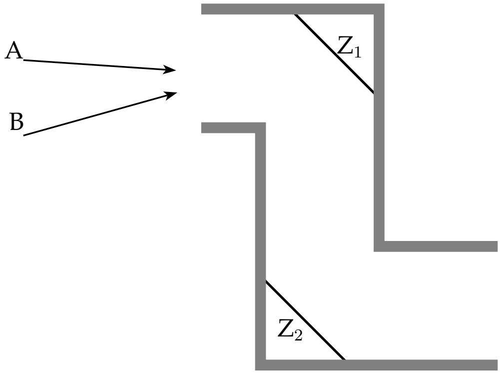
(**C**) Barva balona. (**D**) Nobeden od naštetih.

A2 Gregor v Kranju opazuje Lunin prvi krajec. Približno ob kateri uri je prvi krajec najvišje na nebu in v kateri smeri ga Gregor tedaj vidi? Ob

(**A**) 6. uri, proti S. (**B**) 6. uri, proti J.

(**C**) 18. uri, proti S. (**D**) 18. uri, proti J.

A3 Svetloba se v periskopu odbija od dveh ravnih zrcal Z_1 in Z_2, od sten periskopa pa ne. Dva ozka curka svetlobe A in B vstopata v periskop. Kateri curek svetlobe zapušča periskop skozi drugo odprtino?



(**A**) Curek A. (**B**) Curek B.

(**C**) Oba. (**D**) Noben.

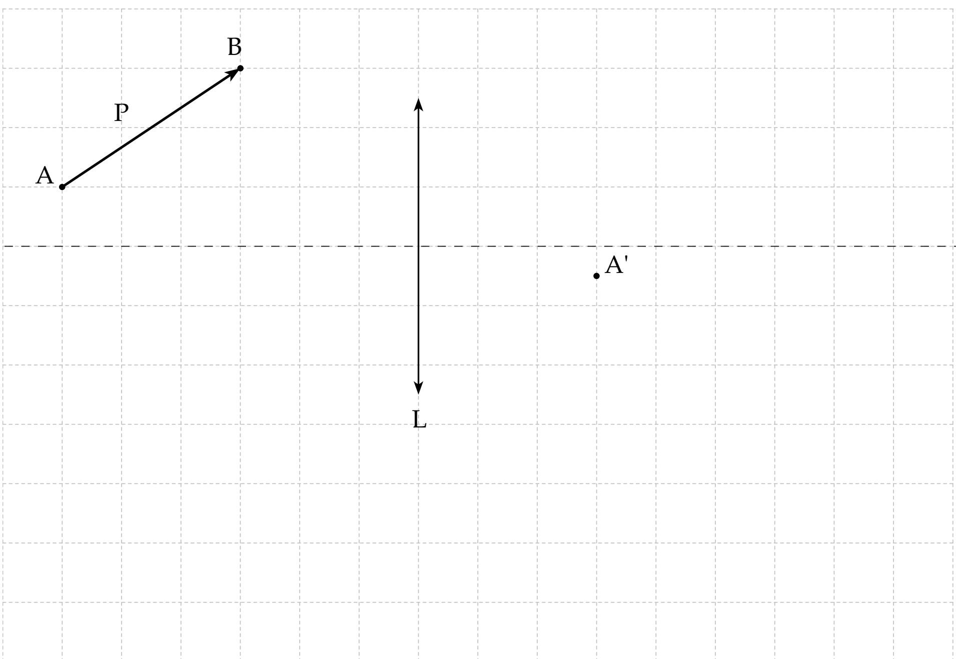
A4 Avto prevozi polovico **poti** s hitrostjo $60\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, drugo polovico **poti** pa s hitrostjo $40\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Kolikšna bi morala biti hitrost avta, ki bi vozil s stalno hitrostjo, da bi v enakem skupnem času opravil enako skupno pot?

(**A**) $20\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. (**B**) $48\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. (**C**) $50\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. (**D**) $100\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

A5 Luna se od Zemlje počasi oddaljuje s povprečno hitrostjo $1{,}2\ \frac{\mathrm{nm}}{\mathrm{s}}$. Za koliko se vsako leto približno poveča razdalja med Luno in Zemljo?

(**A**) Za $0{,}10$ mm. (**B**) Za 38 mm. (**C**) Za 10 cm. (**D**) Za 38 m.

B1 Zbiralna leča L preslika točko A v sliko točke A'. Preslikava je na skici prikazana v merilu, v katerem 1 cm na skici ustreza 4 cm v naravi.



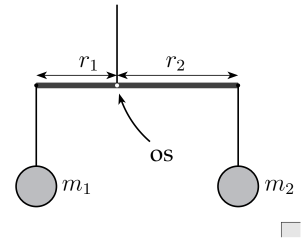
(a) Z načrtovanjem ustreznih žarkov določi gorišćno razdaljo leče. Obe gorišči označi. Kolikšna je goriščna razdalja?

(b) Z načrtovanjem ustreznih žarkov poišči in označi točko B', v kateri nastane slika točke B.

(c) Med točkama A in B je predmet P. Nariši sliko S tega predmeta, ki nastane s preslikavo predmeta P skozi lečo L. S puščico označi orientacijo slike.

(d) Na skico s črtkano črto nariši zaslon, ki stoji tako, da je slika S na njem ostra. Zaslon označi z Z.

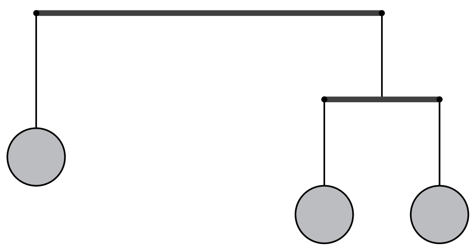
B2 Prečka visi v vodoravni ravnovesni legi na vrvici. S krajišč prečke visita kroglici z masama m_1 in m_2. Prečka in vrvice so zelo lahke. Upoštevaj, da je prečka v vodoravni ravnovesni legi, ko velja $m_1 \cdot r_1 = m_2 \cdot r_2$, kjer sta r_1 in r_2 razdalji med pritrdiščema vrvic, na katerih visita kroglici, in osjo, kot kaže slika.



(a) Masi kroglic, ki visita s krajišč prečke, sta $m_1 = 150$ g in $m_2 = 100$ g. Kroglica z maso m_1 je od osi oddaljena 8 cm.

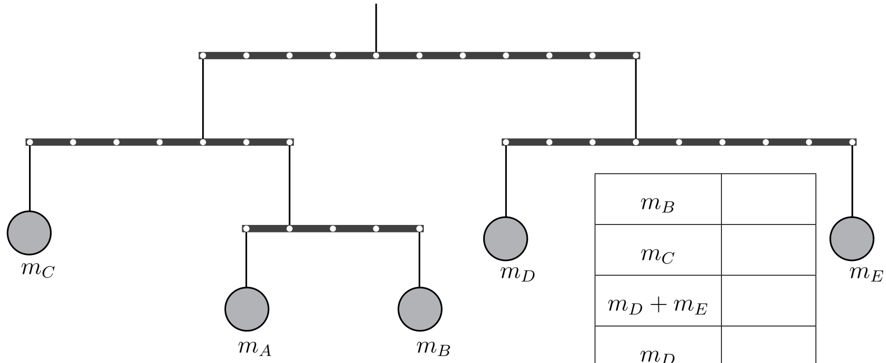
- Koliko je od osi oddaljena kroglica m_2?
- Kako dolga je prečka?

(b) Tri **enake** kroglice visijo na lahkih vrvicah na dveh lahkih prečkah, kot kaže slika na desni. Nariši vrvico, na kateri visi zgornja prečka (ki je v vodoravni ravnovesni legi).



(c) Masa posamezne kroglice v obešanki pri nalogi (b) je 120 g. Na sliko nariši vse sile, ki delujejo na zgornjo prečko, v merilu, v katerem 1 cm ustreza sili 1 N. Zapiši velikosti sil.

(d) Vse prečke v obešanki na spodnji sliki so v vodoravnih ravnovesnih legah. Masa prve kroglice je $m_A = 120$ g. Prečke in vrvice imajo zanemarljivo maso. V tabelo zapiši mase ostalih štirih kroglic.



m_B	
m_C	
$m_D + m_E$	
m_D	
m_E	

B3 Na morju merimo razdalje v navtičnih miljah NM, 1 NM = $1\,852$ m, hitrosti pa v *vozlih*, kn (angl. *knots*) 1 kn $= 1\ \frac{\text{NM}}{\text{h}}$. Na isti globini sta v morju potopljeni dve podmornici, *Orada* in *Brancin*. *Orada* miruje, *Brancin* pa se giblje proti *Oradi* s hitrostjo 35 kn.

(a) Kolikšna je hitrost *Brancina* v enotah $\frac{\text{m}}{\text{s}}$?

(b) V trenutku, ko je razdalja med podmornicama 4 NM, odda posadka z *Brancina* prvi kratek ultrazvočni (UZ) signal proti *Oradi* in čez 1 sekundo ($\Delta t_0 = 1{,}000$ s) še drugega. Zvok (in tudi UZ) potuje po morski vodi s hitrostjo $1\,531\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Koliko časa potuje prvi UZ signal in koliko časa potuje drugi UZ signal od *Brancina* do *Orade*? Oba časa zapiši v sekundah in s tremi decimalnimi mesti.

(c) Prvi UZ signal z *Brancina* oddajo ob $t = 0$. Kdaj prejmejo UZ signala na *Oradi*?

(d) Koliko časa preteče med sprejemom prvega in drugega signala na *Oradi*?

(e) Koliko časa pa potuje od *Brancina* do *Orade* prvi signal, če se tudi *Orada* premika s hitrostjo 14 kn v smeri proti *Brancinu*? Prvi signal z *Brancina* oddajo v trenutku, ko je razdalja med podmornicama 4 NM.

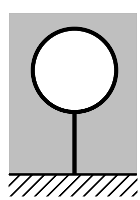
(f) Čez 1 sekundo oddajo z *Brancina* še drugi signal proti **premikajoči** se *Oradi*. Koliko časa preteče med sprejemoma obeh signalov na *Oradi*?

9. razred

A1 Avto prevozi prvo polovico **poti** s hitrostjo $60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, drugo polovico **poti** pa s hitrostjo $40\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Kolikšna bi morala biti hitrost avta, ki bi vozil s stalno hitrostjo, da bi v enakem skupnem času opravil enako skupno pot?

(**A**) $20\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. (**B**) $48\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. (**C**) $50\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. (**D**) $100\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

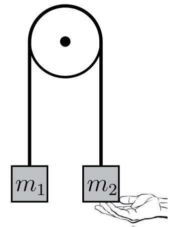
A2 Velika votla kovinska krogla je potopljena v jezeru. Na dno jezera je privezana z vrvjo. S pomočjo črpalke iz krogle izčrpamo zrak. Ali **po** izčrpanju zraka deluje vrv na kroglo z enako, večjo ali manjšo silo kot prej?



(**A**) Enako. (**B**) Večjo. (**C**) Manjšo.

(**D**) Ni dovolj podatkov, da bi lahko napovedali silo.

A3 Preko lahkega škripca obesimo lahko vrv in na njeni krajišči dve uteži z različnima masama $m_1 = 1$ kg in $m_2 = 4$ kg, kot kaže slika. Uteži držimo v ravnovesju na isti višini. Roko odmaknemo. S kolikšnim pospeškom pada utež z maso m_2?



(**A**) 6 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ (**B**) 7,5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ (**C**) 8 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ (**D**) 10 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

A4 Jože vrže z balkona skokico navpično navzdol z začetno hitostjo 1 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Med padanjem na skokico deluje teža, zračni upor pa lahko zanemarimo. Katera izjava je pravilna? Med padanjem skokice je delo teže enako

(**A**) spremembi W_k skokice. (**B**) spremembi W_k in W_p skokice.

(**C**) W_k skokice. (**D**) vsoti $W_k + W_p$ skokice.

A5 V cevki oblike črke U je v enem kraku voda in v drugem laneno olje. Kraka sta navpična. Razlika med višinama, na katerih sta gladini v obeh krakih cevke, je 2 cm. Do katere višine nad ločilno ravnino sega laneno olje?

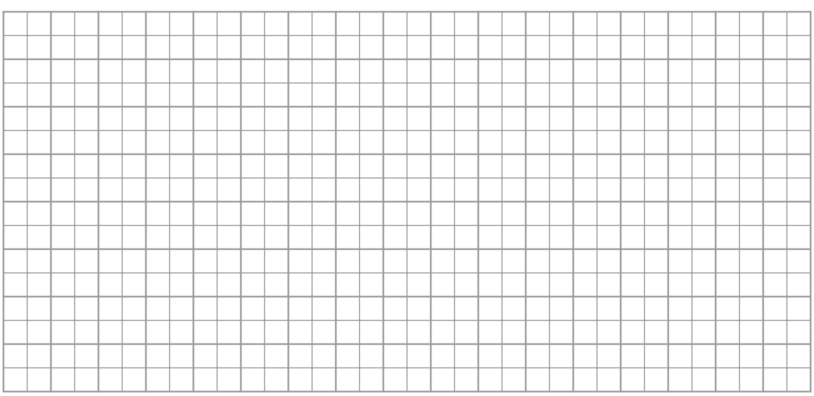
(**A**) 16 cm. (**B**) 18 cm. (**C**) 19 cm. (**D**) 20 cm.

B1 Jana je na dvorišču na rolerjih, Simon na kolesu. Na začetku oba mirujeta. Jana se prime prtljažnika na kolesu. Simon začne poganjati kolo s pospeškom 0,5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Po 6 s skupnega gibanja se Jana spusti.

(a) Kolikšno hitrost ima Jana, ko spusti kolo?

(b) Na Jano, ki ima 60 kg, deluje zaviralna sila 18 N. Koliko časa zatem, ko spusti prtljažnik Simonovega kolesa, se Jana ustavi?

(c) Naslednje 4 s od trenutka, ko se Jana spusti, vozi Simon enakomerno z doseženo hitrostjo in se nato ustavlja s pojemkom 1 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, dokler se ne ustavi. Nariši grafa $v_J(t)$ in $v_S(t)$ za gibanje obeh otrok v celotnem časovnem območju do trenutka, ko oba spet mirujeta.



(d) Kolikšno pot opravi Simon od trenutka, ko se Jana spusti?

(e) Koliko sta Jana in Simon oddaljena eden od drugega takrat, ko oba spet mirujeta?

(f) Ali sta bila od trenutka, ko se je Jana spustila, še kdaj vštric (drug ob drugem), in če sta bila, kdaj je bilo to?

B2 Vesna je na morju in meri gostoto lubenice. V veliko posodo, ki stoji na tehtnici, nalije **morsko** vodo do roba. Tehtnica pokaže 12 kg. V vodo previdno položi lubenico tako, da se iz posode ne prelije nič več vode, kot je nujno. Lubenica plava, del lubenice je nad vodno gladino. Prostornina vode, ki se prelije čez rob posode in odteče s tehtnice, je $5{,}4$ l.

(a) Kolikšna je sila vzgona na lubenico, ki miruje na vodni gladini?

(b) Koliko kaže tehtnica, ko na njej stoji posoda z vodo, v kateri plava lubenica?

(c) Kolikšna je masa lubenice?

(d) Ko Vesna lubenico dodatno potisne pod vodo tako, da je potopljena cela, se čez rob zlije še $0{,}6$ l vode. Kolikšna je gostota lubenice?

(e) Vesna poskus s plavajočo lubenico ponovi v celoti še tako, da namesto morske vode uporabi vodo iz pipe. Koliko litrov vode se prelije čez rob posode, ko lubenico previdno položi v vodo tako, da plava?

(f) Koliko litrov vode se dodatno prelije čez rob posode, ko Vesna lubenico potisne v vodo tako, da je potopljena cela?

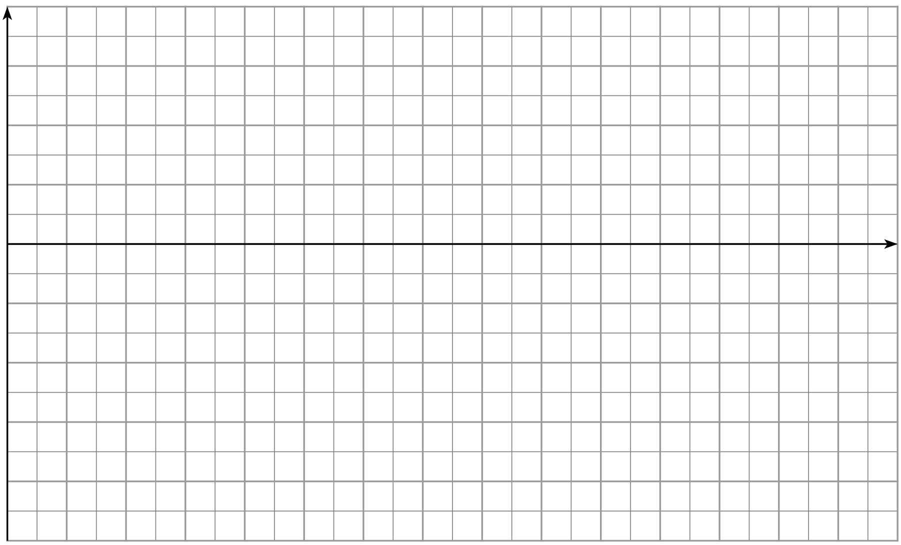
B3 Alenka spusti žogico z višine 1 m na vodoravna tla. Žogica se od tal odbija, a ne zelo prožno. Pri vsakem odboju se v notranjo energijo žogice in tal pretvori 60 % mehanske energije žogice pred odbojem. Zračni upor zanemari.

(a) Do katere višine se žogica odbije po prvem in do katere višine po drugem odboju?

(b) Koliko časa mine od trenutka, ko Alenka žogico spusti, do prvega odboja? Koliko časa mine od prvega do drugega odboja in koliko od drugega do tretjega?

(c) Kolikšna je hitrost žogice, tik preden se tal dotakne prvič, in kolikšna tik po prvem odboju? Kolikšna je hitrost žogice, tik preden se tal dotakne drugič, in kolikšna tik po drugem odboju?

(d) Nariši graf, ki kaže, kako se s časom spreminja hitrost žogice. Hitrost je pozitivna, ko se višina lege žogice povečuje, in negativna, ko se zmanjšuje. Časovno območje, v katerem naj bo narisan graf, je od trenutka, ko Alenka spusti žogico, do njenega tretjega odboja. Predpostavi, da vsak odboj žogice od tal traja zelo kratek čas.



Tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje – državno tekmovanje

7. razred

1. Izračunaj vrednost izraza

$$\left(\frac{\frac{4}{3}+1}{\frac{4}{3}-1}-1\right)\cdot\frac{1}{3}-\left(\left(\left(\frac{\frac{4}{3}-1}{\frac{4}{3}+1}+1\right):\frac{4}{3}\right):\left(\frac{1}{\frac{4}{3}-1}+\frac{1}{\frac{4}{3}+1}\right)\right)\cdot 4.$$

2. Miha je 1. januarja 2014 začel varčevati. Dneve v letu je oštevilčil z naravnimi števili, in sicer: 1. januar 1, 2. januar 2, $\ldots$, 31. december 365.

- Vsak dan, ki je bil oštevilčen s številom, deljivim s tri, je v hranilnik dal 30 centov.
- Vsak dan, oštevilčen s sodim številom, ki ni bilo deljivo s tri, je v hranilnik dal 20 centov.
- Vsak preostali dan je v hranilnik dal 10 centov.

Koliko evrov je imel Miha v hranilniku, ko je pričakal novo leto 2015?

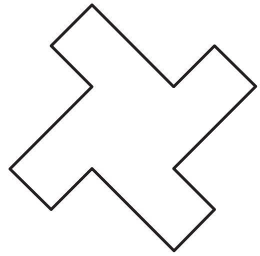
3. Točki K in M ležita na hipotenuzi AB pravokotnega trikotnika ABC, tako da velja $|AK| = |AC|$ in $|BM| = |BC|$. Nariši skico ter izračunaj velikost kota $\sphericalangle MCK$.

4. Trimestno naravno število $2a4$ prištejemo k številu 329. Dobimo vsoto $5b3$, ki je deljiva s 3. Katere so vse možne vrednosti za števko a?

5. Kateta AC pravokotnega trikotnika ABC s pravim kotom v oglišču C je dolga 7 cm, polmer temu trikotniku včrtane krožnice pa 2 cm. Konstruiraj trikotnik ABC samo s šestilom in ravnilom ter zapiši in utemelji postopek konstrukcije.

8. razred

1. Ploščina lika na sliki je enaka $200\ \text{cm}^2$. Vse krajše stranice so enako dolge, pa tudi vse daljše so enako dolge in so dvakrat toliko dolge kot krajše. Vsi koti na sliki so pravi. Kolikšen je obseg tega lika?



2. Izračunaj:

$$\sqrt{(-2)^{12}\cdot\left(\frac{(-2)^3\cdot(-2)^4}{(-2)^2\cdot(-2)^7}\right)^3}+\sqrt{(2\cdot 3)^4+(3^2)^3}+13\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{2+\sqrt{2}+1}:\frac{1}{\sqrt{8}-1}.$$

3. Kruh zamesijo iz $30\ \%$ bele moke, $60\ \%$ ržene moke in $10\ \%$ vode. Zaradi slabe letine se je bela moka podražila za $25\ \%$, ržena pa za $20\ \%$. Cena vode je ostala nespremenjena. Za koliko odstotkov se je podražil kruh zaradi dviga cen moke?

4. Dolžina krajše osnovnice enakokrakega trapeza je enaka polovici dolžine daljše osnovnice. Velikost kota ob daljši osnovnici je enaka $75°$. Izrazi ploščino trapeza z dolžino kraka.

5. Jan se je z gorskim kolesom peljal na 12 km oddaljen hrib. Na pot je šel ob 9.15 in na vrh prispel ob 10.27. Nazaj se je spustil ob 11.18 in je bil doma spet ob 11.38. Ob poti stoji čebelnjak. Od trenutka, ko se je Jan peljal mimo na poti navzgor, do trenutka, ko se je peljal mimo na poti nazaj, sta minili natanko 2 uri. Kako daleč od vrha hriba je postavljen čebelnjak?

9. razred

1. Samo in Janina bosta igrala namizni tenis. Odločila sta se, da bosta odigrala največ šest setov in da bosta prenehala z igro, če bo eden izmed njiju zmagal v dveh zaporednih setih.

a) Koliko je vseh različnih potekov igre? Koliko iger se konča z zmago Janine v zadnjem odigranem setu?

b) Kako bi si po vrsti sledili zmagovalci posameznih setov, če bi se igra zaključila z drugo zaporedno zmago Sama šele v šestem setu?

c) Samo in Janina imata vsak po 10 pomaranč. Po koncu vsakega seta bo poraženec dal eno pomarančo zmagovalcu. Kako bo potekala igra, če bosta na koncu oba imela enako število pomaranč?

2. Točka E je razpolovišče stranice AB kvadrata $ABCD$, točka F pa razpolovišče stranice BC. Daljici AF in ED se sekata v točki P. Izračunaj razmerje dolžin daljic AP in PF.

3. Tetiva AB krožnice k je dolga 14 cm, njej vzporedna tetiva CD pa je dolga 18 cm. Razdalja med tetivama je enaka 8 cm. Izračunaj polmer krožnice k. Rezultat naj bo točen. Ali obstaja več rešitev?

4. Eden izmed dveh večkotnikov ima 6 oglišč več kot drugi in 63 diagonal več kot drugi. Za katera večkotnika gre?

5. Žan, Lan in Dan so imeli vsak svojo košaro jabolk. Žan je dal polovico jabolk iz svoje košare v Lanovo košaro. Nato je dal Lan tretjino jabolk iz svoje košare v Danovo košaro. Za njim pa je dal Dan četrtino jabolk iz svoje košare v Žanovo košaro. Na koncu je bilo v vsaki košari 12 jabolk. Koliko jabolk je imel na začetku vsak v svoji košari?

Rešitve tekmovanja iz fizike za bronasto Stefanovo priznanje – šolsko tekmovanje

8. razred

A1 Pretvorba:

$$50\,\frac{\mathrm{milj}}{\mathrm{h}} \approx 50 \cdot \frac{1\,600\,\mathrm{m}}{\mathrm{h}} = 50 \cdot 1{,}6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 80\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\,.$$

A2 Recimo, da avto vozi skupen čas t_0. Skupna pot, ki jo v tem času prevozi, je

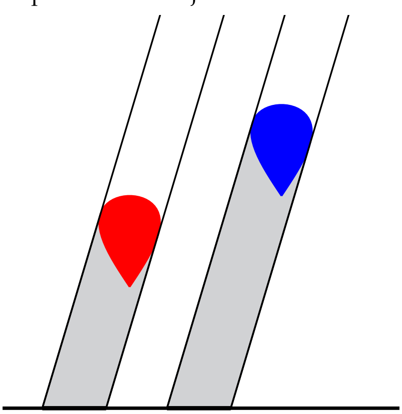
$$s = v_1 \cdot \frac{t_0}{2} + v_2 \cdot \frac{t_0}{2} = \frac{t_0}{2} \cdot (v_1 + v_2) = t_0 \cdot \frac{v_1 + v_2}{2}\,.$$

Isto skupno pot bi v istem skupnem času opravil s stalno hitrostjo

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{40\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} + 60\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{2} = 50\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\,.$$

A3 Sonce je zelo oddaljeno svetilo, zato so svetlobni curki, ki prihajajo od njega, med seboj skoraj vzporedni. Za enako velikimi predmeti zato nastanejo enako velike sence, ne glede na to, koliko so predmeti oddaljeni od zaslona.

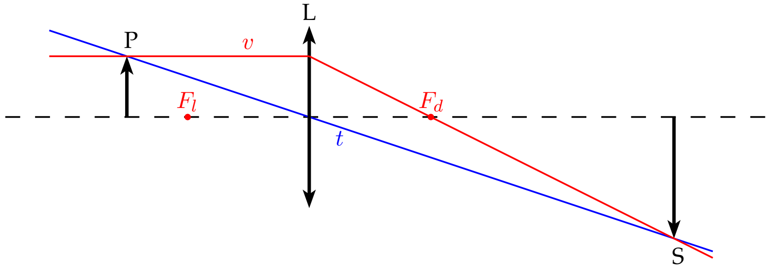
A3 Sonce je zelo oddaljeno svetilo, zato so svetlobni curki, ki prihajajo od njega, med seboj skoraj vzporedni. Za enako velikimi predmeti zato nastanejo enako velike sence, ne glede na to, koliko so predmeti oddaljeni od zaslona.



A4 Celzijeva in Reaumurjeva temperaturna lestvica sta premosorazmerni (ledišče vode je v obeh lestvicah pri $0\,°$) in $\Delta T = 1\,°\mathrm{C} = 0{,}8\,°\mathrm{R}$. To pomeni, da je v Reaumurjevi lestvici normalna telesna temperatura približno $T = 36 \cdot 0{,}8\,°\mathrm{R} = 28{,}8\,°\mathrm{R} \approx 29\,°\mathrm{R}$.

A5 Polna luna je najvišje na nebu opolnoči in Jure jo tedaj opazuje v smeri proti jugu.

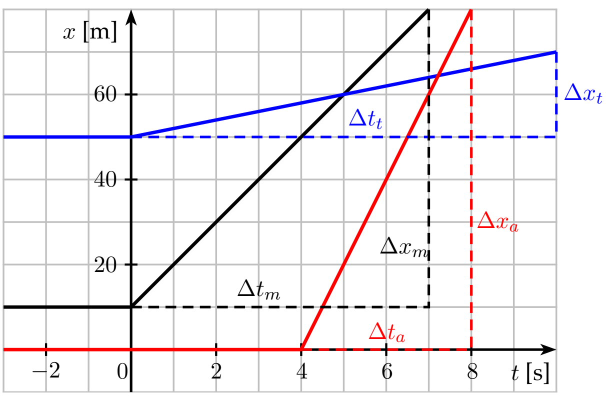
B1 (a) Lego leče L na optični osi leče (narisani s črtkano črto) določimo kot presečišče optične osi s temenskim žarkom t (narisan z modro), ki gre z vrha predmeta P skozi teme leče naravnost do vrha slike S. Leča L je pravokotna na optično os.



(b) Žarek v, pred vstopom v lečo vzporeden z optično osjo leče (narisan z rdečo), spremeni ob prehodu leče svojo smer: optično os na drugi strani leče seka v (našem primeru desnem) gorišču leče F_d. Levo gorišče leče F_l je na drugi strani leče, od leče enako oddaljeno kot desno.

(c) Razdalja med lečo in goriščem meri na sliki 2 cm $\pm 0{,}1$ cm, kar v naravi ustreza, glede na merilo, goriščni razdalji $f = 6$ cm $\pm 0{,}3$ cm.

B2 (a) Ker vemo, da je avto najhitrejši, tekač pa najpočasnejši, lahko ugotovimo, čigave lege opišejo grafi: modri graf opiše lego tekača, rdeči graf lego avta in črni graf lego motorista.



(b) Vidimo, da se tekač in motorist pričneta premikati ob $t_t = t_m = 0$ s, avto pa ob $t_a = 4$ s.

(c) Iz grafov preberemo, za koliko se v posameznih časih Δt spremenijo posamezne lege Δx vseh treh in izračunamo njihove hitrosti:

$$\begin{aligned} v_a &= \frac{\Delta x_a}{\Delta t_a} = \frac{80\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{s}} = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,, \\ v_m &= \frac{\Delta x_m}{\Delta t_m} = \frac{70\,\mathrm{m}}{7\,\mathrm{s}} = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,, \\ v_t &= \frac{\Delta x_t}{\Delta t_t} = \frac{20\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{s}} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,. \end{aligned}$$

(d) Iz grafov preberemo, da motorist dohiti tekača ob času $t_1 = 5$ s.

(e) V času $t_2 = 1$ min opravi tekač pot $s_t = v_t \cdot t_2 = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 60\ \text{s} = 120$ m. Ker je začel pri legi $x_t(t = 0) = 50$ m, je njegova lega ob času t_2 enaka $x_t(t_2) = x_t(t = 0) + s_t = 170$ m. Do trenutka t_2 se avto giblje $\Delta t = 4$ s manj kot tekač in opravi pot $s_a = v_a \cdot (t_2 - \Delta t) = v_a \cdot (60\,\text{s} - 4\,\text{s}) = 20\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 56\,\text{s} = 1\,120$ m. Ker se avto začne gibati iz izhodišča koordinatnega sistema ($x_a(t = 0) = 0$), je njegova lega ob času t_2 kar enaka $x_a(t_2) = s_a = 1\,120$ m. Ob času $t_2 = 1$ min je razdalja med avtom in tekačem enaka $\Delta x = x_a(t_2) - x_t(t_2) = 1\,120\,\text{m} - 170\,\text{m} = 950$ m.

B3 (a) Prostornina vode v otroškem bazenu je $V_o = a_o \cdot b_o \cdot h_o = 15\,\text{m} \cdot 42\,\text{m} \cdot 0{,}8\,\text{m} = 504\ \text{m}^3$. Prostornina vode v velikem bazenu je $V_v = a_v \cdot b_v \cdot h_v = 42\,\text{m} \cdot 20\,\text{m} \cdot 1{,}5\,\text{m} = 1\,260\ \text{m}^3$.

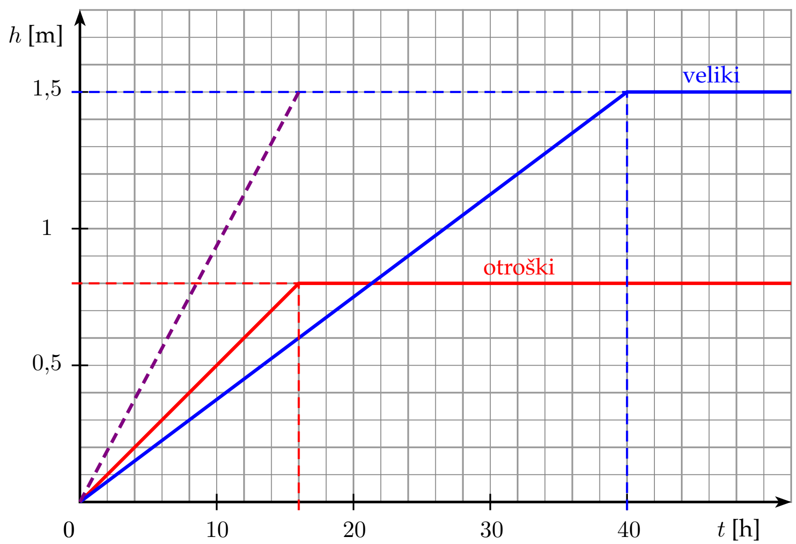
(b) Vsakega od bazenov polnijo s cevjo, iz katere vsako minuto priteče v bazen $\Delta V = 525$ litrov $= 0{,}525\ \text{m}^3$ vode. V otroški bazen se nateče $V_o = 504\ \text{m}^3$ vode v času

$$t_o = \frac{V_o}{\Delta V}\ \text{min} = \frac{504\,\text{m}^3}{0{,}525\,\text{m}^3} = 960\,\text{min} = 16\,\text{h}\,.$$

V veliki bazen se nateče $V_v = 1\,260\ \text{m}^3$ vode v času

$$t_v = \frac{V_v}{\Delta V}\ \text{min} = \frac{1\,260\,\text{m}^3}{0{,}525\,\text{m}^3} = 2\,400\,\text{min} = 40\,\text{h}\,.$$

(c) Grafa, ki kažeta, kako se višini gladin vode v obeh bazenih spreminjata s časom.



(d) V istem koordinatnem sistemu je s črtkano vijolično črto narisan graf, ki kaže, kako bi se gladina vode v velikem bazenu spreminjala s časom, če bi ga polnili tako, da bi bil poln v istem trenutku kot otroški bazen, torej čez 16 ur. To pomeni, da bi v 16 urah iz cevi priteklo $1\,260\ \text{m}^3$ vode, v 1 minuti pa

$$\Delta V_1 = \frac{1\,260\,\text{m}^3}{16 \cdot 60} = 1{,}3125\,\text{m}^3 = 1\,312{,}5\,\text{litrov} \approx 1\,310 \dots 1\,315\,\text{litrov}.$$

9. razred

A1 Recimo, da avto vozi skupen čas t_0. Skupna pot, ki jo v tem času prevozi, je

$$s = v_1 \cdot \frac{t_0}{2} + v_2 \cdot \frac{t_0}{2} = \frac{t_0}{2} \cdot (v_1 + v_2) = t_0 \cdot \frac{v_1 + v_2}{2} .$$

Isto skupno pot bi v istem skupnem času opravil s stalno hitrostjo

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{40\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} + 60\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{2} = 50\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} .$$

A2 V obeh krakih U-cevke je tlak na ločilni ravnini enak, $p_{lo} = p_v$ in

$$p_{lo} = p_0 + \rho_{lo} \cdot g \cdot h_{lo} = p_v = p_0 + \rho_v \cdot g \cdot h_v ,$$

kjer je p_0 zunanji zračni tlak, ρ_{lo} in ρ_v sta gostoti lanenega olja in vode, g je težni pospešek, h_{lo} in h_v pa sta višini stolpcev kapljevin v obeh krakih U-cevke nad ločilno ravnino. Od tu dobimo

$$h_{lo} = h_v \cdot \frac{\rho_v}{\rho_{lo}} = 45\,\mathrm{mm} \cdot \frac{1\,000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}}{900\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}} = 50\,\mathrm{mm}.$$

A3 Potem, ko prerežemo vrvico, delujeta na obe uteži le še njuni teži. Uteži prosto padata s pospeškom g in padeta na tla sočasno.

A4 Delo merimo v joulih, J. Velja $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$ (primer C) in ker je $1\,\mathrm{N} = 1\,\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, velja tudi $1\,\mathrm{J} = 1\,\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$ (primer B). Pascal (Pa) je enota za tlak, velja $1\,\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{m}^3 = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot \mathrm{m}^3 = 1\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$ (primer A). Ostane le še primer (D), ki je očitno različen od primera (A). To pomeni, da je eden od njiju napačen. Ker je (A) pravilen, je (D) napačen.

A5 Pravilna izjava (izrek o kinetični in potencialni energiji) je izjava (C). Na skokico med padanjem deluje le teža (zračni upor zanemarimo), zato se vsota njene W_p in W_k ohranja. Zakaj so ostale izjave napačne?

(A) Med padanjem skokice se njena W_p **manjša**, njena W_k pa **veča**.

(B) Med padanjem skokice se obe energiji spreminjata, potencialna se manjša, kinetična se veča. Enaki sta le v določenem trenutku (na določeni višini).

(D) Sprememba vsote $W_p + W_k$ skokice je enaka delu vseh zunanjih sil **razen** teže.

B1 (a) Na poti $s = 10\,\mathrm{m}$ se hitrost sani s tovorom poveča z $v_1 = 0{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ na $v_2 = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ in se zato kinetična energija sani s tovorom (s skupno maso $m = 50$ kg) poveča z

$$W_{k,1} = \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 50\,\mathrm{kg} \cdot \left(0{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 4\,\mathrm{J}$$

na

$$W_{k,2} = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 50\,\mathrm{kg} \cdot \left(2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 100\,\mathrm{J} .$$

(b) Na poti s deluje na sani stalna sila trenja $F_t = 25$ N, ki na poti s opravi negativno delo $A_t = -F_t \cdot s = -25\,\mathrm{N} \cdot 10\,\mathrm{m} = -250\,\mathrm{J}$.

(c) K spremembi kinetične energije ΔW_k, izračunane pri (a), prispevata delo trenja A_t, izračunano pri (b), in delo sile, s katero sani potiska Jaka, A_J. Energijski zakon pravi

$$\Delta W_k = A_t + A_J \qquad \text{in od tu} \qquad A_J = \Delta W_k - A_t = 96\,\mathrm{J} - (-)250\,\mathrm{J} = 346\,\mathrm{J} .$$

(d) Silo, s katero Jaka potiska sani, izračunamo iz dela A_J, ki ga ta sila opravi na poti s,

$$F_J = \frac{A_J}{s} = \frac{346\,\mathrm{J}}{10\,\mathrm{m}} = 34{,}6\,\mathrm{N}\,.$$

(e) Na sani delujeta vzdolž smeri gibanja dve sili: v smeri gibanja deluje sila F_J, s katero jih Jaka potiska, in v nasprotni smeri deluje sila trenja F_t. Rezultanta obeh sil deluje v smeri gibanja sani in je po velikosti enaka razliki med silama F_J in F_t, $F_r = F_J - F_t = 34{,}6\,\mathrm{N} - 25\,\mathrm{N} = 9{,}6\,\mathrm{N}$. Drugi Newtonov zakon pove, da je pospešek sani enak

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_J + \vec{F}_t}{m} \qquad \text{in} \qquad a = \frac{F_r}{m} = \frac{9{,}6\,\mathrm{N}}{50\,\mathrm{kg}} = 0{,}19(2)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

B2 (a) Ker se Draganova hitrost v opazovanem časovnem intervalu spreminja enakomerno, je povprečna hitrost v tem intervalu enaka

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{1}{2}\left(15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) = 22{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

kjer sta hitrosti $v_1 = 15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ in $v_2 = 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ Draganovi hitrosti na začetku in na koncu opazovanega intervala.

(b) Dragan od $t_0 = 0$ do t_1 vozi s stalno hitrostjo v_1 in v tem času opravi pot

$$s_1 = v_1 \cdot t_1 = 15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 6\,\mathrm{s} = 90\,\mathrm{m}\,.$$

Od t_1 do t_2 pa vozi s povprečno hitrostjo $\bar{v}$ in opravi pot

$$s_2 = \bar{v} \cdot (t_2 - t_1) = 22{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 10\,\mathrm{s} = 225\,\mathrm{m}\,.$$

Skupna pot, ki jo Dragan opravi od t_0 do t_2, je vsota $s = s_1 + s_2 = 90\,\mathrm{m} + 225\,\mathrm{m} = 315\,\mathrm{m}$.

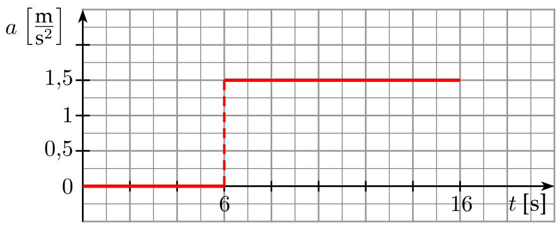
(c) Draganova povprečna hitrost v intervalu od $t_0 = 0$ do $t_2 = 16\,\mathrm{s}$ je skupna pot deljena s skupnim časom za to pot,

$$\bar{v}_s = \frac{s}{t_2 - t_0} = \frac{315\,\mathrm{m}}{16\,\mathrm{s}} = 19{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

(d) Pospešek v intervalu od t_1 do t_2 izračunamo:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{16\,\mathrm{s} - 6\,\mathrm{s}} = \frac{15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{10\,\mathrm{s}} = 1{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

(e) Draganov pospešek je med t_0 in t_1 enak 0, med t_1 in t_2 pa tak, kot smo ga izračunali pri (d).



B3 (a) Hidrostatični tlak je tlak v tekočinah, in tekočina je tudi zrak. Tlak dnu posode, v kateri je gladina vode na višini $h = 50$ cm nad dnom, je

$$p = p_0 + \rho_v \cdot g \cdot h = 1\,\mathrm{bar} + 1\,000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}5\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{bar} + 5\,000\,\mathrm{Pa} = 1{,}05\,\mathrm{bar}\,.$$

(b) Tlak na dnu posode se ne spremeni, ker se višina vode v posodi ne spremeni.

(c) Ko damo v vodo leseno kocko, ta izpodrine 100 ml vode. Sila vzgona na kocko je enaka teži izpodrinjene tekočine, 1 N.

(d) Kocka na gladini plava, kar pomeni, da je v ravnovesju, njena teža je po velikosti enaka vzgonu, 1 N. Iz teže kocke sklepamo na njeno maso, ki je $m = 100$ g. Maso in prostornino lesene kocke povezuje gostota smrekovega lesa, ki jo preberemo v tabeli gostot na dovoljenem listu s fizikalnimi obrazci, $\rho_{sl} = 500\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Prostornina kocke je

$$V = \frac{m}{\rho_{sl}} = \frac{0{,}1\,\mathrm{kg}}{500\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} = 0{,}2\ \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 = 200\,\mathrm{cm}^3$$

Rešitve tekmovanja iz matematike za Vegovo priznanje – področno tekmovanje

7. razred

A1. Z vrtenjem okrog točke S za $90°$ prvi lik preslikamo v drugega.

A2. Urna kazalca se prekrivata ob 12.00, kot $180°$ pa oklepata ob 6.00 oziroma ob 18.00. V 12 urah se kazalca 11-krat prekrivata in prav tolikokrat oklepata iztegnjeni kot. Kazalca se premikata s konstantno hitrostjo. Torej bo časovna razlika med položajema, ko se kazalca prekrivata med $8.$ in $9.$ uro oziroma oklepata kot $180°$ enkrat med $14.$ in $15.$ uro enaka 6 ur.

A3. Števila, ki so hkrati deljiva s 3, 4 in 5, so deljiva s 60. Med prvimi 500 naravnimi števili je natanko 8 večkratnikov števila 60.

A4. Izračunajmo $\frac{1}{3} \cdot 246 - 9 \cdot (14 - 5) = 82 - 9 \cdot 9 = 1$.

A5. Praštevilski razcep je enak $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, torej je število 2015 deljivo z 8 naravnimi števili: 1, 5, 13, 31, 65, 155, 403 in 2015.

A6. Moštvo mora v desetih tekmah doseči najmanj 5 zmag, če želi zbrati 15 točk. S 5 zmagami zbere 10 točk, preostalih 5 točk pa dobi s 5 neodločenimi izidi.

A7. Prvi ulomek je enak $\frac{x}{\frac{1}{15}}$, drugi pa $\frac{\frac{7}{30}}{\frac{4}{75}}$. Ulomka izenačimo in dobimo enačbo $x \cdot \frac{4}{75} = \frac{1}{15} \cdot \frac{7}{30}$, katere rešitev je $\frac{7}{24}$.

A8. Stranica c ter simetrali kotov α in β določajo trikotnik, za katerega velja $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 100° = 180°$. Od tod sledi $\alpha + \beta = 160°$ in $\gamma = 20°$.

B1. Označimo notranji kot ob vrhu z γ, zunanji kot pa z γ'. Zapišemo enačbo $\frac{3}{5} \cdot \gamma' = 52°\ 6'$, katere rešitev je enaka $\gamma' = 86°\ 50'$. Velikost kota γ je enaka $\gamma = 180° - \gamma' = 93°\ 10'$. Kota ob osnovnici sta skupaj velika $86°\ 50'$, torej velja $\alpha = \beta = 43°\ 25'$.

B2. Iz naloge razberemo, da sta obe števili deljivi s 45, torej sta deljivi s 5 in 9. Kar pomeni, da na mestu enic stoji števka 0 ali 5, vsota števk pa je deljiva z 9. Število 270 je edino, ki se konča z 0 in je deljivo z 9, saj je vsota števk enaka 9. Trimestno število oblike $x70$ z vsoto števk 18 ne obstaja. Podobno je število 675 edino, ki se konča s 5 in je deljivo z 9. Iskana telefonska številka je torej $270\ 675$, saj mora biti prvo trimestno število manjše od drugega.

B3. Iskani ulomek označimo z $\frac{m}{n}$. Iz naloge razberemo, da morajo biti količniki $\frac{12}{35} : \frac{m}{n} = \frac{12n}{35m}$, $\frac{16}{15} : \frac{m}{n} = \frac{16n}{15m}$ in $\frac{8}{21} : \frac{m}{n} = \frac{8n}{21m}$ naravna števila. Ker iščemo največji ulomek, mora biti m čim večje število, n pa čim manjše. Števila 8, 12 in 16 morajo biti deljiva z m, torej je $m = 4$, saj je njihov največji skupni delitelj. Število n mora biti deljivo s 15, 21 in 35, torej je $n = 105$, ker je njihov najmanjši skupni večkratnik. Ulomek, ki ga iščemo, je enak $\frac{4}{105}$.

8. razred

A1. Izračunajmo $\frac{1}{32} \cdot 2^{2015} = \frac{1}{2^5} \cdot 2^{2015} = 2^{2010}$

A2. Izračunajmo: $((((1-2)^{2015} - 4) - 5) + 6)(-5) - (-2)^4 + 2015^0 = ((-1)^{2015} - 4 - 5 + 6)(-5) - 16 + 1 = (-1-3)(-5) - 15 = (-4)(-5) - 15 = 20 - 5 = 5$.

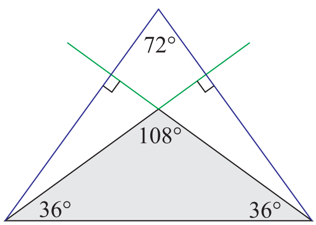
A3. Izračunajmo: $\sqrt{40^4 - 30^4} = \sqrt{4^4 \cdot 10^4 - 3^4 \cdot 10^4} = \sqrt{10^4(4^4 - 3^4)} = 10^2\sqrt{256 - 81} = 100\sqrt{25 \cdot 7} = 100 \cdot 5\sqrt{7} = 500\sqrt{7}$

A4. Kombinacija na ključavnici je petmestna. Za vsako mesto ima tri možnosti, torej je vseh možnih kombinacij $3^5 = 243$.

A5. Izračunamo vrednosti izraza za vsako od ponujenih rešitev. Po vrsti dobimo 67, 83, 101, 121 in 143. Števili 121 in 143 nista praštevili, torej je rešitev $n = 10$.

A6. Ker je srednja števka aritmetična sredina prve in tretje števke, je njuna vsota zagotovo sodo število. Torej sta prva in tretja števka obe lihi ali obe sodi števili. Prvemu pogoju zadošča 25 števil, drugemu pa 20, saj na mestu stotic ne sme stati števka 0. Torej pogojem naloge ustreza 45 števil.

A7. Razberemo, da so notranji koti trikotnika veliki α, α in 3α. Velja $\alpha + \alpha + 3\alpha = 180°$ in $\alpha = 36°$. Torej je kot ob vrhu trikotnika velik $108°$, nosilki višin na kraka pa se sekata izven trikotnika. Nožišči višin, vrh trikotnika ter presečišče nosilk določajo deltoid z dvema pravima kotoma in enim notranjim kotom velikosti $108°$. Velikost iskanega kota je $72°$.



A8. Ker gre za enaki podražitvi v odstotkih, sta razmerji med drugo in začetno ceno ter končno in drugo ceno enaki. Razmerje med končno in začetno ceno pa je enako 1.44, torej je razmerje med drugo in končno ceno enako $\sqrt{1.44} = 1.2$, kar pomeni, da sta bili obe podražitvi $20\ \%$.

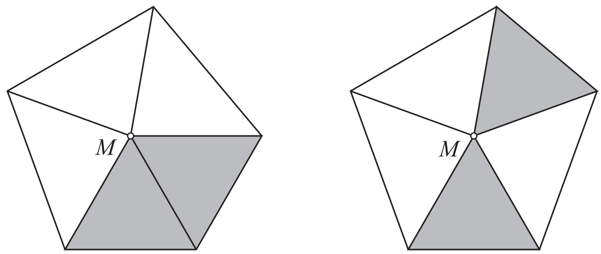
B1. Izračunamo

$$\frac{\sqrt{3^{2015}} + 1}{\sqrt{3^{2008}}} - \frac{2}{2 \cdot 3^{1004}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3^{2015}} + 1}{3^{1004}} - \frac{1}{3^{1004}} = \frac{\sqrt{3^{2015}}}{3^{1004}} = \sqrt{\frac{3^{2015}}{3^{2008}}} = \sqrt{3^7} = \sqrt{3^6 \cdot 3} = 27\sqrt{3}$$

B2. Po 6 dneh od začetka bi vseh 18 delavcev za dokončanje potrebovalo še 18 dni, torej bi en delavec potreboval 324 dni. Razberemo, da z delom nadaljuje le 12 delavcev, kateri pa delo opravijo v 27 dneh, saj je $\frac{324}{12} = 27$. Upoštevamo še prvih 6 dni, ko dela vseh 18 delavcev in dobimo, da bo delo opravljeno v 33 dneh.

B3. Točko M povežemo z oglišči, kot zahteva naloga. Dobimo pet kotov z vrhom v točki M, ki so skupaj veliki $360°$. Dva kota sta velika $60°$, saj sta kota v dveh enakostraničnih trikotnikih, ostali trije pa so skladni. Velikost enega je enaka $\frac{1}{3}(360° - 2 \cdot 60°) = 80°$. Ker so enakokraki trikotniki skladni, so daljice, ki povezujejo točko M z oglišči, skladne. Torej je točka M vrh enakokrakega trikotnika in kot ob vrhu je velik $80°$. Kota ob osnovnici sta velika $\frac{1}{2}(180° - 80°) = 50°$ in sta torej manjša od notranjega kota v enakostraničnem trikotniku.



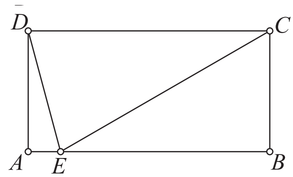
9. razred

A1. S Pitagorovim izrekom izračunamo dolžino hipotenuze: $c = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$. Ploščina pravokotnega trikotnika je enaka: $p = \frac{ab}{2} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12$ cm^2. Upoštevamo formulo za ploščino poljubnega trikotnika $p = \frac{cv_c}{2}$ in dobimo $v_c = \frac{2 \cdot 12}{\sqrt{52}} = \frac{12\sqrt{13}}{13}$ cm.

A2. Tomaž je pravilno odgovoril na 4 vprašanja iz sklopa A, 12 vprašanj iz sklopa B ter 3 vprašanja iz sklopa C. Torej je pravilno odgovoril na 19 vprašanj od 40, kar predstavlja 47.5 %.

A3. Označimo z x število deklet oziroma fantov na začetku šolske ure. Po odhodu je ostalo $x - 8$ deklet. Zapišemo enačbo $x = 2(x - 8)$ z rešitvijo $x = 16$. Torej je bilo na začetku šolske ure skupaj 32 deklet in fantov.

A4. Kot $\sphericalangle DEA$ je skladen s kotoma $\sphericalangle EDC$ in $\sphericalangle CED$, zato je trikotnik CDE enakokrak z osnovnico DE in velja $|CD| = |CE|$. Pravokotni trikotnik EBC je polovica enakostraničnega trikotnika, saj velja $2|BC| = |CE|$. Torej je velikost kota $\sphericalangle BEC$ enaka $30°$, velikost kota $\sphericalangle DEA$ pa je enaka $75°$.



A5. Tri zaporedna liha števila lahko zapišemo kot $2n - 1$, $2n + 1$ in $2n + 3$. Vsota njihovih kvadratov je enaka $4n^2 - 4n + 1 + 4n^2 + 4n + 1 + 4n^2 + 12n + 9 = 12n^2 + 12n + 11$. Od vsote odštejemo 5 in izpostavimo 6: $12n^2 + 12n + 6 = 6(2n^2 + 2n + 1)$, zato je izraz zagotovo deljiv s 6.

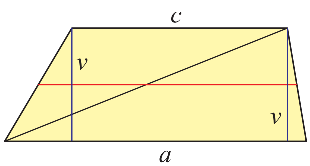
A6. Polkroga s premeroma BS in AS sta skladna. Ploščina osenčenega območja je zato enaka razliki ploščin polkrogov s premeroma AD in AC: $\frac{\pi(\frac{3}{4})^2}{2} - \frac{\pi(\frac{1}{4})^2}{2} = \frac{\pi}{4}$.

A7. Vemo, da je $m^2 - n^2 = (m-n)(m+n)$. Število 2015 zapišemo kot zmnožek dveh naravnih števil le na 4 načine: $1 \cdot 2015$, $5 \cdot 403$, $13 \cdot 155$ in $31 \cdot 65$. Za vsakega izmed 4 zmnožkov obstaja par naravnih števil m in n, da je število $m-n$ enako prvemu, $m+n$ pa drugemu faktorju v naštetih zmnožkih.

A8. Iz prvega razmerja izrazimo $x = \frac{9y}{4}$ ter iz drugega $z = \frac{3y}{5}$. Razlika $x - y$ je enaka $\frac{5y}{4}$, razlika $y - z$ pa $\frac{2y}{5}$. Vrednost iskanega razmerja je $\frac{\frac{5y}{4}}{\frac{2y}{5}} = \frac{25}{8}$.

B1. Za prvo števko imamo štiri možnosti: 2, 4, 6 in 8. Za drugo števko imamo tudi štiri možnosti: 2, 3, 5, 7. Na tretjem mestu lahko stoji katerakoli izmed petih števk: 1, 3, 5, 7 in 9. Števka na zadnjem mestu ima najmanj 3 delitelje. Take števke so štiri: 4, 6, 8 in 9. Torej lahko na tak način sestavimo 320 štirimestnih števil, saj je $4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 320$.

B2. Upoštevamo razmerje ploščin obeh trikotnikov in dobimo $\frac{cv}{2} : \frac{av}{2} = 5 : 7$, kjer sta a in c osnovnici trapeza, v pa njegova višina. Torej sta osnovnici trapeza v razmerju $a : c = 7 : 5$. Iz razmerja sklepamo, da je dolžina srednjice trapeza enaka $s = \frac{7t+5t}{2} = 6t$. Vemo, da srednjica razdeli trapez na dva trapeza z enakima višinama. Ploščina večjega je enaka $p_1 = \frac{a+s}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{7t+6t}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{13t}{4} \cdot v$, ploščina manjšega pa je enaka: $p_2 = \frac{s+c}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{6t+5t}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{11t}{4} \cdot v$. Iskano razmerje ploščin je enako $13 : 11$.



B3. Ker sta števili zaporedni, je razlika med njima enaka 1. Recimo, da je prvo omenjeno število večje. Torej velja: $2(n-3)(n+1) - (n-2)(2n-1) = 1$. Odpravimo oklepaje in dobimo: $2n^2 - 4n - 6 - (2n^2 - 5n + 2) = 1$ oziroma $n - 8 = 1$. Rešitev te enačbe je $n = 9$. Druga možnost je, da je drugo število večje, zato velja enačba: $(n-2)(2n-1) - 2(n-3)(n+1) = 1$. Po odpravljanju oklepajev dobimo $2n^2 - 5n + 2 - (2n^2 - 4n - 6) = 1$ oziroma $-n + 8 = 1$. Tej enačbi ustreza $n = 7$.

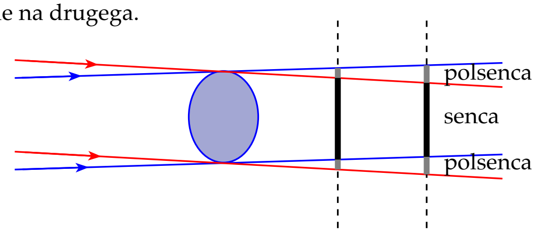
Rešitve tekmovanja iz fizike za srebrno Stefanovo priznanje – področno tekmovanje

8. razred

A1 Če telo osvetljuje razsežno svetilo, opazimo na zaslonu za telesom senco, obrobljeno s pasom polsence. Širina polsence je odvisna od razdalje med telesom in zaslonom (podlago), na katerem opazujemo senco.

Z različnih delov razsežnega svetila prihajajo do telesa svetlobni curki iz različnih smeri. Ker je zorni kot, pod katerim vidimo Sonce, majhen, so tudi curki, ki prihajajo s skrajnih nasprotnih delov Sončeve ploskve, le malo nagnjeni eden glede na drugega.

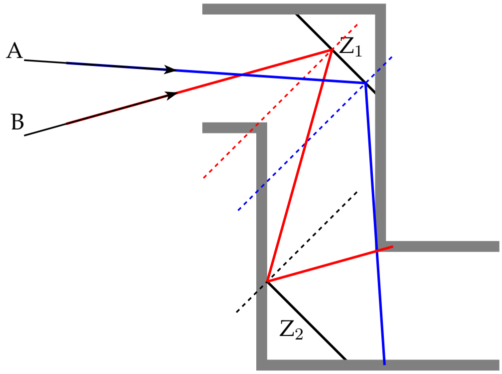
Zaradi nazornosti je na sliki, ki kaže nastanek pasu polsence na zaslonu, kot med svetlobnimi curki s skrajnih nasprotnih delov Sončeve ploskve prikazan precej večji, kot je v resnici (in je enak zornemu kotu Sonca, ki je približno $0{,}5°$.)



V polsenčnem pasu se sicer osvetljenost tal spreminja zvezno in ne tako ostro, kot je prikazano na sliki.

A2 Tudi Luna vzhaja približno na vzhodu in zahaja približno na zahodu ter gre vmes, če jo opazujemo z naše geografske širine, čez južni del neba. Ko je najvišje na nebu, je njen azimut ne glede na meno v smeri proti jugu. Prvi krajec je najvišje na nebu približno ob 18. uri.

A3 Periskopa ne zapusti noben od curkov A in B.



A4 Prvo polovico poti $\frac{s}{2}$ avto prevozi s hitrostjo $v_1 = 60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ v času t_1, drugo polovico poti pa prevozi s hitrostjo $v_2 = 40\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ v času t_2. Velja $\frac{s}{2} = v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$. Ker je $v_1 = \frac{3}{2}\, v_2$, je $t_2 = \frac{3}{2}\, t_1$. Skupna pot je

$$s = v_1\ \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2 = 2 \cdot v_1 \cdot t_1$$

in bi jo avto prevozil v istem skupnem času $t_1 + t_2$ s stalno hitrostjo v, $s = v\ \cdot (t_1 + t_2)$. Ta hitrost je

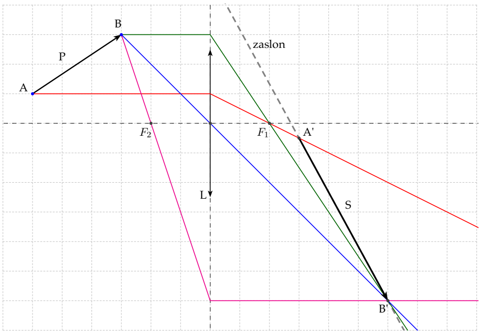
$$v = \frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{2 \cdot v_1 \cdot t_1}{t_1 + \frac{3}{2}\, t_1} = \frac{2 \cdot v_1 \cdot t_1}{\frac{5}{2}\, t_1} = \frac{2 \cdot v_1}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}\, v_1 = \frac{4}{5}\, 60\, \frac{\text{km}}{\text{h}} = 48\, \frac{\text{km}}{\text{h}}\,.$$

Hitreje poiščemo pravi odgovor, če si izmislimo primerne podatke. Očitno iskana hitrost ni odvisna od dolžine poti (tega podatka v nalogi niti ni). Zato si izmislimo primerno dolžino poti, npr. 120 km. Za prvo polovico poti potrebuje avto pri hitrosti v_1 eno uro, za drugo polovico poti pa pri hitrosti v_2 uro in pol. Celotno pot 120 km opravi v času 2 uri in pol, in bi jo opravil v enakem času, če bi na celotni poti vozil s stalno hitrostjo

$$v = \frac{120\,\text{km}}{2{,}5\,\text{h}} = 48\, \frac{\text{km}}{\text{h}}\,.$$

A5 Luna se vsako sekundo oddalji od Zemlje za $1{,}2$ nm. Eno leto ima $365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ sekund $=$ $31\,536\,000$ s. V tem času se Luna oddalji od Zemlje za $31\,536\,000 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-9}$ m $= 37{,}8$ mm ≈ 38 mm.

B1 (a) Žarek, ki je od točke A do leče vzporeden optični osi leče (na skici je narisan z rdečo), potuje po prehodu skozi lečo skozi točko A', ki je slika točke A. Optično os seka v gorišču F_1. Gorišče F_2 leži simetrično na drugi strani leče. Na skici je razdalja med lečo in goriščem $2 \pm 0{,}1$ cm. Upoštevamo merilo in določimo goriščno razdaljo leče $f = 8$ cm $\pm 0{,}4$ cm.



(b) Sliko točke B konstruiramo z dvema žarkoma. Na skici so prikazani trije žarki: vzporedni žarek (zelen), *središčni* žarek (ali *temenski*, moder) in *goriščni* žarek (vijoličen). Njihovo presečišče je slika točke B v točki B'. V prikazanem primeru vzporedni žarek in goriščni žarek ne prispevata k nastanku slike v B', ker ne gresta skozi lečo. Z njima si samo pomagamo določiti lego slike B'.

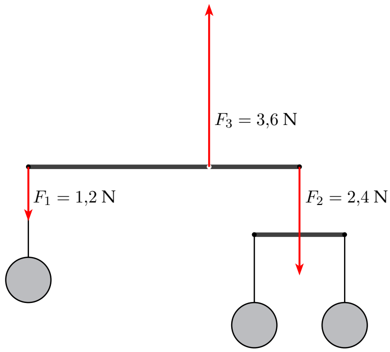
(c) Slika predmeta P je S; je med točkama A' in B'.

(d) Da je slika na njem ostra, je zaslon Z postavljen postrani; vzdolž slike.

B2 (a) Upoštevamo zvezo $m_1 \cdot r_1 = m_2 \cdot r_2$, podatke o masah kroglic in razdalji prve kroglice od osi ter zapišemo $150\,\mathrm{g} \cdot 8\,\mathrm{cm} = 1\,200\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm} = 100\,\mathrm{g} \cdot r_2$, odkoder dobimo $r_2 = 12$ cm. Prečka je dolga $r_1 + r_2 = 20$ cm.

(b) Naj bo masa ene kroglice m. Z levega krajišča prečke visi ena kroglica z maso m, z desnega krajišča prečke visita dve kroglici s skupno maso $2 \cdot m$. Da je prečka v vodoravni ravnovesni legi, mora veljati $m \cdot r_L = 2 \cdot m \cdot r_D$. Razdalja med levim krajiščem prečke in osjo r_L je **dvakrat** tolikšna, kot je razdalja med desnim krajiščem prečke in osjo r_D. Prečko razdelimo na tretjine; vrvico obesimo na razdalji ene tretjine od desnega krajišča. Vrvica je tam, kjer je v rešitvi za naslednje vprašanje narisana sila F_3.
Na sliki izmerimo razdaljo med levim krajiščem prečke in vrvico. Dobimo 4 cm $\pm 0{,}1$ cm.

(c) Sile treh vrvic na zgornjo prečko so narisane na sliki. Toleranca pri dolžinah je $\pm 0{,}1$ cm.



(d) Označimo razdaljo med sosednjima oznakama na prečkah (ki je povsod enaka) z x. Začnemo z ugotovitvijo, da velja $m_A \cdot x = m_B \cdot 3 \cdot x$. Od tod dobimo $m_A = 3 \cdot m_B = 120$ g in $m_B = 40$ g. Skupna masa kroglic A in B je $m_A + m_B = 160$ g. V naslednjem koraku upoštevamo $m_C \cdot 4 \cdot x = (m_A + m_B) \cdot 2 \cdot x$: dobimo $2 \cdot m_C = m_A + m_B$ in $m_C = 80$ g. Skupna masa $m_A + m_B + m_C = 240$ g. V tretjem koraku upoštevamo $(m_A + m_B + m_C) \cdot 4 \cdot x = (m_D + m_E) \cdot 6 \cdot x$: dobimo $m_D + m_E = \frac{2}{3}(m_A + m_B + m_C) = 160$ g. Naposled upoštevamo še $m_D \cdot 3 \cdot x = m_E \cdot 5 \cdot x$ in izračunamo (ali uganemo) še masi m_D in m_E.

m_B	40 g
m_C	80 g
$m_D + m_E$	160 g
m_D	100 g
m_E	60 g

Če tekmovalec v zaporedju sklepov že zgodaj naredi napako, dobi kljub pravilnemu sklepanju v nadaljevanju napačne vrednosti mas. Na tem mestu posebej opozarjamo, naj ocenjevalci ne spregledajo verižnih napak in točkujejo pravilno. Če je sklepanje v nadljevanju pravilno, tekmovalec dobi točko (točke).

B3 (a) *Brancin* pluje s hitrostjo

$$v_B = 35\,\mathrm{kn} = 35 \cdot \frac{\mathrm{NM}}{\mathrm{h}} = 35 \cdot \frac{1\,852\,\mathrm{m}}{3\,600\,\mathrm{s}} = 18{,}0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

(b) Čas potovanja prvega UZ signala od *Brancina* do *Orade* je

$$\Delta t_1 = \frac{d_0}{c} = \frac{4\,\mathrm{NM}}{1\,531\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \frac{4 \cdot 1\,852\,\mathrm{m}}{1\,531\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 4{,}839\,\mathrm{s}\,,$$

kjer je $d_0 = 4$ NM in smo s c označili hitrost UZ v morski vodi.

Drugi UZ signal opravi od *Brancina* do *Orade* nekoliko krajšo pot, ker ga *Brancin* odda z zamikom $\Delta t_0 = 1{,}000$ s. V tem času se, ker se *Brancin* giblje proti *Oradi*, razdalja med podmornicama zmanjša za pot s_B, ki jo *Brancin* opravi v Δt_0: $s_B = v_B \cdot \Delta t_0 = 18{,}0$ m. Čas potovanja drugega UZ signala od *Brancina* do *Orade* je

$$\Delta t_2 = \frac{d_0 - s_B}{c} = \frac{4\,\mathrm{NM} - 18\,\mathrm{m}}{1\,531\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \frac{7\,390\,\mathrm{m}}{1\,531\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 4{,}827\,\mathrm{s}\,.$$

(c) Če merimo čas od trenutka $t = 0$, ko z *Brancina* pošljejo prvi signal proti *Oradi*, sprejmejo na *Oradi* ta signal ob času $t_1 = \Delta t_1 = 4{,}839$ s. Drugi signal sprejmejo ob času $t_2 = \Delta t_0 + \Delta t_2 = 5{,}827$ s.

(d) Od sprejema prvega signala do sprejema drugega signala mine čas $\Delta t' = t_2 - t_1 = 5{,}827\,\mathrm{s} - 4{,}839\,\mathrm{s} = 0{,}988$ s.

(e) Če se proti *Brancinu* giblje tudi *Orada* (s hitrostjo $v_O = 14\,\mathrm{kn} = 7{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$), že prvi signal potuje krajši čas Δt_3, ker del poti d_0 ($d_0 = 4 \cdot 1\,852$ m $= 7\,408$ m) med podmornicama opravi *Orada*. Zapišemo lahko $d_0 = c \cdot \Delta t_3 + v_O \cdot \Delta t_3 = (c + v_O) \cdot \Delta t_3$. Od tod izračunamo čas Δt_3,

$$\Delta t_3 = \frac{d_0}{c + v_O} = \frac{7\,408\,\mathrm{m}}{1\,531\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 7{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 4{,}816\,\mathrm{s}\,.$$

(f) Ko *Brancin* odda drugi signal, je razdalja d_1 med podmornicama manjša od d_0 za pot, ki jo skupaj opravita podmornici v času Δt_0 med oddajo obeh signalov, $d_1 = d_0 - (v_B + v_O) \cdot \Delta t_0 = 7\,408\,\mathrm{m} - (18{,}0\,\mathrm{m} + 7{,}2\,\mathrm{m}) = 7\,382{,}8$ m. Zdaj lahko zapišemo, da je čas potovanja drugega signala

$$\Delta t_4 = \frac{d_1}{c + v_O} = \frac{7\,382{,}8\,\mathrm{m}}{1\,531\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 7{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 4{,}800\,\mathrm{s}\,.$$

Prvi signal sprejmejo na *Oradi* ob času $t_3 = \Delta t_3 = 4{,}816$ s, drugi signal sprejmejo ob času $t_4 = \Delta t_0 + \Delta t_4 = 5{,}800$ s. Med sprejemoma obeh signalov preteče čas $\Delta t'' = t_4 - t_3 = 5{,}800\,\mathrm{s} - 4{,}816\,\mathrm{s} = 0{,}984$ s.

9. razred

A1 Prvo polovico poti $\frac{s}{2}$ avto prevozi s hitrostjo $v_1 = 60\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ v času t_1, drugo polovico poti pa prevozi s hitrostjo $v_2 = 40\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ v času t_2. Velja $\frac{s}{2} = v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$. Ker je $v_1 = \frac{3}{2}\,v_2$, je $t_2 = \frac{3}{2}\,t_1$. Skupna pot je

$$s = v_1 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2 = 2 \cdot v_1 \cdot t_1$$

in bi jo avto prevozil v istem skupnem času $t_1 + t_2$ s stalno hitrostjo v, $s = v \cdot (t_1 + t_2)$. Ta hitrost je

$$v = \frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{2 \cdot v_1 \cdot t_1}{t_1 + \frac{3}{2}\,t_1} = \frac{2 \cdot v_1 \cdot t_1}{\frac{5}{2}\,t_1} = \frac{2 \cdot v_1}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}\,v_1 = \frac{4}{5}\,60\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 48\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\,.$$

Hitreje poiščemo pravi odgovor, če si izmislimo primerne podatke. Očitno iskana hitrost ni odvisna od dolžine poti (tega podatka v nalogi niti ni). Zato si izmislimo primerno dolžino poti, npr. 120 km. Za prvo polovico poti potrebuje avto pri hitrosti v_1 eno uro, za drugo polovico poti pa pri hitrosti v_2 uro in pol. Celotno pot 120 km opravi v času 2 uri in pol, in bi jo opravil v enakem času, če bi na celotni poti vozil s stalno hitrostjo

$$v = \frac{120\,\mathrm{km}}{2{,}5\,\mathrm{h}} = 48\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\,.$$

A2 Naj bo sistem, ki ga opazujemo, krogla s svojo vsebino. Sistem je v ravnovesju: vsota sil, ki nanj delujejo, je nič. V smeri navzgor na sistem deluje vzgon, navzdol pa delujejo teža krogle, teža zraka v krogli in sila vrvi. Ko iz krogle izčrpamo zrak, se prostornina vode, ki jo krogla izpodriva, nič ne spremeni in je zato vzgon na kroglo enak kot prej. V tem primeru ga uravnovešata teža krogle, ki je enaka kot prej, in sila vrvi, ki je **večja** kot prej, ker nadomešča tudi težo izčrpanega zraka (ki ga zdaj v krogli ni).

A3 Rezultanta sil, ki deluje na uteži, povezani z lahko vrvjo preko lahkega škripca, je po velikosti enaka razliki med težama uteži, $F_r = F_{g2} - F_{g1} = 30$ N. Rezultanta sil povzroči, da se uteži začneta gibati s pospeškom

$$a = \frac{F_r}{m_1 + m_2} = \frac{30\,\mathrm{N}}{5\,\mathrm{kg}} = 6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

Lahko pa zapišemo tudi 2. Newtonov zakon za vsako utež posebej, pri čemer upoštevamo, da sta pospeška uteži po velikosti enaka, da se težja utež giblje navzdol, lažja pa navzgor, in da sta sili vrvice F_v na vsako izmed uteži po velikosti enaki:

$$m_1 \cdot a = F_v - F_{g1} \qquad \text{in} \qquad \mathrm{m_2 \cdot a = F_{g2} - F_v} \,.$$

Obe enačbi seštejemo (ali pa se kako drugače dokopljemo do spodnjega izraza) in dobimo

$$m_1 \cdot a + m_2 \cdot a = (m_1 + m_2) \cdot a = F_v - F_{g1} + F_{g2} - F_v = F_{g2} - F_{g1} \,,$$

odkoder dobimo isti izraz za pospešek a kot prej.

A4 Izrek o kinetični energiji pravi, da je vsota **vseh zunanjih sil**, ki delujejo na telo, enaka spremembi kinetične energije telesa. Edina sila, ki deluje na skokico med njenim padanjem navzdol, je teža. Opravlja delo, ki je enako spremembi W_k.

A5 V razpredelnici gostot na listu s fizikalnimi obrazci preberemo gostoto lanenega olja, $\rho_o = 900\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Gladina je v kraku z oljem za 2 cm višja od gladine v kraku z vodo, pri čemer na ločilni ravnini velja, da je hidrostatični tlaki v obeh krakih enak. Zapišemo

$$\rho_o \cdot g \cdot h_o = \rho_v \cdot g \cdot h_v \,,$$

kjer sta h_o in h_v višini stolpcev olja in vode nad ločilno ravnino. Ko pokrajšamo g in enote pri gostotah dobimo $9 \cdot h_o = 10 \cdot h_v$, velja pa še $h_o - h_v = 2$ cm. Zadnjo enačbo množimo na obeh straneh z 10, upoštevamo prvo zvezo in dobimo $10 \cdot h_o - 10 \cdot h_v = 10 \cdot h_o - 9 \cdot h_o = h_o = 20$ cm.

B1 (a) Jana in Simon se gibljeta enakomerno pospešeno s pospeškom $a_1 = 0{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ in imata ob času $t_1 = 6$ s hitrost $v_0 = a_1 \cdot t_1 = 3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

(b) V smeri Janinega gibanja deluje na Jano zaviralna sila $F_z = 18$ N, zato se Jana ustavlja s pojemkom

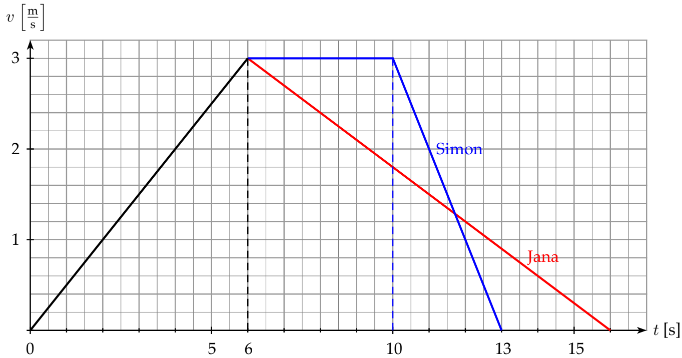
$$a_2 = \frac{F_z}{m_J} = \frac{18\,\mathrm{N}}{60\,\mathrm{kg}} = 0{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \,.$$

Ustavi se v času

$$\Delta t_2 = \frac{v_0}{a_2} = \frac{3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0{,}3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 10\,\mathrm{s} \,.$$

(c) Janina hitrost se do časa $t_1 = 6$ s enakomerno povečuje s pospeškom a_1 od začetne hitrosti 0 do hitrosti v_0 in se potem naslednjih $\Delta t_2 = 10$ s enakomerno zmanjšuje s pojemkom a_2 do končne hitrosti 0.

Simonova hitrost se do časa t_1 spreminja enako kot Janina. Od trenutka, ko se Jana ob času t_1 spusti, vozi Simon s stalno hitrostjo v_0 še čas $\Delta t_3 = 4$ s in se nato s pojemkom $a_3 = 1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ustavi v času $\Delta t_4 = 3$ s. Grafa Janine in Simonove hitrosti:



(d) Od trenutka, ko se Jana ob času t_1 spusti, opravi Simon pot, sestavljeno iz dveh prispevkov. Med vožnjo s stalno hitrostjo v_0 opravi pot $s_{S,1} = v_0 \cdot \Delta t_3 = 12$ m, med ustavljanjem pa pot $s_{S,2} = \frac{1}{2} v_0 \cdot \Delta t_4 = 4{,}5$ m. Skupna Simonova pot je $s_S = s_{S,1} + s_{S,2} = 16{,}5$ m.

(e) Od trenutka ob času t_1, ko se pričneta gibati ločeno, opravi Jana med ustavljanjem pot $s_J = \frac{1}{2} v_0 \cdot \Delta t_2 = 15$ m. Ko oba spet mirujeta, sta oddaljena za razliko svojih poti, $d = s_S - s_J = 1{,}5$ m.

(f) Ne. Simon je med Janinim ustavljanjem vseskozi pred njo. (Obstaja pa trenutek, ko imata oba spet enaki hitrosti - ampak tedaj nista vštric.)

B2 (a) Lubenica plava na gladini. Izpodrine toliko morske vode s prostornino $V_{mv} = 5{,}4$ l, da vzgon uravnovesi njeno težo. Sila vzgona F_v na lubenico je po velikosti enaka teži izpodrinjene morske vode,

$$F_v = m_{mv} \cdot g = \rho_{mv} \cdot V_{mv} \cdot g = 1\,025\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 5{,}4\,\mathrm{dm}^2 \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 55{,}35\,\mathrm{N}\,.$$

(b) Tehtnica kaže enako kot prej (12 kg), ker težo (maso) prelite vode nadomesti po velikosti enaka teža (masa) lubenice.

(c) Teža lubenice je $55{,}35$ N, njena masa je $m_l = 5{,}535$ kg $\approx 5{,}5$ kg.

(d) Prostornina lubenice je $V_l = V_{mv} + 0{,}6\,\mathrm{l} = 6\,\mathrm{l}$. Gostota lubenice je

$$\rho_l = \frac{m_l}{V_l} = \frac{5{,}535\,\mathrm{kg}}{6\,\mathrm{dm}^3} = 0{,}9225\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3} \approx 0{,}92\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}\,.$$

(e) Gostota lubenice je manjša tudi od gostote sladke vode, zato lubenica plava tudi v sladki vodi. Težo lubenice uravnovesi vzgon: lubenica s težo $55{,}35$ N izpodrine $5{,}535 \approx 5{,}5$ litrov sladke vode z gostoto $1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}$, ki se prelije čez rob posode.

(f) Prostornina lubenice je enaka kot prej, torej 6 litrov. Ko Vesna lubenico dodatno potisne pod gladino, se čez rob posode prelije še $6\,\mathrm{l} - 5{,}535\,\mathrm{l} = 0{,}465\,\mathrm{l} \approx 0{,}5\,\mathrm{l}$.

B3 (a) Pri vsakem odboju se ohrani $100\,\% - 60\,\% = 40\,\%$ mehanske energije, ki jo ima žogica pred odbojem. Po posameznem odboju zato predstavlja potencialna energija žogice v najvišji legi le $40\,\%$ potencialne energije v najvišji legi pred tem odbojem. Potencialna energija je sorazmerna višini lege, zato so zaporedne najvišje višine žogice po odbojih $h_1 = 0{,}4 \cdot h_0 = 0{,}4$ m in $h_2 = 0{,}4 \cdot h_1 = 0{,}16$ m.

(b) Čas do prvega odboja je čas prostega pada žogice z višine $h_0 = 1$ m,

$$t_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1\,\mathrm{m}}{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 0{,}45\,\mathrm{s}\,.$$

Čas od prvega do drugega odboja je čas navpičnega meta do višine $h_1 = 0{,}4$ m, ki je dvakratnik časa prostega pada z višine h_1,

$$t_1 = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{g}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}4\,\mathrm{m}}{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 0{,}57\,\mathrm{s}\,.$$

Čas od drugega do tretjega odboja je čas navpičnega meta do višine $h_2 = 0{,}16$ m,

$$t_2 = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h_2}{g}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}16\,\mathrm{m}}{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 0{,}36\,\mathrm{s}\,.$$

(c) Potencialna energija žogice v najvišji legi pred odbojem je enaka kinetični energiji žogice tik pred odbojem, $m \cdot g \cdot h_0 = \frac{1}{2}\, m \cdot v_0^2$. Hitrost žogice tik pred prvim odbojem je

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0} = \sqrt{2 \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1\,\mathrm{m}} = 4{,}47\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

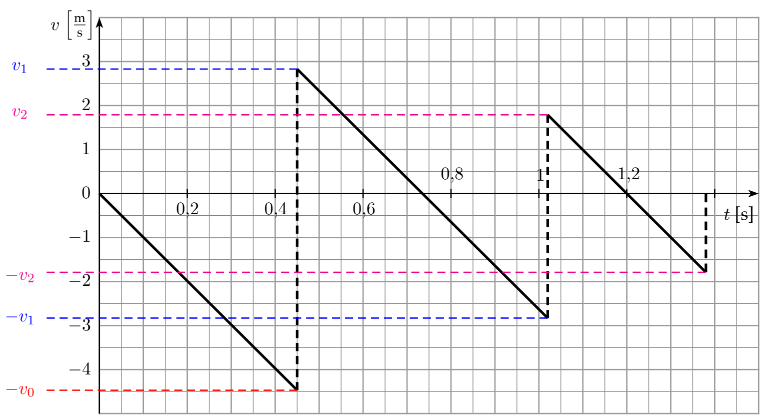
Velikost hitrosti žogice **tik po prvem** odboju je enaka velikosti hitrosti žogice **tik pred drugim** odbojem,

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1} = \sqrt{2 \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}4\,\mathrm{m}} = 2{,}83\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

Velikost hitrosti žogice tik po drugem odboju je enaka velikosti hitrosti žogice tik pred tretjim odbojem,

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_2} = \sqrt{2 \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}16\,\mathrm{m}} = 1{,}79\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

(d) Graf hitrosti žogice v odvisnosti od časa.



Rešitve tekmovanja iz matematike za Vegovo priznanje – državno tekmovanje

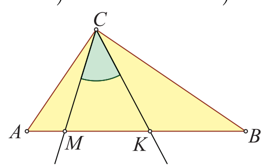
7. razred

1. Računajmo:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\frac{4}{3}+1}{\frac{4}{3}-1}-1\right)\cdot\frac{1}{3}-\left(\left(\left(\frac{\frac{4}{3}-1}{\frac{4}{3}+1}+1\right):\frac{4}{3}\right):\left(\frac{1}{\frac{4}{3}-1}+\frac{1}{\frac{4}{3}+1}\right)\right)\cdot 4=\\
&=\left(\frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}}-1\right)\cdot\frac{1}{3}-\left(\left(\left(\frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{3}}+1\right):\frac{4}{3}\right):\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}+\frac{1}{\frac{7}{3}}\right)\right)\cdot 4=\\
&=(7-1)\cdot\frac{1}{3}-\left(\left(\left(\frac{1}{7}+1\right):\frac{4}{3}\right):\left(3+\frac{3}{7}\right)\right)\cdot 4=\\
&=6\cdot\frac{1}{3}-\left(\left(\frac{8}{7}\cdot\frac{3}{4}\right):\frac{24}{7}\right)\cdot 4=2-\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{24}\right)\cdot 4=2-\frac{1}{4}\cdot 4=1
\end{aligned}$$

2. Leto 2014 je imelo 365 dni, saj ni prestopno. Število vseh dni označenih s številom, ki je deljivo s tri je enako $\frac{1}{3}$ od 365, torej 121. V teh dnevih je Miha privarčeval $121\cdot 0.3$ EUR $=$ 36.3 EUR. Število vseh dni, ki jim pripada sodo število, je enako 182. Pri tem je potrebno izvzeti dneve, ki jim pripada število deljivo s šest, takih je $\frac{1}{6}$, torej 60. Število dni, ko je Miha dal v hranilnik 20 centov, je enako 122 $(182-60=122)$. Skupno je v teh dnevih privarčeval $122\cdot 0.2$ EUR $=24.4$ EUR. Ostanejo le še dnevi, ko je dal v hranilnik 10 centov, število le-teh je enako $365-121-122=122$. V teh dnevih je Miha privarčeval 12.2 EUR. Torej je v celem letu 2014 privarčeval $36.3+24.4+12.2=72.9$ EUR.

3. Označimo kota v trikotniku ABC: $\sphericalangle BAC=\alpha$ in $\sphericalangle CBA=\beta$.



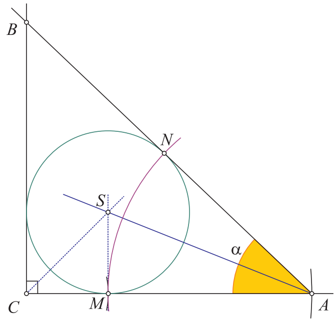
Razberemo, da je trikotnik MBC enakokrak z osnovnico MC. Torej sta kota $\sphericalangle BMC$ in $\sphericalangle MCB$ skladna. Kot $\sphericalangle CBM$ je enak kotu β, zato je velikost kota $\sphericalangle BMC$ enaka $\frac{1}{2}\cdot(180^\circ-\beta)$. Podobno velja za trikotnik AKC, ki je enakokrak z osnovnico CK in v katerem sta kota $\sphericalangle CKA$ in $\sphericalangle ACK$ skladna. Kot $\sphericalangle KAC=\alpha$, torej je velikost kota $\sphericalangle CKA$ enaka $\frac{1}{2}\cdot(180^\circ-\alpha)$. Velikost kota $\sphericalangle MCK$ je enaka $180^\circ-\sphericalangle BMC-\sphericalangle CKA$. Upoštevamo, kar smo že izpeljali in dobimo: $180^\circ-\frac{1}{2}\cdot(180^\circ-\beta)-\frac{1}{2}\cdot(180^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}\cdot(\alpha+\beta)$. Vemo, da ostra kota pravokotnega trikotnika skupaj merita 90°. Torej je velikost kota $\sphericalangle MCK$ enaka: $\frac{1}{2}\cdot 90^\circ=45^\circ$.

Enako velja, če obrnemo orientacijo trikotnika ali če je kateta a krajša od obeh katet.

4. Število $5b3$ je deljivo s 3, kar pomeni, da je seštevek števk deljiv s 3. Torej je števka b lahko 1, 4 ali 7. Obravnavajmo vse tri možnosti. Če je $b=1$, velja $2a4+329=513$. Izračunamo $2a4$ in dobimo $513-329=184$. Ta rešitev ne ustreza. Če je $b=4$, je razlika $2a4$ enaka $543-329=214$. Torej je števka a enaka 1. V zadnjem primeru je $b=7$. Razlika $2a4$ je enaka $573-329=244$ in števka a je enaka 4.

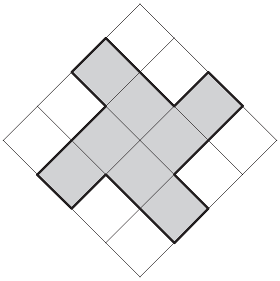
5. Postopek:

1. Konstruiramo pravi kot in označimo oglišče C.
2. S šestilom iz točke C odmerimo 7 cm in dobimo točko A.
3. Na kraku AC pravega kota iz točke C s šestilom odmerimo 2 cm in dobimo točko M, ki je dotikališče stranice AC z včrtano krožnico.
4. Konstruiramo simetralo pravega kota.
5. Skozi točko M konstruiramo vzporednico p drugemu kraku pravega kota.
6. Presek simetrale pravega kota in premice p je središče trikotniku včrtane krožnice, točka S.
7. Narišemo poltrak AS, ki je po definiciji simetrala notranjega kota trikotnika z vrhom v točki A.
8. Točko M prezrcalimo čez nosilko daljice AS in dobimo točko N. Dobljena točka je dotikališče iskane stranice AB in včrtane krožnice.
   Utemeljitev: trikotnika SAM in SAN sta skladna, ker leži daljica AS na simetrali kota $\sphericalangle NAM = \alpha$. Kota $\sphericalangle SAM$ in $\sphericalangle NAS$ sta skladna, torej je poltrak AS simetrala kota $\sphericalangle NAM = \alpha$.
9. Presečišče poltraka AN z drugim krakom pravega kota označimo s točko B in dobili smo trikotnik ABC, saj velja $\sphericalangle NAM = \alpha$.



8. razred

1. Lik lahko prekrijemo z 8 skladnimi kvadratki, kot je prikazano na sliki.



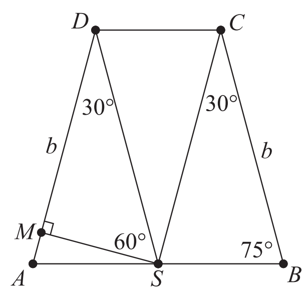
Ploščina enega takega kvadratka meri $200\ \text{cm}^2 : 8 = 25\ \text{cm}^2$, torej je njegova stranica dolga 5 cm. Krajša stranica danega lika tako meri 5 cm, daljša pa 10 cm. Obseg lika je enak $8 \cdot 5$ cm $+4 \cdot 10$ cm $= 80$ cm.

2. Izračunajmo:

$$\sqrt{(-2)^{12} \cdot \left(\frac{(-2)^3 \cdot (-2)^4}{(-2)^2 \cdot (-2)^7}\right)^3} + \sqrt{(2 \cdot 3)^4 + (3^2)^3} + 13 \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{2+\sqrt{2}+1} : \frac{1}{\sqrt{8}-1} =$$
$$= \sqrt{2^{12} \cdot \left(\frac{(-2)^7}{(-2)^9}\right)^3} + \sqrt{2^4 \cdot 3^4 + 3^6} + 13 \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{3+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{8}-1}{1} =$$
$$= \sqrt{2^{12} \cdot \left(\frac{1}{(-2)^2}\right)^3} + \sqrt{3^4(2^4+3^2)} + 13 \cdot \frac{(\sqrt{2}+1)(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} \cdot \frac{\sqrt{8}-1}{1} =$$
$$= \sqrt{\frac{2^{12}}{2^6}} + \sqrt{25 \cdot 3^4} + 13 \cdot \frac{3\sqrt{2}+3-2-\sqrt{2}}{9-2} \cdot \frac{\sqrt{8}-1}{1} =$$
$$= \sqrt{2^6} + 5 \cdot 3^2 + 13 \cdot \frac{2\sqrt{2}+1}{7} \cdot \frac{2\sqrt{2}-1}{1} =$$
$$= 2^3 + 45 + 13 \cdot \frac{(2\sqrt{2})^2-1}{7} = 8 + 45 + 13 \cdot \frac{8-1}{7} = 8 + 45 + 13 = 66.$$

3. S c označimo ceno kruha pred podražitvijo. Strošek bele moka predstavlja 30% celotne cene, torej $0.3c$. Podobno strošek ržene moke predstavlja $0.6c$ in strošek vode $0.1c$. Po podražitvi moke je strošek bele moke enak $0.3c \cdot 1.25 = 0.375c$, strošek ržene moke pa $0.6c \cdot 1.2 = 0.72c$. Cena kruha po podražitvi je torej enaka $0.375c + 0.72c + 0.1c = 1.195c$, kar pomeni, da se je prvotna cena zvišala za 19.5%.

4. Dolžini krakov BC in AD trapeza $ABCD$ sta enaki, označimo ju z b. Dolžino osnovnice AB označimo z a. Vzporednica h kraku AD skozi točko C seka daljšo osnovnico v točki S. Dobljeni štirikotnik $ASCD$ je paralelogram s stranicami $\frac{a}{2}$ in b. Podobno je štirikotnik $SBCD$ paralelogram s stranicami $\frac{a}{2}$ in b. Ker sta daljici BC in SD vzporedni, sta kota $\sphericalangle CBA$ in $\sphericalangle DSA$ skladna ter merita $75°$. Podobno velja za kote $\sphericalangle BSC = \sphericalangle SAD = \sphericalangle SDC = \sphericalangle DCS = 75°$. Sklepamo, da so trikotniki ASD, SBC in CDS skladni enakokraki trikotniki. Narišemo višino MS v trikotniku ASD.



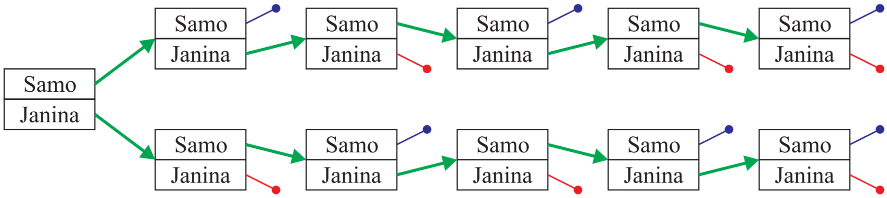
Velikost kota $\sphericalangle ADS$ je enaka $30°$, kot $\sphericalangle DSM$ pa meri $60°$. Pravokotni trikotnik MSD je torej polovica enakostraničnega trikotnika s stranico b. Dolžina stranice MS je enaka $\frac{b}{2}$. Ploščina trikotnika ASD je enaka $\frac{b \cdot \frac{b}{2}}{2} = \frac{b^2}{4}$. Ker trapez sestavljajo trije taki trikotniki, je njegova ploščina enaka $\frac{3b^2}{4}$.

5. Za pot navzgor potrebuje Jan 1 uro in 12 minut oziroma 1.2 ure, torej bi s tako hitrostjo v eni uri prekolesaril $\frac{12}{1.2} = 10$ km. Pot navzdol je prevozil v 20 minutah, kar pomeni, da bi s tako hitrostjo v eni uri prekolesaril $12 \cdot 3 = 36$ km. Oddaljenost čebelnjaka od vrha označimo z x. Jan je za pot od čebelnjaka do vrha potreboval $\frac{x}{10}$ ure, čas z vrha do čebelnjaka pa je enak $\frac{x}{36}$ ure. Razberemo, da je na vrhu počival 51 minut, torej je za kolesarjenje od čebelnjaka do vrha in nazaj potreboval 69 minut, kar je enako $\frac{69}{60}$ ure. Vsota časov je enaka $\frac{x}{10} + \frac{x}{36} = \frac{23x}{180}$, kar mora biti enako $\frac{69}{60} = \frac{207}{180}$. Velja, da je $23x = 207$ in $x = 9$, torej stoji čebelnjak 9 km pod vrhom.

---

9. razred

1. a) Narišemo kombinatorično drevo:

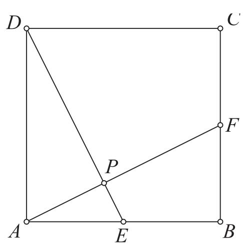


S preštevanjem ugotovimo, da je število vseh različnih potekov igre enako 12 ter da je Janina zmagala 6 krat.

b) Rešitev lahko razberemo iz drevesa: Samo (1. set), Janina (2. set), Samo (3. set), Janina (4. set), Samo (5. set) in Samo (6. set).

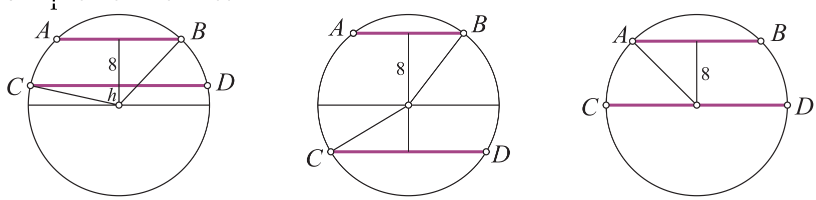
c) Recimo, da po 1. setu zmaga Samo, torej ima 11 pomaranč, Janina pa 9. Če bi v 2. setu zmagal Samo, se igra konča in Samo bi imel 12 pomaranč, Janina pa 8. Kar ne ustreza zahtevam naloge, torej je zmagala Janina in oba imata 10 pomaranč. Če bi v 3. setu zmagala Janina, bi se igra končala in Janina bi imela 11 pomaranč, Samo pa 9. Zmagal je Samo, ki ima zato 11 pomaranč, Janina pa 9. Če bi v 4. setu zmagal Samo, je igra končana in Samo bi imel 12 pomaranč, Janina pa 8. Zmagala je Janina in oba imata 10 pomaranč. Če bi v 5. setu zmagala Janina, je igra končana in Janina bi imela 11 pomaranč, Samo pa 9. Torej je zmagal Samo, ki ima zato 11 pomaranč, Janina pa 9. Če bi v 6. (zadnjem) setu zmagal Samo, bi imel 12 pomaranč, Janina pa 8. Torej je zmagala Janina in oba imata po 10 pomaranč. Povzetek igre: Samo (1. set), Janina (2. set), Samo (3. set), Janina (4. set), Samo (5. set) in Janina (6. set). Podobno utemeljimo še drugo igro, ki ustreza zahtevam naloge: Janina (1. set), Samo (2. set), Janina (3. set), Samo (4. set), Janina (5. set) in Samo (6. set).

2. Narišimo skico.



Trikotnika AED in BFA sta skladna, torej sta tudi kota $\sphericalangle DEA$ in $\sphericalangle AFB$ skladna. Trikotnika AEP in AFB sta podobna, ker se ujemata v dveh kotih: skupen kot $\sphericalangle BAF$ ter skladna kota $\sphericalangle PEA$ in $\sphericalangle AFB$. S Pitagorovim izrekom izračunamo dolžino daljice AF: $|AF|^2 = a^2 + (\frac{a}{2})^2 = \frac{5a^2}{4}$ oziroma $|AF| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Zapišemo razmerje enakoležnih stranic v obeh podobnih trikotnikih $|AE| : |AF| = |AP| : |AB|$. Upoštevamo dolžine daljic in dobimo $\frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{5}}{2} = |AP| : a$. Iz razmerja izrazimo $|AP| = \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. Izračunamo še dolžino $|PF| = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a\sqrt{5}}{5} = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$. Iskano razmerje je enako $|AP| : |PF| = 2 : 3$.

3. Ločimo tri možnosti: obe tetivi sta v istem polkrogu ali pa je vsaka v svojem ali pa je tetiva CD premer krožnice.



Označimo s h oddaljenost središča krožnice od tetive CD. V prvem primeru, ko sta obe tetivi v istem polkrogu, je tetiva AB od središča oddaljena $8 + h$. Polmer krožnice izrazimo s pomočjo Pitagorovega izreka $r^2 = 9^2 + h^2$, če upoštevamo tetivo CD. Upoštevajoč tetivo AB velja $r^2 = 7^2 + (8 + h)^2$. Izenačimo obe enačbi in dobimo: $81 + h^2 = 49+64+16h+h^2$. Dobljeno enačbo preoblikujemo v $16h = -32$ z rešitvijo $h = -2$. Rešitev odpade, saj je razdalja nenegativno število. V drugem primeru je vsaka tetiva v svojem polkrogu. Tetiva AB je od središča krožnice oddaljena $8 - h$. Podobno kot v zgornjem primeru s pomočjo Pitagorovega izreka izračunamo r ter izenačimo obe enačbi. Dobimo enačbo $81 + h^2 = 49 + 64 - 16h + h^2$ z rešitvijo $h = 2$. Torej je polmer krožnice enak $r = \sqrt{85}$ cm. Če je tetiva CD premer, je polmer krožnice enak 9 cm. Ta možnost odpade, saj ne velja enakost $9^2 = 7^2 + 8^2$.

4. Večkotnik z manj oglišči ima tudi manj diagonal. Označimo z n število oglišč večkotnika z manj diagonalami. Število diagonal v tem večkotniku je enako $\frac{n(n-3)}{2}$. Razberemo, da ima drugi večkotnik $n + 6$ oglišč, torej ima $\frac{(n+6)(n+6-3)}{2} = \frac{(n+6)(n+3)}{2}$ diagonal. Zapišemo razliko diagonal večkotnikov: $\frac{(n+6)(n+3)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = 63$. Odpravimo oklepaje ter ulomka in dobimo: $n^2 + 3n + 6n + 18 - n^2 + 3n = 126$ oziroma $12n + 18 = 126$. Rešitev enačbe je $n = 9$ torej gre za 9-kotnik in 15-kotnik.

5. 12 jabolk v Danovi košari na koncu predstavlja $\frac{3}{4}$ vseh, preden jih je $\frac{1}{4}$ dal v Žanovo košaro. Torej je dal Žanu 4 jabolka. Ostalih 8 jabolk v Žanovi košari na koncu predstavlja polovico vseh, ki jih je imel na začetku. Kar pomeni, da je imel Žan na začetku 16 jabolk ter jih je 8 dal v Lanovo košaro. Tudi Lan je imel na koncu 12 jabolk, kar predstavlja $\frac{2}{3}$ vseh, preden jih je $\frac{1}{3}$ dal v Danovo košaro. Torej je Danu dal 6 jabolk, kar pomeni, da je imel Dan na začetku $12 + 4 - 6 = 10$ jabolk. Lan pa je imel $12 + 6 - 8 = 10$ jabolk.