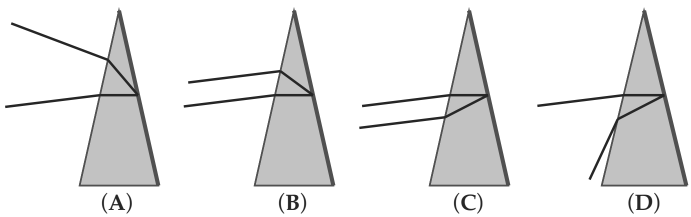
Tekmovanja

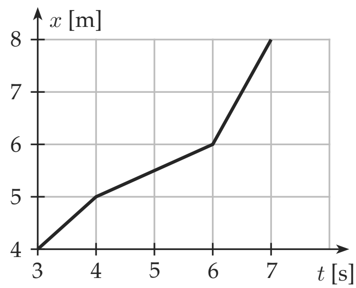
34. tekmovanje iz fizike za zlato Stefanovo priznanje – državno tekmovanje

8. razred

A1 Žarek vpada na stekleno prizmo (klinasto ploščico oblike, kot je na sliki). Na nasprotni ploskvi prizme je zrcalo. Katera slika pravilno prikazuje prehod svetlobnega žarka skozi prizmo?



A2 Piki se izpred svoje ute, ki je pri $x = 0$, odpravi na pot ob času $t = 0$. Graf kaže, kako se Pikijeva lega spreminja s časom v obdobju med $t = 3$ s in $t = 7$ s. Kolikšna je Pikijeva hitrost v 6. sekundi?



(**A**) $\frac{1}{2}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. (**B**) $\frac{2}{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. (**C**) $1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. (**D**) $2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

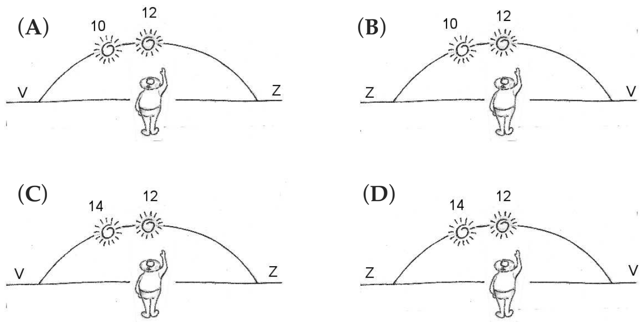
A3 *Karat* je merska enota za maso in ustreza masi 0,2 g, kar je približno masa enega semena rožičevca. Diamant Koh-i-Nur, *Gora luči*, je eden največjih diamantov na svetu. Vdelan je v krono angleške kraljice. Tehta 105,6 karatov. Kolikšen del kilograma je to? Približno

(**A**) petdesetina. (**B**) dvajsetina. (**C**) petina. (**D**) polovica.

A4 Katera izjava o vsoti dveh sil je pravilna? Vsota dveh sil

(**A**) je po velikosti zagotovo manjša od vsote velikosti obeh sil.
(**B**) je po velikosti zagotovo enaka vsoti velikosti obeh sil.
(**C**) je po velikosti zagotovo večja od vsote velikosti obeh sil.
(**D**) po velikosti zagotovo ni večja od vsote velikosti obeh sil.

A5 Tasmanija je otok, ki leži južno od Avstralije. Simon je na Tasmaniji in opazuje pot Sonca čez nebo. Obrnjen je proti Soncu. Katera slika pravilno kaže pot Sonca čez nebo, kot jo vidi Simon? Nad legama Sonca sta zapisana (lokalna) časa.

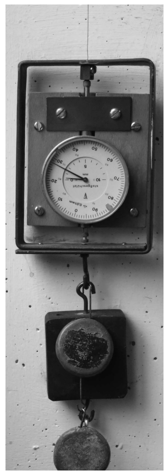


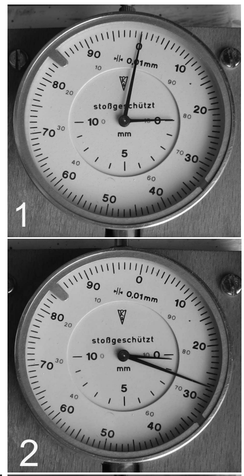
B2 Na jekleno žico z dolžino $l_0 = 207$ cm in presekom $S = 0{,}071\ \text{mm}^2$ obešamo uteži ter merimo raztezek žice x.

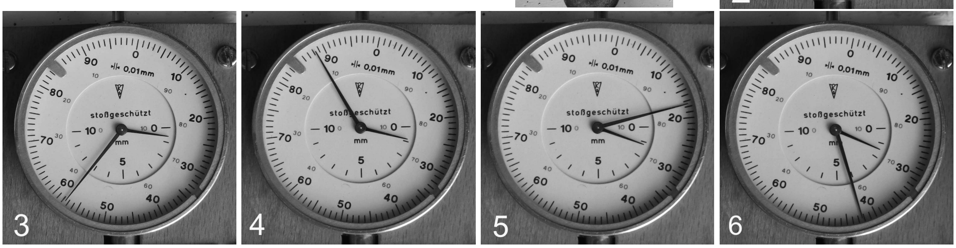
Oštevilčene slike s skalo merilnika kažejo zaporedne meritve. Razmik med sosednjima oznakama na skali velikega kazalca pomeni raztezek za stotinko milimetra, cel obrat velikega kazalca ustreza raztezku 1 mm. Mali kazalec meri raztezek v mm.

Na sliki 1 dodatnih uteži ni, na vsaki naslednji je ena utež za 200 g več kot na prejšnji.

(Naj te ne moti, da je poskus izveden z *na glavo* obrnjenim merilnikom.)







(a) V tabelo zapiši rezultate meritev sile F, ki napenja žico, in raztezka x.

(b) Razmerje $\frac{F}{S}$ imenujemo *natezni tlak*, razmerje $\frac{x}{l_0}$ pa *relativni raztezek*. Tabelo dopolni z izračuni nateznega tlaka in relativnega raztezka ter zapiši ustrezni enoti.

F [N]						
x [mm]						
$\frac{F}{S}$ [ ]						
$\frac{x}{l_0}$ [ ]						

(c) Nariši graf, ki kaže, kako je relativni raztezek žice odvisen od nateznega tlaka v žici.

(d) Podobno kot za vzmet tudi za jekleno žico velja Hookov zakon. Zapišemo ga v obliki

$$\frac{x}{l_0} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S}$$

Izračunaj *prožnostni modul* jekla E. Podaj ga v enotah $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$.

B2 Spuščajoče se tekoče stopnice povezujejo 1. nadstropje s pritličjem. Tla pritličja so 6 m pod tlemi 1. nadstropja. Smer, v kateri se gibljejo stopnice, je pod kotom $30°$ glede na vodoravnico. V **navpični smeri** se stopnice spuščajo s hitrostjo $0{,}3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

(a) Babica stoji na tekočih stopnicah. Koliko časa potuje s 1. nadstropja do pritličja in kolikšno pot opravi pri tem?

(b) S kolikšno hitrostjo se giblje babica, medtem ko stoji na tekočih stopnicah?

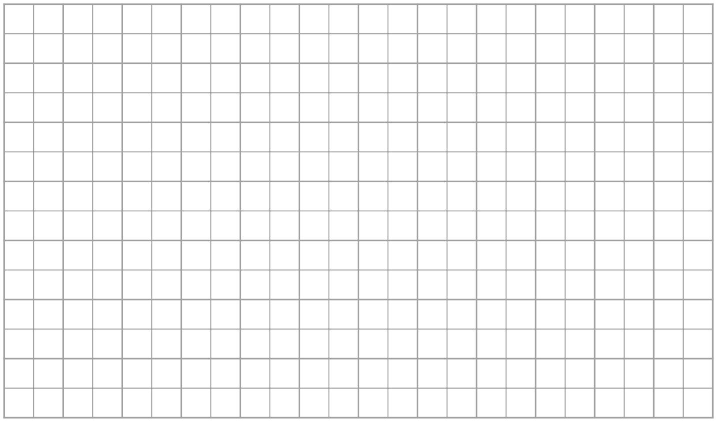
(c) Vnuku Mihi se bolj mudi in po poti navzdol še sam sestopa po premikajočih se stopnicah. **Glede na stopnice** se giblje s hitrostjo $0{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Koliko časa traja Mihovo potovanje med 1. nadstropjem in pritličjem?

(d) Višina ene stopnice je 20 cm. Koliko stopnic na poti navzdol prehodi Miha?

(e) S kolikšno hitrostjo **glede na stopnice** bi se moral Miha gibati po tekočih stopnicah v nasprotni smeri, da bi v enakem času, kot ga je porabil za pot iz 1. nadstropja do pritličja, prispel iz pritličja do 1. nadstropja?

(f) Koliko stopnic bi Miha v tem primeru prehodil?

(g) Babica in Miha stopita hkrati na prvo stopnico v trenutku $t = 0$. Babica na stopnicah stoji, Miha pa sestopa še sam, kot pri (c). Preden Miha dospe do pritličja, se obrne in steče nazaj navzgor tako hitro, kot pri (e). V 1. nadstropje se vrne v istem hipu kot babico v pritličje pripeljejo stopnice.
V isti koordinatni sistem nariši grafa, ki kažeta, kako se s časom spreminjata višini, na katerih sta babica (s črtkano črto) in Miha, ko po tekočih stopnicah najprej sestopa, potem pa se po njih še vzpenja (z neprekinjeno črto), glede na pritličje.



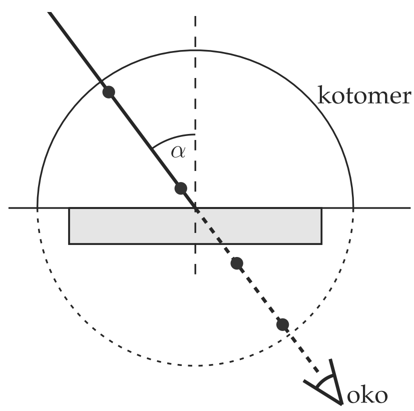
(h) Iz grafa preberi in zapiši čas ter višino nad pritličjem, kjer se Miha obrne.

(i) Izračunaj, kdaj in na kateri višini nad pritličjem teče Miha mimo babice.

C – eksperimentalna naloga: PLANPARALELNA PLOŠČICA

S štirimi bucikami pritrdi vogale priloženega lista z vrisanim kotomerom na stiroporno podlago. Ob narisano premico postavi stekleno ploščico tako, da je pravokotna na podlago in da je daljši rob ploščice tik ob narisani premici, kot kaže slika.

Z bucikami si boš pomagal/a določiti smer svetlobnega žarka, ki vpada na stekleno ploščico pod vpadnim kotom α, potuje skozi ploščico ter jo na drugi strani zapusti. Štiri bucike, narisane na sliki, ležijo na isti premici, ki označuje tudi pot svetlobnega žarka v primeru, ko ploščico umakneš. Ko jih opazuješ v smeri, iz katere prihaja ta žarek, so vse poravnane ena za drugo in dobro vidiš samo tisto, ki je očesu najbližje.



Žarek pri prehodu skozi ploščico ne sledi narisani črtkani poti. Najprej premikaj oko, da boš videl/a poravnani buciki na nasprotni strani ploščice, nato pa na tvoji strani ploščice zapiči še dve buciki, da boš videl/a vse štiri bucike poravnane v isti smeri. S pomočjo bucik na tvoji strani boš lahko začrtal/a smer, v katero gre svetlobni žarek po prehodu ploščice.

(a) Žarek vpada pod vpadnim kotom $60°$ na površino ploščice z debelino $d = 1{,}5$ cm. Ugotovi, kako gre žarek skozi ploščico ter ga nariši. Izmeri premik žarka x pri prehodu ploščice. Kolikšen je ta premik?

(b) Izmeri, kolikšni so premiki žarka x pri prehodu skozi ploščico pri različnih vpadnih kotih α, zapisanih v razpredelnici.

α	$0°$	$15°$	$30°$	$45°$	$60°$	$75°$
x [mm]						

(c) Izmeri premik žarka, ki vpada pod kotom $60°$ na ploščico z debelino $2d = 3{,}0$ cm. Tako ploščico dobiš, ko dve ploščici z debelino $d = 1{,}5$ cm postaviš tesno eno ob drugo.

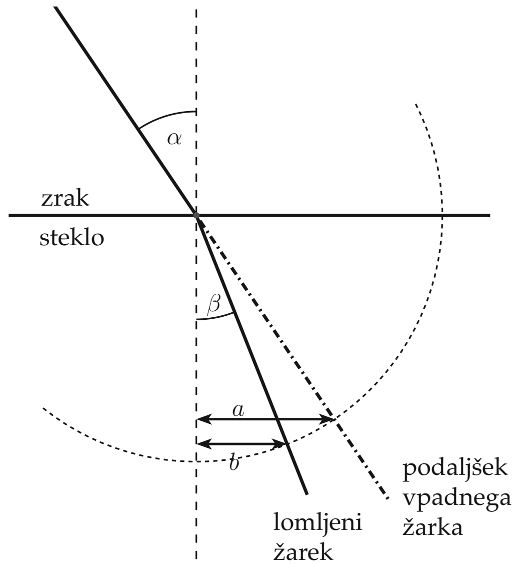
(d) Žarek vpada pod kotom $60°$ na ploščico. Za koliko se premakne žarek pri prehodu skozi dve ploščici z debelino $d = 1{,}5$ cm, med katerima je zračna reža s širino d? Nariši pot žarka.

(e) V isti koordinatni sistem nariši dva grafa, ki kažeta, kako je premik žarka x pri prehodu skozi ploščico odvisen od vpadnega kota α za ploščico z debelino d (s polno črto) in ploščico z debelino $2d$ (s črtkano črto).

(f) *Lomni količnik* n stekla, iz katerega je ploščica, lahko izračunaš kot razmerje dolžin katet v dveh pravokotnih trikotnikih, glej sliko. Hipotenuzi sta enako dolgi, ena je vzdolž smeri lomljenega žarka, druga vzdolž smeri podaljška vpadnega žarka. Kateti sta označeni z a (podaljšek) in b (lomljeni žarek). Lomni količnik je

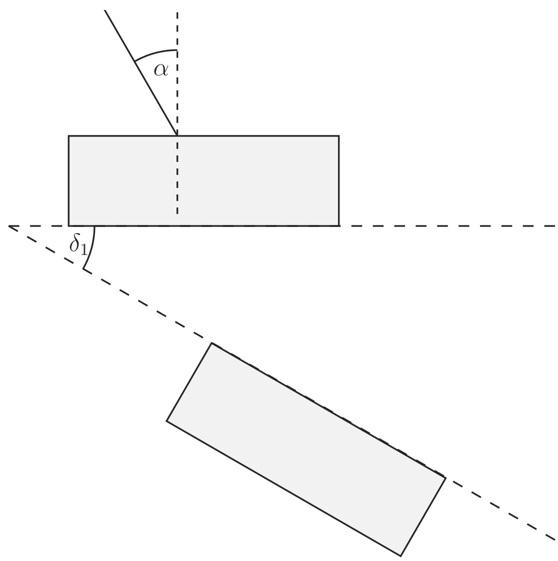
$$n = \frac{a}{b}\,.$$

Izmeri potrebne količine, jih zapiši v razpredelnico in izračunaj lomni količnik n stekla. Meri pri dveh vpadnih kotih, $\alpha_1 = 60^\circ$ in $\alpha_2 = 75^\circ$. Izračunaj tudi povprečno vrednost $\bar{n}$.



α	a [mm]	b [mm]	n
60°			
75°			

(g)



Stekleni ploščici postavi tako, da oklepata kot $\delta_1 = 30^\circ$, kot kaže slika. Ugotovi, kako gre skozi obe ploščici žarek, ki na prvo vpada pod vpadnim kotom $\alpha = 30^\circ$. Ploščici lahko premikaš vzdolž črtkanih črt tako, da boš opazoval/a prehod svetlobe skozi obe ploščici. Nariši pot žarka. Za koliko se žarek pri prehodu skozi obe ploščici premakne?

(h) Dvema ploščicama bi lahko dodali še tretjo enako ploščico, ki bi z drugo oklepala kot $\delta_2 = 15°$ ali $\delta_2 = -15°$. Za koliko bi se žarek, ki bi prešel vse tri ploščice, premaknil v teh dveh primerih?

(i) Denimo, da imaš tri enake ploščice. Kot med prvo in drugo je $\delta_1 = 15°$. Kolikšen je največji kot δ_2 med drugo in tretjo ploščico, pri katerem gre svetlobni curek, ki vpada pod vpadnim kotom $\alpha = 30°$ na prvo ploščico, skozi vse tri ploščice?

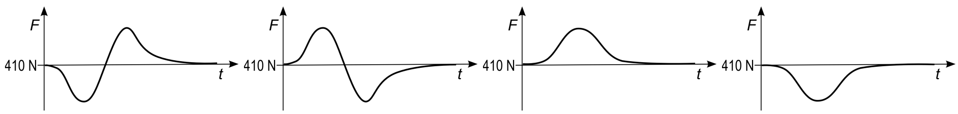
---

9. razred

A1 Skozi mikroskop opazujemo paramecije. Pri 200-kratni povečavi je premer območja, ki ga vidimo skozi mikroskop, 0,8 mm. Preštejemo paramecije, ki so enakomerno razporejeni po celem vidnem polju in ugotovimo, da jih naenkrat vidimo 5. Ko jih opazujemo pri 40-kratni povečavi, je premer vidnega polja 4 mm. Približno koliko paramecijev vidimo naenkrat?

(**A**) 125 (**B**) 25 (**C**) 5 (**D**) 1

A2 Manca ima 41 kg. Najprej mirno stoji na ravnih trdih tleh, roke ima zravnane in spuščene ob telesu. Potem roke hitro dvigne in jih obdrži stegnjene nad glavo. Katera slika pravilno kaže, kako se sila, s katero Manca pritiska na tla, spreminja med gibanjem njenih rok?



(**A**) (**B**) (**C**) (**D**)

A3 Kolesar vozi po vodoravni cesti 1 km s hitrostjo 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Pri tem premaguje silo zračnega upora, ki je po velikosti enaka 4 N. Po prevoženem kilometru hitrost poveča na 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ in s to hitrostjo vozi še 0,5 km. Pri hitrosti 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ je sila zračnega upora 16 N. Katera trditev o moči, s katero kolesar opravlja delo pri premagovanju sile zračnega upora, je pravilna?

(**A**) Moč je na drugem delu poti osemkrat tolikšna kot na prvem delu poti.

(**B**) Moč je na drugem delu poti štirikrat tolikšna kot na prvem delu poti.

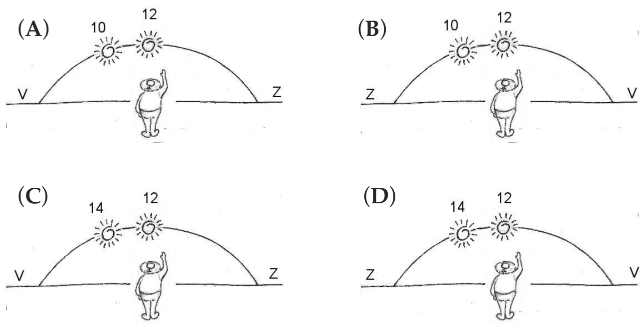
(**C**) Moč je na drugem delu poti dvakrat tolikšna kot na prvem delu poti.

(**D**) Moč je na celotni poti stalna.

A4 Balon se prične dvigati od tal s stalnim pospeškom 1 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Košara balona ima ograjo, ob katero je na zunanji strani privezana vreča peska. Po 10 s od začetka dviganja se vreča odveže in odpade od košare. Koliko časa zatem pade vreča na tla? Zračni upor zanemari.

(**A**) 1 s. (**B**) 3,2 s. (**C**) 3,3 s. (**D**) 4,3 s.

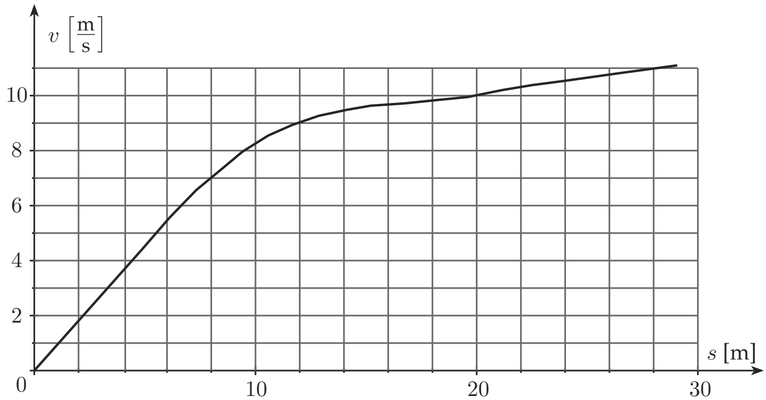
A5 Tasmanija je otok, ki leži južno od Avstralije. Simon je na Tasmaniji in opazuje pot Sonca čez nebo. Obrnjen je proti Soncu. Katera slika pravilno kaže pot Sonca čez nebo, kot jo vidi Simon? Nad legama Sonca sta zapisana (lokalna) časa.



B1 Graf kaže, kako se hitrost hitrostnega drsalca spreminja s predrsano potjo od njegovega starta naprej. Kadar veš, kako se hitrost spreminja s potjo (poznaš $v(s)$), lahko tudi izračunaš pospešek, a na poseben način. Ko v znani izraz za pospešek $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ vstaviš $\Delta t = \frac{\Delta s}{\bar{v}}$ dobiš nov izraz

$$a = \bar{v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta s}\,.$$

Za $\bar{v}$ vzameš srednjo vrednost hitrosti na delu poti Δs. Največjo hitrost 13 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ drsalec doseže na razdalji 80 m.
Drsalec ima 75 kg.



(a) Kolikšna je kinetična energija drsalca 20 m od startne črte?

(b) Kolikšna povprečna sila podlage deluje na drsalca v smeri njegovega gibanja na prvih 20 m od startne črte?

(c) S kolikšno povprečno silo, vzporedno podlagi, se drsalec odriva od ledu prvih 20 m po startu?

(d) Iz grafa preberi, kolikšna je hitrost drsalca pri $s = 0$ m, 2 m, 4 m ... ter vrednosti zapiši v razpredelnico.

s [m]	0	2	4	6	8	10	14	20
$v\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$								

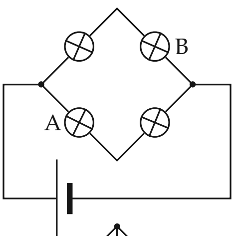
(e) Dopolni razpredelnico. Vanjo vpiši dolžine odsekov poti $\Delta s = s_2 - s_1$, spremembe hitrosti drsalca Δv na navedenih odsekih poti ter srednje hitrosti drsalca $\bar{v}$ na teh odsekih. Izračunaj pospeške drsalca in tudi te vrednosti zapiši v razpredelnico.

od s_1 do s_2 [m]	Δs [m]	$\Delta v\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$	$\bar{v}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$	$a\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$
$0 - 2$				
$2 - 4$				
$4 - 6$				
$6 - 8$				
$8 - 10$				
$10 - 14$				
$14 - 20$				

(f) Nariši graf, ki kaže, kolikšen je pospešek drsalca na različnih delih poti. Graf smiselno nadaljuj do poti $s = 60$ m.

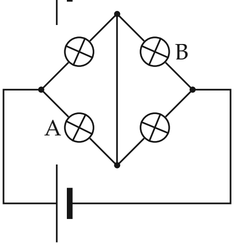
B2 Aleš je na vir napetosti 6 V vezal eno žarnico in izmeril, da teče skoznjo tok 300 mA. Napetost vira je nato spreminjal in ugotovil, da je tok skozi žarnico $I_Ž$ **premo-sorazmeren** z napetostjo na žarnici $U_Ž$ na celem območju napetosti med 0 V in 12 V. Potem je uporabil še več takih (enakih) žarnic in jih povezal v različna vezja, ki so narisana spodaj. V vseh primerih je uporabil napetost vira 10 V. V vseh vezjih je meril tokove skozi žarnice in skozi vir. V razpredelnice zapiši, kolikšne tokove I_A, I_B ... skozi žarnice, označene z A, B ... in skozi vir napetosti I_v je izmeril Aleš.

(a)



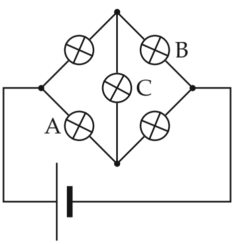
I_A [mA]	I_B [mA]	I_v [mA]

(b)



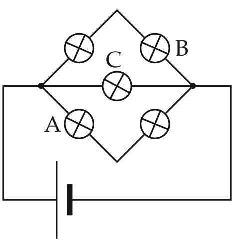
I_A [mA]	I_B [mA]	I_v [mA]

(c)



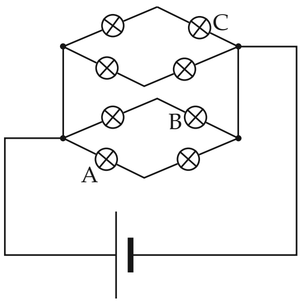
I_A [mA]	I_B [mA]	I_C [mA]	I_v [mA]

(d)



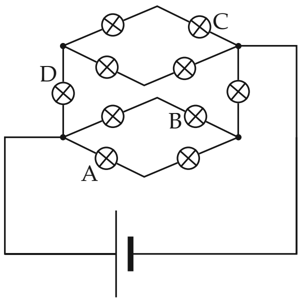
I_A [mA]	I_B [mA]	I_C [mA]	I_v [mA]

(e)



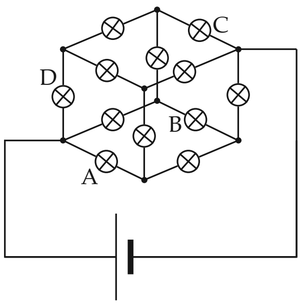
I_A [mA]	I_B [mA]	I_C [mA]	I_v [mA]

(f)



I_A [mA]	I_B [mA]	I_C [mA]	I_D [mA]	I_v [mA]

(g)



I_A [mA]	I_B [mA]	I_C [mA]	I_D [mA]	I_v [mA]

C – eksperimentalna naloga: VZGON

(a) Stehtaj oba valja ter zapiši njuni **teži**.

lesen valj: kovinski valj:

(b) Z obešanjem valjev na vzmet izmeri **raztezke** vzmeti x pri treh različnih silah F, ki napenjajo vzmet.

F [N]	x [cm]
0	0

(c) Nariši graf, ki kaže, kako je raztezek vzmeti x odvisen od sile F, ki napenja vzmet. Določi koeficient vzmeti k, ki je konstanta v Hookovem zakonu.

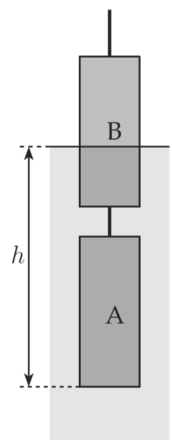
(d) Obesi kovinski valj na vzmet in izmeri **silo vzgona**, ki nanj deluje, ko je valj v celoti potopljen v vodo.

(e) Iz rezultatov meritev sile vzgona določi prostornino kovinskega valja.

(f) Kolikšna je gostota kovine, iz katere je narejen valj, in katera kovina bi to lahko bila?

(g) Na podoben način izmeri še gostoto lesenega valja. Pri tem si pomagaj tako, da na vzmet obesiš oba valja, enega pod drugim.

(h) Na vzmet obesi oba valja, enega pod drugim. Izmeri, kako se z globino h, na kateri je spodnji rob spodnjega valja, spreminjata **sila, ki napenja vzmet** F_{vzm}, ter **skupna sila vzgona** F_{vzg} na oba valja. Meritve predstavi z dvema grafoma, ki ju oba nariši v isti koordinatni sistem. Meriti začni pri $h = 0$.



58. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – regijsko tekmovanje

1. letnik

A1. Katero števko 7-mestnega števila 2345678 moramo izbrisati, da bo dobljeno 6-mestno število deljivo z 9?

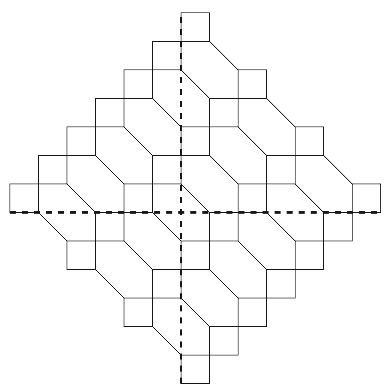
(**A**) 8 (**B**) 7 (**C**) 6 (**D**) 5 (**E**) 4

A2. Na igrišču je bilo 17 deklet in 12 fantov. Najmanj koliko otrok bi moralo še priti na igrišče, da bi se lahko vsi skupaj razdelili na 2 enako veliki skupini, pri čemer bi bilo v vsaki skupini enako število deklet in fantov?

(**A**) 1 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 9

A3. Janez je na list papirja narisal vzorec, sestavljen iz skladnih kvadratov in skladnih šestkotnikov, nato je na vzorec narisal še 2 pravokotni črtkani črti (glej sliko). Kolikšno je razmerje med ploščino območja, ki ga prekrivajo kvadrati, in ploščino območja, ki ga prekrivajo šestkotniki?

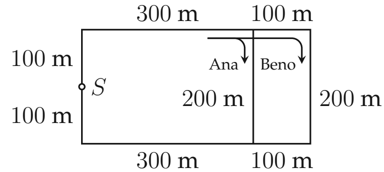
(**A**) $1:3$ (**B**) $1:2$ (**C**) $14:27$
(**D**) $4:7$ (**E**) $14:9$



B1. Poišči vsa naravna števila n, za katera obstaja pravokotnik, katerega dolžine stranic so naravna števila, njegov obseg pa je enak n in je številsko enak ploščini.

B2. Naj bo ABC pravokoten trikotnik s pravim kotom pri C, za katerega velja $|BC| = a$ in $|AC| = b$. Naj bo D taka točka, ki leži na nasprotnem bregu premice AC kot točka B, da je trikotnik ACD podoben trikotniku ABC. Naj bo E taka točka na premici CD, da je kot $\sphericalangle EBC$ pravi. Izrazi ploščino štirikotnika $ABED$ z a in b.

B3. Ana in Beno kolesarita po pravokotni kolesarski stezi v smeri urnega kazalca. Ana kolesari po krajši kolesarski stezi, Beno pa po daljši. Hitrosti Ane in Bena sta v razmerju $v_{\text{Ana}} : v_{\text{Beno}} = 2 : 7$. Oba hkrati začneta v točki S (glej sliko, kjer so prikazane tudi dolžine posameznih odsekov steze). Koliko krogov prevozi Ana in koliko Beno, ko se prvič ponovno srečata v točki S?



2. letnik

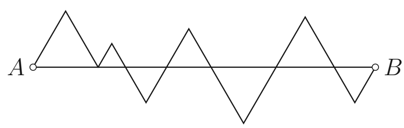
A1. V živalskem vrtu imajo zajci, papige in kače skupaj 24 glav, 14 kril in 62 nog. Koliko kač je v živalskem vrtu?

(**A**) 5 (**B**) 6 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) 9

A2. Naj bosta a in b različni realni števili. Za katero število x velja enakost $\frac{x-a}{x-b} = \frac{x-b}{x-a}$?

(**A**) $\frac{a-b}{2}$ (**B**) $\frac{a^2+b^2}{a+b}$ (**C**) $\frac{a^2+b^2}{2(a+b)}$ (**D**) $a+b$ (**E**) $\frac{a+b}{2}$

A3. Daljica AB je dolga 20 cm. Lomljena črta, ki povezuje točki A in B, tvori z daljico AB 7 enakostraničnih trikotnikov. Noben odsek lomljene črte ne leži na daljici AB. Koliko centimetrov je dolga lomljena črta?



(**A**) $40\sqrt{3}$ (**B**) 40 (**C**) $20+20\sqrt{3}$ (**D**) $20+20\sqrt{2}$

(**E**) Nemogoče je določiti.

B1. Naj bodo a, b in c taka naravna števila, da je število $a^2+b^2+c^2$ deljivo s 7. Dokaži, da je tudi število $a^4+b^4+c^4$ deljivo s 7.

B2. V krog s polmerom r včrtamo deltoid, ki ima eno stranico dvakrat toliko dolgo kot drugo. Izračunaj razmerje med ploščinama včrtanega deltoida in kroga.

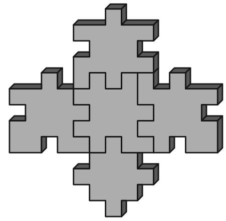
B3. V rombu, katerega stranice in ena izmed diagonal so dolge 60 cm, se nahaja 9 točk. Ali obstajata dve izmed teh točk, ki med seboj nista oddaljeni več kot 30 cm?

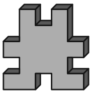
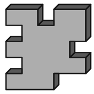
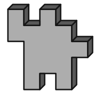
3. letnik

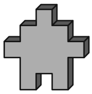
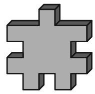
A1. Samo je na list papirja napisal 3-mestno liho naravno število in Petru povedal samo zadnjo števko tega števila. Peter je takoj ugotovil, da število, ki ga je na list papirja napisal Samo, ni praštevilo. Katero števko je Samo povedal Petru?

(**A**) 1 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 9

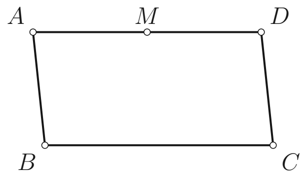
A2. Karmen je na mizi zložila skupaj 5 koščkov (glej sliko). Nato je 4 zunanje koščke obrnila navpično. Kateri košček še potrebuje Karmen, da bo lahko sestavila kocko?



(**A**)  (**B**)  (**C**) 

(**D**)  (**E**) 

A3. Točka M je razpolovišče stranice AD paralelograma $ABCD$ (glej sliko). Kot BAD je velik $84°$, kot AMB pa $48°$. Koliko stopinj je velik kot DCM?

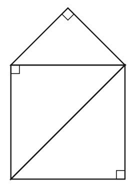


(**A**) 36 (**B**) 42 (**C**) 44 (**D**) 45 (**E**) 48

B1. Poišči vsa realna števila $a \geq 0$, za katera ima enačba $2|x-a|+3|x+a|=1$ vsaj eno realno rešitev.

B2. Ali ima enačba $\cos(\sin x) = \sin(\cos x)$ vsaj eno realno rešitev?

B3. Konveksen večkotnik imenujemo *enostaven*, če ga lahko razrežemo na končno mnogo enakokrakih pravokotnih trikotnikov. Na skici je prikazan enostaven 5-kotnik. Ali obstaja enostaven 7-kotnik? Kaj pa enostaven 9-kotnik?



4. letnik

A1. Miha ima 4 predalčke. V enem predalčku so le kovanci za 20 centov, v enem predalčku le kovanci za 10 centov, v enem predalčku le kovanci za 2 centa in v enem predalčku le kovanci za 1 cent. Miha lahko vzame kovance iz treh različnih predalčkov, in sicer iz enega predalčka en kovanec, iz enega predalčka dva kovanca in iz enega predalčka tri kovance. Največ koliko centov lahko iz predalčkov vzame Miha?

(**A**) 61 (**B**) 62 (**C**) 82 (**D**) 92 (**E**) 96

A2. V okviru preiskave so aretirali štiri osumljence. Vsak je dal eno izjavo.
Žan: "Izmed osumljencev sem edini nedolžen."
Alen: "Izmed osumljencev sem edini kriv."
Zala: "Vsi osumljenci smo nedolžni."
Beno: "Vsaj dva izmed osumljencev sta kriva."
Nadaljnja preiskava je pokazala, da je bil vsaj eden izmed osumljencev kriv in da so nedolžni govorili resnico, krivi pa so lagali. Koliko osumljencev je bilo krivih?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4

(**E**) Nemogoče je določiti.

A3. Koliko je takih dvomestnih števil, katerih predhodnik in naslednik sta praštevilo in popolni kvadrat, ne nujno v tem vrstnem redu?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

B1. Poišči vse pare naravnih števil (m, n), za katere velja

$$m + 3n - 5 = 2v - 11d,$$

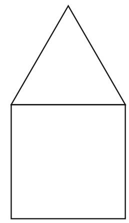
kjer je v najmanjši skupni večkratnik števil m in n, d pa največji skupni delitelj števil m in n.

B2. Poišči vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere velja

$$f(xy) = xf(y) + 3f(x) + 3$$

za vse $x, y \in \mathbb{R}$.

B3. Konveksen večkotnik imenujemo *preprost*, če ga lahko razrežemo na končno mnogo kvadratov in enakostraničnih trikotnikov. Na skici je prikazan preprost 5-kotnik. Ali obstaja preprost 7-kotnik? Kaj pa preprost 13-kotnik?



58. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje

1. letnik

1. Za realni števili a in b, kjer je $|a| \neq |b|$ in $a \neq 0$, velja

$$\frac{a-b}{a^2+ab} + \frac{a+b}{a^2-ab} = \frac{3a-b}{a^2-b^2}.$$

Določi vrednost izraza $\frac{b}{a}$.

2. Naj bosta m in n taki naravni števili, da $5m + n$ deli $5n + m$. Dokaži, da m deli n.

3. V paralelogramu $ABCD$ velja $|AB| = |BD|$. Naj bo K od A različna točka na premici AB, za katero je $|KD| = |AD|$. Zrcalno sliko točke C pri zrcaljenju preko točke K označimo z M, zrcalno sliko točke B pri zrcaljenju preko točke A pa z N. Dokaži, da je trikotnik MDN enakokrak z vrhom pri D.

4. Na mizi so trije kupčki žetonov: eden z a žetoni, eden z b žetoni in eden s c žetoni, pri čemer velja $a \geq b \geq c > 0$. Igralca A in B izmenično prestavljata žetone. Začne igralec A. V vsaki potezi igralec najprej izbere dva kupčka in nato s tistega z manj žetoni prestavi vsaj en žeton na tistega z več žetoni. Če imata izbrana kupčka enako žetonov, prestavi vsaj en žeton s kateregakoli izmed njiju na drugega. Zmaga tisti igralec, po čigar potezi so vsi žetoni na enem kupčku. Določi, kdo ima zmagovalno strategijo, in sicer v odvisnosti od a, b in c.

2. letnik

1. Poišči vse trojice realnih števil (x, y, z), ki zadoščajo sistemu enačb

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4z^2 &= 6y - 4, \\ 2xy - 4xz + 4yz &= y^2 + 5. \end{aligned}$$

2. Poišči vse pare praštevil p in q, za katere sta števili $p + q$ in $p + 4q$ popolna kvadrata.

3. Simetrala notranjega kota $\angle ACB$ ostrokotnega trikotnika ABC seka stranico AB v točki D. Očrtana krožnica trikotnika ADC seka stranico BC v različnih točkah C in E. Premica skozi točko B, vzporedna premici AE, seka premico CD v točki F. Dokaži, da je trikotnik AFB enakokrak.

4. Dan je pravilen n-kotnik, kjer je n liho število, večje od 1. Največ koliko oglišč lahko pobarvamo rdeče, tako da središče n-kotnika ne bo ležalo znotraj večkotnika, določenega z rdečimi oglišči?

3. letnik

1. Poišči vse polinome p z realnimi koeficienti, za katere velja

$$p(p(x)) = (x^2 + x + 1)p(x)$$

   za vse $x \in \mathbb{R}$.

2. Poišči najmanjše naravno število, ki ga lahko zapišemo v obliki $3a^2 - ab^2 - 2b - 4$, kjer sta a in b naravni števili.

3. Naj bo AB najdaljša stranica trikotnika ABC. Z M in N označimo taki točki na stranici AB, da velja $|AM| = |AC|$ ter $|BN| = |BC|$. Razpolovišči daljic MC in NC naj bosta P in R, trikotniku ABC včrtana krožnica pa naj se stranic BC in AC dotika v točkah D in E. Dokaži, da so točke P, R, D in E koneiklične.

4. V vrsti stoji 8 škatel, oštevilčenih s števili od 1 do 8, in prazna vreča. V vsaki škatli je 1 žeton. Miha, ki ima veliko žetonov, se igra igro, v kateri sta dovoljeni naslednji dve potezi:

   - odstrani 1 žeton iz škatle, oštevilčene z i ($i < 8$), in doda 2 žetona v škatlo, oštevilčeno z $(i + 1)$,
   - odstrani 1 žeton iz škatle, oštevilčene z i ($i < 8$), in premakne 1 žeton iz škatle, oštevilčene z $(i + 1)$, v vrečo.

   Igra se konča, ko ni več možno izvesti nobene poteze. Največ koliko žetonov je lahko na koncu v vreči?

4. letnik

1. Naj bosta x_1 in x_2 različni ničli polinoma $p(x) = x^2 + ax + b$, $x_1^2 - \frac{1}{2}$ in $x_2^2 - \frac{1}{2}$ pa naj bosta ničli polinoma $q(x) = x^2 + (a^2 - \frac{1}{2})x + b^2 - \frac{1}{2}$. Določi a in b.

2. Za realno število x označimo z $[x]$ največje celo število, ki ni večje od x.

(a) Dokaži, da za vsa *naravna* števila a, b in c velja

$$\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{c}{a} \right\rfloor}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{c}{ab} \right\rfloor .$$

(b) S primerom pokaži, da gornja enakost ne velja za vsa pozitivna *realna* števila a, b in c.

3. Naj bo $\mathcal{K}$ krožnica očrtana ostrokotnemu trikotniku ABC, pri čemer je $|AB| < |AC|$. Naj bo p zrcalna slika premice BC pri zrcaljenju čez premico AB. Premica p seka krožnico $\mathcal{K}$ v točkah B in E, tangenta na $\mathcal{K}$ v točki A pa seka premico p v točki D. Naj bo F zrcalna slika točke D pri zrcaljenju čez točko A. Premica CF seka krožnico $\mathcal{K}$ v točkah C in G. Dokaži, da sta premici CE in GB vzporedni.

4. Na tabli je napisano neko naravno število n. Na vsakem koraku lahko število na tabli nadomestimo z vsoto dveh naravnih števil, katerih zmnožek je enak številu na tabli. Določi najmanjše število, ki je lahko po končno korakih zapisano na tabli, in sicer v odvisnosti od začetnega števila n.

Rešitve s 34. tekmovanja iz fizike za zlato Stefanovo priznanje – državno tekmovanje

8. razred

A1 Pri prehodu iz zraka v steklo se svetloba lomi proti vpadni pravokotnici, se na zrcalu odbije po odbojnem zakonu ter se pri prehodu iz stekla v zrak lomi stran od vpadne pravokotnice. To zaporedje pravilno kaže slika (D).

A2 Šesta sekunda je med $t = 5$ s in $t = 6$ s. V tej sekundi Piki opravi pot $0{,}5$ m, torej je njegova hitrost enaka $\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

A3 Diamant Koh-i-Nur ima maso $105{,}6 \cdot 0{,}2$ g $= 21{,}12$ g, kar je približno $\frac{1}{50}$ kg $= 20$ g.

A4 Vsota dveh sil je po velikosti manjša ali kvečjemu enaka (točno tedaj, ko sta sili vzporedni in kažeta v isto smer) vsoti velikosti obeh sil.

A5 Tasmanija je daleč pod ekvatorjem na južni polobli. Sonce gre tam čez nebo po severni strani. Simon, ki opazuje pot Sonca čez nebo, je zato obrnjen proti severu. Vzhod je na njegovi desni, zahod na levi. Sonce na celi Zemlji vzhaja na vzhodu in se čez dan pomika proti zahodu. Pravilno orientacijo in zaporedje kaže slika (D).

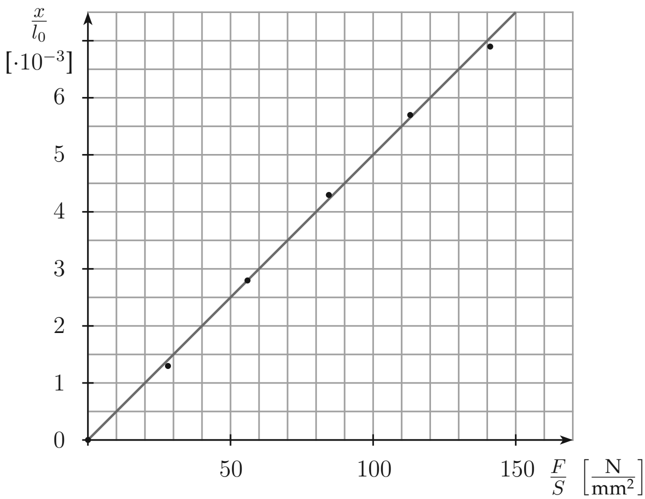
B1 (a) Na žico obešamo uteži za 200 g, zato so sile, ki ustrezajo zaporednim meritvam, mnogokratniki 2 N. V razpredelnici pri (b) so zapisani rezultati meritev.

Pri silah F (prva vrstica) ni odstopanj v natančnosti, pri raztezkih x (druga vrstica) je tolerančno območje $\pm 0{,}005$ mm $= \pm 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ mm.

(b) Presek žice S in dolžino žice l_0 poznamo. Iz podatkov o raztezkih izračunamo natezni tlak $\frac{F}{S}$, najprikladneje v enoti $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$ (lahko pa tudi v kateri drugi, npr. $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$), in relativni raztezek $\frac{x}{l_0}$, v enoti $\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{m}}$ ali brezdimenzijski obliki, kot je zapisano v razpredelnici. Rezultati računov so v razpredelnici.

F [N]	0	2	4	6	8	10
x [mm]	0	0,275	0,575	0,88	1,17	1,42
$\frac{F}{S}$ $\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\right]$	0	28	56	84,5	113	141
$\frac{x}{l_0}$ $[\cdot 10^{-3}]$	0	0,13	0,28	0,43	0,57	0,69

(c) Graf, ki kaže, kako je relativni raztezek žice odvisen od nateznega tlaka v žici, je premica.



(d) Hookov zakon za žico lahko zapišemo tudi z izrazom

$$\frac{F}{S} = E \cdot \frac{x}{l_0} \, .$$

Prožnostni modul žice E je koeficient premega sorazmerja med relativnim raztezkom žice $\frac{x}{l_0}$ in nateznim tlakom v žici $\frac{F}{S}$. Izračunamo ga iz grafa (c),

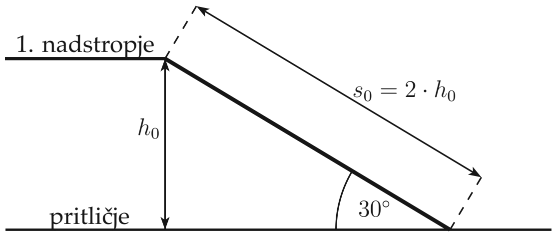
$$\begin{aligned} E &= \frac{F/S}{x/l_0} = \frac{F \cdot l_0}{S \cdot x} = \frac{150\,\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2 \cdot 0{,}75 \cdot 10^{-3}} = \\ &= 200\,000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \pm 10\,000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} = 200\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{mm}^2} \pm 10\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{mm}^2} \, . \end{aligned}$$

B2 (a) Stopnice (in babica z njimi) se spuščajo s hitrostjo (navpično komponento hitrosti) $v_{s,\downarrow} = 0{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Za $h_0 = 6$ m od 1. nadstropja do pritličja se babica spusti v času

$$t_b = \frac{h_0}{v_{s,\downarrow}} = \frac{6\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}}{0{,}3\,\mathrm{m}} = 20\,\mathrm{s}.$$

Medtem, ko babica stoji na tekočih stopnicah in se z njimi spusti s 1. nadstropja do pritličja, opravi pot s_0. Če narišemo profil stopnic, dobimo polovico enakostraničnega trikotnika, kjer je s_0 enaka dolžini stranice, h_0 pa polovici dolžine stranice. Od tu dobimo $s_0 = 2 \cdot h_0 = 12$ m.

Lahko pa stopnice narišemo v merilu in določimo pot s_0 iz slike.



(b) Babica se giblje s hitrostjo, s katero se gibljejo tudi stopnice,

$$v_b = v_s = \frac{s_0}{t_b} = \frac{12\,\mathrm{m}}{20\,\mathrm{s}} = 0{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

(Opazimo tudi, da je hitrost stopnic dvakrat tolikšna kot je hitrost stopnic v navpični smeri, $v_s = 2 \cdot v_{s,\downarrow}$.)

(c) Miha se glede na stopnice giblje s hitrostjo $v'_M = 0{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ proti izteku stopnic v pritličju. Njegova hitrost glede na mirujočo okolico v_M je vsota njegove hitrosti glede na stopnice v'_M in hitrosti stopnic v_s; $v_M = v'_M + v_s = 0{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 0{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Pot s_0 opravi v času

$$t_M = \frac{s_0}{v_M} = \frac{12\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}}{1\,\mathrm{m}} = 12\,\mathrm{s}.$$

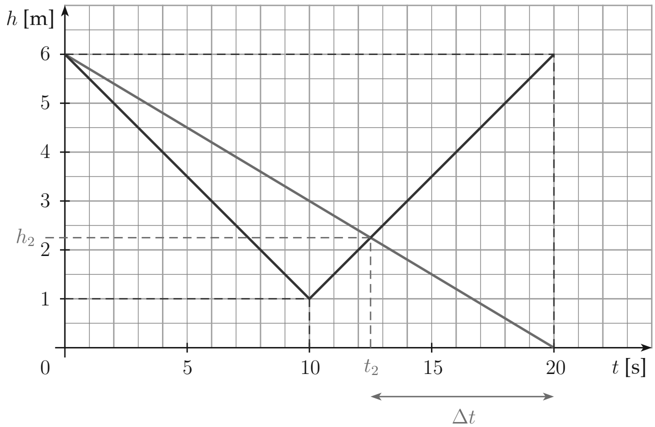
(d) Miha se glede na stopnice giblje s hitrostjo $v'_M = 0{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, v navpični smeri pa to pomeni komponento hitrosti $v'_{M,\downarrow} = \frac{1}{2}\,v'_M = 0{,}2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Ker meri ena stopnica v višino $20\,\mathrm{cm} = 0{,}2\,\mathrm{m}$, pomeni, da Miha v 1 s prehodi 1 stopnico, v času $t_M = 12$ s pa 12 stopnic.

(e) Če bi Miha po stopnicah tekel v nasprotno smer in prispel iz pritličja do 1. nadstropja v enakem času $t_M = 12$ s, bi morala biti njegova hitrost glede na mirujočo okolico po velikosti enaka kot v prejšnjem primeru, torej $v_M = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Če je v tem primeru njegova hitrost glede na stopnice v''_M, je njegova hitrost glede na mirujočo okolico $v_M = v''_M - v_s$. Od tu dobimo njegovo hitrost glede na stopnice,

$$v''_M = v_M + v_s = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 0{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

(f) Miha se glede na stopnice giblje s hitrostjo $v''_M = 1{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, v navpični smeri pa to pomeni komponento hitrosti $v''_{M,\uparrow} = \frac{1}{2}\,v''_M = 0{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Ker meri ena stopnica v višino $20\,\mathrm{cm} = 0{,}2\,\mathrm{m}$, pomeni, da v 1 s prehodi 4 stopnice, v času $t_M = 12$ s pa $4 \cdot 12 = 48$ stopnic.

(g) Na sliki sta grafa, ki kažeta, kako se s časom spreminjata višini, na katerih sta babica (rdeča črta) in Miha (modra črta) od trenutka, ko sta v 1. nadstropju stopila na tekoče stopnice. Višina $h = 0$ je višina pritličja, višina $h_0 = 6$ m pa višina 1. nadstropja.



(h) Iz grafa preberemo (ali pa na to sklepamo iz simetrije), da se Miha obrne ob času $t_1 = 10$ s. Tedaj je na višini $h_1 = 1$ m nad pritličjem. Na grafu ta dogodek označuje modra črtkana črta.

(i) Trenutek in višino, na kateri Miha teče mimo babice, lahko izračunamo na več načinov. Tu je opisan eden od njih.

Označimo z Δt čas, ki preteče od trenutka srečanja do trenutka $t_b = 20$ s, ko babica prispe v pritličje (Miha pa nazaj v 1. nadstropje). Ta čas je označen na grafu pri (g). V tem času se višini, na katerih sta babica in Miha, skupaj spremenita za h_0. V navpični smeri se babica in Miha gibljeta s hitrostima $v_{b,\downarrow} = 0{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ in $v_{M,\uparrow} = \frac{1}{2}\,v_M = 0{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Zapišemo lahko

$$v_{b,\downarrow}\cdot\Delta t + v_{M,\uparrow}\cdot\Delta t = (v_{b,\downarrow} + v_{M,\uparrow})\cdot\Delta t = h_0\,.$$

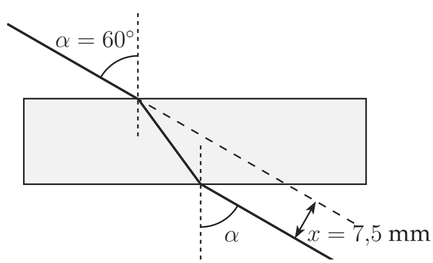
Od tu dobimo

$$\Delta t = \frac{h_0}{v_{b,\downarrow} + v_{M,\uparrow}} = \frac{6\,\mathrm{m}}{0{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 0{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \frac{6\,\mathrm{m}}{0{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 7{,}5\,\mathrm{s}.$$

Miha teče mimo babice v trenutku $t_2 = t_b - \Delta t = 12{,}5$ s. Višina, na kateri je babica, se je do tega trenutka znižala za $\Delta h_b = v_{b,\downarrow}\cdot t_2 = 0{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 12{,}5$ s $= 3{,}75$ m, kar pomeni, da sta ob t_2 babica in Miha na višini $h_2 = h_0 - \Delta h_b = 2{,}25$ m.

Sklop C:

C (a) Na stekleni ploščici z debelino $d = 1{,}5$ cm se žarek vzporedno premakne za $x = 7{,}5$ mm $\pm\,0{,}5$ mm.

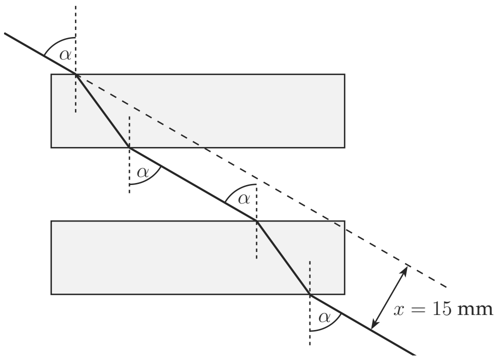


(b) Izmerjeni premiki žarka x pri različnih vpadnih kotih α so zapisani v razpredelnici. Dovoljeno odstopanje je pri vsakem posameznem premiku $\pm\,0{,}5$ mm.

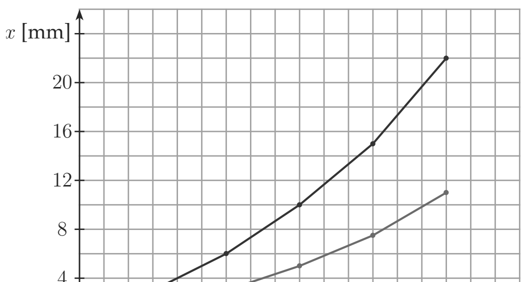
α	$0°$	$15°$	$30°$	$45°$	$60°$	$75°$
x [mm]	0	$1{,}5$	$3{,}0$	$5{,}0$	$7{,}5$	$11{,}0$

(c) Na ploščici z dvojno debelino $2d$ je tudi premik žarka dvakrat tolikšen kot je premik na ploščici z debelino d, torej $x = 15$ mm $\pm\,1$ mm.

(d) Zračna reža med vzporednima ploščicama ne spremeni premika žarka x, ki prehaja skozi obe ploščici. Ne glede na to, kolikšna je širina reže, je premik žarka $x = 15$ mm $\pm\,1$ mm.



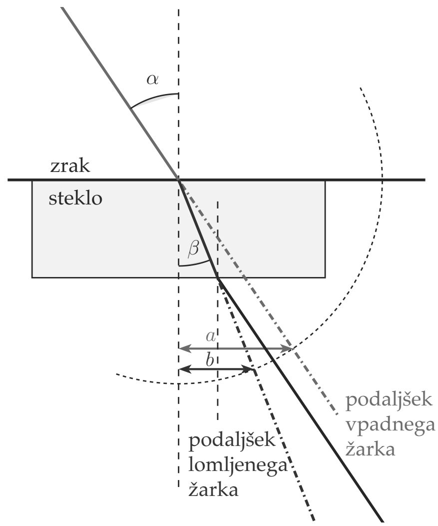
(e) Grafa kažeta, kako je premik žarka x pri prehodu skozi ploščici z debelino d (rdeč) in $2d$ (moder) odvisen od vpadnega kota α. Grafa nista linearna.



(f) Da lahko izmerimo dolžini katet a in b moramo narisati podaljška vpadnega in lomljenega žarka. Najenostavneje je, če za določanje dolžini hipotenuz v obeh trikotnikih uporabimo krožnico, narisano na priloženem kotomeru. Za natančnost izvedbe meritve je pomembno, da je ploščica postavljena tako, da je ploskev, na katero vpada žarek, vzporedna vodoravnici, narisani na kotomeru, ter da žarek na ploščico vpada v središču kotomera. Meritve dolžin katet in račune lomnega količnika kaže razpredelnica.

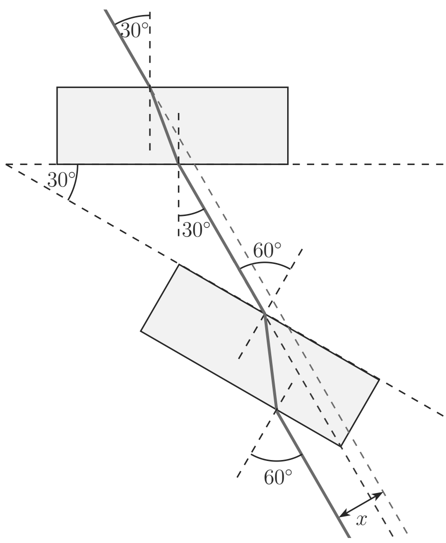
Povprečni lomni količnik je $\bar{n} = 1{,}45 \pm\, 0{,}1$.

Dovoljeno odstopanje od $\bar{n}$ je pri vsakem posameznem lomnem količniku $\pm\,0{,}1$.



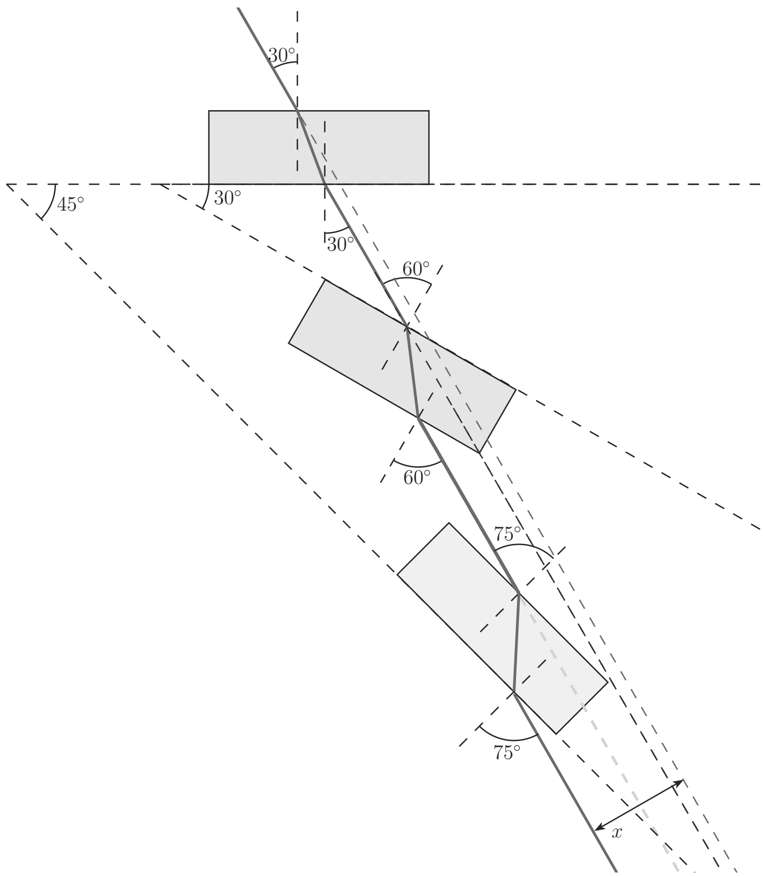
α	a [mm]	b [mm]	n
$60°$	57	39	$1{,}46$
$75°$	64	45	$1{,}42$

(g) Slika kaže pot žarka pri prehodu skozi obe ploščici. Na prvo vpada pod vpadnim kotom $\alpha_1 = 30°$ (podano), na drugo pod vpadnim kotom $\alpha_2 = 60°$ (to je bilo potrebno ugotoviti). Celoten premik žarka x je vsota premikov, ki jih doživi na posamezni ploščici, $x = x_1(30°) + x_2(60°) = 10{,}5$ mm ± 1 mm.



(h) Primer, ko je tretja ploščica zasukana glede na drugo (za $\delta_2 = 15°$) v isto smer kot druga glede na prvo, kaže slika. Žarek se na poti skozi ploščice trikrat premakne; na prvih dveh ploščicah enako kot v primeru (g), na tretji, na katero vpada pod vpadnim kotom $\alpha_3 = 75°$ (kar je bilo potrebno ugotoviti), pa še za $x_3 = 11$ mm. Skupni premik je $x = x_1 + x_2 + x_3 = 21{,}5$ mm $\pm\, 1{,}5$ mm.

V primeru, ko je tretja ploščica zasukana v obratni smeri ($\delta_2 = -15°$), je vpadni kot žarka na tretjo ploščico $\alpha_3 = 45°$. V tem primeru je premik žarka $x_3 = 5{,}0$ mm in je skupni premik $x = 15{,}5$ mm $\pm\, 1{,}5$ mm.



(i) Največji kot zasuka δ_2 tretje ploščice glede na prvo je tisti, pri katerem je vpadni kot žarka na tretjo ploščico α_3 največji možen, $90°$. Iz prejšnjih primerov vidimo, kako kot zasuka med ploščicama vpliva na vpadni kot žarka: vpadni kot žarka na naslednjo ploščico α_{i+1} je vsota vpadnega kota na prejšno ploščico α_i in kota med ploščicama δ_i, $\alpha_{i+1} = \alpha_i + \delta_i$, oziroma, za prvo in drugo ploščico $\alpha_2 = \alpha_1 + \delta_1 = 30° + 15° = 45°$, ter za drugo in tretjo ploščico $\alpha_3 = \alpha_2 + \delta_2$. Ko upoštevamo $\alpha_{3,max} = 90°$ in $\alpha_2 = 45°$ vidimo, da je $\delta_{2,max} = 45°$.

9. razred

A1 Pri 40-kratni povečavi je premer d vidnega polja, ki ga vidimo pod mikroskopom, 4 mm, kar je 5-krat toliko kot pri 200-kratni povečavi, ko je premer vidnega polja $0{,}8$ mm. Površina vidnega polja je sorazmerna d^2, kar pomeni, da je pri 40-kratni povečavi 25-krat tolikšna kot pri 200-kratni povečavi. Parameciji so po vsem vidnem polju razporejeni enakomerno, zato jih pri 40-kratni povečavi na 25-krat večjem vidnem polju vidimo 25-krat toliko kot pri 200-kratni povečavi (ko jih vidimo 5); $25 \cdot 5 = 125$.

A2 Ko Manca mirno stoji, sila tal na Manco uravnovesi njeno težo (sila tal je po velikosti enaka teži 410 N). Ko Manca prične dvigovati roke, se premika tudi njeno težišče, pospešeno navzgor. Na začetku dvigovanja rok je sila tal večja od teže, rezultanta obeh sil je usmerjena navzgor. Preden Manca obdrži roke zravnane nad glavo, jih tudi ustavlja. Tedaj se ustavlja tudi Mančino težišče. Med ustavljanjem je pospešek njenega težišča v nasprotni smeri kot je bil pospešek ob začetku dvigovanja rok (je pojemek). Rezultanta sil na Manco kaže medtem, ko Manca roke ustavlja, navzdol. Sila tal je med ustavljanjem rok po velikosti manjša od Mančine teže.

A3 Izračunamo lahko delo, ki ga kolesar opravi pri premagovanju sile zračnega upora na obeh odsekih poti, in to delo delimo s časom, v katerem kolesar določen del poti opravi. Lahko pa vmesni korak izpustimo, če zapišemo

$$P = \frac{A}{t} = \frac{F \cdot s}{s/v} = \frac{F \cdot s \cdot v}{s} = F \cdot v\,.$$

Ko kolesar vozi s hitrostjo $30\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, je moč, s katero premaguje silo zračnega upora 16 N 8-krat tolikšna kot tedaj, ko vozi s hitrostjo $15\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ in premaguje silo zračnega upora 4 N.

A4 Košara balona ima po 10 s od začetka dviganja hitrost $v = a \cdot t = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ in je na višini $h = \frac{1}{2}\,a \cdot t^2 = 50$ m. Enako hitrost v smeri navzgor in višino ima tudi vreča peska, ki v tistem trenutku odpade od košare. Od trenutka, ko se vreča odveže, je njeno gibanje navpični met navzgor z začetno hitrostjo $v = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Največjo višino vreča doseže $t_1 = 1$ s zatem, ko se odveže (ko se njena hitrost, ki se zmanjšuje s težnim pospeškom, zmanjša na 0). Do tega trenutka se njena višina poveča še za $\Delta h = \frac{1}{2}\,g \cdot t_1^2 = 5$ m, kar pomeni, da je v najvišji točki na višini $h_1 = 55$ m. S te višine prosto pada proti tlem. Prosti pad traja $t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot h_1}{g}} = \sqrt{11}$ s $= 3{,}3$ s. Od trenutka, ko se vreča odveže, do trenutka, ko pade na tla, preteče čas $t_1 + t_2 = 4{,}3$ s.

A5 Tasmanija je daleč pod ekvatorjem na južni polobli. Sonce gre tam čez nebo po severni strani. Simon, ki opazuje pot Sonca čez nebo, je zato obrnjen proti severu. Vzhod je na njegovi desni, zahod na levi. Sonce na celi Zemlji vzhaja na vzhodu in se čez dan pomika proti zahodu. Pravilno orientacijo in zaporedje kaže slika (D).

B1 (a) Iz grafa preberemo, da je hitrost drsalca, ki je od startne črte oddaljen 20 m, $v = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Masa drsalca je $m = 75$ kg, njegova kinetična energija pa je $W_k = \frac{1}{2}\,m \cdot v^2 = 3\,750$ J.

(b) Povprečno silo podlage izračunamo iz dela, ki ga ta opravi na drsalcu na poti 20 m od startne črte in ki je enako kinetični energiji drsalca W_k, ko je za 20 m oddaljen od startne črte, $A = W_k = \bar{F} \cdot s$, in

$$\bar{F} = \frac{A}{s} = \frac{W_k}{s} = \frac{3\,750\,\mathrm{J}}{20\,\mathrm{m}} = 187{,}5\,\mathrm{N}.$$

(c) Sila podlage, ki deluje na drsalca v smeri njegovega gibanja, je reakcija na silo, s katero drsalec deluje na podlago (se od nje odriva). Tretji Newtonov zakon pravi, da sta ti dve sili po velikosti enaki. Drsalec se na prvih 20 m od startne črte od podlage odriva s povprečno silo $187{,}5$ N.

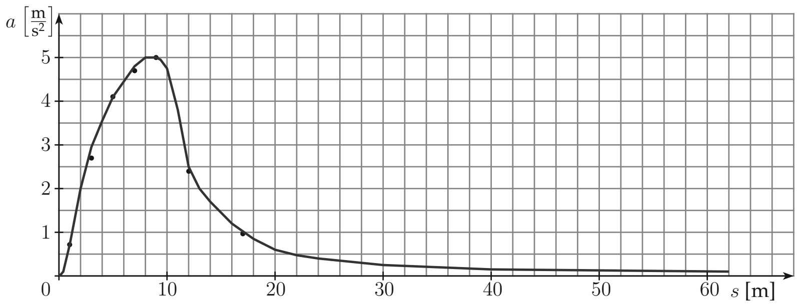
(d) V razpredelnici so zapisane hitrosti drsalca pri različnih oddaljenostih od startne črte. Dovoljeno odstopanje je $\pm 0{,}1 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$.

s [m]	0	2	4	6	8	10	14	20
$v \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$	0	1,8	3,7	5,5	7,0	8,3	9,4	10,0

(e) V razpredelnici so izračunane vrednosti Δs, Δv, $\bar{v}$ in a. Dovoljena odstopanja so 0 za Δs, $\pm 0{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ za Δv, $\pm 0{,}1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ za $\bar{v}$ in $\pm 20\,\%$ za a.

od s_1 do s_2 [m]	Δs [m]	$\Delta v \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$	$\bar{v} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$	$a \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$
$0 - 2$	2	1,8	0,8	0,72
$2 - 4$	2	1,9	2,8	2,7
$4 - 6$	2	1,8	4,6	4,1
$6 - 8$	2	1,5	6,3	4,7
$8 - 10$	2	1,3	7,7	5,0
$10 - 14$	4	1,1	8,9	2,4
$14 - 20$	6	0,6	9,7	0,97

(f) Graf, ki kaže, kako se pospešek drsalca spreminja s potjo. Vrednosti pospeška, izračunane pri vprašanju (e), pripišemo poti $\bar{s}$, ki je na sredini ustreznega odseka (primer: za pot od $s_1 = 2$ m do $s_2 = 4$ m je $\bar{s} = 3$ m).



B2 (a) Upoštevamo, da sta do napetosti 12 V tok skozi posamezno žarnico in napetost na žarnici premo-sorazmerna. Ko je na žarnici napetost 6 V, teče skoznjo tok 300 mA, ko je na njej napetost 1 V pa teče skoznjo tok 50 mA. V vezju so vse 4 žarnice enakovredno vezane. Skupna napetost vira 10 V se porazdeli na dve zaporedno vezani žarnici, kar pomeni, da je na vsaki napetost 5 V in teče skoznjo tok 250 mA, skupni tok skozi vir je vsota tokov skozi obe veji, torej 500 mA.

I_A [mA]	I_B [mA]	I_v [mA]
250 mA	250 mA	500 mA

(b) Ker so vse žarnice enake, dodatna povezava ne spremeni ničesar, tokovi so enaki kot v primeru (a). Med priključkoma dodane povezave ni napetosti in tok po njej ne teče.

I_A [mA]	I_B [mA]	I_v [mA]
250 mA	250 mA	500 mA

(c) Če v povezavo, dodano pri (b) in skozi katero tok ne teče, vežemo žarnico, na njej ni napetosti in skoznjo tok ne teče. Tokovi skozi žarnici A in B ter skozi vir so enaki kot v primerih (a) in (b).

I_A [mA]	I_B [mA]	I_C [mA]	I_v [mA]
250 mA	250 mA	0	500 mA

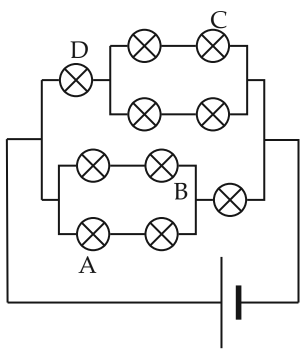
(d) Žarnica C je sama vezana vzporedno dvema vejama, v katerih sta po dve žarnici, zato je na napetost na žarnici C dvakrat tolikšna kot je napetost na posamezni od ostalih žarnic. Tudi tok skoznjo je dvakrat tolikšen kot je tok skozi posamezno vzporedno vejo. Tok skozi vir je vsota tokov skozi vse tri veje (in žarnice A, B in C).

I_A [mA]	I_B [mA]	I_C [mA]	I_v [mA]
250 mA	250 mA	500 mA	1000 mA

(e) V tem primeru je vezje preprosto, štiri enakovredne veje z dvema zaporedno vezanima žarnicama. Tok skozi vir $I_v = 4 \cdot I_A$.

I_A [mA]	I_B [mA]	I_C [mA]	I_v [mA]
250 mA	250 mA	250mA	1000 mA

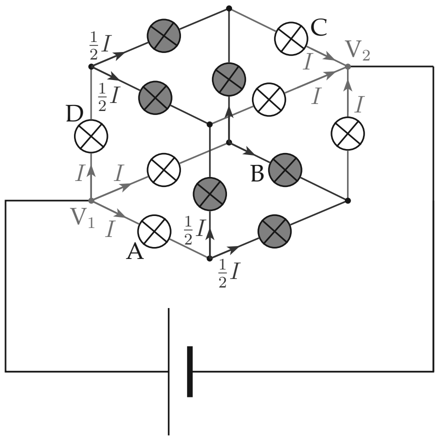
(f) Isto vezje lahko narišemo tudi tako:



Veji s po 5-imi žarnicami sta enaki, po obeh teče enak tok. Skozi žarnico D teče dvakrat tolikšen tok kot skozi žarnice A, B in C, in tudi napetost na žarnici D, U_D je dvakrat tolikšna kot je napetost na žarnicah A, B in C, $U_D = 2 \cdot U_C$. Obenem velja $U_D + 2 \cdot U_C = 4 \cdot U_C = 10$ V. Torej je $U_C = U_A = U_B = 2{,}5$ V, skozi žarnice A, B in C teče tok $2{,}5 \cdot 50$ mA $= 125$ mA, skozi žarnico D pa tok 250 mA.

I_A [mA]	I_B [mA]	I_C [mA]	I_D [mA]	I_v [mA]
125 mA	125mA	125mA	250mA	500 mA

(g) V tem vezju sta vozlišči V_1 in V_2 v nasprotnih krajiščih telesne diagonale kocke, pri kateri so v vseh robovih vezane enake žarnice. To vezje ima precejšnjo simetrijo. Žarnice, obarvane sivo, so med seboj enakovredne (postavljene so simetrično glede na vozlišči V_1 in V_2), na vseh je enaka napetost (med njimi je tudi žarnica B). Med seboj so enakovredne tudi preostale žarnice (med njimi so žarnice A, C in D). Skozi sivo obarvane žarnice teče polovica toka I, ki teče skozi svetle žarnice. Denimo, da je napetost na sivo obarvanih žarnicah U_1, potem je napetost na svetlih žarnicah $2 \cdot U_1$. Izberemo si pot, po kateri gremo iz vozlišča V_1 do vozlišča V_2, najprej skozi svetlo žarnico, potem skozi sivo, in spet skozi svetlo. Seštejemo napetosti na žarnicah $2 \cdot U_1 + U_1 + 2 \cdot U_1 = 10$ V, od tu dobimo $U_1 = 2$ V. Skozi sive žarnice teče tok 100 mA, skozi svetle pa 200 mA.



I_A [mA]	I_B [mA]	I_C [mA]	I_D [mA]	I_v [mA]
200 mA	100 mA	200mA	200mA	600 mA

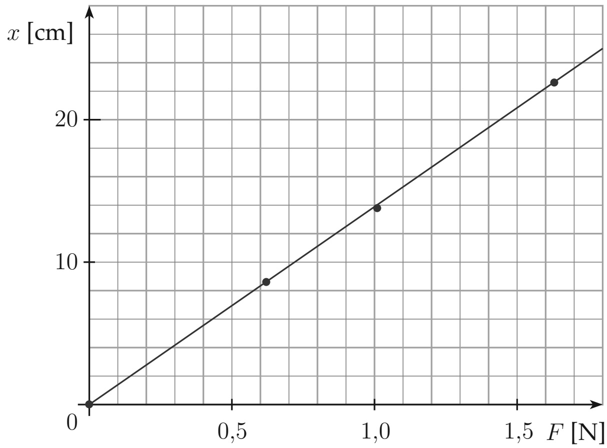
Sklop C:

C (a) Masi valjev sta $m_{les} = 62$ g ± 5 g in $m_{kov} = 101$ g ± 1 g, torej sta njuni teži $F_{g,les} = 0{,}62$ N $\pm 0{,}05$ N in $F_{g,kov} = 1{,}01$ N $\pm 0{,}01$ N.

(b) Na vzmet obesimo vsakega od valjev posamezno in oba skupaj. Rezultati meritev **raztezkov** vzmeti so zapisani v razpredelnici. Dovoljeno odstopanje je pri rezultatih meritev raztezkov $x \pm 4$ mm.

F [N]	x [cm]
0	0
0,62	8,6
1,01	13,8
1,63	22,6

(c) Meritve, opravljene pri vprašanju (b), vnesemo v graf.



Koeficient vzmeti je

$$k = \frac{F}{x} = \frac{1{,}8\,\mathrm{N}}{25\,\mathrm{cm}} = 7{,}2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}, \pm\, 0{,}2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} = 0{,}072\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}}, \pm\, 0{,}002\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}}\,.$$

(d) Ko na vzmeti obešeni kovinski valj v celoti potopimo v vodo, je raztezek vzmeti manjši od raztezka, ko valj visi v zraku, ker je sila, s katero potopljen valj napenja vzmet, manjša od teže valja za silo vzgona. Izmerimo raztezek vzmeti, ko je kovinski valj v celoti potopljen v vodo in dobimo $x = 8{,}9$ cm $\pm 0{,}4$ cm. Iz grafa pri (c) preberemo (ali izračunamo iz Hookovega zakona s koeficientom vzmeti k), da tak raztezek ustreza sili $F_{vzm} = k \cdot x = 0{,}64$ N.

Za velikosti sil velja $F_{g,kov} = F_{vzg,kov} + F_{vzm}$ in

$$F_{vzg,kov} = F_{g,kov} - F_{vzm} = 1{,}01\,\mathrm{N} - 0{,}64\,\mathrm{N} = 0{,}37\,\mathrm{N} \pm 0{,}03\,\mathrm{N}\,.$$

Pri merjenju sile vzmeti na potopljen valj pri tem in vseh naslednjih nalogah pazimo, da valj ne sede na dno.

(e) Sila vzgona je po velikosti enaka teži izpodrinjene tekočine. Kovinski valj izpodrine vodo s težo $0{,}37$ N, kar ustreza 37 cm^3 $=$ 37 ml vode (teža 1 litra vode je 10 N). Prostornina izpodrinjene vode je enaka prostornini valja, $V_{kov} = 37$ cm^3 $\pm$ 3 cm^3.

(f) Gostota kovine, iz katere je narejen valj, je

$$\rho_{kov} = \frac{m_{kov}}{V_{kov}} = \frac{101\,\mathrm{g}}{37\,\mathrm{cm}^3} = 2{,}7\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \pm 0{,}2\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = 2\,700\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \pm 200\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

V razpredelnici gostot (na dovoljenem listu s fizikalnimi obrazci) najdemo kovino s tolikšno gostoto, aluminij.

(g) Da lahko določimo gostoto lesenega valja, potrebujemo podatek o njegovi prostornini (maso že poznamo iz (a)). Postopamo podobno kot pri kovinskem valju, s to razliko, da hkrati v vodo potapljamo oba valja: leseni valj se sam ne bi potopil pod gladino vode, zato ga obtežimo s kovinskim. Pri računih upoštevamo, da je sila vzmeti, ko sta pod gladino potopljena oba valja, zmanjšana za sili vzgona na oba valja.

Ko sta pod gladino vode potopljena oba valja, je raztezek vzmeti $x = 6{,}1$ cm $\pm 0{,}4$ cm. Tak raztezek ustreza sili vzmeti $F_{vzm} = k \cdot x = 0{,}44$ N.

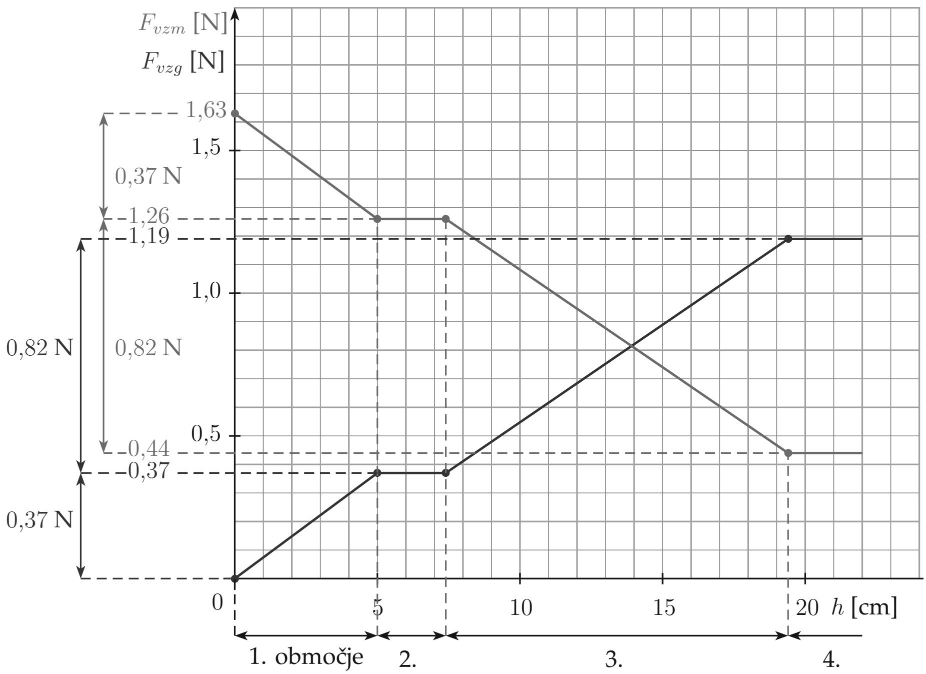
Ko sta v celoti v vodo potopljena oba valja, lahko za velikosti sil zapišemo $F_{vzm} + F_{vzg,les} + F_{vzg,kov} = F_{g,les} + F_{g,kov}$ in od tu izrazimo silo vzgona na lesen valj $F_{vzg,les}$,

$$F_{vzg,les} = F_{g,les} + F_{g,kov} - F_{vzm} - F_{vzg,kov} = 0{,}62\,\mathrm{N} + 1{,}01\,\mathrm{N} - 0{,}44\,\mathrm{N} - 0{,}37\,\mathrm{N} = 0{,}82\,\mathrm{N}\,.$$

Sila vzgona na potopljen lesen valj je po velikosti enaka teži izpodrinjene vode. Lesen valj izpodrine $82\ \mathrm{cm}^3 \pm 4\ \mathrm{cm}^3$ vode, njegova prostornina je $V_{les} = 82\ \mathrm{cm}^3 \pm 4\ \mathrm{cm}^3$. Gostota lesa, iz katerega je narejen valj, je

$$\rho_{les} = \frac{m_{les}}{V_{les}} = \frac{62\,\mathrm{g}}{82\,\mathrm{cm}^3} = 0{,}76\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \pm 0{,}04\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = 760\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \pm 40\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

(h) Graf, narisan z rdečo, kaže, kako se z globino spodnje ploskve spodnjega (kovinskega) valja spreminja sila vzmeti F_{vzm}, graf, narisan z modro pa kaže, kako se z globino spodnje ploskve spodnjega valja spreminja skupna sila vzgona na oba valja F_{vzg}. V 1. območju je lesen valj v zraku, kovinski je delno potopljen. V 2. območju je kovinski valj v celoti potopljen, lesen valj je v celoti v zraku. V 3. območju je tudi lesen valj delno potopljen. V 4. območju sta v celoti potopljena oba valja.



Rešitve 58. matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije – regijsko tekmovanje

1. letnik

A1. Naravno število je deljivo z 9 natanko tedaj, ko je vsota njegovih števk deljiva z 9. Ker je vsota števk 7-mestnega števila 2345678 enaka $35 = 3 \cdot 9 + 8$, moramo izbrisati števko 8. S tem dobimo 6-mestno število 234567, katerega vsota števk je $27 = 3 \cdot 9$, in je zato deljivo z 9.

A2. Če se otroci na igrišču v nekem trenutku lahko rezdelijo v 2 enako veliki skupini, pri čemer je v vsaki skupini n fantov in n deklet, potem je skupno število deklet na igrišču enako $2n$, kar je sodo število in je enako skupnemu številu fantov na igrišču. Da bo število deklet na igrišču sodo in enako številu fantov, mora na igrišče priti vsaj 1 dekle in vsaj 6 fantov. Na igrišče bi torej moralo priti še najmanj 7 otrok.

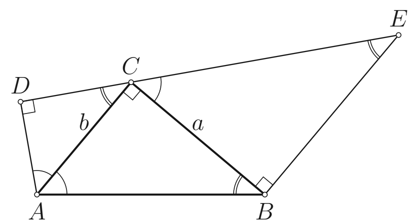
A3. Označimo ploščino enega kvadrata s p. Ploščina območja, ki ga prekrivajo kvadrati, je potem enaka $28p$. Ker sta črtkani črti pravokotni, je iz slike razvidno, da lahko sredinski šestkotnik sestavimo iz dveh celih kvadratov in iz dveh polovičk kvadrata. Ploščina enega šestkotnika je torej enaka $3p$, ploščina območja, ki ga prekrivajo šestkotniki, pa $18 \cdot 3p = 54p$. Iskano razmerje je zato enako $28p : 54p = 14 : 27$.

B1. Naj bosta a in b dolžini stranic takega pravokotnika. Iz navodil naloge sledi, da je $2(a+b) = n = ab$. To enakost med a in b preuredimo v $a(b-2) = 2b$ in od tod izrazimo

$$a = \frac{2b}{b-2} = \frac{2(b-2)}{b-2} + \frac{4}{b-2} = 2 + \frac{4}{b-2}.$$

Ker sta a in b naravni števili, mora število $b-2$ deliti 4. Ker je hkrati število $b-2$ večje od -2, je lahko enako le $-1, 1, 2$ ali 4. Torej je b zaporedoma enak $1, 3, 4$ ali 6 in a zaporedoma enak $-2, 6, 4$ ali 3. Prvi primer odpade, ker -2 ni naravno število. V drugem in četrtem primeru dobimo $n = 18$, v tretjem pa $n = 16$.

B2. Zaradi podobnosti trikotnikov ACD in ABC velja $\sphericalangle CAD = \sphericalangle BAC$. Opazimo, da točka E leži na drugem bregu premice BC kot točka A, zato velja $\sphericalangle BCE = 180^\circ - \sphericalangle ACB - \sphericalangle DCA = 90^\circ - \sphericalangle DCA = \sphericalangle CAD = \sphericalangle BAC$. Torej sta si tudi trikotnika ABC in CEB podobna, saj imata dva enaka kota. Po pitagorovem izreku velja $|AB| = \sqrt{a^2+b^2}$. Iz podobnosti trikotnikov ABC in ACD sledi



$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|} \qquad \text{in} \qquad \frac{|DC|}{|AC|} = \frac{|CB|}{|AB|}.$$

Iz prve enakosti izrazimo $|AD| = \frac{|AC|^2}{|AB|} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, iz druge pa $|DC| = \frac{|AC| \cdot |CB|}{|AB|} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Ker sta si tudi trikotnika ABC in CEB podobna, velja

$$\frac{|BE|}{|BC|} = \frac{|CB|}{|CA|},$$

od koder izrazimo $|BE| = \frac{|CB|^2}{|CA|} = \frac{a^2}{b}$. Ploščina štirikotnika $ABED$ je torej enaka

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{|AD|\cdot|DC|}{2}+\frac{|AC|\cdot|CB|}{2}+\frac{|CB|\cdot|BE|}{2}=\\
&= \frac{ab^3}{2(a^2+b^2)}+\frac{ab}{2}+\frac{a^3}{2b}=\frac{ab^4+ab^2(a^2+b^2)+a^3(a^2+b^2)}{2b(a^2+b^2)}=\\
&= \frac{2ab^4+2a^3b^2+a^5}{2b(a^2+b^2)}.
\end{aligned}
$$

B3. Anin krog je dolg 1000 m, Benov pa 1200 m. Denimo, da se v točki S spet srečata po tem, ko je Ana prevozila n krogov, Beno pa k krogov. Ana prevozi n krogov v času $n \cdot \frac{1000\text{ m}}{v_{\text{Ana}}}$, Beno pa k krogov v času $k \cdot \frac{1200\text{ m}}{v_{\text{Beno}}}$. Ta dva časa morata biti enaka, torej je

$$n \cdot \frac{1000\text{ m}}{v_{\text{Ana}}} = k \cdot \frac{1200\text{ m}}{v_{\text{Beno}}}.$$

Iz te enačbe izrazimo
$$\frac{n}{k} = \frac{1200\text{ m}}{1000\text{ m}} \cdot \frac{v_{\text{Ana}}}{v_{\text{Beno}}} = \frac{6}{5}\cdot\frac{2}{7} = \frac{12}{35}.$$

Ker iščemo najmanjša možna n in k, ulomek $\frac{12}{35}$ pa je okrajšan, sledi $n = 12$ in $k = 35$. Torej, ko se prvič ponovno srečata v točki S, Ana prevozi 12 krogov, Beno pa 35 krogov.

2. letnik

A1. Zajci in kače nimajo kril, papige pa imajo po dve krili, zato je v živalskem vrtu $14 : 2 = 7$ papig. Papige imajo torej skupaj $7 \cdot 2 = 14$ nog. Ker kače nimajo nog, imajo zajci skupaj $62 - 14 = 48$ nog. Vsak zajec ima 4 noge, zato je v živalskem vrtu $48 : 4 = 12$ zajcev. Torej je v živalskem vrtu $24 - 12 - 7 = 5$ kač.

A2. Dano enačbo pomnožimo z $(x-a)(x-b)$, da dobimo $(x-a)^2 = (x-b)^2$. Po kvadriranju odštejemo x^2 in dobimo $-2ax + a^2 = -2bx + b^2$, kar lahko preuredimo do $2(b-a)x = (b-a)(b+a)$. Ker $b - a \neq 0$, lahko enačbo delimo z $b - a$, da dobimo $2x = b + a$, od koder izrazimo $x = \frac{a+b}{2}$.

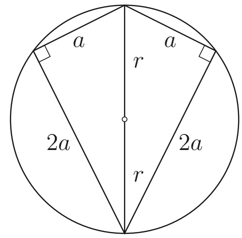
A3. Označimo dolžine stranic teh 7 enakostraničnih trikotnikov po vrsti z $a_1, a_2, \ldots, a_7$. Dolžina daljice AB je potem enaka $a_1 + a_2 + \ldots + a_7$, dolžina lomljene črte od A do B pa $2a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_7 = 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_7)$. Dolžina lomljene črte je torej dvakratnik dolžine daljice in je zato enaka 40 cm.

B1. Pri deljenju s 7 ima popoln kvadrat lahko ostanek $0, 1, 2$ ali 4. Ker je število $a^2 + b^2 + c^2$ deljivo s 7, morajo imeti števila a^2, b^2 in c^2 pri deljenju s 7 ali vsa ostanek 0 ali tri različne ostanke enake $1, 2$ in 4. V prvem primeru so števila a, b in c deljiva s 7 in zato je tudi število $a^4 + b^4 + c^4$ deljivo s 7. V drugem primeru lahko predpostavimo, da je $a^2 = 7k + 1$, $b^2 = 7m + 2$ in $c^2 = 7n + 4$ za neka cela števila k, m in n. Tedaj velja

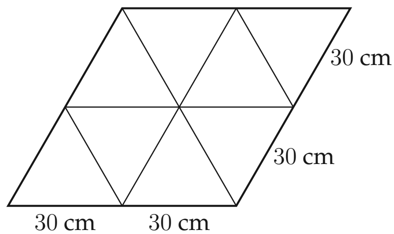
$$a^4 + b^4 + c^4 = (7k+1)^2 + (7m+2)^2 + (7n+4)^2 = 49(k^2+m^2+n^2) + 14(k+m+n) + 21,$$

kar je spet deljivo s 7.

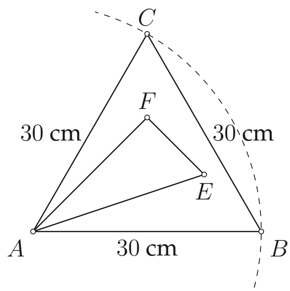
B2. Označimo dolžini stranic včrtanega deltoida z a in $2a$. Zaradi simetrije poteka daljša izmed diagonal deltoida skozi središče kroga. Po izreku o kotu v polkrogu je torej kot med stranicama dolžin a in $2a$ pravi. Po Pitagorovem izreku je dolžina daljše diagonale enaka $\sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}a$, kar pomeni, da je $r = \frac{\sqrt{5}a}{2}$. Ploščina deltoida je enaka $2 \cdot \frac{a \cdot 2a}{2} = 2a^2$, ploščina kroga pa $\pi r^2 = \frac{5\pi a^2}{4}$. Iskano razmerje ploščin je $\frac{8}{5\pi}$.



B3. Odgovor je da. Krajša diagonala razdeli romb na dva enakostranična trikotnika s stranico 60 cm. Vsakega od njiju lahko razdelimo še na 4 enakostranične trikotnike s stranico 30 cm. S tem smo romb razdelili na 8 enakostraničnih trikotnikov s stranico 30 cm. Ker v rombu leži 9 točk, obstaja enakostraničen trikotnik, v katerem ležita vsaj dve točki.



Dokažimo, da sta ti dve točki med seboj oddaljeni največ 30 cm. Točki označimo z E in F, oglišča enakostraničnega trikotnika, v katerem ležita, pa z A, B in C. Oglejmo si trikotnik AEF. Notranji kot tega trikotnika pri oglišču A je velik največ $60°$, torej mora biti eden od preostalih dveh notranjih kotov velik vsaj $60°$. To pomeni, da stranica EF ni najdaljša stranica trikotnika AEF. Toda preostali dve stranici sta dolgi največ 30 cm, saj točki E in F ležita znotraj kroga s središčem v A in polmerom 30 cm. Torej je tudi razdalja med točkama E in F največ 30 cm.



3. letnik

A1. Iz zadnje števke trimestnega naravnega števila lahko ugotovimo, da le to ni praštevilo le, če je zadnja števka soda (in je zato število deljivo z 2) ali pa enaka 5 (in je zato število deljivo s 5). Vse ostale števke so lahko zadnje števke trimestnega praštevila, npr. števila 101, 103, 107 in 109 so vsa praštevila. Ker je bilo Samovo število liho, je bila njegova zadnja števka enaka 5.

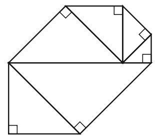
A2. Levi rob levega koščka in desni rob desnega koščka imata zarezi navznoter, zgornji rob zgornjega koščka in spodnji rob spodnjega koščka pa imata zarezi navzven. Torej mora imeti zadnji košček na dveh nasprotnih robovih zarezi navzven, na preostalih dveh nasprotnih robovih pa zarezi navznoter. Temu pogoju usteza le košček (A), ki ima na levem in desnem robu zarezi navzven, na spodnjem in zgornjem robu pa zarezi navznoter. Karmen torej potrebuje še košček (A).

A3. S pomočjo kotov trikotnika ABM izračunamo $\sphericalangle MBA = 180° - 84° - 48° = 48°$, torej je trikotnik ABM enakokrak z vrhom pri A. Sledi $|AB| = |AM|$. Ker je M razpolovišče stranice AD, velja $|AM| = |MD|$, ker pa je $ABCD$ paralelogram, je $|AB| = |CD|$. Torej je $|CD| = |MD|$ in tudi trikotnik MCD je enakokrak z vrhom pri D. Od tod izračunamo $\sphericalangle DCM = \frac{180° - \sphericalangle MDC}{2} = \frac{\sphericalangle BAD}{2} = 42°$.

B1. Obravnavajmo več možnosti. Če je $x < -a$, dobimo enačbo $-2(x-a) - 3(x+a) = 1$, od koder izračunamo $x = -\frac{a+1}{5}$. Da bo to res rešitev, mora veljati $-\frac{a+1}{5} < -a$ oziroma $a < \frac{1}{4}$. Če je $-a \leq x \leq a$, dobimo enačbo $-2(x-a) + 3(x+a) = 1$, torej je $x = 1 - 5a$. To je rešitev, le takrat, ko je $-a \leq 1 - 5a \leq a$, kar je ekvivalentno pogoju $\frac{1}{6} \leq a \leq \frac{1}{4}$. Če je $x > a$, dobimo $2(x-a) + 3(x+a) = 1$ oziroma $x = \frac{1-a}{5}$. Da bo to rešitev, mora veljati $\frac{1-a}{5} > a$ oziroma $a < \frac{1}{6}$. Enačba ima torej vsaj eno realno rešitev natanko tedaj, ko je $a \leq \frac{1}{4}$.

B2. Enačbo prepišemo v $\cos(\sin x) = \cos(\frac{\pi}{2} - \cos x)$. Od tod sledi, da mora veljati $\frac{\pi}{2} - \cos x = \pm \sin x + 2k\pi$ za nek $k \in \mathbb{Z}$, torej $\cos x \pm \sin x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi$. Ker je $|\cos x \pm \sin x| \leq |\cos x| + |\sin x| \leq 2$, mora biti $k = 0$, torej je $\cos x \pm \sin x = \frac{\pi}{2}$. Če to enačbo kvadriramo, dobimo $\cos^2 x \pm 2\cos x \sin x + \sin^2 x = \frac{\pi^2}{4}$ oziroma $\pm \sin 2x = \frac{\pi^2}{4} - 1$. Ker je $\frac{\pi^2}{4} - 1 > \frac{9}{4} - 1 > 1$, ta enačba nima realnih rešitev, torej tudi začetna enačba nima nobene realne rešitve.

B3. Na skici je prikazan enostaven 7-kotnik. Dokažimo, da enostaven 9-kotnik ne obstaja. Notranji koti enakokrakega pravokotnega trikotnika so enaki $45°$ in $90°$. Torej je vsak notranji kot enostavnega večkotnika lahko enak le $45°$, $90°$ ali $135°$. Če bi enostaven 9-kotnik obstajal, bi bila vsota njegovih notranjih kotov največ $9 \cdot 135° = 1215°$. Toda vsota notranjih kotov vsakega 9-kotnika je enaka $(9-2) \cdot 180° = 1260°$. Torej enostaven 9-kotnik ne obstaja.



4. letnik

A1. Miha dobi največji znesek, če iz predalčkov vzame tri kovance po 20 centov, dva kovanca po 10 centov in en kovanec po 2 centa. Znesek je v tem primeru enak 82 centov.

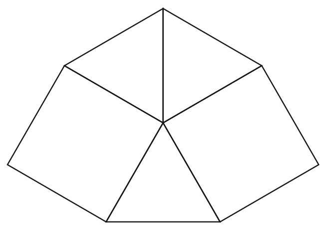
A2. Alen ne more biti nedolžen, saj bi sicer govoril resnico, toda potem bi moral biti po svojih besedah kriv. Alen je zato kriv. To pomeni, da je Zala lagala, torej je tudi ona kriva. Sledi, da je Beno govoril resnico, torej je nedolžen. To pa pomeni, da je Žan lagal, zato je tudi on kriv. Krivi so torej natanko trije osumljenci, to so Žan, Alen in Zala.

A3. Popolni kvadrati, ki so predhodnik ali naslednik dvomestnega števila, so natanko $9, 16, 25, 36, 49, 64, 81$ in 100. Dvomestna števila, katerih predhodnik oziroma naslednik je popoln kvadrat so torej le števila $10, 15, 17, 24, 26, 35, 37, 48, 50, 63, 65, 80, 82$ in 99. Toda dvomestno število, katerega predhodnik oziroma naslednik je praštevilo, mora biti sodo, zato nam ostanejo le števila $10, 24, 26, 48, 50, 80$ in 82. Od teh pa imajo za predhodnik oziroma naslednik praštevilo le števila $10, 24, 48, 80$ in 82. Vsa ta števila res ustrezajo pogoju. Pravilen odgovor je torej 5.

B1. Pišimo $m = da$ in $n = db$. Torej sta a in b tuji naravni števili in velja $v = dab$. Če to vstavimo v enačbo dobimo $da + 3db - 5 = 2dab - 11d$, torej mora d deliti 5. Denimo najprej, da je $d = 1$. Tedaj lahko enačbo preuredimo v $a(2b-1) = 3b+6$. Od tod sledi, da $2b-1$ deli $3b+6$, torej deli tudi $2(3b+6) - 3(2b-1) = 15$. Ker je $2b-1$ naravno število, imamo štiri možnosti. Če je $2b-1 = 1$, je $b = 1$ in $a = 9$. Če je $2b-1 = 3$, je $b = 2$ in $a = 4$, kar pa je protislovje, saj si a in b nista tuji. Če je $2b-1 = 5$, je $b = 3$ in $a = 3$, kar je spet protislovje. Če pa je $2b-1 = 15$, je $b = 8$ in $a = 2$, kar je spet protislovje. V tem primeru imamo torej rešitev $(9, 1)$. Naj bo sedaj $d = 5$. Tedaj lahko enačbo delimo s 5 in preuredimo v $a(2b-1) = 3b+10$. Od tod sledi, da $2b-1$ deli $3b+10$, torej deli tudi $2(3b+10) - 3(2b-1) = 23$. Imamo dve možnosti. Če je $2b-1 = 1$, je $b = 1$ in $a = 13$. Če pa je $2b-1 = 23$, je $b = 12$ in $a = 2$, kar je protislovje, saj si a in b nista tuja. Tako dobimo še rešitev $(65, 5)$.

B2. V funkcijsko enačbo vstavimo $x = 0$, da dobimo $f(0) = 3f(0)+3$, od koder izračunamo $f(0) = -\frac{3}{2}$. Sedaj v funkcijsko enačbo vstavimo $y = 0$, da dobimo $f(0) = xf(0) + 3f(x) + 3$, od koder izrazimo $f(x) = -\frac{1}{3}xf(0) + \frac{1}{3}f(0) - 1 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$. Preverimo lahko, da funkcija $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ res ustreza dani funkcijski enačbi, torej je to edina rešitev.

B3. Na skici je prikazan preprost 7-kotnik. Dokažimo, da preprost 13-kotnik ne obstaja. Notranji koti kvadratov in enakostraničnih trikotnikov so enaki $90°$ in $60°$. Torej je vsak notranji kot preprostega večkotnika lahko enak le $60°$, $90°$, $120°$ ali $150°$. Če bi preprost 13-kotnik obstajal, bi bila vsota njegovih notranjih kotov največ $13 \cdot 150° = 1950°$. Toda vsota notranjih kotov vsakega 13-kotnika je enaka $(13-2) \cdot 180° = 1980°$. Torej preprost 13-kotnik ne obstaja.



Rešitve 58. matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje

1. letnik

I/1. Enačbo pomnožimo z $a(a+b)(a-b)$ in dobimo

$$(a-b)^2 + (a+b)^2 = a(3a-b).$$

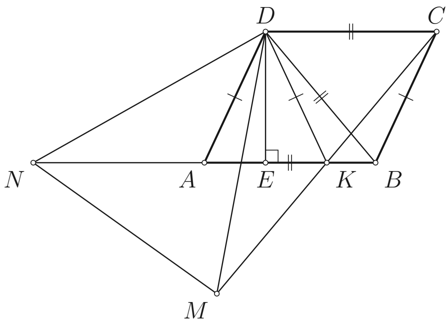
Ko odpravimo oklepaje in vse člene nesemo na desno stran, dobimo

$$0 = a^2 - ab - 2b^2 = (a-2b)(a+b).$$

Ker je $a \neq -b$, mora biti $a - 2b = 0$ oziroma $a = 2b$. Ker a ni enak 0 je torej $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$.

I/2. Obstaja naravno število k, da velja $5n+m = k(5m+n)$ oziroma $(5-k)n = (5k-1)m$. Ker je desna stran strogo pozitivna, mora biti tudi leva, torej velja $5 - k > 0$ in zato je $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Če je $k = 1$, dobimo $4n = 4m$, torej $n = m$. Če je $k = 2$, dobimo $3n = 9m$, torej $n = 3m$. Če je $k = 3$, dobimo $2n = 14m$, torej $n = 7m$. Če je $k = 4$, dobimo $n = 19m$. V vsakem primeru m deli n.

I/3.



Trikotnik ADK je enakokrak z vrhom pri D. Zato velja $\angle BKD = 180^\circ - \angle DKA = 180^\circ - \angle KAD = \angle CBK$. Prav tako je $|DK| = |DA| = |BC|$. Trikotnika DKB in CBK sta skladna, saj se ujemata v stranici KB, $\angle BKD = \angle CBK$ in $|DK| = |BC|$. Sedaj je $\angle DCK = \angle BKC = \angle DBK$. Ker sta M in N zrcalni sliki, velja $|CK| = |KM|$ in $|NA| = |AB|$. Zato velja $|CM| = 2|CK| = 2|DB| = 2|AB| = |NB|$. Torej sta tudi trikotnika CDM in BDN skladna, saj je $|DC| = |DB|$, $|CM| = |NB|$ in $\angle DCM = \angle DBN$. Zato je $|DN| = |DM|$ in trikotnik DMN je enakokrak z vrhom pri D.

2. način. Ker je $ABCD$ paralelogram, je premica KB vzporedna premici CD in velja $|BC| = |AD| = |KD|$. Torej je $KBCD$ enakokrak trapez. Sledi $\angle DBK = \angle BKC = \angle DCK$ in $|KC| = |DB|$. Ker sta M in N zrcalni sliki, od tod izpeljemo $|CM| = 2|CK| = 2|DB| = 2|AB| = |NB|$. Torej sta trikotnika MCD in NBD skladna, saj se ujemata v dveh stranicah in kotu med njima. Zato je $|DN| = |DM|$ in trikotnik DMN je enakokrak z vrhom pri D.

I/4. Če je $b = c$, potem ima zmagovalno strategijo igralec B, sicer pa ima zmagovalno strategijo igralec A.

Denimo najprej, da je $b = c$. Imamo torej situacijo, ko je na dveh kupčkih z najmanj žetoni enako število žetonov. Igralec B lahko v tem primeru poskrbi, da je situacija po vsaki njegovi potezi spet taka, medtem ko po vsaki potezi igralca A kupček z najmanj žetoni vsebuje strogo manj žetonov kot preostala dva kupčka. Igralec A mora namreč v svoji potezi nujno iz enega izmed kupčkov z najmanj žetoni prestaviti nekaj žetonov na nek drug kupček. Igralec B potem izbere trenutno najvišja kupčka, ki imata zaradi poteze igralca A sedaj strogo več žetonov kot najnižji kupček, in med njima premakne žetone tako, da bosta po njegovi potezi najnižja kupčka imela enako žetonov. Ko bosta kupčka z najmanj žetoni prazna, bodo vsi žetoni na enem kupčku in igra bo končana. To se lahko zgodi le po potezi igralca B, zato igralec B zmaga.

Denimo sedaj, da je $b > c$. Tedaj lahko igralec A s kupčka z b žetoni prestavi $b - c > 0$ žetonov na kupček z a žetoni. Po njegovi potezi bosta zato kupčka z najmanj žetoni oba imela c žetonov. Torej bo situacija taka kot zgoraj, le da bo na potezi igralec B. Zato ima v tem primeru zmagovalno strategijo igralec A.

2. letnik

II/1. Opazimo, da če od prve enakosti odštejemo drugo, dobimo na levi strani kvadrat tričlenika. Dobimo namreč

$$(x - y + 2z)^2 = -y^2 + 6y - 9,$$

kar lahko dalje preoblikujemo v

$$(x - y + 2z)^2 + (y - 3)^2 = 0.$$

Ker so x, y in z realna števila, morata biti oba oklepaja v zgornjem izrazu enaka 0, torej je $y = 3$ in $x = y - 2z = 3 - 2z$. To vstavimo v prvo enačbo sistema in po preoblikovanju dobimo $2z^2 - 3z + 1 = 0$ oziroma $(2z - 1)(z - 1) = 0$. Enako dobimo, če $y = 3$ in $x = 3 - 2z$ vstavimo v drugo enačbo. Torej je $z = 1$ ali $z = \frac{1}{2}$. Rešitvi naloge sta tako trojici $(1, 3, 1)$ in $(2, 3, \frac{1}{2})$.

II/2. Naj bo $p+q = x^2$ in $p+4q = y^2$ za neki naravni števili x in y. Če enačbi odštejemo, dobimo $3q = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$. Ker je q praštevilo in $x + y \geq 2$, imamo naslednje možnosti:

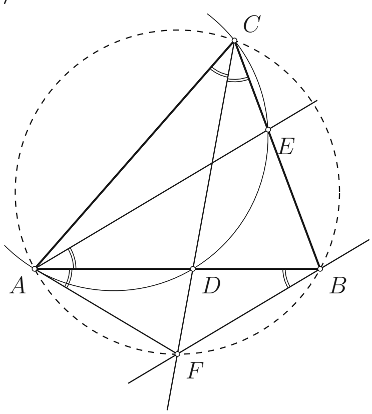
1\. možnost: $y - x = 1$ in $y + x = 3q$. Iz prve enačbe izrazimo $y = x + 1$ in vstavimo v drugo, da dobimo $2x+1 = 3q$. Od tod sledi, da je q liho število, zato lahko pišimo $q = 2m+1$ za neko naravno število m. Potem je $x = 3m + 1$ in $p = x^2 - q = 9m^2 + 4m = m(9m + 4)$. Ker je p praštevilo, mora biti $m = 1$. Tako dobimo $p = 13$ in $q = 3$, kar sta res praštevili.

2\. možnost: $y - x = 3$ in $y + x = q$. Iz prve enačbe izrazimo $y = x + 3$ in vsavimo v drugo, da dobimo $2x + 3 = q$. Iz začetne enakosti torej dobimo $p = x^2 - p = x^2 - q = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$. Ker je p praštevilo, mora biti $x = 4$. Tako dobimo $p = 5$ in $q = 11$, kar sta res praštevili.

3\. možnost: $y - x = q$ in $y + x = 3$. Ker sta x in y naravni števili in mora biti $y > x$, je $y = 2$ in $x = 1$, kar pa nam da protislovje $q = 1$.

Rešitvi enačbe sta torej para $(5, 11)$ in $(13, 3)$.

II/3.



Označimo $\angle ACB = \gamma$. Potem je $\angle ACF = \angle FCB = \frac{\gamma}{2}$, saj je CF simetrala kota $\angle ACB$. Zaradi koncikličnosti točk A, D, E in C sledi $\angle DAE = \angle DCE = \frac{\gamma}{2}$. Ker je premica BF vzporedna premici AE, velja $\angle ABF = \angle DAE = \frac{\gamma}{2}$. Zaradi $\angle ACF = \frac{\gamma}{2} = \angle ABF$ so torej točke A, F, B in C koncikične. Od tod sledi $\angle FAB = \angle FCB = \frac{\gamma}{2} = \angle ABF$, torej je trikotnik AFB enakokrak z vrhom pri F.

II/4. Največje število oglišč, ki jih lahko pobarvamo rdeče je $\frac{n+1}{2}$. Če pobarvamo $\frac{n+1}{2}$ zaporednih oglišč n-kotnika, potem je pogoju naloge zadoščeno. Denimo sedaj, da pobarvamo vsaj $\frac{n+1}{2}+1$ oglišč. Označimo oglišča n-kotnika zaporedoma z naravnimi števili od 1 do $2k+1=n$. Torej je vsaj $k+2$ oglišč rdečih. Oglejmo si pare oglišč $(1,k+1),(2,k+2),(3,k+3),\ldots,(k,2k),(k+1,2k+1)$, ki predstavljajo nekatere od najdaljših diagonal n-kotnika. Ker je teh parov natanko $k+1$ in zavzemejo vsa oglišča, obstaja vsaj en par, v katerem sta obe oglišči rdeči. Predpostavimo lahko, da je to par $(1,k+1)$, sicer bi oglišča le preštevilčili. Ker je vsaj še k od preostalih oglišč rdečih, oglišč oštevilčenih z $2,3,\ldots,k$ pa je le $k-1$, je vsaj eno od oglišč oštevilčenih s $k+2,k+3,\ldots,2k+1$ rdeče. Naj bo to oglišče $k+m$, kjer je $2\le m\le k+1$. Oglišče $k+m$ leži na istem bregu premice določene z oglišči 1 in $k+1$ kot središče n-kotnika. Od tod sledi, da središče n-kotnika leži znotraj trikotnika z oglišči $1,k+1,k+m$, saj je daljica s krajišči $1,k+1$ ena od najdaljših diagonal n-kotnika. Toda oglišča $1,k+1,k+m$ so vsa rdeča, torej središče n-kotnika leži tudi znotraj večkotnika določenega z rdečimi oglišči.

3. letnik

III/1. Ničelni polinom je očitno rešitev naloge. Naj bo p neničeln polinom in pišimo $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$, kjer je $a_n\neq 0$. Vodilni člen na levi strani enakosti je tedaj enak $a_n(a_nx^n)^n=a_n^{n+1}x^{n^2}$, vodilni člen na desni strani pa je enak $x^2\cdot a_nx^n=a_nx^{n+2}$. Ker morata biti ta dva člena iste stopnje, sledi $n^2=n+2$ oziroma $(n-2)(n+1)=0$. Ker je n nenegativno celo število, mora biti $n=2$. Pišimo torej $p(x)=ax^2+bx+c$, kjer je $a\neq 0$. Tedaj velja

$$p(p(x))=a^3x^4+2a^2bx^3+(ab^2+2a^2c+ab)x^2+(2abc+b^2)x+(ac^2+bc+c) \tag{1}$$

$$(x^2+x+1)p(x)=ax^4+(b+a)x^3+(c+b+a)x^2+(c+b)x+c. \tag{2}$$

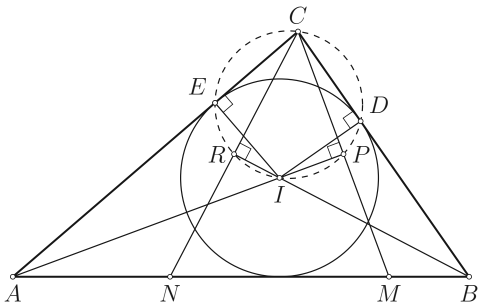
Iz dane enakosti tako dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} a^3 &= a,\\ 2a^2b &= b+a,\\ ab^2+2a^2c+ab &= c+b+a,\\ 2abc+b^2 &= c+b,\\ ac^2+bc+c &= c. \end{aligned}$$

Ker je $a\neq 0$, iz prve enakosti sledi $a=1$ ali $a=-1$. Za $a=1$ v drugi enačbi dobimo $2b=b+1$, torej $b=1$. Če oboje vstavimo v tretjo enačbo, dobimo še $2c+2=c+2$ oziroma $c=0$. Preverimo lahko, da ta tri števil ustrezajo tudi zadnjima dvema enakostima. Za $a=-1$ dobimo protisloven sistem. Rešitvi naloge sta torej dve, $p(x)=0$ in $p(x)=x^2+x$.

III/2. Odgovor je 2. Če vzamemo $a=4$ in $b=3$, dobimo $3a^2-ab^2-2b-4=2$. Dovolj je torej pokazati, da enačba $3a^2-ab^2-2b-4=1$ nima rešitev v naravnih številih. Enačbo preuredimo v $3a^2-ab^2=2b+5$. Ker je desna stran liha, mora biti tudi leva stran liha, torej mora biti a liho število in b sodo število. Število b^2 je zato deljivo s 4, ostanek števila a^2 pri deljenju s 4 pa je enak 1. Leva stran ima torej pri deljenju s 4 ostanek 3, desna stran pa ostanek 1, saj je $2b$ deljivo s 4. Prišli smo do protislovja, torej enačba nima rešitev v naravnih številih.

III/3.



Naj bo I središče trikotniku ABC včrtane krožnice. Ker je AMC enakokrak trikotnik z vrhom pri A, je AP višina na osnovnico in hkrati simetrala kota $\angle MAC$. Zato I leži na premici AP. Podobno I leži tudi na premici BR. Sledi $\angle CPI = \angle CPA = \frac{\pi}{2}$ in $\angle IRC = \angle BRC = \frac{\pi}{2}$, torej točki P in R ležita na krožnici s premerom CI. Ker sta D in E dotikališči včrtane krožnice, velja $\angle CDI = \angle IEC = \frac{\pi}{2}$, zato tudi točki D in E ležita na krožnici s premerom CI. Točke P, R, D in E so torej konciklične.

III/4. Naj A_i oziroma B_i označuje prvo oziroma drugo potezo, izvedeno na škatlah i in $i+1$. Naj bo $i \leq 6$. Če Miha izvede potezo B_i, potem se število žetonov v škatlah i in $i+1$ zmanjša za 1, število žetonov v škatli $i+2$ ostane enako, število žetonov v vreči pa se poveča za 1. Če pa Miha izvede zaporedje potez A_i, A_{i+1}, B_{i+1}, potem se število žetonov v škatli i zmanjša za 1, število žetonov v škatli $i+1$ ostane enako, število žetonov v škatli $i+2$ in v vreči pa se poveča za 1. V drugem primeru je torej rezultat boljši, saj je edina razlika to, da ima v dveh škatlah po en žeton več. Ta razmislek pokaže, da se Mihu potez B_i za $i \leq 6$ ne splača izvajati. Od preostalih potez le poteza B_7 poveča število žetonov v vreči, zato jo mora Miha izvesti čim večkrat. Brez škode lahko predpostavimo, da jo izvaja šele na koncu. Pred tem s potezami A_i, $i \leq 6$ prestavi žetone v predzadnjo škatlo, ki potem vsebuje $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^6 = 2^7 - 1 = 127$ žetonov, zadnja škatla pa vsebuje 1 žeton. Naj x označuje število žetonov v predzadnji škatli ob nekem času, y pa število žetonov v zadnji škatli ob istem času. Da bo lahko Miha izvedel čim več potez B_7, mora biti $\min\{x, y\}$ čim večji. Ker se s potezo A_7 število žetonov v predzadnji škatli zmanjša za 1, v zadnji pa poveča za 2, bo minimum največji takrat, ko bo prvič veljalo $x \leq y$ in bo zato enak x. Po k potezah A_7 bo $x = 127 - k$ in $y = 1 + 2k$. Iščemo torej najmanjši k pri katerem bo $127 - k \leq 1 + 2k$ oziroma $k \geq \frac{127-1}{3} = 42$. Najmanjši tak k je enak $k = 42$. Po 42 potezah A_7 bo s potezami B_7 Miha v vrečo premaknil $127 - 42 = 85$ žetonov, kar je torej največje število žetonov, ki jih lahko ima Miha na koncu v vreči.

4. letnik

IV/1. Ničli polinoma $p(x) = x^2 + ax + b$ sta $x_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$ in $x_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$. Ker morata biti različni, je $a^2 - 4b \neq 0$. Od tod izračunamo

$$x_1^2 - \frac{1}{2} = \frac{(a^2 - 2b - 1) - a\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

in

$$x_2^2 - \frac{1}{2} = \frac{(a^2 - 2b - 1) + a\sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Ker sta to ničli polinoma $q(x)$, morata ustrezati enačbi $x^2+(a-\frac{1}{2})x+b^2-\frac{1}{2}=0$. Ko oboje vstavimo v to enačbo in preuredimo, dobimo

$$(4a^4-12a^2b+8b^2-5a^2+6b)-(4a^3-4ab-3a)\sqrt{a^2-4b}=0$$

in

$$(4a^4-12a^2b+8b^2-5a^2+6b)+(4a^3-4ab-3a)\sqrt{a^2-4b}=0.$$

Torej mora veljati

$$4a^4-12a^2b+8b^2-5a^2+6b=0$$

in

$$(4a^3-4ab-3a)\sqrt{a^2-4b}=0.$$

Ker je $a^2-4b\neq 0$, iz druge enačbe sledi $(4a^3-4ab-3a)=a(4a^2-4b-3)=0$. Če je $a=0$, potem iz prve enačbe sledi $8b^2+6b=2b(4b+3)=0$. Ker je $a^2-4b\neq 0$, mora biti $b\neq 0$, torej je $b=-\frac{3}{4}$. Če pa je $a\neq 0$, potem mora biti $4a^2-4b-3=0$ oziroma $b=a^2-\frac{3}{4}$. Ko slednje vstavimo v prvo enačbo, dobimo $-2a^2=0$ oziroma $a=0$, kar je protislovje. Torej je $a=0$ in $b=-\frac{3}{4}$.

2. način. Po Vietovih pravilih je $x_1+x_2=-a$, $x_1x_2=b$, $x_1^2+x_2^2-1=\frac{1}{2}-a^2$ in $(x_1^2-\frac{1}{2})(x_2^2-\frac{1}{2})=b^2-\frac{1}{2}$. Najprej preoblikujmo tretjo enačbo, pri čemer upoštevamo prvi dve,

$$\frac{3}{2}-a^2=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=a^2-2b,$$

od koder dobimo $b=a^2-\frac{3}{4}$. Preoblikujmo še četrto enačbo,

$$b^2-\frac{1}{2}=\left(x_1^2-\frac{1}{2}\right)\left(x_2^2-\frac{1}{2}\right)=x_1^2x_2^2-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)+\frac{1}{4}=b^2-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-a^2\right)+\frac{1}{4},$$

od koder sledi $a^2=0$ in zato $a=0$ ter $b=-\frac{3}{4}$.

IV/2. (a) Število c lahko zapišemo v obliki $c=kab+r$, kjer je k neko nenegativno celo število, $r<ab$ pa ostanek števila c pri deljenju z ab. Število r lahko nadalje zapišemo v obliki $r=ma+n$, kjer je m neko nenegativno celo število, $n<a$ pa ostanek števila r pri deljenju z a. Med drugim od tod sledi $m<b$, saj bi sicer bilo $r\geq ab$. Od tod izračunamo

$$\left[\frac{c}{ab}\right]=\left[k+\frac{r}{ab}\right]=k,$$

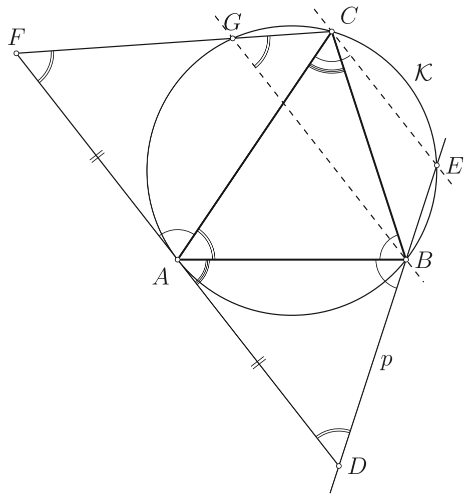
saj je $0\leq\frac{r}{ab}<1$, in

$$\left[\frac{\left[\frac{c}{a}\right]}{b}\right]=\left[\frac{\left[kb+m+\frac{n}{a}\right]}{b}\right]=\left[\frac{kb+m}{b}\right]=\left[k+\frac{m}{b}\right]=k,$$

saj je $0\leq\frac{n}{a}<1$ in $0\leq\frac{m}{b}<1$. Od tod sledi enakost iz naloge.

(b) Taka števila so na primer $a=2$, $b=\frac{1}{2}$ in $c=1$, saj je v tem primeru $\left[\frac{c}{ab}\right]=1$ in $\left[\frac{\left[\frac{c}{a}\right]}{b}\right]=0$.

IV/3.



Po izreku o kotu med tetivo in tangento je $\angle CAF = \angle CBA$. Ker je p zrcalna slika premice BC pri zrcaljenju čez premico AB, je $\angle CBA = \angle ABD$. Ker so točke A, B, E, C konciklične, je $\angle ABD = \angle ACE$. Torej je $\angle CAF = \angle ACE$, zato je premica CE vzporedna premici FD. Pokazati moramo torej, da je tudi premica GB vzporedna premici FD. Po izreku o kotu med tetivo in tangento je $\angle DAB = \angle ACB$. Ker je tudi $\angle CBA = \angle ABD$, sta trikotnika BAD in BCA podobna, saj se ujemata v dveh kotih. Torej je $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|CA|}{|CB|}$. Ker je F zrcalna slika točke D pri zrcaljenju čez točko A, je $|AD| = |FA|$. Torej je $\frac{|FA|}{|AB|} = \frac{|CA|}{|CB|}$ oziroma $\frac{|FA|}{|CA|} = \frac{|AB|}{|CB|}$. Ker je hkrati $\angle CAF = \angle CBA$, sta si tudi trikotnika FAC in ABC podobna. Torej je $\angle AFC = \angle BAC = \angle BGC$ in zato je tudi premica GB vzporedna premici FD.

IV/4. Pokažimo najprej, da če se število na tabli pri zamenjavi zmanjša, potem je novo število večje ali enako 5. Števila 1 po zamenjavi ne moremo dobiti, saj vsota dveh naravnih števil ni nikoli enaka 1. Število $2 = 1 + 1$ lahko dobimo le iz števila 1, število $3 = 1 + 2$ le iz števila 2, število $4 = 1 + 3 = 2 + 2$ pa le iz števil 3 ali 4. Torej če po zamenjavi dobimo število manjše od 5, potem se pri zamenjavi število ni zmanjšalo. To pomeni, da če je začetno število $n < 5$, potem v nobenem koraku ne bomo dobili manjšega števila.

Dokažimo sedaj, da lahko število ki je večje od 5 vedno zmanjšamo. Denimo, da imamo na nekem koraku na tabli število $m > 5$. Če je m sod, torej oblike $m = 2k$, kjer je $k > 2$ naravno število, potem ga lahko zamenjamo s številom $k + 2$. S tem smo dobili število, ki je manjše od m, saj je pogoj $k + 2 < 2k$ ekvivalenten pogoju $k > 2$. Če je m lih, torej oblike $m = 2k - 1$, kjer je $k > 3$ naravno število, potem ga lahko najprej zamenjamo s številom $(2k - 1) + 1 = 2k$ in nato s številom $k + 2$. Na ta način spet dobimo število, ki je manjše od m, saj je pogoj $k + 2 < 2k - 1$ ekvivalenten pogoju $k > 3$. To pomeni, da če je začetno število $n \geq 5$, ga lahko po končno korakih vedno zmanjšamo do števila 5, manjšega števila pa po zgornjem razmisleku ne moremo dobiti.

Najmanjše število, ki je lahko po končno korakih zapisano na tabli je torej enako 5 v primeru $n \geq 5$ oziroma n v primeru $n < 5$.