Tekmovanja

12. šolsko tekmovanje v znanju poslovne matematike in statistike

1. skupina: Poslovna matematika

1. naloga

Turistična agencija KLAS vsako leto prepelje nekaj tisoč gostov na razne kraje po Sloveniji in Evropi na enodnevne ali večdnevne izlete z visoko turističnimi avtobusi I. kategorije (34–49 sedežni) in II. kategorije (50–55) ter mini busi (16–17 sedežni).

a) V zadnjih treh mesecih preteklega leta je na počitnice prepeljala turiste s 84 avtobusi II. kategorije (55 sedežni).
Izračunajte, s koliko avtobusi I. kategorije (49 sedežni) bo turistična agencija v prvem polletju leta 2014 prepeljala turiste, če pričakuje 30 % nižje povpraševanje po turistični ponudbi zaradi recesije?

b) Za prevoz dijakov na strokovno ekskurzijo je bilo potrebnih 8 avtobusov s po 50 sedeži, če se je ekskurzije udeležilo 88 % vseh vpisanih učencev. Koliko avtobusov (zaokroženo na celo število) s po 55 sedeži bo potrebnih za organizacijo športnega dne, če se pričakuje, da bo odsotnih kar 30 % vseh vpisanih dijakov, ker so zaradi zdravstvenih razlogov oproščeni športne vzgoje? Upoštevajte, da bodo avtobusi za športni dan, zaradi prevozov na različne lokacije, zasedeni povprečno 85 %.

2. naloga

V nekem kraju so se odločili vpisati v Guinessovo knjigo rekordov z največjo kakijevo pito na svetu. Za peko potrebujejo 2 toni in 23 kg kakijev.

a) Dogovorili so se, da bodo potrebno količino kakijev priskrbeli tako, da bodo potrebne količine prispevali trije okoliški sadjarji, in sicer premo sorazmerno z velikostjo posestva in obratno sorazmerno z oddaljenostjo.
Izračunajte, koliko kg kakijev prispeva posamezni sadjar.

Tabela 1: Potrebna količina kakijev okoliških sadjarjev

Sadjarji	Velikost posestva v ha	Oddaljenost v km
Jože	50	20
Franko	75	40
Milan	105	10

Vir: Prirejeni podatki

b) Štirje lokalni gostinci so ugotovili, da bi bila prireditev izjemna priložnost za promocijo. Odločili so se, da bodo potrebno količino prispevali v celoti sami, in sicer tako, da bo prvi prispeval dvakrat več kot drugi, tretji pol manj kot drugi, četrti pa 202,5 kg več kot prvi.
a. Koliko kg kakijev prispeva posamezni lokalni gostinec?
b. Koliko kg več kakijev prispeva četrti gostinec od drugega? Izrazi tudi v %!

3. naloga

Jure se zanima za nov model avtomobila, ki stane 9.450,00 EUR.

a) Odločil se je, da bo počakal na promocijsko akcijo v decembru, v kateri prodajalec v prodajalni A obljublja 25 % popust. Koliko EUR bo Jure »prihranil«?

b) Za koliko % se mora znižati cena avtomobila, če Jure ne želi plačati več kot 8.525,00 EUR?

c) Enak avtomobil ponujajo tudi v sosednji prodajalni B. Ceno 9.450,00 EUR so v tej prodajalni najprej znižali za 5 %, nato povišali za 5 %, na koncu ponovno znižali za 5 %. Se Juretu splača avtomobil kupiti v prodajalni A ali v prodajalni B?

4. naloga

Prodali smo nepremičnino in zanjo dobili kupnino v znesku 58.700,00 EUR. Denar smo vložili na banko, ki obrestuje vloge po navadnem obrestnem računu. Časovno obdobje je podano v mesecih.

a) Koliko obresti dobimo za 58.700,00 EUR po enem letu in štirih mesecih obrestovanja, če je obrestna mera 4,80 %?

b) Kolikšna bi morala biti obrestna mera, da bi bile obresti 15,00 % večje od izračunanih v prvem delu naloge?

c) Koliko časa (let in dni) bi se morala obrestovati dobljena kupnina, da bi lahko z obrestmi vred dvignili 65.000,00 EUR, če bi ves čas obrestovanja veljala 5,00-% letna obrestna mera? Izpeljite obrazec za izračun časa obrestovanja.

2. skupina: Statistika

1. naloga

Družba *Krojaček d. o. o.* je s proizvodnjo začelo v letu 2008. Ob koncu prvega leta so ustvarili promet v vrednosti 560.000 EUR. Tega leta so izdelali naslednje število oblačil (Tabela 1).

Tabela 1: **Količina proizvodnje po vrstah oblačil v družbi *Krojaček d. o. o.* leta 2008**

Vrsta oblačil	**Število proizvodov**
Pulover	8.241
Srajca	7.281
Hlače	5.921
Krilo	1.932
Jakna	2.561
Skupaj	

Vir: Prirejeni podatki

a) Izračunajte strukturo proizvodnje po vrsti oblačil za prvo leto poslovanja in jih izrazite v odstotkih *(na dve decimalni mesti natančno).*

b) Strukturo proizvodnje po vrsti oblačil grafično prikažite s strukturnim stolpcem.

Tabela 2: **Struktura proizvodnje po vrsti oblačil v družbi *Krojaček d. o. o.* leta 2008**

Vrsta oblačila	**Struktura v %**
Pulover	
Srajca	
Hlače	
Krilo	
Jakna	
Skupaj	

Naslednje leto so letni promet povečali za 180.000 EUR. Po letu 2010, ko so poslovali najuspešnejše (promet je znašal 990.000 EUR), je prodaja začela upadati. Tako so leta 2011 ustvarili 620.000 EUR prometa, leta 2012 pa samo 400.000 EUR.

c) Prikažite spremembe prometa v družbi *Krojaček d. o. o.* iz leta v leto z ustreznimi indeksi *(na eno decimalno mesto natančno)*.

Tabela 3: **Promet v družbi *Krojaček d. o. o.* v letih od 2008 do 2012**

Leto	**Promet v EUR**	
2008		
2009		
2010		
2011		
2012		

2. naloga

Za družbo *Čeveljček d. o. o*. imate dane indekse s stalno osnovo za prodajo po mesecih v letu 2012, vrednost prodaje za mesec september in število prodajalcev po mesecih:

Tabela 4: **Prodaja za mesec september, indeksi s stalno osnovo za prodajo in število prodajalcev za zadnje štiri mesece v letu 2012 v družbi *Čeveljček d. o. o.***

Mesec	September	Oktober	November	December
Prodaja v tisoč EUR	175			
$I_{j/sept}$	100	102,5	100,0	101,9
Srednje število prodajalcev	6	5	6	7

Vir: Prirejeni podatki

a) Razložite indeksa za mesec oktober in november 2012.
b) Izračunajte vrednost prodaje po mesecih za obdobje od oktobra do decembra 2012.
c) Izračunajte povprečno vrednost prodaje na prodajalca za obdobje od septembra do decembra 2012.

3. naloga

V gostišču *Zlata vilica* so ob koncu leta pripravili pregled prodaje kosil v zadnjih letih. Analitik je pripravil podatke o gibanju prodaje. Zaradi pomanjkanja barve v tiskalniku pa njegovo »poročilo« ni bilo popolno. Pomagajte mu dopolniti podatke, tako da tabelo izpolnite in vstavite manjkajoče podatke v besedilo.

Tabela 5: **Število prodanih kosil v podjetju *Zlata vilica* v letih od 2007 do 2013**

Leto	Št. prodanih kosil	$I_{j/2009}$	V_j	S_j
2007	153.533	91,3		
2008	131.432			
2009	168.224	100,0		
2010	107.121			
2011	167.721		156,6	
2012	126.617			−24,5
2013	124.784			

Vir: Prirejeni podatki

Dopolnite besedilo in vstavite ustrezne odstotke oziroma obkrožite pravilen odgovor.

Kot je razvidno iz tabele, je bilo število prodanih kosil v gostišču leta 2008 za________________________ % ________________ kot leta 2007.

Število prodanih kosil se je v zadnjem letu (2013) glede na leto 2009 ____________________ za ________________ %.

Leta 2012 so v gostišču prodali _________________ kosil ***več / manj*** kot leta 2011 oziroma ______________ % ***več / manj*** kot leta 2011**.**

4. naloga

Za 180 delavcev storitvenega podjetja *Mojster* imamo dane relativne frekvence po razredih, oblikovane za število dni letnega dopusta za leto 2013:

Tabela 6: **Relativne frekvence za frekvenčno porazdelitev števila dni dopusta za 180 delavcev storitvenega podjetja *Mojster***

Število dni dopusta	f_j^0	f_j	F_j	F_j^0
18−20	0,075			
21−23	0,175			
24−26	0,275			
27−29	0,200			
30−32	0,175			
33−35	0,100			
Skupaj	1,000			

Vir: Prirejeni podatki

a) Izračunajte vse manjkajoče podatke in jih vstavite v Tabelo 6.
b) Koliko delavcev je imelo od 24 do 26 dni dopusta?
c) Koliko delavcev je imelo do 32 dni dopusta?
d) Koliko % delavcev je imelo 30 do 32 dni dopusta?
e) Koliko % delavcev je imelo do 26 dni dopusta?

Tekmovanje v znanju finančne matematike in statistike

1. Tabela prikazuje podatke o brezposelnosti v Republiki Sloveniji v prvih devetih mesecih leta 2013. Prikazano je število registriranih brezposelnih oseb, število aktivnih prebivalcev Slovenije in stopnja registrirane brezposelnosti.

Mesec	Število registriranih brezposelnih oseb	Aktivno prebivalstvo	Stopnja registrirane brezposelnosti
januar	124 258	912 969	13,6103 %
februar	124 162	912 929	
marec	123 651	912 702	
april	123 072		13,46024 %
maj	122 172		13,36706 %
junij	121 244	913 064	13,2788 %
julij		911 502	13,2373 %
avgust		909 844	13,2057 %
september	119 542	910 192	13,1337 %

Vir: Statistični urad Republike Slovenije

a) Nekateri podatki v tabeli so izpuščeni. Izračunaj manjkajoče podatke.
b) Kolikšno je bilo povprečno število brezposelnih oseb v prvih devetih mesecih v Sloveniji? Kolikšna je bilo povprečna stopnja registrirane brezposelnosti?

c) V katerem mesecu je bilo največ brezposelnih oseb, v katerem najmanj? V katerem mesecu je bila stopnja registrirane brezposelnosti najvišja, v katerem najnižja?

d) V katerem mesecu je število brezposelnih (glede na pretekli mesec) najbolj padlo, v katerem najmanj? V katerem mesecu je stopnja registrirane brezposelnosti (glede na pretekli mesec) najbolj padla, v katerem najmanj?

2. Trgovec je z dobaviteljem dogovorjen za poplačilo neplačanih obveznosti v treh polletnih zneskih v višini 15 000 EUR, kjer bo prvi obrok plačan takoj, zadnji pa čez natanko eno leto. Ker pa trgovec nima zadostnih sredstev za plačilo prvega obroka, se z dobaviteljem dogovori za poplačilo celotnega dolga z 12 mesečnimi obroki, kjer bo prvi obrok plačan čez en mesec, zadnji pa čez eno leto.

a) Določi višino mesečnega obroka, če je letna obrestna mera 7,20 %, in je obrestovanje mesečno po relativni obrestni meri.

b) Določi višino trgovčevega začetnega dolga.

3. Spodnja preglednica prikazuje trenutne efektivne obrestne mere za različna dospetja z zveznim obrestovanjem. Čas t merimo v letih.

t	1	2
$R(0,t)$	5,00 %	5,80 %

a) Kuponska obveznica z nominalno vrednostjo 100 EUR in dospetjem 2 leti izplačuje letne kupone po 6% nominalni obrestni meri, prvega čez natanko eno leto. Določi njeno ceno v času 0.

b) Druga kuponska obveznica istega izdajatelja ima nominalno vrednost 100 EUR, dospetje čez 3 leta in izplačuje letne kupone po 5,50 % nominalni obrestni meri, prvega čez natanko eno leto. Njena cena v času 0 je 98 EUR. Določi obrestno mero $R(0,3)$.

c) Paritetna donosnost za dospetje obveznice je nominalna obrestna mera kuponov, pri kateri bi bila cena obveznice enaka njeni nominalni vrednosti. Izračunaj paritetno donosnost obveznice iz naloge b).

4. Na valutnem trgu je trenutni menjalni tečaj med britanskim funtom in švicarskim frankom enak 1 GBP = 1,4881 CHF. Trimesečna netvegana efektivna obrestna mera z zveznim obrestovanjem za britanski funt je $R_{\text{GBP}} = 0{,}5225\,\%$. Na trgu so na voljo trimesečni valutni terminski posli za nakup funtov s franki z izročitvenim menjalnim tečajem $K = 1{,}4865$.

a) Kolikšna je netvegana efektivna trimesečna obrestna mera za švicarski frank, če na trgu ni arbitražne priložnosti? Rezultat v odstotkih zaokroži na štiri decimalna mesta.

b) Opiši arbitražno priložnost, če znaša netvegana efektivna trimesečna obrestna mera za švicarski frank $R_{\text{CHF}} = 0{,}1000\,\%$.

12. državno tekmovanje v znanju poslovne matematike in statistike

1. skupina: Poslovna matematika

1. naloga

30 tekstilnih delavk je tri tedne in dva dni tkalo na 14 tekstilnih strojih 78 kosov zaves dolžine 2 metra in širine 12 metrov. Tkale so po 8 ur na dan.

a) Kakšna bo dolžina 70 kosov zaves, ki bodo za tretjino širše, če bo odšlo 20 % delavk na dopust, ostale pa bodo delale s 4 stroji več, en teden dlje ter po ¼ daljšem delavniku? Pri izračunu upoštevaj: *1 teden = 7 dni.*

b) Za koliko odstotkov bodo zavese druge skupine s 24 delavkami daljše oziroma krajše od prve skupine s 30 delavkami?

2. naloga

Slovenski pridelovalec medu izvozi vsako leto 850 kg medu. V Avstrijo izvozi 50 kg medu več kot v Italijo.

Avstrijci so mu naročili cvetlični, akacijev in kostanjev med v razmerju 3 : 2 : 1. Italijani pa 150 kg več akacijevega kot cvetličnega medu in 200 kg manj kostanjevega kot akacijevega medu.

Izpolnite spodnjo tabelo in odgovorite.

Vrsta medu	Avstrijski kupec	Italijanski kupec	Skupaj v kg
Cvetlični			
Akacijev			
Kostanjev			
Skupaj v kg			

Za koliko odstotkov je izvozil slovenski pridelovalec medu več cvetličnega kot (od) kostanjevega medu?

3. naloga

Jure in Nina sta imela na začetku študija enaki mesečni štipendiji, vsak po 202,00 EUR. Višina štipendije se jima je povečevala vsakih 12 mesecev, in sicer Juretu za 8 %, Nini pa za 16,50 EUR.

a) Kolikšno mesečno štipendijo bo imel Jure po 25 mesecih?
b) Kateri od njiju bo imel višjo mesečno štipendijo po 30 mesecih ter za koliko EUR in za koliko odstotkov?
c) Izračunajte, koliko štipendije v EUR je prejel Jure v vseh treh letih?

4. naloga

Kupujemo nov računalnik, ki stane 880,00 EUR. Odločimo se za varčevanje.

a) Koliko denarja moramo vložiti danes v banko, če želimo zbrati potrebni znesek v 5 letih? Banka uporablja 2,8-% letno obrestno mero in navadni obrestni račun. Izpeljite obrazec.

b) V preteklih letih smo uspeli privarčevati 75 % potrebnega zneska. Po kakšni letni obrestni meri se mora obrestovati privarčevani znesek, da bomo računalnik lahko kupili čez 4 leta, če banka uporablja dekurzivno obrestno mero in obrestno obrestni račun z letnim pripisom obresti? Izpeljite obrazec.

c) V kolikem času (let in dni) bi se privarčevani znesek podvojil v banki, ki uporablja obrestno obrestni račun, 3-% letno dekurzivno obrestno mero in celoletno kapitalizacijo?

2. skupina: Statistika

1. naloga

Tabela 1: **Prodaja obutve družbe *Čeveljček d. o. o.* po vrsti obutve in prodajalnah v letu 2012**

Vrsta obutve	**Količina v parih**		
	Prodajalna 1	**Prodajalna 2**	**Skupaj**
Otroška obutev	5.230	8.246	13.476
Moška obutev	3.425	5.324	8.749
Ženska obutev	8.212	9.544	17.756
Skupaj	**16.867**	**23.114**	**39.981**

Vir: Prirejeni podatki

a) Izračunajte strukturo prodaje obutve po vrsti obutve za obe prodajalni družbe *Čeveljček d. o. o.* v letu 2012 in jo izrazite v odstotkih *(na 2 decimalni mesti natančno).*

Vrsta obutve	**Količina v parih**		
	Prodajalna 1	**Prodajalna 2**	**Skupaj**
Otroška obutev			
Moška obutev			
Ženska obutev			
Skupaj			

b) Za koliko odstotkov je bila prodaja ženske obutve v prodajalni 2 večja v primerjavi s prodajalno 1?

c) Strukturo prodaje obutve po vrsti obutve za obe prodajalni družbe *Čeveljček d. o. o.* grafično prikažite s polkrogoma. Pri tem upoštevajte r_A = 4 cm in ustreza skupni prodaji prodajalne 1.

2. naloga

Za proizvodni obrat *Luminia d. o. o.* so znani podatki o vrednosti prodaje in zaloge za prvo četrtletje leta 2012.

Tabela 2: **Vrednost prodaje in zaloge v proizvodnem obratu podjetja *Luminia d. o. o.* v prvem četrtletju leta 2012**

Mesec	**Vrednost prodaje v 1000 EUR**	**Verižni indeksi za vrednost prodaje**	**Vrednost zalog surovin ob koncu meseca v 1000 EUR**
Januar	-	-	64,1
Februar	172,5	-	92,2
Marec		104,6	84,7
April		106,7	76,2

Vir: Prirejeni podatki

a) Na osnovi danih verižnih indeksov izračunajte vrednost prodanih proizvodov.

b) Povprečno mesečno se zaloge obrnejo ________________________ - krat .

c) Povprečni čas enega obrata v dnevih oz. povprečni čas skladiščenja blaga, če je število delovnih dni v mesecu 30, je ________________________ dni .

d) V enem letu se zaloge v povprečju obrnejo (ocenite) ___________________ - krat.

3. naloga

Tabela 3: **Verižni indeksi za izvoz Slovenije v letih od 2006 do 2011**

Leto	**Verižni indeksi za izvoz**	**Izvoz v milijonih EUR**	
2005	-		
2006	116,4		
2007	115,8	19.405,89	
2008	102,1		
2009	81,3		
2010	114,5		
2011	112,9		

Vir: Statistični letopis 2012

a) Zapišite vrednosti izvoza po letih.

b) Izračunajte, kako se je spreminjal izvoz v posameznih letih glede na leto 2006.

c) V katerem oz. v katerih letih je bil izvoz manjši v primerjavi z letom 2006?

d) Koliko je znašala povprečna letna stopnjo rasti izvoza v obdobju od leta 2005 do 2011?

4. naloga

Na neki šoli so opazovali 100 dijakov glede na oddaljenost od doma do šole (izraženo v km). Dobili so naslednje podatke:

- 8 % dijakov je oddaljenih nad 5 do 10 km;
- 41 dijakov je oddaljenih do 15 km;
- 24 dijakov je oddaljenih nad 15 do 20 km;
- 85 % dijakov je oddaljenih do 25 km;
- delež dijakov, ki so oddaljeni nad 25 do 30 km, znaša 0,100;
- noben dijak ni oddaljen od šole nad 35 km.

a) Sestavite frekvenčno porazdelitev dijakov glede na oddaljenost od doma do šole. Izračunajte relativne frekvence, kumulativo absolutnih in kumulativo relativnih frekvenc.

b) Pri kateri oddaljenosti od doma do šole je bilo največ dijakov?

c) Izračunajte najpogostejšo oddaljenost dijakov od doma do šole.

Državno tekmovanje v znanju finančne matematike in statistike

1. V spodnji tabeli so zbrani podatki o številu kandidatov, ki so opravljali splošno maturo v letu 2013 iz posameznega predmeta, po doseženih ocenah.

   Kratice predmetov so SLO – slovenščina, ANG – angleščina in MAT – matematika.
   Oznaka (O) ob kratici pomeni opravljanje predmeta na osnovni ravni, oznaka (V) pa opravljanje predmeta na višji ravni. Slovenščino vsi kandidati opravljajo na višji ravni.

   Na višji ravni kandidat lahko doseže oceno od 1 do 8, na osnovni ravni pa oceno od 1 do 5. Ocena 1 je negativna, vse ostale ocene so pozitivne.

	8	7	6	5	4	3	2	1	Pozitivni	Št. kand.
SLO	170	525	788	1490	1387	1619	1774	441	7753	8194
ANG (O)	-	-	-	498	1938	1943	1142	266	5521	5787
ANG (V)	212	339	614	481	304	115	53	8	2118	2126
MAT (O)	-	-	-	744	1481	1724	1976	1043	5925	6968
MAT (V)	333	498	374	238	144	56	49	8	1692	1700

Vir: Letno poročilo – splošna matura 2013

   a) Kolikšen delež kandidatov je uspešno opravil angleščino na osnovni ravni in kolikšen delež na višji ravni?

   b) Izračunaj povprečno oceno, ki so jo dosegli kandidati pri slovenščini. Izračunaj tudi modus in mediano ter prvi in tretji kvartil.

   c) Izračunaj povprečno oceno μ in standardni odklon σ ocen pri matematiki na višji ravni. Kolikšen delež vseh kandidatov je dosegel oceno z intervala $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$?

   Rezultate (tudi v odstotnem zapisu) zaokroži na dve decimalni mesti, vmesne izračune pa na štiri decimalna mesta.

2. Na banki bomo najeli študentski kredit. Kredit bo izplačan v obliki triletne štipendije v višini 300 EUR na začetku vsakega meseca od oktobra 2014 do septembra 2017. Vračati ga bomo začeli tri leta po zaključku študija in ga vrnili v 24 enakih mesečnih obrokih od oktobra 2020 do septembra 2022 na koncu vsakega meseca.

   a) Določi višino mesečnega obroka, če je letna obrestna mera 6 %, kapitalizacija mesečna in obrestovanje konformno.

   b) Določi višino dolga tik pred plačilom prvega obroka.

3. Spodnja preglednica prikazuje trenutne efektivne obrestne mere za različna dospetja z zveznim obrestovanjem. Čas t merimo v letih.

t	1	2
$R(0,t)$	3,50 %	3,80 %

Kuponska obveznica z nominalno vrednostjo 1000 EUR in dospetjem čez 2 leti izplačuje letne kupone po 4 % nominalni obrestni meri, prvega čez natanko eno leto.

a) Določi ceno obveznice v času 0.

b) Kako in za koliko bi se spremenila cena obveznice, če bi se vse obrestne mere povišale za 0,5 odstotne točke?

c) Za koliko odstotkov bi se spremenila cena obveznice, če bi se vse obrestne mere povišale za 0,5 odstotne točke?

d) *Donosnost do dospetja* obveznice je konstantna efektivna obrestna mera, pri kateri je sedanja vrednost vseh prihodnjih denarnih tokov, povezanih z obveznico, enaka trenutni ceni obveznice. Izračunaj donosnost do dospetja obveznice. (Uporabi ceno pri začetnih obrestnih merah.

4. Vlagatelj ima portfelj, ki sestoji iz dveh opcij na delnico podjetja Alfa, d. d. Prva opcija je evropska nakupna z izvršilno ceno K_1 in druga evropska prodajna z izvršilno ceno K_2. Obe imata isti čas zapadlosti $T = \frac{1}{4}$ leta. Podjetje v naslednjih treh mesecih ne bo izplačevalo dividend.

a) Nariši graf vrednosti portfelja v odvisnosti od cene delnice S_T v času $T = \frac{1}{4}$, če sta izvršilni ceni enaki $K_1 = K_2 = 12$ EUR.

b) Premija v času 0 za evropsko prodajno opcijo s $K_2 = 12$ EUR je 0,91 EUR. Kolikšna je premija za evropsko nakupno opcijo s $K_1 = 12$ EUR, če je vrednost delnice v času 0 enaka $11,90$ EUR in je netvegana obrestna mera enaka $R = 1\%$.

c) Ob upoštevanju premij iz naloge b) nariši graf vlagateljevega dobička v odvisnosti od cene delnice S_T v času $T = \frac{1}{4}$.

d) Ali je smiselno kupiti opisani portfelj iz točke a), kadar pričakujemo večje spremembe cen delnice podjetja Alfa (npr. izid določene tožbe proti podjetju bo objavljen čez tri mesece)? Zakaj?

e) Nariši graf vrednosti portfelja v odvisnosti od cene delnice S_T v času $T = \frac{1}{4}$, če za izvršilni ceni velja $K_1 = 13$ EUR in $K_2 = 11$ EUR.

14. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol – regijsko tekmovanje

1. letnik

A1 Zjutraj smo odplačali $62{,}5\ \%$ dolga, preostalih 15 evrov dolga pa bomo vrnili zvečer. Koliko je znašal skupni dolg?

(**A**) 24 evrov (**B**) 30 evrov (**C**) 40 evrov (**D**) 15 evrov (**E**) 55 evrov

A2 Od katerega števila moramo odšteti kvadrat razlike najmanjšega sodega in najmanjšega lihega praštevila, da dobimo šestnajstino zmnožka števil $(-2)^4$ in -2^4?

(**A**) -3 (**B**) 15 (**C**) -15 (**D**) 3 (**E**) $\sqrt{3}$

A3 V katerega izmed naslednjih izrazov lahko preoblikujemo izraz $(x+1)^2+x^2-1+2x+2$?

(**A**) $2(x+1)$ (**B**) $2(x-1)^2$ (**C**) $2(x-1)$ (**D**) $2(x+1)^2$ (**E**) $2(x^2-1)$

A4 Koliko je vrednost izraza $3x+7(y+4x^2-2)$ za $x=-5$ in $y=3$?

(**A**) 692 (**B**) 722 (**C**) 104 (**D**) -62 (**E**) 62

A5 Zmnožek četrtine in petine nekega naravnega števila n je 500. Koliko je n?

(**A**) 500 (**B**) $10\,000$ (**C**) 20 (**D**) 200 (**E**) 100

B1 Reši enačbo

$$2x(x-3)-3(x-1)(x+1)=-3-(-2+x)^2\,.$$

B2 Na ekološki kmetiji bodo v vrečke pakirali 570 kosov zelenjave: 216 rdečih pes, 144 čebul in 210 krompirjev. V vsako vrečko bodo dali enako število kosov zelenjave in vsaki vrečki bo le zelenjava iste vrste. Največ koliko kosov posamezne zelenjave naj dajo v posamezno vrečko, če želijo pri tem porabiti vso zelenjavo? Koliko vrečk potrebujejo v tem primeru?

B3 Zapiši interval, ki je množica rešitev sistema neenačb

$$\begin{aligned} x-\frac{2x-3}{2}-\frac{5+2x}{6} &> 0,\\ (x-3)^2-(x-1)(x+2) &> 9-3x. \end{aligned}$$

B4 Izračunaj vrednost izraza $\dfrac{\frac{a^2+3b^2}{b^2}-3}{3-\frac{3a+3b^2}{b^2}}$ za $a=-\frac{9}{5}$ in $b=33$.

---

2. letnik

A1 Kot α je velik $26°31'$. Koliko je velik suplementarni kot dvakratnika kota α?

(**A**) $126°58'$ (**B**) $36°58'$ (**C**) $63°29'$
(**D**) $153°29'$ (**E**) Dvakratnik kota α nima suplementarnega kota.

A2 Koliko je vrednost izraza $\dfrac{\sqrt[3]{x^{-2}}x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt[4]{x^3}x^{\frac{5}{12}}}$ za $x=8$? [1]

(**A**) 2 (**B**) 8 (**C**) -1 (**D**) 4 (**E**) 6

A3 Graf funkcije f s predpisom $f(x)=(a-2)x-2a+3$ seka ordinatno os v točki T. Daljica OT, kjer je O izhodišče koordinatnega sistema, je dolga 5 enot. Katero izmed naštetih števil je lahko vrednost parametra a?

(**A**) 1 (**B**) 4 (**C**) 2 (**D**) 0 (**E**) $\frac{7}{4}$

A4 Presečišče diagonal S v trapezu je od osnovnice a oddaljeno 8 cm, od osnovnice c pa 6 cm. Osnovnica a je dolga 20 cm. Koliko je dolga osnovnica c?

(**A**) $26{,}7$ cm (**B**) 10 cm (**C**) 15 cm (**D**) $10\sqrt{2}$ cm (**E**) $15\sqrt{2}$ cm

A5 Dana je premica z enačbo $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$. Katera izmed navedenih enačb premic je enačba premice, ki je dani premici vzporedna?

(**A**) $y = -\frac{4}{3}x + 5$ (**B**) $y = \frac{3}{4}x - 1$ (**C**) $3x - 4y = 7$
(**D**) $6y - 8x = 1$ (**E**) $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1$

B1 Za trikotnik ABC velja $\beta = 15°$, $\gamma = 30°$ in $|AB| = 5$ cm. Premica, ki je pravokotna na AB in poteka skozi oglišče A, seka stranico BC v točki D. Izračunaj velikost kota DAC in dolžino daljice BD. Dolžino daljice BD zaokroži na tri mesta natančno. Nariši skico.

B2 Naj bo $x - y = 3$. Izračunaj vrednost izraza $\frac{x\sqrt{3}}{3} - \frac{y}{\sqrt{3}}$. Rezultat naj bo natančen.

B3 Nogometni trener Joško prejema dnevno plačo, ki je linearno odvisna od števila ljudi, ki pridejo na trening. Če pride na trening 10 ljudi, znaša njegova dnevna plača 100 evrov, če pa pride na trening 14 ljudi, pa 120 evrov.

a) Zapiši predpis, ki podaja Joškovo dnevno plačo v odvisnosti od števila ljudi, ki pridejo na trening.

b) Koliko je Joškova dnevna plača, če nihče ne pride na trening?

c) Koliko je Joškova dnevna plača, če pride na trening 20 ljudi?

d) Koliko ljudi mora priti na trening, če želi Joško prejeti dnevno plačo 300 evrov?

B4 Diagonala pravokotnika z obsegom 42 cm je za 3 cm daljša od ene izmed njegovih stranic. Izračunaj dolžini stranic tega pravokotnika.

3. letnik

A1 Za eksponentno funkcijo f s predpisom $f(x) = a^x$ velja $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8}$. Koliko je $f(-1)$?

(**A**) $\frac{4}{9}$ (**B**) $\frac{9}{4}$ (**C**) -1 (**D**) $\frac{8}{27}$ (**E**) $\frac{2}{3}$

A2 Naj velja $x > 0$ in $y > 0$ ter $\ln x + \ln y = 0$. Katera izmed naslednjih izjav je pravilna?

(**A**) $x = y^{-1}$ (**B**) $x + y = 0$ (**C**) $x + y = 1$
(**D**) $x = y = 7$ (**E**) Spremenljivki x in y sta med seboj neodvisni.

A3 Katera množica je množica rešitev neenačbe $x^2 < 4$?

(**A**) $(-\infty, -2)$ (**B**) $(-\infty, 2)$ (**C**) $(-2, 2)$
(**D**) $(2, \infty)$ (**E**) $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

A4 Naj bo $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + k$. Koliko je vrednost parametra k za funkcijo f, ki ima najmanjšo vrednost -8?

(**A**) 1 (**B**) -1 (**C**) 0 (**D**) 2 (**E**) -2

A5 Kvadrat s stranico, dolgo 4 cm, razdelimo na 4 enake kvadrate. Nato narišemo krožnico, ki poteka skozi središča vseh štirih malih kvadratov. Koliko je ploščina kroga, ki je omejen s to krožnico?

(**A**) $\frac{\pi}{4}$ cm^2 (**B**) $\frac{\pi}{2}$ cm^2 (**C**) π cm^2 (**D**) 2π cm^2 (**E**) 4π cm^2

B1 Nejc se je odločil, da bo dal prepleskati svojo sobo. Njegova soba je oblike kvadra, ki je dolg $4{,}5$ m, širok 5 m in visok $2{,}5$ m. Od površine sten bodo izvzeli 1 m^2 zaradi okna in 2 m^2 zaradi vrat. Koliko bo Nejc plačal za pleskanje sten in stropa sobe, če cena za kvadratni meter pleskanja sten znaša 2 evra, stropa pa 4 evre?

B2 Naj bo $x > 0$. Reši enačbo $\dfrac{-6 + \log_3 x^2}{\log_3 \sqrt{x}} = 2$.

B3 V splošni obliki zapiši predpis za kvadratno funkcijo f, katere ničli sta rešitvi enačbe

$$\frac{x + 2{,}25}{x + 1} - \frac{2x - 1{,}75}{x - 1} = -\frac{5}{6},$$

njen graf pa seka ordinatno os v točki $N(0, -4)$.

B4 Za deltoid $ABCD$ velja $|AB| = |BC|$. Označimo z α velikost kota BAD, z β velikost kota CBA in z δ velikost kota ADC. Velja $\alpha : \beta : \delta = 3 : 1 : 2$. Diagonale e je dolga 13 cm. Izračunaj ploščino deltoida. Rezultat izrazi v kvadratnih centimetrih in ga zaokroži na eno decimalno mesto natančno.

---

4. letnik

A1 Naj bo $p(x) = x^3 - 5x^2 - ax - 6$ in $q(x) = x - 3$. Koliko je vrednost parametra a, če polinom q deli polinom p?

(A) -8 **(B)** -4 **(C)** 4 **(D)** 8 **(E)** 20

A2 Katera je največja podmnožica realnih števil, na kateri lahko definiramo funkcijo f s predpisom $f(x) = \frac{1}{2x^3+2}$?

(A) $\mathbb{R}$ **(B)** $\mathbb{R} - \{1\}$ **(C)** $\mathbb{R} - \{-1\}$ **(D)** $\mathbb{R} - \{-2\}$ **(E)** $\mathbb{R} - \{2\}$

A3 Koliko je velikost ostrega kota, ki ga oklepata mali in veliki urni kazalec, ko je ura petindvajset minut čez drugo uro popoldan?

(A) $80°$ **(B)** $60°50'$ **(C)** $297°30'$ **(D)** $120°$ **(E)** $77°30'$

A4 Koliko je vrednost tretjega člena zaporedja s splošnim členom a_n, če je $a_1 = -2, a_2 = 3$ in $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$ za vsako naravno število n?

(A) 5 **(B)** -6 **(C)** 11 **(D)** 1 **(E)** 0

A5 Katero izmed spodnjih zaporedij, podanih s splošnim členom a_n, ni geometrijsko?

(A) $a_n = 4^n$ **(B)** $a_n = 2 \cdot 3^{n+2}$ **(C)** $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 2$
(D) $a_n = 2^n \cos 30°$ **(E)** $a_n = 25^{n-6}$

B1 Za ničli kvadratne funkcije f velja, da je njuna aritmetična sredina enaka 2 in njun produkt enak 1. Izračunaj $f(2)$, če je $f(1) = 4$.

B2 Pokaži, da lahko izraz

$$\sin^3 x\,(1 + \cot x) + \cos^3 x\,(1 + \tan x)$$

preoblikujemo v izraz $\sin x + \cos x$, če je $x \neq \frac{k\pi}{2}$ in $k \in \mathbb{Z}$.

B3 Reši neenačbo $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+2} \geq 1 - \dfrac{x}{x^2 - 4}$.

B4 Sedem članov družine Novak, dva starša in pet otrok, se odpravi v kino, kjer imajo rezerviranih 7 sedežev v zadnji vrsti drug poleg drugega.

a) Na koliko načinov se lahko posedejo na rezervirane sedeže?

b) Na koliko načinov se lahko posedejo na rezervirane sedeže, če bodo otroci sedeli skupaj in starša skupaj?

c) Na koliko načinov se lahko posedejo na rezervirane sedeže, če starša ne bosta sedela skupaj?

Rešitve 12. šolskega tekmovanja v znanju poslovne matematike in statistike

1. skupina: Poslovna matematika

1. naloga

a.)

3 meseci	84 avtobusov	55 sedežni	100 %
↑	↑	↓	↑
6 mesecev	x avtobusov	49 sedežni	70 %

$$x = \frac{84 \times 6 \times 55 \times 70}{3 \times 49 \times 100} = \underline{\textbf{132 avtobusov}}$$

b.)

		udeležba	zasedenost
8 avtobusov	50 sedeži	88 %	100 %
↑	↓	↑	↓
x avtobusov	55 sedeži	70 %	85 %

$$x = \frac{8 \times 50 \times 70 \times 100}{55 \times 88 \times 85} = \underline{\textbf{6,81 = 7 avtobusov}}$$

2. naloga

a.)

Sadjarji	Velikost posestva v ha ↑ ↑	Oddaljenost v km ↑ ↓	ERŠ	Odgovor
Jože	50	$\frac{1}{20}$; 2	100 x	340 kg
Franko	75	$\frac{1}{40}$; 1	75 x	255 kg
Milan	105	$\frac{1}{10}$; 4	420 x	1428 kg
			Σ 595 x	= 2023
			x	**= 3,4**

b.)

Rešitev točke a:

Gostinci	Deleži	Odgovor
Prvi	2 x	662 kg
Drugi	x	331 kg
Tretji	0,5 x	165,50 kg
Četrti	2 x + 202,5	864,50 kg

$$2x + x + 0{,}5x + 2x + 202{,}5 = 2023$$
$$x = 331$$

Rešitev točke b:

Četrti gostinec prispeva za 533,50 kg več od drugega, kar predstavlja 161,18 %.

3. naloga

a.)

x = 9.450,00 * 0,25 = **2.362,50 EUR**

b.)

9.450,00 € …………………… 100 %
925,00 € ………………….... x %

X = 9,79 %

a.)

x = 9.450,00 * 0,95 * 1,05 * 0,95 = **8.955,06 EUR**

4. naloga

a.)

G = 58.700,00 EUR
m =1 leto in 4 mesecev = 16 mesecev
p = 4,80 %
o = ?

$$o = \frac{G \times p \times m}{1200} = \frac{58700 \times 4{,}8 \times 16}{1200} = \mathbf{3.756{,}80\ EUR}$$

b.)

a. Izračun za 15,00 % večjih obresti

o = 3.756,80 × 1,15 = **4.320,32EUR**

b. Izračun obrestne mere

$$o = \frac{G \times p \times m}{1200} \quad /.1200$$

1200 × o = G × p × m / : (G × m)

$$p = \frac{1200 \times o}{G \times m} = \frac{1200 \times 4320{,}32}{58700 \times 6} = \mathbf{5{,}52\ \%}$$

c.)

G = 58.700,00 EUR
G^+ = 65.000,00 EUR
p = 5,00 %
čas (let in dni) = x

Izračun obresti: o = $G^+ - G$ = 6.300,00 EUR

$$o = \frac{G \times p \times l}{100} \quad / \times 100$$

$$100 \times o = G \times p \times l \;/ : (G \times p)$$

$$l = \frac{100 \times o}{G \times p} = \frac{100 \times 6300}{58700 \times 5} = \underline{\textbf{2,15 let}}$$

2. skupina: Statistika

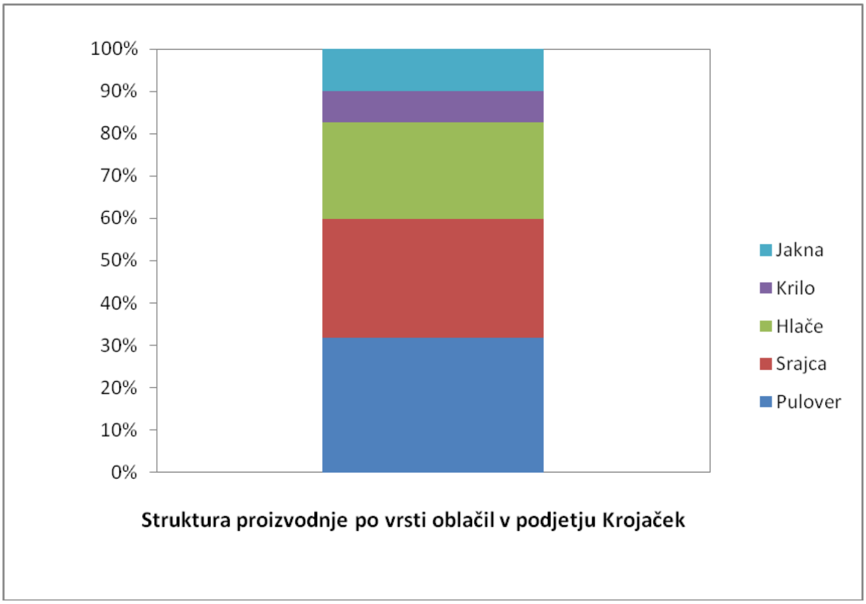
1. naloga

a.)

Tabela 2: **Struktura proizvodnje po vrsti oblačil v družbi *Krojaček d. o. o*. leta 2008**

Vrsta oblačil	**Struktura v %**	**Delne vsote za risanje grafikona**
Pulover	31,77	31,77
Srajca	28,07	59,84
Hlače	22,83	82,67
Krilo	7,45	90,12
Jakna	9,87	100,00
Skupaj	100,0	

b.)



c.)

Tabela 3: **Promet v družbi *Krojaček d. o. o.* v letih od 2008 do 2012**

Leto	Promet v EUR	V_j
2008	560.000	-
2009	740.000	132,1
2010	990.000	133,8
2011	620.000	62,6
2012	400.000	64,5

2. naloga

a.)

Oktober 2012: V mesecu oktobru je bila prodaja za 2,5 % večja kot meseca septembra.

November 2012: V mesecu novembru je bila prodaja enaka kot v mesecu septembru.

b.)

Mesec	September	Oktober	November	December
Prodaja v tisoč EUR	**175**	**179,4**	**175,0**	**178,3**
$I_{j/sept}$	100	102,5	100,0	101,9
Srednje število prodajalcev	6	5	6	7

c.)

$\bar{Y} = \frac{1}{4}(172+179,4+175,0+178,3)=$**176.925 EUR**

$\bar{X} = \frac{1}{4}(6+5+6+7) = \mathbf{6\ prodajalcev}$

$\bar{K} = \frac{176.925\ \mathrm{EUR}}{6\ \mathrm{prodajalcev}} = \mathbf{29.487\ EUR\ na\ prodajalca}$

3. naloga

Tabela 5: **Število prodanih kosil v podjetju *Zlata vilica* v letih od 2007 do 2013**

Leto	**Št. prodanih kosil**	$I_{j/2009}$	V_j	S_j
2007	153.533	91,3	-	-
2008	131.432	78,1	85,6	-14,4
2009	168.224	100,0	128,0	28,0
2010	107.121	63,7	63,7	-36,3
2011	167.721	99,7	156,6	56,5
2012	126.617	75,3	75,5	−24,5
2013	124.784	74,2	98,6	-1,4

Vir: Prirejeni podatki

Kot je razvidno iz tabele je bilo število prodanih kosil v gostišču leta 2008 za **14,4 % manj** kot leta 2007.

Število prodanih kosil se je v zadnjem letu (2013) glede na leto 2009 **zmanjšalo** za **25,8** %.

Leta 2012 so v gostišču prodali **41104** kosil ***več / manj*** kot leta 2011, oziroma **24,5** % *več* / ***<u>manj</u>*** kot leta 2011.

4. naloga

a.)

Tabela 6: **Relativne frekvence za frekvenčno porazdelitev števila dni dopusta za 180 delavcev storitvenega podjetja *Mojster***

Število dni dopusta	f_j^0	f_j	F_j	F_j^0
18−20	0,075	13	13	0,075
21−23	0,175	32	45	0,250
24−26	0,275	49	94	0,525
27−29	0,200	36	130	0,725
30−32	0,175	32	162	0,900
33−35	0,100	18	180	1,000
Skupaj	1,000	180		

Vir: Prirejeni podatki

b.)

49 delavcev.

c.)

162 delavcev.

d.)

17,5 % delavcev.

c.)

52,5 % delavcev.

Rešitve tekmovanja v znanju finančne matematike in statistike

1. naloga

a.)

Mesec	Število registriranih brezposelnih oseb	Aktivno prebivalstvo	Stopnja registrirane brezposelnosti
januar	124 258	912 969	13,6103 %
februar	124 162 (−96)	912 929	13,6004 % (−99)
marec	123 651 (−511)	912 702	13,5478 % (−526)
april	123 072 (−579)	914 337	13,46024 % (−876)
maj	122 172 (−900)	913 978	13,36706 % (−931)
junij	121 244 (−928)	913 064	13,2788 % (−883)
julij	120 658 (−586)	911 502	13,2373 % (−415)
avgust	120 151 (−507)	909 844	13,2057 % (−316)
september	119 542 (−609)	910 192	13,1337 % (−720)

b.)

Povprečno število brezposelnih oseb v prvih devetih mesecih leta 2013 v Sloveniji je bilo

$$\frac{124\,258 + \cdots + 119\,542}{9} \doteq 122\,101,$$

povprečna stopnja registrirane brezposelnosti je bila

$$\frac{13{,}6103\,\% + \cdots + 13{,}1337\,\%}{9} \doteq 13,3824\,\%.$$

c.)

Največ brezposelnih oseb je bilo v januarju, najmanj v septembru.
Stopnja registrirane brezposelnosti je bila najvišja v januarju, najnižja v septembru.

d.)

Podatki o rasti/padcu števila brezposelnih in stopnje brezposelnosti so zapisani v drugem in četrtem stolpcu tabele v nalogi a) z modro barvo.

Spremembe stopnje brezposelnosti so zaradi nazornosti pomnožene z 10^6.

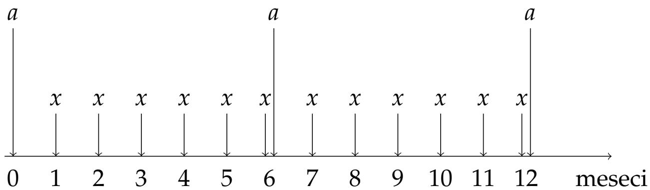
Število brezposelnih je najbolj padlo v juniju (za 928), najmanj pa v februarju (za 96). Stopnja registrirane brezposelnosti je najbolj padla v maju (za 0,0931 %), najmanj pa v februarju (za 0,0099 %).

2. naloga

a.)

V starem kreditu dolg odplačamo v treh polletnih obrokih $a = 15\,000$ EUR, v novem kreditu pa v 12 mesečnih obrokih v višini x.

Kredita sta ekvivalentna. Shema njunih denarnih tokov:



Letna obrestna mera je $p\,\% = 7{,}20\,\%$.

Mesečni obrestovalni faktor je $r = 1 + \frac{p}{1200} = 1{,}006$.

Redukcijski termin postavimo čez eno leto.

Načelo ekvivalence glavnic: Vplačila obeh kreditov preračunamo na redukcijski termin.

$$ar^{12} + ar^6 + a = xr^{11} + xr^{10} + \cdots + xr + x$$
$$a(r^{12} + r^6 + 1) = x(r^{11} + r^{10} + \cdots + r + 1)$$
$$a(r^{12} + r^6 + 1) = x \cdot \frac{r^{12} - 1}{r - 1}$$

Izrazimo

$$\begin{aligned} x &= \frac{a(r^{12} + r^6 + 1)(r - 1)}{r^{12} - 1} = \\ &= \frac{15\,000(1{,}006^{12} + 1{,}006^6 + 1)0{,}006}{1{,}006^{12} - 1} = 3\,762{,}05 \text{ EUR.} \end{aligned}$$

b.)

Višino začetnega dolga označimo z G.

$$G = a + ar^{-6} + ar^{-12} = 15\,000(1 + 1{,}006^{-6} + 1{,}006^{-12}) = 43\,432{,}13 \text{ EUR}$$

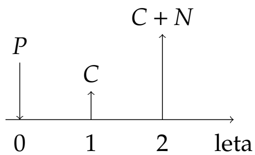
3. naloga

a.)

Nominalna vrednost obveznice je $N = 100$ EUR, dospetje $T = 2$.

Nominalna obrestna mera obveznice je $c = 6\,\%$.

Letna kupona sta $C = c \cdot N = 6$ EUR.



Ceno obveznice v času 0 določimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov.

$$
\begin{aligned}
P &= C \cdot D(0,1) + (C+N) \cdot D(0,2) = \\
&= \frac{C}{1+R(0,1)} + \frac{C+N}{(1+R(0,2))^2} = \\
&= \frac{6}{1{,}05} + \frac{106}{1{,}058^2} = 100{,}41 \text{ EUR}
\end{aligned}
$$

b.)

Nominalna vrednost obveznice je $N = 100$ EUR, dospetje $T = 3$.
Nominalna obrestna mera obveznice je $c = 5{,}50\,\%$.
Letni kuponi so $C = c \cdot N = 5{,}50$ EUR.
Cena obveznice je $P = 98$ EUR.
Uporabimo formulo za vrednotenje obveznic:

$$P = C \cdot D(0,1) + C \cdot D(0,2) + (C+N) \cdot D(0,3)$$

Neznana obrestna mera nastopa v diskontnem faktorju $D(0,3)$.

$$D(0,3) = \frac{P_0 - C \cdot D(0,1) - C \cdot D(0,2)}{C+N} = \frac{98 - \frac{5{,}5}{1{,}05} - \frac{5{,}5}{1{,}058^2}}{105{,}5} = 0{,}8327.$$

Upoštevamo še $D(0,3) = \frac{1}{(1+R(0,3))^3}$ in izračunamo

$$R(0,3) = \frac{1}{\sqrt[3]{D(0,3)}} - 1 = 6{,}29\,\%.$$

c.)

Nominalna vrednost in cena obveznice sta $N = P' = 100$ EUR, letni kuponi C' so neznani.
Uporabimo formulo za vrednotenje obveznic.

$$
\begin{aligned}
P' &= C' \cdot D(0,1) + C' \cdot D(0,2) + (C+N') \cdot D(0,3) = \\
&= C\big(D(0,1) + D(0,2) + D(0,3)\big) + N \cdot D(0,3)
\end{aligned}
$$

Od tod izrazimo in izračunamo

$$C' = \frac{P' - N \cdot D(0,3)}{D(0,1) + D(0,2) + D(0,3)} = \frac{100 - \frac{100}{1{,}0629^3}}{\frac{1}{1{,}05} + \frac{1}{1{,}058^2} + \frac{1}{1{,}0629^3}} = 6{,}24 \text{ EUR}.$$

Paritetna donosnost znaša $c' = \frac{C'}{N} = 6{,}24\%$.

4. naloga

a.)

Izberemo funt za tujo in frank za domačo valuto.
Trenutni tečaj je 1 'tuja' = S_0 'domačih' oz. 1 GBP = 1,4881 CHF.
Ker na trgu ni arbitražne priložnosti, mora veljati

$$K = S_0 \left(\frac{1 + R_{\text{CHF}}}{1 + R_{\text{GBP}}} \right)^T.$$

Od tod dobimo

$$R_{\text{CHF}} = \left(\frac{K}{S_0} \right)^{\frac{1}{T}} \cdot (1 + R_{\text{GBP}}) - 1.$$

Podano imamo $S_0 = 1{,}4881$, $K = 1{,}4865$, $T = \frac{1}{4}$ in $R_{\text{GBP}} = 0{,}005225$. Dobimo

$$R_{\mathrm{CHF}} = \left(\frac{1{,}4865}{1{,}4881}\right)^4 \cdot 1{,}005225 - 1 = 0{,}000909.$$

Efektivna obrestna mera za švicarski frank je $R_{\mathrm{CHF}} = 0{,}0909\%$.

b.)

Ker je obrestna mera za švicarske franke na trgu višja od ustrezne obrestne mere, porojene iz valutnega terminskega posla, moramo franke na trgu investirati.

Začetno investicijo izničimo s hkratno izposojo britanskih funtov v enakovrednem znesku.

V času 0 si v britanski banki izposodimo N GBP, jih zamenjamo v franke in naložimo v švicarski banki.

Sklenemo še terminski posel za nakup nominalne vsote $N \cdot 1{,}005225^{0{,}25}$ britanskih funtov z izročitvenim menjalnim tečajem $K = 1{,}4865$.

Tako je naš denarni tok v času 0 enak 0.

Čez tri mesece s terminskim poslom kupimo $N \cdot 1{,}005225^{0{,}25}$ funtov po menjalnem tečaju 1,4865 in jih vrnemo britanski banki.

Ostane nam

$$N\left(1{,}4881 \cdot 1{,}001^{0{,}25} - 1{,}4865 \cdot 1{,}005225^{0{,}25}\right) = N \cdot 0{,}000033938 \text{ CHF},$$

kar je naš arbitražni zaslužek. Smiselno je vzeti N vsaj 300 ali več.

Za npr. $N = 1000$ je arbitražni zaslužek približno enak 0,03 CHF.

Rešitve 12. državnega tekmovanja v znanju poslovne matematike in statistike

1. skupina: Poslovna matematika

1. naloga

a.)

30 delavk	23 dni	14 stroji	78 kosov	2 m (d)	12 m (š)	8 ur
↑	↑	↑	↓	↑	↓	↑
24 delavk	30 dni	18 stroji	70 kosov	x m (d)	16 m (š)	10 ur

$$x = \frac{2\times 24\times 30\times 18\times 78\times 12\times 10}{30\times 23\times 14\times 70\times 16\times 8} = \underline{\mathbf{2{,}80\ m\ (d)}}$$

b.)

2 m (d)	……………..	100 %
0,80 m(d)	……………..	x %

ALI

2 m (d)	………	100 %
2,80 m(d)	………	x %

$$x = \frac{0{,}80\times 100}{2} = \underline{\mathbf{40\ \%}} \qquad x = \frac{2{,}80\times 100}{2} = \underline{\mathbf{140\ \%}}$$

2. naloga

Vrsta medu	Avstrijski kupec	Italijanski kupec	Skupaj v kg
Cvetlični	225	100	325
Akacijev	150 1 t	250 1 t	400 1 t
Kostanjev	75	50	125
Skupaj v kg	450	400	850

Kupec	**Deleži**	**Odgovor**
Avstrijski	x + 50	450 kg
Italijanski	x	400 kg 1 t

x + 50 + x = 850

x = 400

Avstrijski kupec

3 x + 2 x + x = 450

x = 75 1 t

Italijanski kupec

Cvetlični x

Akacijev x + 150

Kostanjev x – 50 ali x +150 – 200 1 t

3 x – 100 = 400

x = 100

% izvoza $= \frac{325 \times 100}{125}$ = **260 %**

Odgovor = **160 %**

3. naloga

a.)

Izračun štipendije za Jureta s koeficienti: 202,00 * 1,08 * 1,08 = **235,61 EUR** ali po korakih za prvo: 202,00*1,08 = 218,16 €; za drugo 218,16*1,08 = **235,61 EUR**

b.)

Jure: 235,61 €

Nina: 202,00 € + 16,50 € (za prvo leto) + 16,50 € (za drugo leto) = **235,00 EUR**

Jure ima višjo štipendijo za **0,61 EUR,** kar predstavlja **0,26 %.**

c.)

Σ vsota štipendij = (202,00*12) + (218,16*12) + (235,61*12) = **7.869,24 EUR**

4. naloga

a.)

$$G^{+} = G + \frac{G \times p \times l}{100}$$

$$G^{+} = G \times (1 + \frac{p \times l}{100})$$

$$880{,}00 = G \times (1 + \frac{2{,}8 \times 5}{100})$$

G = 771,93 EUR

b.)

G_0 = 660,00 EUR ➔ (880,00 × 0,75 = 660,00 EUR)
G_n = 880,00 EUR
n = 4 leta
m = 1

p. a. = x %
Izračun (eden izmed možnih), lahko tudi po lastni presoji:

$G_n = G_0 \times r^n$ / : G_0

$$r^n = \frac{Gn}{G_0}$$

$$r = \sqrt[n]{\frac{Gn}{G_0}}$$

$$r = \sqrt[4]{\frac{880,00}{660,00}}$$

r = 1,074569932

p. a. = (r – 1) × 100 = 7,4569932 %
p. a. = 7,46 %

c.)

G_n = 2 × G_0
p = 3 % p. a.
m = 1
n = x let, dni

$$n = \frac{\log 2}{\log 1{,}03}$$

n = 23,44977225 let **= 23,45 let**
n = 23 let 164 dni

2. skupina: Statistika

1. naloga

a.)

Izračunani odstotki:

Vrsta obutve	Količina v parih		
	Prodajalna 1	**Prodajalna 2**	**Skupaj**
Otroška obutev	31,01	35,68	33,71
Moška obutev	20,30	23,03	21,88
Ženska obutev	48,69	41,29	44,41
Skupaj	**100,00**	**100,00**	**100,00**

b.)

$$I_{Ž,2/1} = \frac{9544}{8212} \cdot 100 = 116{,}22 \qquad D_{Ž,2/1}\% = 116{,}22 - 100 = 16{,}22\%$$

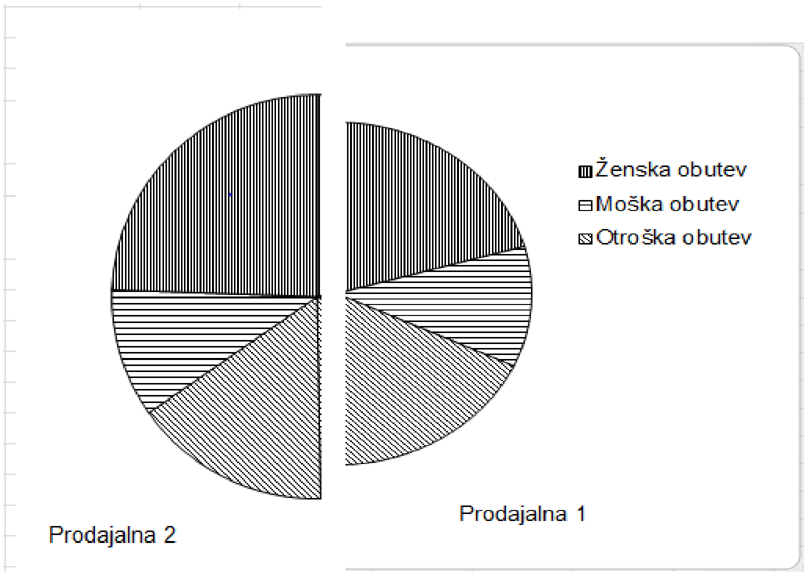
c.)

Izračunane stopinje:

Vrsta obutve	Količina v parih	
	Prodajalna 1	Prodajalna 2
Otroška obutev	56	64
Moška obutev	36	42
Ženska obutev	88	74
Skupaj	**180**	**180**

Izračun polmera za prodajalno 2:

$$r_2 = r_1 \times \sqrt{\frac{Y_2}{Y_1}} = 4 \times \sqrt{\frac{23.114}{16.867}} = 4{,}7$$



2. naloga

a.)

Tabela 2: **Vrednost prodaje in zaloge v proizvodnem obratu podjetja *Luminia d. o. o.* v prvem četrtletju leta 2012**

Mesec	Vrednost prodaje v 1000 EUR	Verižni indeksi za vrednost prodaje	Vrednost zalog surovin ob koncu meseca v 1000 EUR
Januar	-	-	64,1
Februar	172,5	-	92,2
Marec	**180,44**	104,6	84,7
April	**192,52**	106,7	76,2

Vir: Prirejeni podatki

b.)

$$Povpr.\ mesečna\ prodaja = \bar{Y} = \frac{1}{3}(172{,}5 + 180{,}4 + 192{,}5) = 181{,}82\ tisoč\ evrov$$

$$Povpr. mesečna\ zaloga = \bar{X} = \frac{1}{3}\left(\frac{64{,}1}{2} + 92{,}2 + 84{,}7 + \frac{76{,}2}{2}\right) = 82{,}35\ tisoč\ evrov$$

$$K_{obr.\ zalog} = \frac{povprečna\ mesečna\ vrednost\ prodaje}{povprečna\ mesečna\ vrednost\ zaloge} \times čas = \frac{181{,}8\ tisoč\ EUR}{82{,}4\ tisoč\ EUR} \times 1 = 2{,}21\text{-krat}$$

c.)

$$K_{rec} = \frac{povprečna\ mesečna\ vr.\ zaloge}{povprečna\ mesečna\ vr.\ prodaje} \times 30\ (dni) = \frac{82{,}35\ tisoč\ EUR}{181{,}82\ tisoč\ EUR} \times 30 = 13{,}59\ dneva$$

d.)

Letno: 2,2 × 12 = 26,49-krat

3. naloga

a. in b.)

Tabela 3: **Verižni indeksi za izvoz Slovenije v letih od 2006 do 2011**

Leto	**Verižni indeksi za izvoz**	**Izvoz v milijonih EUR**	$\mathbf{I_{j/2006}}$
2005	-	**14397,00**	**85,91**
2006	116,4	**16758,11**	**100,00**
2007	115,8	19.405,89	**115,80**
2008	102,1	**19813,41**	**118,23**
2009	81,3	**16108,31**	**96,12**
2010	114,5	**18444,01**	**110,06**
2011	112,9	**20823,29**	**124,26**

Vir: Statistični letopis 2012

c.)

Izvoz je bil v letih 2005 in 2009 manjši v primerjavi z letom 2006.

d.)

$$\bar{V} = \sqrt[N]{V_1 \times V_2 \times V_3 \times \ldots V_N} = \sqrt[6]{116{,}4 \times 115{,}8 \times 102{,}1 \times 81{,}3 \times 114{,}5 \times 112{,}9} = 106{,}34$$

$$\bar{S} = \bar{V} - 100 = 106{,}34 - 100 = 6{,}34\ \%$$

Povprečna letna stopnja rasti izvoza v obdobju od leta 2005 do 2011 je znašala 6,34 %.

4. naloga

a.)

Oddaljenost od doma do šole v km	f_j	f_j^0	F_j	F_j^0
nad 5 do 10	8	0,080	8	0,080
nad 10 do 15	33	0,330	41	0,410
nad 15 do 20	24	0,240	65	0,650
nad 20 do 25	20	0,200	85	0,850
nad 25 do 30	10	0,100	95	0,950
nad 30 do 35	5	0,050	100	1,000
SKUPAJ	**100**	**1,000**		

b.)

Največ dijakov je bilo oddaljenih nad 10 do 15 kilometrov.

c.)

Modalni razred: nad 10 do 15 km *(j = 2)*

$$Mo = 10{,}0 + 5 \times \frac{33-8}{2 \times 33 - 8 - 24} = 13{,}68 \text{ km}$$

Najpogostejša oddaljenost dijakov od doma do šole je bila 13,68 kilometra.

Rešitve državnega tekmovanja v znanju finančne matematike in statistike

1. naloga

a.)

Na osnovni ravni je bilo uspešnih $\frac{5521}{5787} = 95{,}40\,\%$ kandidatov, na višji pa $\frac{2118}{2126} = 99{,}62\,\%$.

b.)

Povprečna ocena je tehtana aritmetična sredina

$$\mu = \frac{170 \cdot 8 + \cdots + 441 \cdot 1}{8194} \doteq 3{,}86.$$

Modus ocen je Mo = 2.

Frekvence f_k, kumulativne frekvence F_k in kumulativne relativne frekvence F_k^0 po ocenah prikazuje spodnja tabela. Kumulativi pripadajo naraščajočim ocenam.

Ocena	1	2	3	4	5	6	7	8
f_k	441	1774	1619	1387	1490	788	525	170
F_k	441	2215	3834	5221	6711	7499	8024	8194
F_k^0	0,0538	0,2703	0,4679	0,6372	0,8190	0,9152	0,9793	1,0000

Mediana ocen je Me = 4.
Prvi kvartil je $Q_1 = 2$, tretji kvartil je $Q_3 = 5$.

c.)

Povprečna ocena je tehtana aritmetična sredina

$$\mu = \frac{333 \cdot 8 + \cdots + 8 \cdot 1}{1700} \doteq 6{,}1376 \doteq 6{,}14.$$

Disperzija je

$$\sigma^2 = \frac{333 \cdot 8^2 + \cdots + 8 \cdot 1^2}{1700} - 6{,}1376^2 \doteq 2{,}4116.$$

Standardni odklon je

$$\sigma = \sqrt{2{,}4116} \doteq 1{,}5529 \doteq 1{,}55.$$

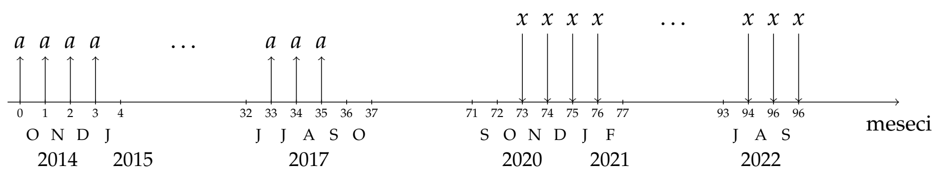
$$\sigma = \sqrt{2{,}4116} \doteq 1{,}5529 \doteq 1{,}55.$$

Na intervalu $[\mu - \sigma, \mu + \sigma] = [4'58, 7'69]$ so ocene 5, 6 in 7. Te ocene je doseglo 1110 kandidatov, kar pomeni 65,29 % vseh kandidatov, ki so pisali matematiko na višji ravni.

2. naloga

a.)

Letna obrestna mera je $p\,\% = 6\,\%$.
Mesečni obrestovalni faktor je $r = \sqrt[12]{1{,}06}$.
Redukcijski termin postavimo čez 8 let, to je konec septembra 2022.
Višina štipendije je $a = 300$ EUR, višina obroka vračila je x in ni znana.
Shema denarnih tokov:



Načelo ekvivalence glavnic: Izplačila in vplačila preračunamo na redukcijski termin.

$$ar^{96} + ar^{95} + \cdots + ar^{62} + ar^{61} = xr^{23} + xr^{22} + \cdots + xr + x$$
$$ar^{61}(r^{35} + r^{34} + \cdots + r + 1) = x(r^{23} + r^{22} + \cdots + r + 1)$$
$$ar^{61} \cdot \frac{r^{36} - 1}{r - 1} = x \cdot \frac{r^{24} - 1}{r - 1}$$

Izrazimo

$$x = ar^{61} \cdot \frac{r^{36} - 1}{r^{24} - 1} = 300\left(\sqrt[12]{1{,}06}\right)^{61} \frac{1{,}06^3 - 1}{1{,}06^2 - 1} = 623{,}46 \text{ EUR}.$$

b.)

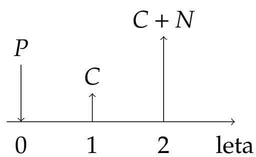
Višina dolga G tik pred plačilom prvega obroka (konec oktobra 2020) je enaka obrestovani vrednosti prejetih štipendij.

$$\begin{aligned} G &= ar^{73} + ar^{72} + \cdots + ar^{39} + ar^{38} = \\ &= ar^{38}(r^{35} + r^{34} + \cdots + r + 1) = \\ &= ar^{38} \cdot \frac{r^{36} - 1}{r - 1} = \\ &= 300\left(\sqrt[12]{1{,}06}\right)^{38} \frac{1{,}06^3 - 1}{\sqrt[12]{1{,}06} - 1} = 14\,158{,}52 \text{ EUR} \end{aligned}$$

3. naloga

a.)

Nominalna vrednost obveznice je $N = 1000$ EUR, dospetje $T = 2$.
Nominalna obrestna mera obveznice je $c = 4\,\%$.
Letna kupona sta $C = c \cdot N = 40$ EUR.



Ceno obveznice v času 0 določimo z diskontiranjem prihodnjih denarnih tokov.

$$\begin{aligned} P &= C \cdot D(0,1) + (C+N) \cdot D(0,2) = \\ &= \frac{C}{1 + R(0,1)} + \frac{C+N}{(1 + R(0,2))^2} = \\ &= \frac{40}{1{,}035} + \frac{1040}{1{,}038^2} = 1003{,}89 \text{ EUR} \end{aligned}$$

b.)

Če bi se obrestne mere povišale za 0,5 odstotne točke, bi znašale

t	1	2
$R'(0,t)$	4,00 %	4,30 %

Pri novih obrestnih merah ponovimo račun iz a) in dobimo

$$\begin{aligned} P &= C \cdot D'(0,1) + (C+N) \cdot D'(0,2) = \\ &= \frac{C}{1 + R'(0,1)} + \frac{C+N}{(1 + R'(0,2))^2} = \\ &= \frac{40}{1{,}04} + \frac{1040}{1{,}043^2} = 994{,}48 \text{ EUR} \end{aligned}$$

Cena obveznice bi se znižala za 9,42 EUR.

c.)

Cena obveznice bi se spremenila za $\frac{9{,}42}{1003{,}89} = 0{,}94\%$.

d.)

Označimo z R iskano donosnost do dospetja.
Formula za vredotenje obveznice

$$P = C \cdot D(0,1) + (C+N) \cdot D(0,2)$$

nam da enačbo

$$P = \frac{C}{1+R} + \frac{C+N}{(1+R)^2}.$$

Definiramo $x = \frac{1}{1+R}$ ter vstavimo podatke in dobimo

$$1003{,}89 = 40x + 1040x^2.$$

Kvadratna enačba ima rešitvi

$$x_1 = -1{,}0019$$
$$x_2 = 0{,}9634$$

Prva rešitev ni smiselna, iz druge pa izračunamo

$$R = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1}{0{,}9634} - 1 = 3{,}80\,\%.$$

Donosnost do dospetja znaša 3,80 %.

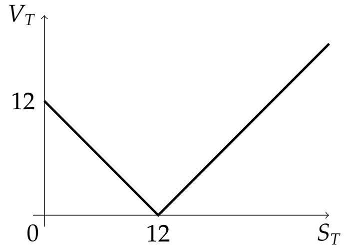
4. naloga

a.)

Označimo vrednost/izplačilo portfelja z V_T.
Vsota vrednosti/izplačil obeh opcij v času T je enaka

$$\begin{aligned} V_T &= \max\{S_T - 12, 0\} + \max\{12 - S_T, 0\} = \\ &= \max\{S_T - 12, 12 - S_T\} = \\ &= |S_T - 12|. \end{aligned}$$

Graf funkcije $V_T(S_T)$ je na spodnji sliki.



Izplačilo portfelja opcij z isto izvršilno ceno 12.

b.)

Naj bosta c_0 in p_0 premiji evropske nakupne in prodajne opcije.
Neznano premijo izračunamo iz evropske nakupno-prodajne enakosti v času 0

$$p_0 + S_0 = c_0 + K \cdot (1+R)^{-T}.$$

Podano imamo $p_0 = 0{,}91$ EUR, $S_0 = 11{,}90$ EUR, $K = 12$ EUR in $R = 0{,}01$.
Dobimo

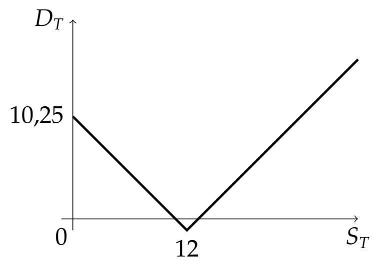
$$c_0 = p_0 + S_0 - K \cdot (1+R)^{-T} = 0{,}91 + 11{,}90 - 12 \cdot 1{,}01^{-\frac{1}{4}} = 0{,}84 \text{ EUR}.$$

c.)

Dobiček D_T je enak razliki med vrednostjo portfelja V_T ob zapadlosti opcij in vsoto premij, ki smo jih za opciji plačali v času 0.

$$\begin{aligned} D_T &= V_T - p_0 - c_0 = \\ &= |S_T - 12| - 1{,}75. \end{aligned}$$

Graf funkcije $D_T(S_T)$ je na spodnji sliki.



Dobiček portfelja opcij z isto izvršilno ceno 12.

d.)

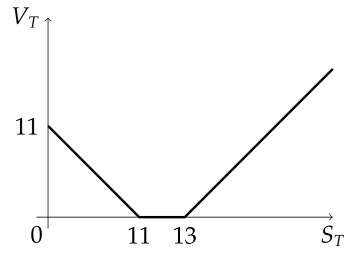
Portfelj nakupne in prodajne opcije je smiselno kupiti, kadar pričakujemo spremembo cene delnice, ne vemo pa, v katero smer se bo ta spremenila. Večja, ko je sprememba cene delnice, večji je naš dobiček.

e.)

Če sta izvršilni ceni različni, je vrednost portfelja ob zapadlosti enaka

$$V_T = \max\{S_T - 13, 0\} + \max\{11 - S_T, 0\} = \max\{S_T - 13, 11 - S_T, 0, \}.$$

Graf funkcije $V_T(S_T)$ je na spodnji sliki.



Izplačilo portfelja opcij z različnima izvršilnima cenama.

Rešitve 14. tekmovanja v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol – regijsko tekmovanje

1. letnik

A1 Preostanek dolga, ki znaša 15 evrov, je $37{,}5\ \%$ celotnega dolga. Torej je skupni dolg znašal 40 evrov.

A2 Z x označimo iskano število in zapišemo enačbo $x-(2-3)^2=\dfrac{1}{16}(-2)^4\left(-2^4\right)$. Dobimo $x=-15$.

A3 Izraz razčlenimo in poenostavimo. Dobimo $2x^2+4x+2=2(x+1)^2$.

A4 Vrednosti spremenljivk x in y vstavimo v izraz. Dobimo $3(-5)+7(3+4(-5)^2-2)=692$.

A5 Zapišemo enačbo $\frac{n}{4}\cdot\frac{n}{5}=500$ in jo preuredimo v $n^2=10000$. Naravo število n, ki reši to enačbo, je 100.

B1 Razčlenimo in poenostavimo izraza na levi in desni strani enačbe. Dobimo linearno enačbo $-6x+3=4x-7$. Rešitev enačbe je $x=1$.

B2 Števila razcepimo na prafaktorje: $216=2^3\cdot3^3$, $144=2^4\cdot3^2$, $210=2\cdot3\cdot5\cdot7$. Ugotovimo, da morajo dati v vsaki vrečko $D(216,144,210)=6$ kosov zelenjave. Torej potrebujejo $\frac{216}{6}+\frac{144}{6}+\frac{210}{6}=95$ vreček.

B3 Odpravimo ulomke v prvi neenačbi. Dobimo $6x-6x+9-5-2x>0$ oziroma $-2x>-4$. Delimo z -2 in dobimo $x<2$. V drugi neenačbi razčlenimo in poenostavimo levo stran. Dobimo $-7x+11>9-3x$ oziroma $-4x>-2$. Delimo z -4 in dobimo $x<\frac{1}{2}$. Množica rešitev sistema neenačb je presek intervalov $(-\infty,2)$ in $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$, torej interval $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$.

B4 Najprej poenostavimo števec $\frac{a^2+3b^2}{b^2}-3=\frac{a^2}{b^2}$ in nato še imenovalec $3-\frac{3a+3b^2}{b^2}=-\frac{3a}{b^2}$. Odpravimo dvojni ulomek in dobimo $-\frac{a}{3}$. Vstavimo $a=-\frac{9}{5}$ in dobimo $\frac{3}{5}$.

2. letnik

A1 Suplementarni kot dvakratnika kota α je velik $180°-2\cdot26°31'=126°58'$.

A2 Korene zapišemo kot potence z racionalnimi eksponenti in nato uporabimo pravila za računanje s potencami

$$\frac{\sqrt[3]{x^{-2}}x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt[4]{x^3}x^{\frac{5}{12}}}=\frac{x^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}x^{\frac{5}{12}}}=\frac{x^{\frac{11}{6}}}{x^{\frac{14}{12}}}=x^{\frac{2}{3}}.$$

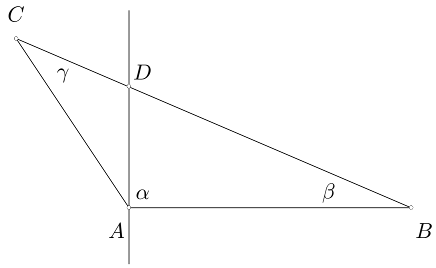
Upoštevamo, da je $x=8=2^3$. Dobimo $(2^3)^{\frac{2}{3}}=2^2=4$.

A3 Odsek grafa funkcije f na ordinatni osi je enak začetni vrednosti funkcije f. Torej je $-2a+3=5$ ali $-2a+3=-5$. Dobimo $a=-1$ ali $a=4$. Izmed naštetih števil je torej lahko le 4 vrednost parametra a.

A4 Trikotnik ABS in trikotnik CDS sta podobna, zato so dolžine njunih istoležnih stranic v enakih razmerjih, kar velja tudi za razmerje višin. Iz sorazmerja $8 : 6 = 20 : c$ dobimo $c = 15$ cm.

A5 Vzporedni premici imata enak smerni koeficient. Premica z enačbo $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$ ima smerni koeficient $k = \frac{4}{3}$, torej je vzporedna premici z enačbo $6y - 8x = 1$.

B1 Najprej izračunamo velikost kota $\alpha = 180° - 30° - 15° = 135°$. Kot DAC je velik $135° - 90° = 45°$. Iz $\cos\beta = \frac{|AB|}{|BD|}$ dobimo $|BD| = \frac{5}{\cos 15°} \doteq 5{,}18$ cm.



B2 Ulomka razširimo na skupni imenovalec in ju odštejemo. Dobimo $\frac{3x-3y}{3\sqrt{3}}$. V števcu izpostavimo 3 in upoštevamo $x - y = 3$. Dobimo $\frac{3\cdot 3}{3\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

B3 Upoštevamo, da je funkcija linearna, torej je $f(x) = kx + n$. Iz podatkov izračunamo $k = 5$ in $n = 50$ ter zapišemo funkcijski predpis $f(x) = 5x + 50$. Izračunamo $f(0) = 50$. Če nihče ne pride na trening, znaša Joškova dnevna plača 50 evrov. Iz $f(20) = 150$ dobimo, da Joškova dnevna plača znaša 150 evrov, če pride na trening 20 ljudi. Iz enakosti $300 = 5x + 50$ izračunamo $x = 50$. To pomeni, da mora Joško za dnevno plačo 300 evrov trenirati 50 ljudi.

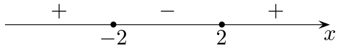
B4 Iz $2a + 2b = 42$ sledi $b = 21 - a$. Iz $d = a + 3$ in $d^2 = a^2 + b^2$ dobimo enačbo $(a + 3)^2 = a^2 + (21 - a)^2$, ki jo poenostavimo v $a^2 - 48a + 432 = 0$. Rešitvi enačbe sta $a_1 = 12$ in $a_2 = 36$. Ker je $a + b = 21$, velja $a = 12$ cm in $b = 9$ cm.

3. letnik

A1 Iz $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8}$ dobimo enačbo $\frac{27}{8} = a^{-\frac{3}{2}}$. Izrazimo $a = \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{9}$. Torej je $f(-1) = \left(\frac{4}{9}\right)^{-1} = \frac{9}{4}$.

A2 Iz $\ln x + \ln y = 0$ sledi $\ln(xy) = 0$. Torej je $xy = e^0 = 1$ oziroma $x = y^{-1}$.

A3 Neenačbo $x^2 < 4$ preuredimo v $x^2 - 4 < 0$. Ničli kvadratne funkcije na levi strani neenačaja sta $x_1 = -2$ in $x_2 = 2$. Iz skice odčitamo $-2 < x < 2$. Množica rešitev neenačbe je torej interval $(-2, 2)$.



A4 Iz $q = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2-4ac}{4a}$ dobimo enačbo $-8 = -\frac{16-2k}{2}$. Rešitev enačbe je $k = 0$.

A5 Polmer kroga je $r = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. Izračunamo $S = \pi r^2 = 2\pi$ cm^2.

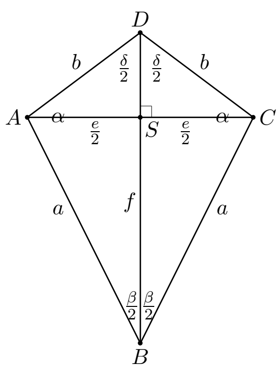
B1 Izračunamo površino sten, ki jih bodo prepleskali, $2 \cdot 4{,}5 \cdot 2{,}5 + 2 \cdot 5 \cdot 2{,}5 - 1 - 2 = 44{,}5$ m^2 in še ploščino stropa $4{,}5 \cdot 5 = 22{,}5$ m^2. Nejc bo za pleskanje sobe plačal $44{,}5 \cdot 2 + 22{,}5 \cdot 4 = 179$ evrov.

B2 Odpravimo ulomek in dobimo $-6+\log_3 x^2 = 2\log_3 \sqrt{x}$. Upoštevamo $2\log_3 \sqrt{x} = \log_3 (\sqrt{x})^2 = \log_3 x$ in zapišemo enačbo $-6 + \log_3 x^2 = \log_3 x$. Enačbo uredimo v $\log_3 x^2 - \log_3 x = 6$. Upoštevamo $\log_3 x^2 - \log_3 x = \log_3 \left(\frac{x^2}{x}\right) = \log_3 x$ oziroma $\log_3 x^2 - \log_3 x = 2\log_3 x - \log_3 x = \log_3 x$ in dobimo $\log_3 x = 6$. Torej je $x = 3^6 = 729$.

B3 Enačba nima pomena za $x = -1$ in za $x = 1$. Za $x \neq -1$ in $x \neq 1$ enačbo množimo z izrazom $6(x+1)(x-1)$. Dobimo enačbo $6(x+2{,}25)(x-1) - 6(2x-1{,}75)(x+1) = -5(x-1)(x+1)$. Odpravimo oklepaje ter uredimo enačbo v $x^2 - 6x + 8 = 0$. Rešitvi enačbe sta $x_1 = 2$ in $x_2 = 4$. Iz $f(0) = -4$ in $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ dobimo enačbo $-4 = a(0-2)(0-4)$. Torej je $a = -\frac{1}{2}$

in $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)(x-4)$. Splošna oblika predpisa funkcije f je $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$.

B4 Iz $\alpha : \beta : \delta = 3 : 1 : 2$ in $\alpha = \gamma$ ter $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$ izračunamo $\alpha = \gamma = 120°, \beta = 40°$ in $\delta = 80°$. Naj bo S presečišče diagonal deltoida. Trikotnik DAS in trikotnik ABS sta pravokotna. Diagonala f razpolavlja diagonalo e in kota β ter δ. Iz $\tan\frac{\beta}{2} = \frac{\frac{e}{2}}{|BS|}$ in $\tan\frac{\delta}{2} = \frac{\frac{e}{2}}{|SD|}$ dobimo $f = |BS| + |SD| = \frac{e}{2\tan\frac{\beta}{2}} + \frac{e}{2\tan\frac{\delta}{2}}$. Izračunamo ploščino deltoida $S = \frac{e \cdot f}{2} \doteq 166{,}4$ cm^2.



4. letnik

A1 Ker polinom q deli polinom p, velja $p(3) = 0$. Dobimo enačbo $-3a - 24 = 0$. Torej je $a = -8$.

A2 Edina realna rešitev enačbe $2x^3 + 2 = 0$ je $x = -1$. Torej je $\mathbb{R} - \{-1\}$ največja podmnožica realnih števil, za katero lahko definiramo funkcijo f.

A3 Mali kazalec v eni uri preteče kot, velik $30°$, torej v eni minuti preteče kot, velik $0{,}5°$. V 25 minutah preteče kot, ki je velik $25 \cdot 0{,}5° = 12{,}5°$. Tako ta kazalec preteče kot, velik $12{,}5° + 60° = 72{,}5°$. Kot, ki ga veliki kazalec preteče v eni minuti, je velik $6°$. Torej v 25 minutah preteče kot, velik $150°$. Kot med kazalcema je velik $150° - 72{,}5° = 77{,}5° = 77°30'$.

A4 Izračunamo $a_3 = 3a_2 - a_1 = 3 \cdot 3 + 2 = 11$.

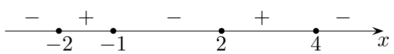
A5 Za zaporedje s splošnim členom $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} + 2$ izračunamo $\frac{a_2}{a_1} = \frac{8}{5}$ in $\frac{a_3}{a_2} = \frac{14}{8}$. To zaporedje torej ni geometrijsko, saj količnik zaporednih členov ni konstanten.

B1 Z x_1 in x_2 označimo ničli kvadratne funkcije. Iz podatkov sledi $x_1 + x_2 = 4$ in $x_1 x_2 = 1$.
I. način:
Upoštevamo Vietovi pravili $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ in $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ in zapišemo $f(x) = ax^2 + bx + c = a\,(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2) = a\,(x^2 - 4x + 1)$. Iz $f(1) = 4$ sledi $a = -2$ oziroma $f(x) = -2\,(x^2 - 4x + 1)$. Torej je $f(2) = 6$.

II. način:
Iz sistema enačb $x_1 + x_2 = 4$ in $x_1 x_2 = 1$ izračunamo $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ in $x_2 = 2 - \sqrt{3}$. V $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ vstavimo ničli in upoštevamo $f(1) = 4$. Dobimo $a = -2$ oziroma $f(x) = -2\left(x - 2 - \sqrt{3}\right)\left(x - 2 + \sqrt{3}\right)$. Torej je $f(2) = 6$.

B2 Iz $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ in $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ dobimo $\sin^3 x\left(1 + \frac{\cos x}{\sin x}\right) + \cos^3 x\left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right) = \sin^3 x + \sin^2 x \cos x + \cos^3 x + \cos^2 x \sin x$. Iz prvih dveh členov izpostavimo $\sin^2 x$, iz drugih dveh pa $\cos^2 x$. Dobimo $\sin^2 x\,(\sin x + \cos x) + \cos^2 x\,(\cos x + \sin x) = (\sin x + \cos x)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$. Upoštevamo, da je $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Dobimo $\sin x + \cos x$.

B3 Iz $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} + \frac{x}{x^2-4} - 1 \geq 0$ sledi $\frac{-x^2+3x+4}{(x-2)(x+2)} \geq 0$ oziroma $\frac{-(x-4)(x+1)}{(x-2)(x+2)} \geq 0$. Ničli racionalne funkcije na levi strani neenačaja sta $x_1 = 4$ in $x_2 = -1$, pola pa $x_1 = 2$ in $x_2 = -2$. Iz skice odčitamo množico rešitev neenačbe $(-2, -1] \cup (2, 4]$.



B4 **a)** Na rezervirane sedeže se lahko posedejo na $7! = 5040$ načinov.

b) Če bodo otroci sedeli skupaj in starša skupaj, se lahko na rezervirane sedeže posedejo na $5!\,2!\,2! = 480$ načinov.

c) Če starša ne bosta sedela skupaj, se lahko na rezervirane sedeže posedejo na $7! - 2!\,6! = 3600$ načinov.