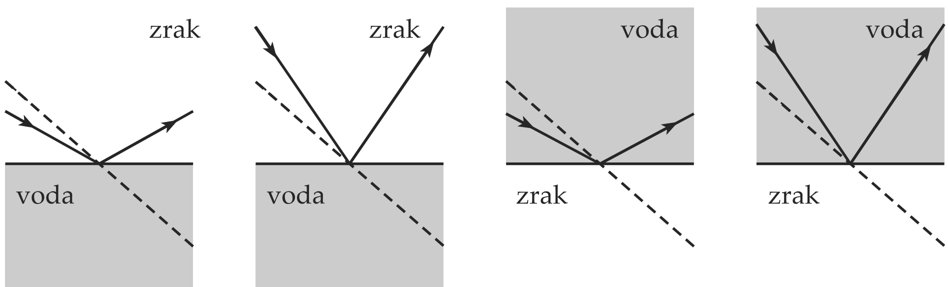
Tekmovanja

33. tekmovanje za zlato Stefanovo priznanje – državno tekmovanje

8. razred

A1 Črtkana slika kaže smer žarka in njegovega podaljška, ko žarek vpade na mejo dveh sredstev pri mejnem kotu za popolni odboj. Na kateri sliki žarek, narisan s sklenjeno črto, pravilno prikazuje popolni odboj na tej meji?



(**A**) (**B**) (**C**) (**D**)

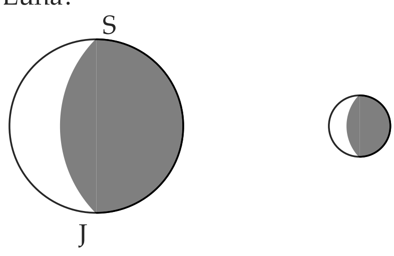
A2 Slika kaže pogled iz vesolja na Zemljo in Luno. Zemlja in Luna ležita v ravnini lista. Obsijana dela sta neosenčena. V kateri meni je Luna?

(**A**) Med zadnjim krajcem in mlajem.

(**B**) Med mlajem in prvim krajcem.

(**C**) Med prvim krajcem in ščipom.

(**D**) Med ščipom in zadnjim krajcem.



A3 Desetiške predpone, ki po vrsti znižajo enoto, ki je v vrsti pred njimi, na tisočino, si sledijo tako: mili, mikro, nano, piko, femto, ato, ... *Parsec* je astronomska enota za merjenje velikih razdalj v vesolju in je enaka $3{,}26$ svetlobnim letom. Približno koliko meri femtoparsec?

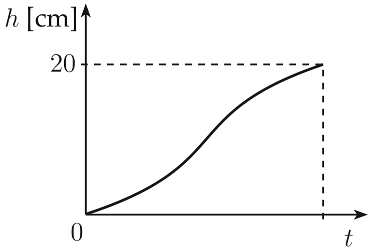
(**A**) 31 km.

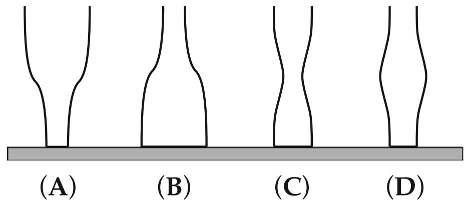
(**B**) 100 svetlobnih nanosekund.

(**C**) $2\,065\ a.e.$.

(**D**) $3{,}1 \cdot 10^{31}$ m.

A4 Babica ima štiri različne, osno-simetrične (kot so valji in stožci) vaze, ki jih kažejo spodnje slike. Vaze so na začetku prazne. Graf kaže, kako se v eni od vaz s časom spreminja višina gladine, ko babica vanjo enakomerno toči vodo do vrha vaze. V katero vazo babica toči vodo?

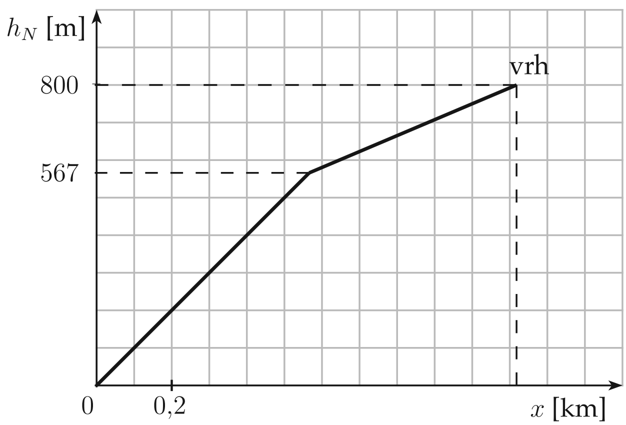




A5 Lesena kocka z robom a stoji na ravni mizi. Kocka deluje na mizo s tlakom 800 Pa. Kocko razrežemo na osem manjših, s robovi, dolgimi $\frac{a}{2}$. Manjše kocke postavimo na mizo. S kolikšnim tlakom deluje na mizo manjša kocka?

(**A**) 800 Pa. (**B**) 400 Pa. (**C**) 200 Pa. (**D**) 100 Pa.

B1 Jelka se vzpenja na goro po vijugasti poti, Nace, ki je zjutraj zaspal in zamudil odhod, pa gre navzgor po najkrajši, direktni poti. Višinski profil poti h_N, po kateri hodi Nace, kaže slika. Višinska razlika med vznožjem in vrhom je 800 m. Nace prispe na vrh v 1 uri in 20 minutah, Jelka pa v 2 urah in pol. Predpostavi, da Nace hodi tako, da se njegova višina enakomerno spreminja s časom.

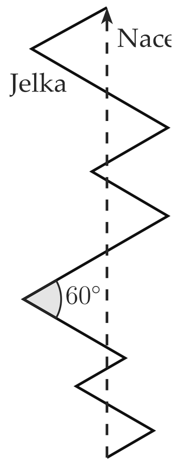


(a) Kolikšna je Nacetova hitrost v navpični smeri – za koliko metrov se dvigne vsako minuto?

(b) Na sliki je profil Nacetove poti prikazan v merilu. Kolikšno pot opravi Nace v celoti?

(c) S kolikšno povprečno hitrostjo se giblje Nace na strmem in s kolikšno na položnem delu poti?

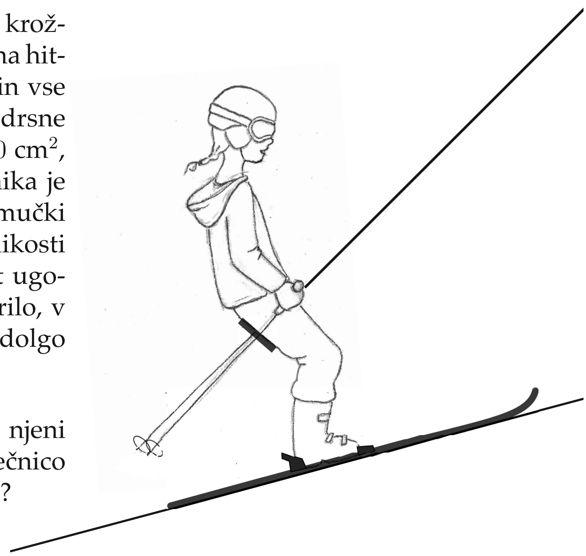
(d) Jelkina pot je ovinkasta in bolj položna. Nacetovo in Jelkino pot na pobočju gore kaže slika: Nacetova pot je narisana s prekinjeno črto, Jelkina s sklenjeno. Nacetova direktna pot seka Jelkino, kot kaže slika. V vsakem ovinku Jelkine poti je kot 60°. Kolikšno pot opravi Jelka od vznožja do vrha gore?



(e) Predpostavi, da Jelka hodi s stalno hitrostjo. Koliko časa hodi Jelka po strmem delu poti?

(f) Kolikšna je povprečna Jelkina hitrost v navpični smeri na strmem in kolikšna na položnem delu?

B2 Tina se pelje prislonjena na vlečni krožnik na vlečnici, kot kaže slika. Njena hitrost je stalna. Skupna masa Tine in vse njene opreme je 75 kg. Ploščina drsne ploskve ene Tinine smučke je $1400\ \text{cm}^2$, polmer okroglega vlečnega krožnika je 8 cm. Med vožnjo deluje na njeni smučki sila trenja, ki meri v celoti 80 N. Velikosti ostalih sil ali njihovih komponent ugotovi z načrtovanjem. Uporabi merilo, v katerem silo 100 N prikažeš z 1 cm dolgo usmerjeno daljico.



(a) Katere sile delujejo na Tino in njeni smučki med njeno vožnjo z vlečnico ter kolikšna je rezultanta teh sil?

(b) Kolikšna je dinamična (s podlago vzporedna) in kolikšna je statična (na podlago pravokotna) komponenta Tinine teže?

(c) Kolikšna je velikost sile vlečnega krožnika na Tino? (Pomagaj si z razstavljanjem sile vlečnega krožnika na dve komponenti.)

(d) S kolikšno silo deluje podlaga na Tino v smeri, pravokotni na podlago?

(e) Med vožnjo z vlečnico drsita po snegu obe Tinini smučki. Predpostavi, da je v stiku s podlago $90\,\%$ drsnih ploskev njenih smučk. S kolikšnim povprečnim tlakom delujejo Tinine smuči na podlago?

(f) Oceni ploščino vlečnega krožnika, na katerega je prislonjena Tina, na $20\ \mathrm{cm}^2$ natančno.

(g) S kolikšnim povprečnim tlakom deluje vlečni krožnik na Tino?

C1 – eksperimentalna naloga: ODBOJ SVETLOBE

S štirimi bucikami pritrdi vogale priloženega lista z vrisanim kotomerom na stiroporno podlago. Eno izmed preostalih bucik zapiči v sredino kotomera: to je *središčna* bucika. Tik ob središčno buciko postavi ravno zrcalo tako, da je pravokotno na podlago ter vzporedno z osjo x, narisano na listu. V tej legi je kot α med zrcalom in osjo x enak $0°$; $\alpha = 0°$. Če zrcalo zavrtiš okoli središčne bucike v smeri, ki je nasprotna smeri gibanja urinega kazalca, je $\alpha > 0$, če zavrtiš zrcalo v obratni smeri, je $\alpha < 0$.

Naslednjo, 6. buciko, uporabi kot *predmet*. Predmet postavljaj v lege, označene s krogci (p_1, p_2, p_3). Opazuj *sliko predmeta* v zrcalu. Točko D na pozitivnem poltraku osi x izberi tako, da so slika predmeta, središčna bucika in točka D poravnani na isti premici (glej tako, da se slika predmeta in središčna bucika prekrivata). V točko D zabodi sedmo buciko. Razdaljo med točko D in koordinatnim izhodiščem pri $(x = 0, y = 0)$ označimo z d.

(a) Nastavi zrcalo tako, da bo kot $\alpha = 0°$. Med prvo meritvijo tega kota ne spreminjaj. Izmeri razdalje d pri različnih legah predmeta p_1, p_2 in p_3. Izmerjene razdalje vpiši v tabelo.

lega predmeta	d [mm] ($\alpha = 0°$)
p_1	
p_2	
p_3	

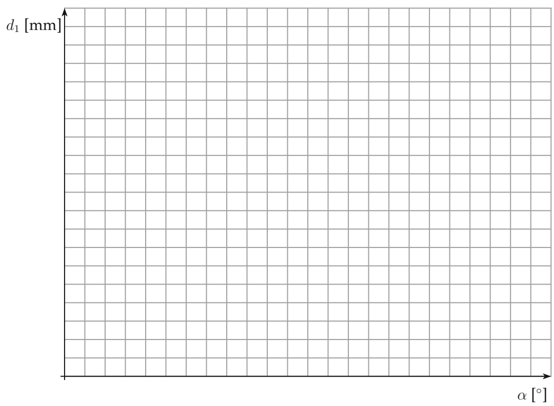
(b) Predmet postavi v lege p_1, p_2 in p_3 ter pri vsaki legi zasuči zrcalo okoli središčne bucike tako, da so na isti premici poravnani slika predmeta, središčna bucika in koordinatno izhodišče pri $(x = 0, y = 0)$. Izmeri kote α pri vseh različnih legah predmeta in jih vpiši v tabelo.

lega predmeta	α [°] ($d = 0$)
p_1	
p_2	
p_3	

(c) Razdaljo d pri legi predmeta p_1 označimo z d_1, pri legi predmeta p_2 z d_2 in tako naprej. Opravi ustrezne meritve in izračunaj razmerja razdalj $d_1 : d_2$, $d_2 : d_3$ ter $d_1 : d_3$ pri kotih α, podanih v tabeli. Meritve in izračunana razmerja vpiši v tabelo.

α	d_1 [mm]	d_2 [mm]	d_3 [mm]	$d_1 : d_2$	$d_2 : d_3$	$d_1 : d_3$
5°						
10°						
15°						

(d) Predmet je v legi p_1. Nariši graf, ki kaže odvisnost razdalje d_1 od kota α za pozitivne kote od 0° do tistega kota, ko so na isti premici poravnani slika predmeta, središčna bucika in točka A. Uporabi rezultate meritev pri prejšnjem vprašanju, nekaj meritev pa opravi dodatno.

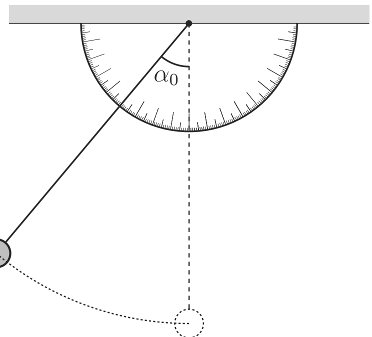


C2 – eksperimentalna naloga: POVPREČNA HITROST UTEŽI

Utež je pritrjena na lahki vrvici, ki jo pripneš na stojalo v obesišču. Vrvica naj bo pri vseh poskusih napeta. Za dve različni dolžini nihala razišči odvisnost povprečne hitrosti uteži

$$\bar{v} = \frac{\text{dolžina loka}}{\text{čas}} = \frac{s}{t_{1/2}}$$

v odvisnosti od začetnega kota odmika α_0, merjenega od navpične lege vrvice. Meri polovico nihaja. Čas polovice nihaja $t_{1/2}$ je čas gibanja uteži od trenutka, ko utež spustimo, do trenutka, ko je hitrost uteži prvič zatem spet enaka 0. *Dolžina nihala r* je razdalja med obesiščem in središčem uteži.



Preveri, ali je utež dobro pritrjena na vrvico. Ko odmeriš dolžino vrvice za ustrezno dolžino nihala r, pritrdi vrvico v pritrdišče na stojalu. Na istem mestu naj bo pritrjen tudi kotomer tako, da je pri navpičnem položaju vrvice kot med vrvico in navpičnico $\alpha = 0^\circ$.

(a) Nastavi dolžino nihala na $r_1 = 0{,}250$ m. Spuščaj utež pri različnih začetnih kotih α_0, izmeri čas t_5 za 5 nihajev in izračunaj čas $t_{1/2}$ za polovico nihaja.

Izračunaj dolžino poti (loka) s, ki jo utež opravi v polovici nihaja. *Namig*: obseg kroga ob s polmerom r izračunamo iz zveze $ob = 6{,}28 \cdot r$. Cel obseg ustreza polnemu kotu $360°$.

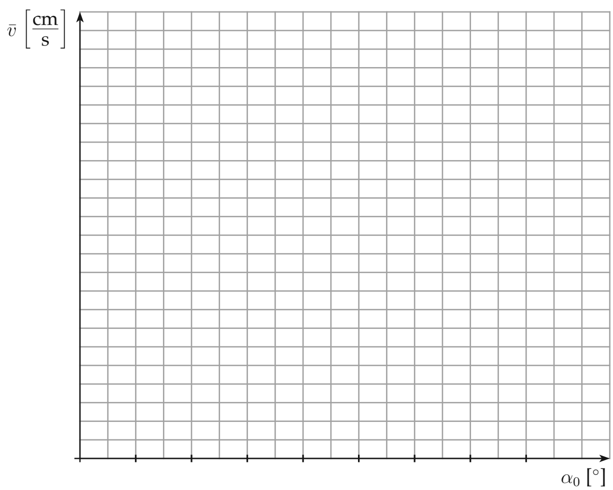
Izračunaj povprečno hitrost $\bar{v}$ za polovico nihaja. Meritve in račune vpiši v tabelo.

$r_1 = 0{,}250$ m				
kot odmika α_0	t_5 [s]	$t_{1/2}$ [s]	s [cm]	$\bar{v}$ $\left[\frac{\text{cm}}{\text{s}}\right]$
$20°$				
$40°$				
$60°$				
$80°$				

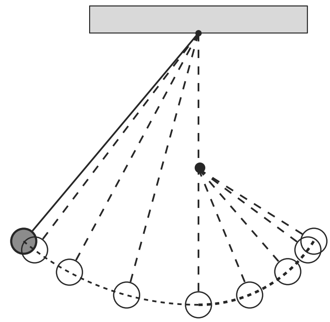
(b) Ponovi meritev še za dolžino nihala $r_2 = 0{,}750$ m.

$r_1 = 0{,}750$ m				
kot odmika α_0	t_5 [s]	$t_{1/2}$ [s]	s [cm]	$\bar{v}$ $\left[\frac{\text{cm}}{\text{s}}\right]$
$20°$				
$40°$				
$60°$				
$80°$				

(c) V isti koordinatni sistem nariši dva grafa, ki kažeta, kako je povprečna hitrost uteži $\bar{v}$ odvisna od začetnega kota α_0 za obe dolžini nihala. Začetni koti α_0 naj bodo v območju med $\alpha_0 = 0°$ in $\alpha_0 = 80°$. Grafa označi tako, da je jasno, kateri dolžini nihala pripadata.



(d) Kolikšna bi bila povprečna hitrost uteži v polovici nihaja na nihalu dolžine $r_3 = 0{,}500$ m, ki bi jo spustili pri kotu $\alpha_0 = 40°$ in bi vrvica v svoji navpični legi na polovici dolžine nihala zadela ob oviro tako, da bi zgornji del vrvice (med oviro in obesiščem) obmiroval, spodnji del (med oviro in utežjo) pa bi se gibal naprej do trenutka, ko bi bila prvič spet hitrost uteži enaka 0? Upoštevaj, da je v obeh skrajnih legah utež na isti višini. Odgovor utemelji.

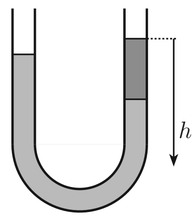


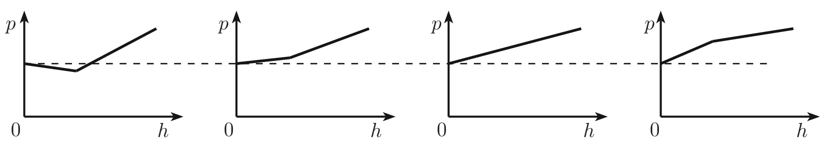
9. razred

A1 Starejši prebivalci našega planeta še razumejo pomen enote *konjska moč* KM, *horse power* HP. Določil jo je izumitelj parnega stroja James Watt: ustreza moči, s katero dvignemo breme z maso $33\,000$ *funtov* v 1 minuti 1 *čevelj* visoko. En funt je 454 g, en čevelj je $0{,}3048$ m. Koliko W meri 1 KM?

(**A**) $761{,}1$ W. (**B**) $2\,497$ W. (**C**) $4\,570$ W. (**D**) $45{,}7$ kW.

A2 V levem kraku odprte U-cevke je voda, v desnem kraku pa je nad vodo jedilno olje. Kapljevini mirujeta. Kateri graf pravilno prikazuje spreminjanje tlaka v desnem kraku cevke v odvisnosti od globine: **od gladine** (pri $h = 0$) **do dna**?





(**A**) (**B**) (**C**) (**D**)

A3 Zaporedno vežemo 6 V in 18 V žarnico. Priključimo ju na napetost 24 V. Vir poganja tok $0{,}24$ A. Kolikšen tok teče skozi prvo in kolikšen skozi drugo žarnico?

(**A**) Skozi prvo in drugo žarnico teče tok $0{,}24$ A.

(**B**) Skozi prvo žarnico teče tok $0,8$ A, skozi drugo pa tok $0{,}16$ A

(**C**) Skozi prvo žarnico teče tok $0,16$ A, skozi drugo pa tok $0{,}8$ A

(**D**) Skozi prvo žarnico tok sploh ne teče in žarnica ne sveti.

A4 Na tehtnico postavimo posodo z vodo. Tehtnica pokaže maso M. Nato spustimo v posodo z vodo votlo kovinsko kroglo z maso m (ki prej ni bila na tehtnici). Vsa voda ostane v posodi, krogla pa plava, pri čemer je pod gladino potopljena točno polovica krogle. Masa vode, ki jo krogla izpodriva, je M_1. Koliko pokaže tehtnica?

(**A**) $M + m + M_1$. (**B**) $M + M_1$. (**C**) $M + \frac{1}{2}\,m$. (**D**) $M + \frac{1}{2}\,m - M_1$.

A5 Ob stiku plašča (pnevmatike) kolesa s podlago se plašč in včasih podlaga deformirata, del mehanske energije kolesa se pri tem izgubi. Če je tlak v zračnicah velik, je izguba mehanske energija manjša. Gorski kolesarji pred spustom po grbinasti poti zmanjšajo tlak v zračnicah svojih koles. Kaj s tem dosežejo? Ob skokih se

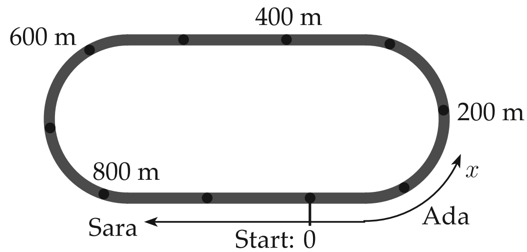
(**A**) izgube mehanske energije **zmanjšajo**, plašči se **bolj prožno** odbijajo od podlage.

(**B**) izgube mehanske energije **zmanjšajo**, plašči se **manj prožno** odbijajo od podlage.

(**C**) izgube mehanske energije **povečajo**, plašči se **bolj prožno** odbijajo od podlage.

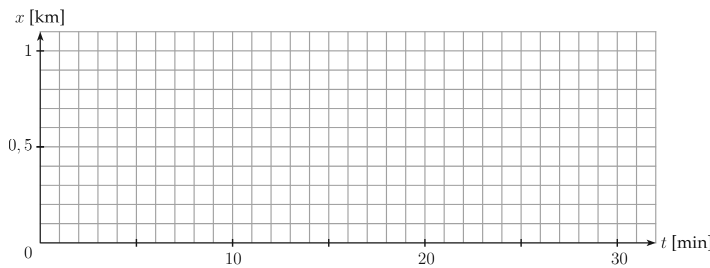
(**D**) izgube mehanske energije **povečajo**, plašči se **manj prožno** odbijajo od podlage.

B1 Ada in Sara se odpravita na tek. Tečeta po isti krožni poti, dolgi 1 km, a vsaka v svojo smer. Teči začneta v istem trenutku. Ada teče s stalno hitrostjo $12\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, Sara pa s stalno hitrostjo $10\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Tečeta pol ure in medtem ne spreminjata smeri svojega teka.



1 krog: 1 km

(a) V isti koordinatni sistem nariši grafa, ki kažeta, kako se njuni legi spreminjata s časom. Lego x meriš **vzdolž krožne poti** od starta (izhodišča, kjer je $x = 0$) v smeri, v kateri teče Ada. Ko preteče en krog, se znajde zopet v izhodišču (pri $x = 0$). Graf Adine lege x_A v odvisnosti od časa nariši s sklenjeno črto, graf Sarine lege x_S pa s prekinjeno črto.



(b) Kolikokrat se Ada in Sara med tekom od začetka do konca teka srečata? Začetka teka ne štejemo med srečanja.

(c) Izračunaj, kdaj in kje se Ada in Sara po startu prvič srečata.

(d) Ado in Saro spremlja psička Neli. Neli teče najprej z Ado, dokler ne srečata prvič Sare. Potem spremlja Saro do naslednjega srečanja z Ado, ko spet zamenja smer in spremljevanko. Take menjave potekajo do konca teka. Tudi Neli teče pol ure. Kolikšno pot opravi Neli v tem času?

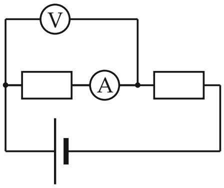
(e) S kolikšno povprečno hitrostjo teče Neli?

(f) V isti koordinatni sistem vriši graf, ki kaže, kako se lega Neli x_N spreminja s časom. Graf $x_N(t)$ nariši z drugo barvico.

B2 V vezja vežemo same enake vire napetosti z gonilno napetostjo $U_0 = 12$ V in enake porabnike. Za vsak posamezen porabnik v kateremkoli vezju velja, da je tok I_p skozi porabnik **premo sorazmeren** napetosti U_p na porabniku. Ko je na en vir priključen en sam porabnik, je tok, ki teče skozenj, 120 mA.

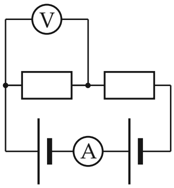
V razpredelnice zapiši tokove, ki jih izmerimo z ampermetri, in napetosti, ki jih izmerimo z voltmetri, v različnih vezjih na slikah.

(a)



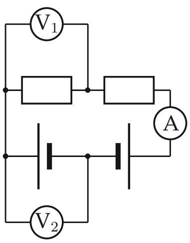
U [V]	I [mA]

(b)



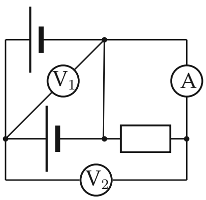
U [V]	I [mA]

(c)



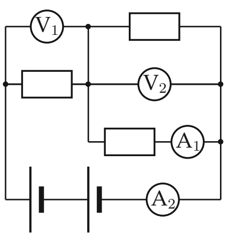
U_1 [V]	U_2 [V]	I [mA]

(d)



U_1 [V]	U_2 [V]	I [mA]

(e)



U_1 [V]	U_2 [V]	I_1 [mA]	I_2 [mA]

C1 – eksperimentalna naloga: MODEL TANKERJA

Napotka:

- keramično ploščico postavi natančno na sredino tal modela tankerja, da bo plaval vodoravno,
- na modelu so oznake za višino potopljenega dela v centimetrih.

(a) Izmeri ustrezne količine in izračunaj, kolikšna je masa modela tankerja (vključno s keramičnim dnom). V približku lahko računaš, da ima model obliko kvadra (kot da bi bile stranske stene plavajočega modela navpične). Iz tega, kar zapišeš, naj bo jasno razvidno, *kako* si določil(-a) maso modela tankerja.

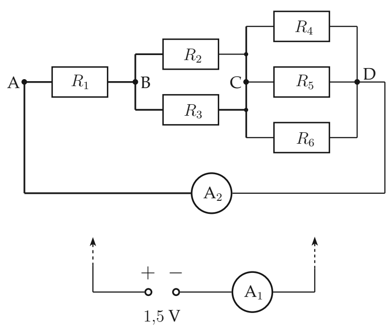
(b) Z nalivanjem vode v model tankerja (v posodo s keramičnim dnom) ugotovi, koliko mililitrov vode lahko največ prevaža model tankerja, da se pri tem ne potopi za več kot do polovice svoje višine.

(c) Koliko milijonov litrov nafte bi lahko prevažal pravi tanker z enako obliko kot jo ima model, če bi se lahko ugreznil do polovice višine? Pravi tanker bi imel dolžino, širino in višino tisočkrat večjo kot model, masa praznega tankerja pa bi bila $100\,000$ ton. Gostota nafte je $850\,\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Tudi v tem primeru lahko računaš s približkom, da ima tanker obliko kvadra.

(d) Približno določi, koliko kubičnih centimetrov vode izpodrine model tankerja, ko je potopljen do polovice višine, pri čemer pa ne moreš uporabiti približka, da so stranske stene plavajočega modela navpične. Iz tega, kar zapišeš, naj bo jasno razvidno, *kako* si določil(-a) to prostornino.

C2 – eksperimentalna naloga: SESTAVLJANJE VEZJA IN MERJENJE TOKOV

S šestimi uporniki in ampermetrom A_2 sestavi osnovno vezje, ki ga kaže shema. Velja: $R_2 = R_3$ in $R_4 = R_5 = R_6$. Enaki uporniki so označeni z enakimi barvnimi obročki. Pri sestavljanju vezja uporabi sponke (v točkah B, C in D, glej shemo vezja) in mali izvijač. Ampermeter A_2 priključi v vezje s krokodilčkoma.



Nato poveži baterijo in ampermeter A_1, ki meri tok I_1 skozi baterijo. S krokodilčkoma ju priključi v vezje na označenih točkah in izmeri tokova I_1 in I_2 skozi oba ampermetra. Osnovnega vezja ne spreminjaj.

(a) Izmeri tokove, ko sta baterija in ampermeter A_1 priključena med točkama:

meritev	1.	2.	3.	4.	5.
točki	A in B	B in C	C in D	A in C	B in D
I_1 [mA]					
I_2 [mA]					

Pozor! Med točki A in D **NE** priključi baterije in ampermetra A_1, ker je to kratek stik.

Odgovori še na naslednja vprašanja, ne da bi tokove tudi izmeril.

(b) Kolikšen tok teče skozi R_1 pri 2. meritvi (točki B in C)?

(c) Kolikšen tok teče skozi R_2 pri 1. meritvi (točki A in B)?

(d) Kolikšen tok teče skozi R_6 pri 3. meritvi (točki C in D)?

57. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – regijsko tekmovanje

1. letnik

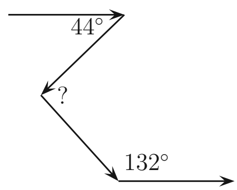
A1. V tovarni so posodobili opremo in produktivnost je zrasla za 25 %. Ko so odpustili nekaj delavcev, se je produktivnost zmanjšala za 20 %. Za koliko % se je po obeh spremembah spremenila produktivnost v tej tovarni?

(**A**) Zmanjšala za 5 % (**B**) Zmanjšala za 2,5 % (**C**) Zmanjšala za 2 %
(**D**) Se ni spremenila (**E**) Povečala za 5 %

A2. Kolikšna je vrednost zmnožka $x \cdot y$, če je $3^x = a$ in $a^y = 81$?

(**A**) 4 (**B**) 3 (**C**) 12 (**D**) 0 (**E**) 1

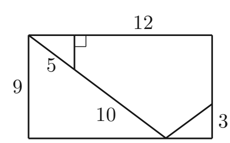
A3. Na sliki je narisano, kako je tekel zajec, ko ga je v megli lovil volk. Najprej je tekel proti vzhodu, potem se je obrnil desno, čez nekaj časa je zavil levo in kmalu še enkrat levo. Po zadnjem zavoju je zajec zopet tekel proti vzhodu. Koliko je velik kot pri drugem zavoju?



(**A**) $98°$ (**B**) $96°$ (**C**) $88°$ (**D**) $90°$ (**E**) $92°$

B1. Naj bosta a in b pozitivni realni števili, katerih zmnožek je 1, vsota njunih kvadratov pa je 4. Izračunaj vrednost izraza $a^{-3} + b^{-3}$. Rezultat naj bo natančen.

B2. Pravokotnik smo s tremi daljicami razdelili na štiri dele, tako kot je prikazano na sliki. Nato smo nastale štiri like na novo zložili v kvadrat. Koliko je obseg nastalega kvadrata?



B3. Ko je tretješolec Benjamin računal vsoto $1+2+3+\ldots+2012$, je izpustil nekaj členov in dobil napačno vsoto, ki je bila deljiva z 2011. Anika je pri računanju vsote $A = 1+2+3+\ldots+2013$ izpustila povsem enake člene kot Benjamin in dobila napačno vsoto N, ki je bila deljiva z 2014. Kolikšno je razmerje vsot $\frac{N}{A}$?

2. letnik

A1. Če so na blagajni kina odprte tri blagajne, morajo obiskovalci za nakup vstopnic čakati 15 min. Za koliko minut se skrajša čakalni čas, če odprejo še dve blagajni?

(**A**) 3 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 10

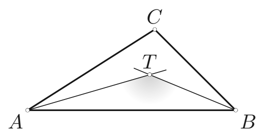
A2. Naj bo $x = 2^{2013}$. Koliko je vrednost izraza

$$x - \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}?$$

enaka

(**A**) -1 (**B**) 0 (**C**) 1 (**D**) 2^{2013} (**E**) 2

A3. V trikotniku ABC se simetrali kota $\sphericalangle BAC$ in kota $\sphericalangle CBA$ sekata v točki T. Označimo z γ velikost kota $\sphericalangle ACB$. Koliko je velik kot $\sphericalangle ATB$?



(**A**) 2γ (**B**) $180° - \gamma$ (**C**) $360° - 4\gamma$
(**D**) $60° + \gamma$ (**E**) $90° + \frac{\gamma}{2}$

B1. Poišči vsa naravna števila n oblike $n = \overline{23ab16c}$, ki imajo same različne števke in so deljiva z 9 in 11. Tu so a, b in c števke.

B2. Naj bo O izhodišče koordinatnega sistema. Točko $A(\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2})$ zavrtimo okoli O za 2013π v točko B. Točko B prezrcalimo čez simetralo lihih kvadrantov v točko C. Izračunaj velikost kota $\sphericalangle AOC$.

B3. Dokaži, da za poljubni realni števili a in b velja neenakost

$$(a + ab - b^2)^2 + ab^2(a+2) \geq 0.$$

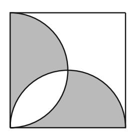
Kdaj velja enakost?

3. letnik

A1. Za funkcijo f je $3f(x) + f(-x) = 4 \sin x \cos x$ za vsako realno število x. Poišči pravilni zapis funkcije f.

(**A**) $\sin x$ (**B**) $\cos x$ (**C**) $\cos x \sin x$ (**D**) $\sin 2x$ (**E**) $\cos 2x$

A2. V kvadrat s stranico 2 narišemo dva polkroga, katerih premera sta stranici kvadrata, kot kaže slika. Kolikšna je ploščina neosenčenega dela kvadrata?



(**A**) $\frac{\pi}{2}$ (**B**) 2 (**C**) $\frac{3}{2} + \frac{\pi}{4}$ (**D**) $\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}$ (**E**) $\frac{3\pi}{4}$

A3. V čredi so jeleni in košute. Košute predstavljajo $55\ \%$ črede, njihova masa pa predstavlja $45\ \%$ mase celotne črede. Kolikšno je razmerje med povprečno maso jelena in povprečno maso košute?

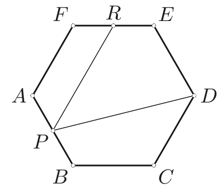
(**A**) $\frac{81}{40}$ (**B**) $\frac{3}{2}$ (**C**) $\frac{121}{81}$ (**D**) $\frac{11}{9}$ (**E**) $\frac{6}{5}$

B1. Poišči vse celoštevilske rešitve enačbe $m^4 + 2n^2 = 9mn$.

B2. Poišči vsa realna števila x, ki zadoščajo enačbi

$$\log_{\sin x}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) = 2.$$

B3. Naj bo $ABCDEF$ pravilni šestkotnik, P razpolovišče stranice AB in R razpolovišče stranice EF, kot je prikazano na sliki. Kolikšno je razmerje med ploščino štirikotnika $APRF$ in ploščino štirikotnika $BCDP$?



4. letnik

A1. V posodi imamo 10 kroglic, treh različnih barv: modre, rumene in zelene. V vrsto jih lahko postavimo na 360 različnih načinov. Največ koliko modrih kroglic je lahko v posodi?

(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) 8

A2. Za funkcijo f vemo, da je $f(x) = x^2 + 1$. Koliko je $\frac{f(f(x)+x)}{f(x)}$?

(**A**) $x^2 + x + 1$ (**B**) $x^2 + 2x + 2$ (**C**) $x^2 + 1$
(**D**) $x^2 + 2x + 1$ (**E**) $x^2 + x$

A3. Poltraka iz oglišča A enotskega kvadrata $ABCD$ razdelita pravi kot na tri enako velike kote. Eden izmed poltrakov seka stranico BC v točki T. Koliko je dolga daljica BT?

(**A**) $\frac{1}{2}$ (**B**) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (**C**) $\frac{1}{3}$ (**D**) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (**E**) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B1. Poišči vse četverice neničelnih števk a, b, c in d, za katere velja $\overline{ab20} - \overline{13cd} = \overline{cdab}$.

B2. Dokaži, da je vsak tangenten štirikotnik, katerega diagonali se sekata pod pravim kotom, deltoid.

B3. Žan je zapisal zaporedje štirih pozitivnih realnih števil. Prvi člen zaporedja je bilo število 3, zadnji člen pa število 9. Prvi trije členi so oblikovali geometrijsko zaporedje, zadni trije členi pa aritmetično zaporedje. Določi vse štiri člene Žanovega zaporedja.

57. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje

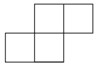
1. letnik

1. Poišči vsa praštevila p, q in r, za katera velja $p + q^2 = r^4$.

2. Za realno število a naj $[a]$ označuje največje celo število, ki ni večje od a. Poišči vsa cela števila y, za katera obstaja realno število x, da velja $\left[\frac{x+23}{8}\right] = [\sqrt{x}] = y$.

3. Denimo, da obstajata taki točki D na stranici AB in E na stranici AC trikotnika ABC, da je $|AE| = |ED| = |DB|$ in $|AD| = |DC| = |CB|$. Določi velikosti kotov trikotnika ABC.

4. Tabelo velikosti 4×4 želimo pokriti z dominami oblike

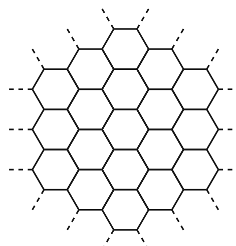


(lahko tudi zrcaljena ali zasukana),

pri čemer se domine **lahko prekrivajo** ali **segajo čez rob tabele**. Najmanj koliko domin potrebujemo?

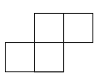
2. letnik

1. Največ koliko je lahko največji skupni delitelj števil $11n+4$ in $7n+2$, če je n naravno število?
2. Naj bo D razpolovišče stranice AB, E presečišče stranice BC in simetrale kota $\angle BAC$, F pa pravokotna projekcija točke E na stranico AB trikotnika ABC. Denimo, da je $\angle CDA = \angle ACB$ in $|CE| = |BF|$. Določi velikost kotov trikotnika ABC.
3. Naj bo E taka točka na stranici CD pravokotnika $ABCD$, da je kot $\angle AEB$ pravi in velja $3|EA| = 2|EC|$. Določi razmerje med dolžinama stranic pravokotnika $ABCD$.
4. V vsakem šestkotniku neskončnega satovja je zapisano naravno število, ki je enako povprečju števil, zapisanih v petih izmed sosednjih šest šestkotnikov. Dokaži, da so vsa števila v satovju enaka.



3. letnik

1. Poišči vsa praštevila p in q, za katera je $p^4 - q^6$ potenca praštevila.
(Števili 7 in 8 sta potenci praštevila, 6 pa ne.)
2. Za pozitivni realni števili x in y velja
$$2013^{\log_3 x} = y^{\log_5 2013} \quad \text{in} \quad \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y > 0.$$
Katero od števil x in y je večje?
3. Naj bo D razpolovišče stranice BC, E razpolovišče stranice CA in T težišče trikotnika ABC. Premice AT, BT in CT naj sekajo trikotniku ABC očrtano krožnico še v točkah P, Q in R. Denimo, da je $\angle ACB = \angle RQP$. Dokaži, da je štirikotnik $DCET$ tetiven.
4. Tabelo velikosti 4×4 želimo pokriti z dominami oblike



(lahko tudi zrcaljena ali zasukana),

pri čemer se domine **lahko prekrivajo**, ne smejo pa segati čez rob tabele. Najmanj koliko domin potrebujemo?

4. letnik

1. Poišči vse funkcije $f\colon \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$, za katere velja

$$f(x) + f(y) = (x + y + 2)f(x)f(y)$$

   za vse $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

2. Največ koliko praštevil lahko vsebuje nekonstantno geometrijsko zaporedje pozitivnih realnih števil?

3. Naj bo $\mathcal{K}_1$ krožnica s središčem S_1 in polmerom r. Naj bo $\mathcal{K}_2$ krožnica s središčem S_2 na krožnici $\mathcal{K}_1$ in polmerom $\frac{2}{3}r$. Presečišče premice S_1S_2 s krožnico $\mathcal{K}_2$, ki leži zunaj kroga, omejenega s krožnico $\mathcal{K}_1$, označimo z A. Eno izmed presečišč krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ označimo s C. Premica AC naj seka krožnico $\mathcal{K}_1$ še v točki D. Naj bo H pravokotna projekcija točke D na premico S_1S_2. Dokaži, da točka H leži na krožnici $\mathcal{K}_2$.

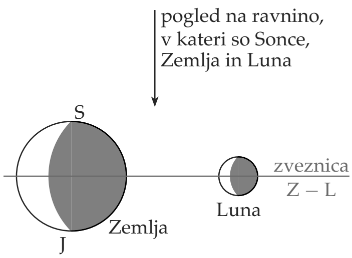
4. Turnir v namiznem tenisu poteka po naslednjem pravilu. V vsakem krogu v primeru lihega števila tekmovalcev najprej izžrebajo enega, ki se avtomatično uvrsti v naslednji krog. Ostale tekmovalce z žrebom razporedijo v pare. Tekmovalca vsakega para se pomerita med seboj, zmagovalec iz vsakega para pa se uvrsti v naslednji krog. Naj $f(n)$ označuje število krogov na turnirju z n tekmovalci. (Tako je npr. $f(5) = 3$.) Določi $f(2013)$ in poišči najmanjše naravno število n, za katerega je $f(n) = f(2013)$.

Rešitve s 33. tekmovanja za zlato Stefanovo priznanje – državno tekmovanje

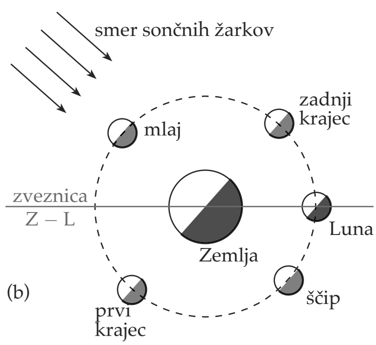
8. razred

A1 Popolni odboj svetlobe na meji dveh sredstev z različnima optičnima gostotama se zgodi, če na to mejo vpada svetloba iz sredstva z večjo optično gostoto (vode) pri vpadnem kotu, ki je večji od mejnega kota za popolni odboj. Tak primer kaže slika (C).

A2 S slike (a), ki kaže obsijana dela Zemlje in Lune, lahko ugotovimo, da ležijo Zemlja, Luna in Sonce v ravnini, ki je vzporedna zveznici med Zemljo in Luno ter je pravokotna na sliko. Zemljo, Luno in smer sončnih žarkov narišemo v tej ravnini, kot kaže slika (b).



(a)



(b)

A3 Predpona $femto$ je peta v vrsti, kar pomeni, da zniža enoto petkrat zapored na tisočino, torej ustreza množenju s faktorjem $(10^{-3})^5 = 10^{-15}$. Femtoparsec = $10^{-15} \cdot 3{,}26\,sv.l. = 10^{-15} \cdot 3{,}26 \cdot 9{,}5 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m} = 31\,\mathrm{m}$ in približno ustreza razdalji x, ki jo svetloba prepotuje v 100 nanosekundah, $x = c \cdot 100\,\mathrm{ns} = 3 \cdot 10^8\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 100 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s} = 30\,\mathrm{m}$.

A4 Gladina se hitreje dviga, če je vaza ožja. Graf kaže, da se gladina počasneje dviga na začetku in na koncu nalivanja in hitreje vmes, kar pomeni, da je vaza pri dnu in vrhu široka, v sredini pa ozka. To je vaza (C).

A5 Ko kocko razrežemo na osem manjših, je sila $\vec{F}_m$, s katero posamezna manjša kocka pritiska na mizo, po velikosti enaka osmini teže velike kocke $\vec{F}_v$. Ploščina ploskve, s katero posamezna manjša kocka pritiska na mizo S_m, pa je četrtina ploščine osnovne ploskve velike kocke S_v. Za tlak velike kocke na mizo velja

$$p_v = \frac{F_v}{S_v} = 800\,\mathrm{Pa}.$$

Za tlak posamezne manjše kocke na mizo velja

$$p_m = \frac{F_m}{S_m} = \frac{F_v \cdot 4}{8 \cdot S_v} = \frac{F_v}{2 \cdot S_v} = 400\,\mathrm{Pa}.$$

B1 (a) Nace se povzpne za $h_0 = 800$ m v času $t_N = 1$ ura in 20 minut = 80 minut, pri čemer se njegova višina enakomerno spreminja s časom. To pomeni, da je Nacetova hitrost v navpični smeri

$$v_{N,\uparrow} = \frac{h_0}{t_N} = \frac{800\,\mathrm{m}}{80\,\mathrm{min}} = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}\,.$$

(b) Na sliki izmerimo dolžino strmega dela poti, $s_1 = 4{,}8$ cm, in ugotovimo, da je enako dolga kot je v merilu slike prikazana višina gore, $h_0 = 800$ m. Dolžina strmega dela Nacetove poti je torej $s_{N,s} = 800$ m. Dolžina položnejšega dela poti na sliki pa meri $s_2 = 3{,}6$ cm, kar ustreza $\frac{3}{4}$ višine gore, $s_{N,p} = 600$ m. V celoti je Nacetova pot dolga $s_N = s_{N,s} + s_{N,p} = 800\,\mathrm{m} + 600\,\mathrm{m} = 1400$ m.

(c) Za vsakih 10 m višinske razlike potrebuje Nace 1 minuto. Višinska razlika, ki jo opravi na strmem delu poti, je $h_s = 567$ m (preberemo s slike), za kar potrebuje čas $t_{N,s} = 56{,}7$ minut. Strmi del poti meri $s_{N,s} = 800$ m, zato je Nacetova hitrost na tem delu poti

$$v_{N,s} = \frac{s_{N,s}}{t_{N,s}} = \frac{800\,\mathrm{m}}{56{,}7\,\mathrm{min}} = 14{,}11\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}} = 0{,}235\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

Za položni del poti $s_{N,p} = 600$ m potrebuje Nace čas $t_{N,p} = t_N - t_{N,s} = 23{,}3$ minut, njegova hitrost na tem delu je

$$v_{N,p} = \frac{s_{N,p}}{t_{N,p}} = \frac{600\,\mathrm{m}}{23{,}3\,\mathrm{min}} = 25{,}75\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}} = 0{,}429\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

(d) Dolžina Jelkine poti je dvakrat tolikšna, kot je dolžina Nacetove poti. Na vsakem odseku Nacetove poti, omejenem s presečišči z Jelkino potjo, je Jelkina pot na tem delu pobočja dolga za dve stranici enakostraničnega trikotnika, Nacetova pa za eno. Jelkina pot je v celoti dolga $s_J = 2 \cdot s_N = 2\,800$ m.

(e) Jelka hodi s stalno hitrostjo, vrh doseže v času $t_J = 2$ uri in pol $= 150$ minut. Njena hitrost je

$$v_J = \frac{s_J}{t_J} = \frac{2\,800\,\text{m}}{150\,\text{min}} = 18{,}67\,\frac{\text{m}}{\text{min}} = 0{,}311\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

Strmi del Jelkine poti meri dvakrat toliko, kot meri strmi del Nacetove poti, $s_{J,s} = 2 \cdot s_{N,s} = 1\,600$ m. Jelka ga prehodi v času

$$t_{J,s} = \frac{s_{J,s}}{v_J} = \frac{1\,600\,\text{m} \cdot \text{min}}{18{,}67\,\text{m}} = 85{,}7\,\text{min}\,.$$

(f) Jelka prehodi strmi del poti v času $t_{J,s} = 85{,}7$ min. V tem času se dvigne za $h_s = 567$ m, kar pomeni, da je njena hitrost na strmem delu v navpični smeri

$$v_{J,s,\uparrow} = \frac{h_s}{t_{J,s}} = \frac{567\,\text{m}}{85{,}7\,\text{min}} = 6{,}61\,\frac{\text{m}}{\text{min}} = 0{,}11\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

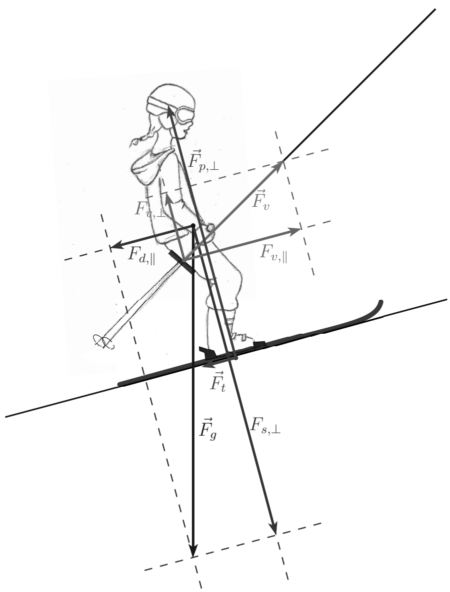
Položni del poti z višinsko razliko $h_p = h_0 - h_s = 233$ m prehodi Jelka v času $t_{J,p} = t_J - t_{J,s} = 64{,}3$ min. Njena hitrost v navpični smeri je na položnem delu poti

$$v_{J,p,\uparrow} = \frac{h_p}{t_{J,p}} = \frac{233\,\text{m}}{64{,}3\,\text{min}} = 3{,}62\,\frac{\text{m}}{\text{min}} = 0{,}060\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

B2 (a) Na Tino in njeni smučki delujejo med njeno vožnjo z vlečnico sila vlečnice (vlečnega krožnika), teža, sila trenja ter sila podlage, pravokotna na podlago. Ker se Tina giblje počasi, lahko zračni upor zanemarimo.

Tina se giblje s stalno hitrostjo, torej je rezultanta vseh sil, ki delujejo nanjo, enaka 0.

(b) Pri določanju statične in dinamične komponente teže na klancu si pomagamo z načrtovanjem. Težo narišemo v določenem merilu: velikost teže je 750 N, na sliki je prikazana s 7,5 cm dolgo usmerjeno daljico $\vec{F}_g$. Razstavimo jo na komponenti $F_{d,\parallel}$ (vzporedno klancu) in $F_{s,\perp}$ (pravokotno na klanec). Izmerimo dolžini obeh komponent in ju preračunamo glede na izbrano merilo, za njuni velikosti dobimo $F_{s,\perp} = 724$ N ($\pm$ 20 N) in $F_{d,\parallel} = 194$ N ($\pm$ 20 N).



(c) Vlečni krožnik (vlečnica) deluje na Tino s silo F_v v smeri vrvi, na katero je vlečni krožnik pripet. Sile na Tino so v ravnovesju: vsoto dinamične komponente teže $F_{d,\|}$ in sile trenja $\vec{F}_t$ uravnovesi podlagi vzporedna komponenta sile vlečnice na Tino $F_{v,\|}$, ki meri $F_{v,\|} = F_t + F_{d,\|} = 80\,\mathrm{N} + 194\,\mathrm{N} = 274$ N ($\pm$ 20 N). Narišemo daljico $F_{v,\|}$ ustrezne dolžine (2,74 cm), vzporedno podlagi in s prijemališčem v točki, kjer je vrv pripeta na vlečni krožnik, ter od njenega krajišča potegnemo pravokotnico na podlago do vrvi vlečnice. Zdaj lahko narišemo še silo vlečnega krožnika $\vec{F}_v$, izmerimo njeno dolžino in dobimo $F_v = 317$ N ($\pm$ 20 N).

(d) V smeri, ki je pravokotna na podlago, deluje podlaga na Tino s silo $\vec{F}_{p,\perp}$, ki skupaj s pravokotno komponento sile vlečnega krožnika $F_{v,\perp}$, ki meri 158 N ($\pm$ 20 N) (izmerimo s slike in preračunamo glede na merilo), uravnovesi statično komponento teže $F_{s,\perp}$, $F_{p,\perp} + F_{v,\perp} = F_{s,\perp}$. Za velikost sile podlage dobimo $F_{p,\perp} = 724\,\mathrm{N} - 158\,\mathrm{N} = 566$ N ($\pm$ 20 N).

(e) Smučki pritiskata na podlago s pravokotno silo, ki je po velikosti enaka pravokotni sili podlage, $F_{sm} = F_{p,\perp} = 566$ N. Ploščina drsnih ploskev Tininih smučk je $2 \cdot 1400\,\mathrm{cm}^2 = 2\,800\,\mathrm{cm}^2$, v stiku s podlago je 90% drsnih ploskev, $S_{sm} = 0{,}9 \cdot 2\,800\mathrm{cm}^2 = 2\,520\,\mathrm{cm}^2$. Smučki delujeta na podlago s povprečnim tlakom

$$\bar{p} = \frac{F_{sm}}{S_{sm}} = \frac{566\,\mathrm{N}}{2\,520\mathrm{cm}^2} = 2246\,\mathrm{Pa} \pm 80\,\mathrm{Pa}\,.$$

(f) Polmer vlečnega krožnika je $r = 8$ cm, njegova ploščina je $S_k = 201$ cm^2. Ploščino ocenimo tako, da preštejemo kvadratke v kvadratni mreži, ki jih zasede krog.

(g) Sila, s katero vlečni krožnik deluje na Tino v smeri, pravokotni na krožnik, je sila $\vec{F}_v$. Povprečni tlak, s katerim deluje vlečni krožnik na Tino, je

$$\bar{p}_v = \frac{F_v}{S_k} = \frac{317\,\mathrm{N}}{201\,\mathrm{cm}^2} = 15{,}8\,\mathrm{kPa} \pm 2\,\mathrm{kPa}\,.$$

C1 (a) Rezultati meritev so v tabeli skupaj z dopustnimi napakami meritev.

lega predmeta	d [mm] ($\alpha = 0°$)
p_1	30 ± 3
p_2	37 ± 3
p_3	43 ± 3

(b) Rezultati meritev so v tabeli skupaj z dopustnimi napakami meritev. Po dogovoru o predznaku kota so izmerjene vrednosti kotov negativne.

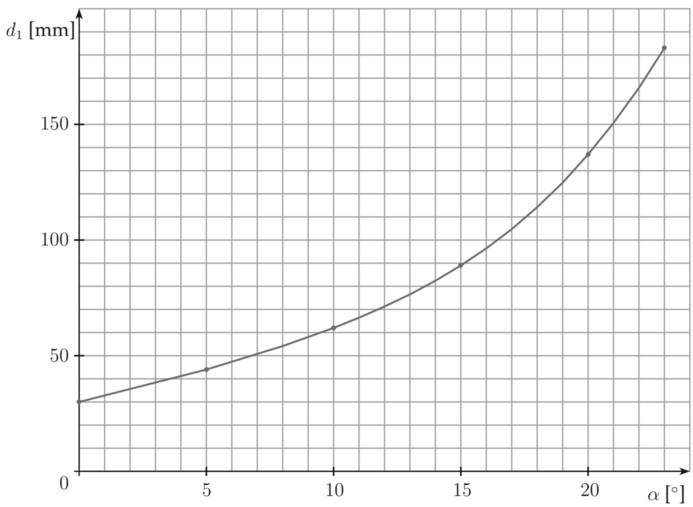
lega predmeta	α [°] ($d = 0$)
p_1	-13 ± 1
p_2	-16 ± 1
p_3	-19 ± 1

(b) Rezultati meritev so v tabeli skupaj z dopustnimi napakami meritev.

α	d_1 [mm]	d_2 [mm]	d_3 [mm]	$d_1 : d_2$	$d_2 : d_3$	$d_1 : d_3$
$5°$	44 ± 3	52 ± 5	61 ± 5	$0{,}85 \pm 0{,}15$	$0{,}85 \pm 0{,}17$	$0{,}72 \pm 0{,}12$
$10°$	62 ± 5	72 ± 5	87 ± 5	$0{,}86 \pm 0{,}14$	$0{,}83 \pm 0{,}11$	$0{,}71 \pm 0{,}11$
$15°$	89 ± 5	105 ± 10	136 ± 10	$0{,}85 \pm 0{,}14$	$0{,}65 \pm 0{,}10$	$0{,}65 \pm 0{,}10$

(c) V koordinatni sistem vrišemo merske točke, za katere že imamo podatke iz prejšnjih meritev pri tej nalogi. Poiščemo kot, pri katerem seka premica, na kateri sta poravnani slika predmeta in središčna bucika, os x v točki A, ter določimo razdaljo med koordinatnim izhodiščem in točko A. Nato po lastni presoji napravimo še kakšno dodatno meritev, na primer pri kotu $20°$. Vrišemo v graf še te dodatne točke ter jih povežemo s krivuljo, ki se točkam najbolj prilega.

α	d_1 [mm]	opombe
$0°$	30 ± 3	iz meritev pri (a)
$5°$	44 ± 3	iz meritev pri (c)
$10°$	62 ± 5	iz meritev pri (c)
$15°$	89 ± 5	iz meritev pri (c)
$20°$	137 ± 10	dodatna meritev, lahko drugi kot, lahko več meritev
$23° \ \pm 2°$	183 ± 1	meritev kota za presečišče premice z osjo x v točki A



C2 (a) Izmerjeni časi petih nihajev t_5 pri različnih začetnih odmikih so zapisani v tabeli. Čas polovice nihaja $t_{1/2}$ je desetina časa t_5.

Pri začetnem kotu odmika α_0 je pot s, ki jo utež opravi v pol nihaja, enaka dolžini krožnega loka nad kotom $\beta = 2{\cdot}\alpha_0$ (nihalo gre v pol nihaja od ene do druge skrajne lege). Če ustreza polnemu krogu ($\alpha = 360°$) s polmerom r_1 obseg $ob = 6{,}28 \cdot r_1$, ustreza delu obsega (loku) nad kotom β premosorazmerno krajši lok, velja

$$s = \frac{\beta}{360°} \cdot 6{,}28 \cdot r_1 \,.$$

Dolžina poti uteži s je za vsak $\beta = 2 \cdot \alpha_0$ izračunana in vpisana v tabelo.
V zadnjem stolpcu tabele je izračunana povprečna hitrost uteži v pol nihaja,

$$\bar{v} = \frac{s}{t_{1/2}} \,.$$

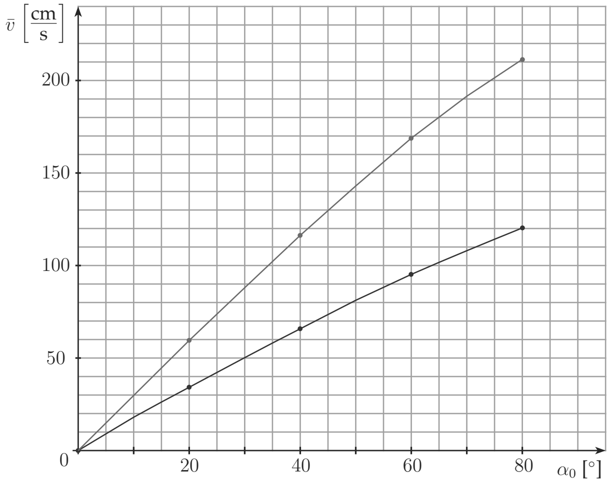
$r_1 = 0{,}250$ m				
kot odmika α_0	t_5 [s]	$t_{1/2}$ [s]	s [cm]	$\bar{v}$ $\left[\frac{\text{cm}}{\text{s}}\right]$
20°	5,1	0,51	17,4	34,2 ± 4,0
40°	5,3	0,53	34,9	65,8 ± 7,0
60°	5,5	0,55	52,3	95,2 ± 10,0
80°	5,8	0,58	69,8	120,3 ± 12,0

Pričakujemo, da tekmovalci izmerijo čas 10 nihajev z absolutno natančnostjo $0{,}5$ s. Izmerjeni časi $t_{1/2}$ lahko odstopajo od časov v tabeli za $\pm\,0{,}05$ s.

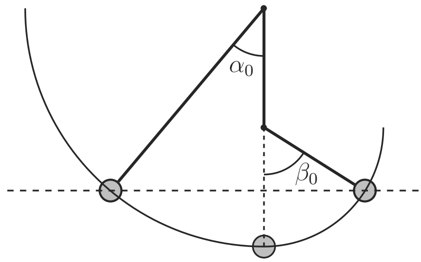
(b) Rezultati meritev za dolžino nihala $r_2 = 0{,}75$ m so v tabeli.
Pričakujemo, da tekmovalci izmerijo čas 10 nihajev z absolutno natančnostjo $0{,}5$ s. Izmerjeni časi $t_{1/2}$ lahko odstopajo od časov v tabeli za $\pm\,0{,}05$ s.

$r_1 = 0{,}750$ m				
kot odmika α_0	t_5 [s]	$t_{1/2}$ [s]	s [cm]	$\bar{v}$ $\left[\frac{\text{cm}}{\text{s}}\right]$
20°	8,8	0,88	52,3	59,5 ± 4,0
40°	9,0	0,90	104,7	116,3 ± 7,0
60°	9,3	0,93	157,0	168,8 ± 10,0
80°	9,9	0,99	209,3	211,4 ± 12,0

(c) V koordinatni sistem vrišemo vse merske točke za obe dolžini nihala in še dodatno točko v izhodišču koordinatnega sistema: v primeru, ko je $\alpha_0 = 0$, nihalo miruje in je tudi povprečna hitrost enaka 0. Točke povežemo z gladkima krivuljama, ki se točkam najbolj prilegata; krivulji sekata koordinatno izhodišče (in nista premici). Graf za nihalo z dolžino r_1 je narisan z modro črto, graf za nihalo z dolžino r_2 je narisan z rdečo črto.



(d) Na levi strani je začetni kot odmika nihala $\alpha_0 = 40°$, nihalo ima dolžino $r_3 = 0{,}500$ m. Na desni strani ima nihalo dolžino $r_1 = 0{,}250$ m, največji kot odmika β_0 pa določimo iz podatka, da je nihalo v obeh skrajnih legah na isti višini. Na sliki izmerimo $\beta_0 = 58°$.



Polovica nihaja opisanega nihala je sestavljena iz četrtine nihaja (polovice od pol nihaja) nihala z dolžino r_3 in največjim kotom odmika α_0 in četrtine nihaja (polovice od pol nihaja) nihala z dolžino r_1 in največjim kotom odmika β_0. To pomeni, da je čas za pol nihaja

$$t_{1/2} = \frac{1}{2}\, t_{1/2,r_3} + \frac{1}{2}\, t_{1/2,r_1}\,.$$

Časa $t_{1/2,r_3}$ in $t_{1/2,r_1}$ lahko izmerimo (merimo čas za 5 nihajev pri dolžinah nihala r_1 in kotu začetnega odmika β_0 ter r_3 in kotu začetnega odmika α_0). Dobimo $t_{1/2,r_3} = 0{,}74\,\mathrm{s} \pm 0{,}05$ s, $t_{1/2,r_1} = 0{,}55\,\mathrm{s} \pm 0{,}05$ s in $t_{1/2} = 0{,}65\,\mathrm{s} \pm 0{,}10$ s.

Druga možnost je, da upoštevamo, da je $\beta_0 \approx 60°$, kar ustreza eni od že opravljenih meritev. Iz tabele z rezultati meritev preberemo $t_{1/2,r_1} = 0{,}55\,\mathrm{s} \pm 0{,}05$ s. Za nihalo z dolžino r_3 in kotom začetnega odmika $\alpha_0 = 40°$ pa lahko ocenimo čas za polovico nihaja kot srednjo vrednost časov za polovico nihaja nihal z dolžinama r_1 in r_2 pri istem kotu začetnega odmika, ker je r_3 srednja vrednost med r_1 in r_2. To je le približna ocena, dobimo $t_{1/2,r_3} \approx 0{,}72$ s in $t_{1/2} \approx 0{,}64\,\mathrm{s} \pm 0{,}10$ s.

Pot za pol nihaja je

$$s = s_{r_3} + s_{r_1}\,,$$

kjer dolžini lokov s_{r_1} pri dolžini nihala r_1 in kotu β_0 ter s_{r_3} pri dolžini nihala r_3 in kotu α_0 izračunamo, dobimo $s_{r_1} = 25{,}3$ cm, $s_{r_3} = 34{,}9$ in $s = 60{,}2$ cm.

Povprečno hitrost nihala izračunamo, kot običajno,

$$\bar{v} = \frac{s}{t_{1/2}} = \frac{60{,}2\,\mathrm{cm}}{0{,}64\,\mathrm{s} \,\pm\, 0{,}10\,\mathrm{s}} = 94{,}1\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} \,\pm\, 15\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}\,.$$

9. razred

A1 Moč je razmerje med opravljenim delom in časom, v katerem je delo opravljeno. Delo opravlja sila, s katero dvigujemo breme in ki je po velikosti enaka teži bremena. Velja

$$\begin{aligned} P &= \frac{A}{t} = \frac{F \cdot h}{t} = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} = \frac{33\,000\,\text{funtov} \,\cdot g \cdot 1\,\text{čevelj}}{1\,\text{min}} = \\ &= \frac{33\,000 \cdot 0,454\,\mathrm{kg} \,\cdot 10\,\mathrm{m} \,\cdot 0{,}3048\,\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2 \cdot 60\,\mathrm{s}} = 761{,}1\,\mathrm{W}\,. \end{aligned}$$

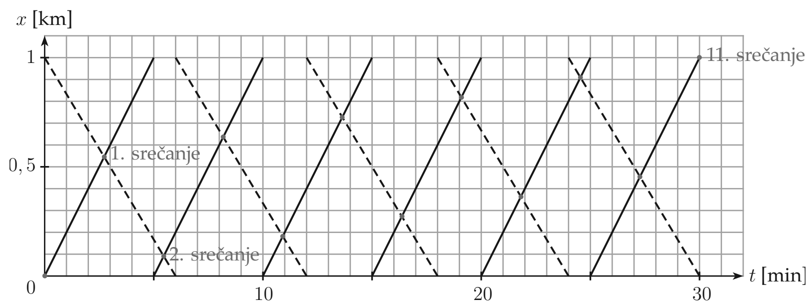
A2 V desnem kraku U-cevke je na vrhu jedilno olje, ki je redkejše od vode, kar ugotovimo s slike. V tem kraku z naraščanjem globine od gladine tlak narašča, a skozi olje narašča počasneje kot skozi vodo.

A3 Pri zaporedni vezavi elementov teče skozi vse elemente isti tok.

A4 Votla krogla na gladini vode plava, kar pomeni, da vzgon na kroglo uravnovesi njeno težo. Iz tega sledi, da je masa krogle m enaka masi izpodrinjene vode M_1. Tehtnica pokaže skupno maso vse vode v posodi in maso krogle, $M + m = M + M_1$.

A5 Če je tlak v zračnici velik, je izguba mehanske energija manjša, če je tlak manjši, je izguba mehanske energije večja. Gorski kolesarji pred spustom po grbinasti poti zmanjšajo tlak v zračnicah svojih koles in s tem povečajo izgube mehanske energije. Plašči se zato manj prožno odbijajo od podlage, kolesa manj poskakujejo.

B1 (a) Ada teče s hitrostjo $12\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 0{,}2\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}}$ in preteče en krog, ki meri 1 km, v dvanajstini ure $= 5$ min. Sara teče s hitrostjo $10\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 0{,}1\dot{6}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}}$ in preteče en krog v desetini ure $= 6$ min. Graf Adine lege je narisan s sklenjeno črto, graf Sarine s prekinjeno.



(b) Najlažje število srečanj določimo iz grafa; od začetka do konca teka se srečata $11-$ krat (zadnje, 11. srečanje se zgodi prav na koncu teka).

(c) Čas $t = 0$ je trenutek, ko Ada in Sara s tekom pričneta. Prvič se srečata v trenutku t_1, ko skupaj pretečeta točno 1 krog z obsegom $ob = 1$ km. Velja

$$v_A \cdot t_1 + v_S \cdot t_1 = ob$$

odkoder lahko izračunamo čas 1. srečanja

$$t_1 = \frac{ob}{v_A + v_S} = \frac{1\,\text{km} \cdot \text{h}}{22\,\text{km}} = 0{,}0\overline{45}\,\text{h} = 2{,}\overline{72}\,\text{min}\,.$$

Srečata se pri $x_1 = v_A \cdot t_1 = 0{,}\overline{54}$ km.

(d) Najbolj enostavno se to, s kom teče Neli, vidi iz grafa pri podvprašanju (f). Na šestih odsekih Neli spremlja Ado, na petih odsekih spremlja Saro. Na vsakem odseku teče s svojo spremljevanko do naslednjega srečanja. Časi med srečanji so vsi enaki t_1. Odseki, na katerih spremlja Ado, merijo x_1, odseki, na katerih spremlja Saro, pa merijo $ob - x_1$. Pot, ki jo Neli opravi v pol ure, je

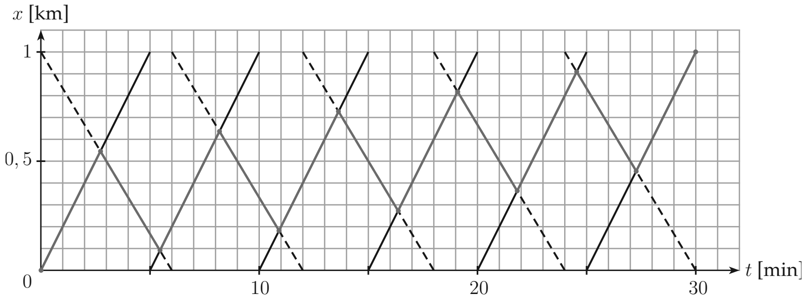
$$s_N = 6 \cdot x_1 + 5 \cdot (ob - x_1) = 6 \cdot 0{,}\overline{54}\,\text{km} + 5 \cdot (1\,\text{km} - 0{,}\overline{54}\,\text{km}) = 5{,}\overline{54}\,\text{km}\,.$$

Sicer pa Neli preteče enako število odsekov kot je med tekom srečanj med Ado in Saro, 11. Ker začne s spremljanjem Ade, s spremljanjem Ade tudi konča. Z Ado torej teče 6−krat in s Saro 5−krat.

(e) Neli teče pol ure, $t_t = 30$ min. Nelina povprečna hitrost je

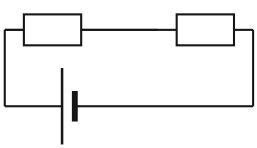
$$\bar{v}_N = \frac{s_N}{t_t} = \frac{5{,}\overline{54}\,\text{km}}{30\,\text{min}} = 0{,}1\overline{84}\,\frac{\text{km}}{\text{min}} = 11{,}\overline{09}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\,.$$

(f) Graf Neline lege v odvisnosti od časa je narisan z rdečo sklenjeno črto.

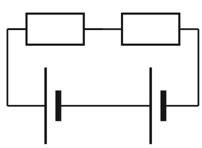


B2 Ker ni rečeno drugače, domnevamo, da so merilni inštrumenti idealni. Notranji upor idealnega ampermetra je 0, notranji upor idealnega voltmetra je ∞. Za lažjo predstavo, kakšna so narisana vezja, lahko odmislimo vse voltmetre in ampermetre: v mislih zbrišemo veje z voltmetri in čez ampermetre narišemo žice.

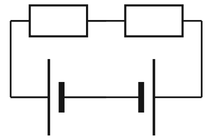
(a) V vezju sta zaporedno vezana dva enaka porabnika. Na vsakem je polovica napetosti vira, $U = 6$ V. Če pri napetosti 12 V teče skozi porabnik tok 120 mA, teče pri napetosti 6 V pol manjši tok $I = 60$ mA.



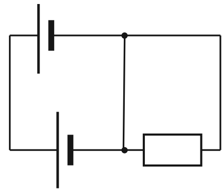
(b) V vezju sta zaporedno vezana dva enaka porabnika in dva enaka vira. Skupna gonilna napetost je 24 V. Na vsakem porabniku je polovica gonilne napetosti, $U = 12$ V. Pri napetosti 12 V teče skozi porabnik tok $I = 120$ mA.



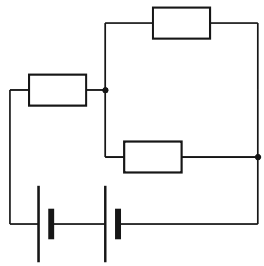
(c) Vira sta vezana nasproti, skozi vezje tok ne teče, $I = 0$. Ker skozi porabnika tok ne teče, je napetost, ki jo meri voltmeter V_1, enaka $U_1 = 0$. Voltmeter V_2 meri napetost enega vira in zato je $U_2 = 12$ V.



(d) Voltmeter V_1 meri gonilni napetosti obeh posameznih virov, $U_1 = 12$ V. Skozi porabnik tok ne teče, $I = 0$ (mimo porabnika je speljan kratek stik). Napetost na porabniku je 0. Voltmeter V_2 meri skupno napetost vira (12 V) in porabnika (0), kaže $U_2 = 12$ V.



(e) Skupna gonilna napetost dveh zaporedno vezanih virov je 24 V. Skozi vira in skozi levi upornik teče isti tok I_2, ki ga meri ampermeter A_2. Skozi vzporedno vezana enaka upornika tečeta enaka tokova, ki merita vsak pol toka I_2. Enega od teh dveh tokov meri ampermeter A_1, $I_1 = \frac{1}{2}I_2$. Ker sta napetost na posameznem porabniku in tok skozenj premosorazmerna, je napetost na vzporedno vezanih porabnikih (ki jo meri voltmeter V_2) pol tolikšna kot je napetost na levem porabniku (ki jo meri voltmeter V_1), $U_2 = \frac{1}{2}U_1$. Vsota $U_1 + U_2 = 3U_2$ je enaka skupni napetosti virov 24 V, odkoder dobimo $U_2 = 8$ V in $U_1 = 16$ V. Tokova sta $I_1 = 80$ mA in $I_2 = 160$ mA.



C1 (a) Posodo s keramičnim dnom postavimo na vodno gladino in na merilu preberemo, da se je model potopil približno $h_1 = 1{,}1$ cm globoko. Sila vzgona je po velikosti enaka teži, zato je masa modela enaka masi izpodrinjene vode

$$m_1 = \rho_v \cdot V_1 = 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^2} \cdot 126\,\mathrm{cm}^3 = 126\,\mathrm{g} \pm 30\,\mathrm{g}\,.$$

Zaradi nenatančnosti pri odčitavanju je dovoljeno odstopanje ± 30 g.

(b) Z merilnim valjem nalivamo vodo v model (v posodo s keramičnim dnom) in ugotovimo, da model potone do polovice višine (približno do $2{,}4$ cm), ko vanj nalijemo približno 160 ml vode, dovoljeno odstopanje ± 30 ml.

(c) Ko bi se pravi tanker z enako obliko, kot jo ima model, a tisočkrat daljšimi dolžinami robov, ugreznil do polovice svoje višine, bi izpodrinil maso vode

$$\begin{aligned} m_2 &= \rho_v \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 = 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 127\,\mathrm{m} \cdot 90\,\mathrm{m} \cdot 24\,\mathrm{m} = \\ &= 274\,000\,000\,\mathrm{kg} = 274\,000\,\mathrm{ton} \pm 50\,000\,\mathrm{ton}\,. \end{aligned}$$

Tanker plava na vodi, masa izpodrinjene vode je enaka vsoti mase praznega tankerja ($m_0 = 100\,000$ ton) in mase nafte m_n. Masa nafte je $m_n = m_2 - m_0 = 174\,000$ ton $\pm 52\,000$ ton.

Prostornina nafte je

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{m_n}{\rho_n} = \frac{174\,000\,000\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^3}{850\,\mathrm{kg}} \approx 205\,000\,\mathrm{m}^3 \pm 60\,000\,\mathrm{m}^3 = \\ &= 205 \cdot 10^6\ \mathrm{litrov} \pm 60 \cdot 10^6\ \mathrm{litrov}\,. \end{aligned}$$

Pravi tanker bi lahko prevažal 205 milijonov litrov nafte, dovoljena napaka je 60 milijonov litrov nafte.

(d) Prostornino izpodrinjene vode, ko je model potopljen do polovice višine, najlažje določimo z merjenjem. Model (brez keramičnega dna) postavimo na vodoravno podlago, vanj nalijemo vodo do višine $2{,}4$ cm in z merilnim valjem izmerimo prostornino vode. Dobimo približno 300 ml, dovoljeno odstopanje ± 40 ml.

Zahtevano prostornino lahko tudi približno izračunamo. Višino $2{,}4$ cm pomnožimo s ploščino na četrtini višine modela. Izmerjeni dolžina in širina na dnu sta $12{,}7$ cm in $9{,}0$ cm, na vrhu pa $13{,}8$ cm in $10{,}1$ cm. Na sredini sta $13{,}25$ cm in $9{,}55$ cm, kar smo izračunali s povprečnima vrednostma dolžin in širin. Na četrtini višine pa sta dolžina in širina $13{,}0$ cm in $9{,}3$ cm, zopet izračunano iz povprečnih vrednosti dolžin in širin. Prostornina spodnje polovice modela je torej približno $V_s = 13{,}0\,\mathrm{cm} \cdot 9{,}3\,\mathrm{cm} \cdot 2{,}4\,\mathrm{cm} = 290\,\mathrm{cm}^3$ z dovoljenim odstopanjem $40\,\mathrm{cm}^3$. Možne so tudi drugačne rešitve.

C2 (a) Izmerjeni tokovi so zapisani v tabeli.

meritev	1.	2.	3.	4.	5.
točki	A in B	B in C	C in D	A in C	B in D
I_1 [mA]	$6{,}9$	$6{,}9$	$6{,}9$	$6{,}7$	$6{,}7$
I_2 [mA]	$2{,}3$	$2{,}3$	$2{,}3$	$4{,}4$	$4{,}4$

Zaradi neenakih ampermetrov in baterij so dovoljena odstopanja $\pm 0{,}4$ mA, vendar naj bo razvidna enakost vrednosti pri 1., 2. in 3. meritvi ter pri 4. in 5. meritvi, pri čemer se ti tokovi lahko med seboj razlikujejo za največ $\pm 0{,}2$ mA.

(b) Tok skozi upornik R_1 kaže ampermeter A_2, $I_{R_1} = I_{2,BC} = 2{,}3$ mA.

(c) Ker sta upornika R_2 in R_3 enaka, je I_{R_2} polovica toka, ki ga kaže A_2, $I_{R_2} = \frac{1}{2} I_{2,AB} = 1{,}15$ mA.

(d) Skozi upornike R_4, R_5 in R_6 teče skupaj tok, ki je enak razliki tokov, ki ju kažeta ampermetra A_1 in A_2, torej $4{,}6$ mA. Ker so uporniki enaki, teče skozi vsakega od njih tretjina tega toka, velja $I_{R_6} = \frac{1}{3}(I_{1,CD} - I_{2,CD}) = \frac{1}{3}\, 4{,}6$ mA $= 1{,}53$ mA.

Rešitve s 57. matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije – regijsko tekmovanje

1. letnik

A1. Če so na začetku v tovarni izdelali x izdelkov, potem so po posodobitvi opreme izdelali $\frac{125}{100} \cdot x$ izdelkov, po odpuščanju pa $\frac{80}{100} \cdot \frac{125}{100} \cdot x = x$ izdelkov. Število končnih izdelkov se torej ni spremenilo. Pravilen odgovor je D.

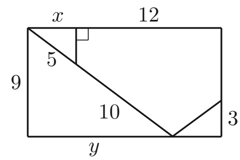
A2. Ker je $81 = a^y = (3^x)^y = 3^{xy}$, je $xy = 4$. Pravilen odgovor je torej A.

A3. Prvi in zadnji del poti zajca sta si vzporedni. Če dorišemo vzporednico še skozi drugi zavoj, je zaradi vzporednosti $\alpha = 44°$ in $\beta = 180° - 132° = 48°$. Kot pri drugem zavoju je torej enak $\alpha + \beta = 92°$. Pravilen odgovor je E.

B1. Ker je $a^2 + b^2 = 4$ in $ab = 1$, je $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 4 + 2 = 6$ oziroma $a + b = \sqrt{6}$, saj sta a in b pozitivni števili. Sledi

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} = \frac{a^3 + b^3}{a^3 b^3} = \frac{(a+b)^3 - 3ab(a+b)}{a^3 b^3} = \frac{6\sqrt{6} - 3 \cdot 1 \cdot \sqrt{6}}{1} = 3\sqrt{6}.$$

B2. Privzemimo oznake s skice. Po Pitagorovem izreku je $y = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12$. Iz podobnosti obeh levih pravokotnih trikotnikov sledi $\frac{x}{5} = \frac{y}{15}$ oziroma $x = \frac{y}{3} = 4$. Pravokotnik ima torej stranici dolgi 9 in 16, torej je njegova ploščina 144. Torej bo tudi ploščina kvadrata enaka 144. Zato bo stranica kvadrata dolga 12, obseg kvadrata pa bo 48.



B3. Označimo vsoto členov, ki jih Benjamin izpustil z x. Ker je $1 + 2 + 3 + \ldots + 2012 = \frac{2012 \cdot 2013}{2} = 1006 \cdot 2013$, je Benjamin za rezultat dobil $1006 \cdot 2013 - x$. Torej obstaja nenegativno celo število m, da je $1006 \cdot 2013 - x = 2011m$. Ker je $A = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2013 = \frac{2013 \cdot 2014}{2} = 2013 \cdot 1007$, je Anika za rezultat dobila $N = 2013 \cdot 1007 - x$. Torej obstaja nenegativno celo število n, da je $2013 \cdot 1007 - x = 2014n$. Če iz obeh enakosti izrazimo x in rezultata izenačimo, dobimo $1006 \cdot 2013 - 2011m = 2013 \cdot 1007 - 2014n$ oziroma $2014n - 2011m - 2013 = 0$. Slednjo enakost lahko preuredimo v $2011(n-m) = 2013 - 3n$. Ker je $2014n = 2013 \cdot 1007 - x \leq 2013 \cdot 1007$, je $n \leq \frac{2013 \cdot 1007}{2014} < 1007$. Torej je $-1008 < 2013 - 3n \leq 2013$. Hkrati je $2013 - 3n$ deljivo s 3 in iz enakosti sledi, da je deljivo tudi z 2011. Edina možnost je torej $2013 - 3n = 0$ oziroma $n = 671$. Od tod izračunamo $\frac{N}{A} = \frac{2014n}{2013 \cdot 1007} = \frac{2014 \cdot 671}{2013 \cdot 1007} = \frac{2}{3}$.

2. letnik

A1. Če so odprte 3 blagajne je čakalni čas 15 min. Če je odprta 1 blagajna je čakalni čas 3-krat daljši, torej 45 min. Če je odprtih 5 blagajn, je čakalni čas $\frac{45}{5} = 9$ min. Če odprejo še dve blagajni se torej čakalni čas skrajša za $15 - 9 = 6$ min. Pravilen odgovor je C.

A2. Ko izraz damo na skupni imenovalec in preuredimo, dobimo

$$\frac{(x + \sqrt{x^2+1})(x - \sqrt{x^2+1}) + 1}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{(x^2 - (x^2+1)) + 1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0.$$

Pravilen odgovor je B.

A3. Velja $\sphericalangle ATB = 180° - \sphericalangle BAT - \sphericalangle TBA = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 180° - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Ker je $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, je $\alpha + \beta = 180° - \gamma$. Torej je $\sphericalangle ATB = 180° - \frac{1}{2}(180° - \gamma) = 90° + \frac{\gamma}{2}$. Pravilen odgovor je E.

B1. Število n je deljivo z 99. Zapišemo lahko

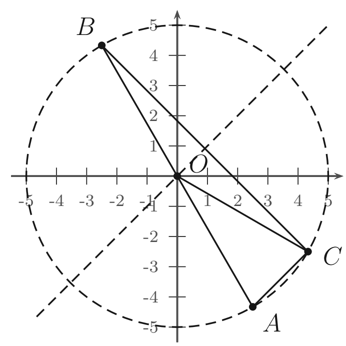
$$
\begin{aligned}
n &= \overline{23ab1}\cdot 100+60+c=\overline{23ab1}\cdot 99+\overline{23ab1}+60+c=\\
&= \overline{23ab1}\cdot 99+\overline{23a}\cdot 100+10b+1+60+c=\\
&= (\overline{23ab1}\cdot 99+\overline{23a})\cdot 99+\overline{23a}+10b+c+61=\\
&= (\overline{23ab1}\cdot 99+\overline{23a})\cdot 99+230+a+10b+c+61=\\
&= (\overline{23ab1}\cdot 99+\overline{23a}+2)\cdot 99+a+10b+c+93,
\end{aligned}
$$

torej 99 deli $a+10b+c+93$. Ker so a,b in c različne števke, ki niso enake $1,2,3$ ali 6, je $a+10b+c\geq 4+0+5=9$ in $a+10b+c\leq 7+90+8=105$, torej je $102\leq a+10b+c+93\leq 198$. Ker pa je $a+10b+c+93$ deljivo z 99, mora biti $a+10b+c+93=198$, od koder sledi $b=9$ in $\{a,c\}=\{7,8\}$. Imamo torej dve rešitvi, $n=2379168$ in $n=2389167$.

2. način. Z uporabo kriterija za deljivost z 9 in 11, dobimo, da mora biti $2+3+a+b+1+6+c=a+b+c+12$ deljivo z 9 in $2-3+a-b+1-6+c=a-b+c-6$ deljivo z 11. Ker so a,b in c različne števke, ki niso enake $1,2,3$ ali 6, je $a+b+c+12\leq 9+8+7+12=36$ in

$a+b+c+12\geq 0+4+5+12=21$, torej je $a+b+c+12$ lahko enako le 27 ali 36. Podobno je $a-b+c-6\leq 9-0+8-6=11$ in $a-b+c-6\geq 0-9+4-6=-11$, torej je $a-b+c-6$ lahko enako le $-11,0$ ali 11. Od tod sledi, da je $(a+b+c+12)-(a-b+c-6)=2b+18$ lahko enako le $16,25,27,36,38,47$. Ker pa je $2b+18$ sodo število med 18 in 36, mora biti enako 36, hkrati pa od tod sledi $a+b+c+12=36$ in $a-b+c-6=0$. Torej je $b=9$ in $a+c=15$. Ker sta a in c različni od b, mora biti $\{a,c\}=\{7,8\}$. Imamo torej dve rešitvi, $n=2379168$ in $n=2389167$.

B2. Koordinati točke B sta $(-\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2})$, koordinati točke C pa $(\frac{5\sqrt{3}}{2},-\frac{5}{2})$. Vse tri točke ležijo na krožnici s središčem v O in polmerom 5. Iz vrednosti kotnih funkcij $\sin(-30^\circ)=-\frac{1}{2}$ in $\cos(-30^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ razberemo, da OC oklepa s pozitivnim poltrakom abscisne osi kot 30°. Podobno iz $\sin(-60^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ in $\cos(-60^\circ)=\frac{1}{2}$ sledi, da OA oklepa s pozitivnim poltrakom abscisne osi kot 60°. Od tod izračunamo $\sphericalangle AOC=30^\circ$.



2. način. Po formuli za razdaljo med dvema točkama izračunamo $|OA|=5$, $|OC|=5$ in $|AC|=\sqrt{25(2-\sqrt{3})}$. Od tod po kosinusnem izreku sledi

$$
\cos(\sphericalangle AOC)=\frac{|OA|^2+|OC|^2-|AC|^2}{2|OA||OC|}=\frac{25+25-25(2-\sqrt{3})}{100}=\frac{\sqrt{3}}{2},
$$

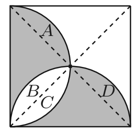
torej je $\sphericalangle AOC=30^\circ$.

B3. Levo stran neenakosti zmnožimo, da dobimo $a^2+a^2b^2+b^4+2a^2b-2ab^3+a^2b^2$. Ta izraz lahko preoblikujemo v $a^2(1+b)^2+b^2(b-a)^2$, od koder željena neenakost očitno sledi. Hkrati vidimo, da enakost velja natanko tedaj, ko je $a=b=0$ ali $a=b=-1$.

3. letnik

A1. Iz enakosti izrazimo $f(x) = \frac{4}{3}\sin x\cos x - \frac{1}{3}f(-x)$. Če v enakost vstavimo $-x$ namesto x in upoštevamo, da je sinus liha funkcija, cosinus pa soda funkcija, dobimo $f(-x) = \frac{4}{3}\sin(-x)\cos(-x) - \frac{1}{3}f(x) = -\frac{4}{3}\sin x\cos x - \frac{1}{3}f(x)$. Ko slednje vstavimo v prvo enakost, dobimo $f(x) = \frac{4}{3}\sin x\cos x - \frac{1}{3}(-\frac{4}{3}\sin x\cos x - \frac{1}{3}f(x)) = (\frac{4}{3} + \frac{4}{9})\sin x\cos x + \frac{1}{9}f(x)$. Enakost preuredimo v $\frac{8}{9}f(x) = \frac{16}{9}\sin x\cos x$. Od tod sledi $f(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$. Pravilen odgovor je D.

A2. Če na skici dorišemo obe diagonali, opazimo, da imajo kosi A, B, C in D enake ploščine. Ploščina neosenčenega dela kvadrata je zato enaka polovici ploščine kvadrata, to je $\frac{4}{2} = 2$. Pravilen odgovor je B.



A3. Denimo, da je v čredi skupaj x živali s skupno težo y. Potem je v čredi $\frac{55}{100}x$ košut s skupno težo $\frac{45}{100}y$ in $\frac{45}{100}x$ jelenov s skupno težo $\frac{55}{100}y$. Povprečna teža košute je torej $\frac{45}{100}y : \frac{55}{100}x = \frac{9y}{11x}$, povprečna teža jelena pa $\frac{55}{100}y : \frac{45}{100}x = \frac{11y}{9x}$. Povpreča teža jelena je torej $\frac{11y}{9x} : \frac{9y}{11x} = \frac{121}{81}$-krat večja od povprečne teže košute. Pravilen odgovor je C.

B1. Če je par (m,n) rešitev enačbe, potem je rešitev enačbe tudi par $(-m,-n)$, zato lahko predpostavimo, da je m nenegtiven. Enačbo preoblikujemo v $2n^2 - 9mn + m^4 = 0$ in jo pogledamo kot kvadratno enačbo v n. Njena diskriminanta je $81m^2 - 8m^4$. Če naj ima kvadratna enačba celoštevilsko rešitev, mora biti njena diskriminanta popoln kvadrat. Torej je $81 - 8m^2$ popoln kvadrat. V posebnem mora biti $81 - 8m^2 \geq 0$, torej je $m \leq 3$. Preverimo lahko, da je $81 - 8m^2$ popoln kvadrat za $m = 0$, $m = 2$ in $m = 3$. Pri $m = 0$ je rešitev kvadratne enačbe $n = 0$, pri $m = 2$ sta rešitvi $n = 1$ in $n = 8$, pri $m = 3$ pa je edina celoštevilska rešitev $n = 9$. Vse celoštevilske rešitve enačbe so torej pari $(-3,-9)$, $(-2,-8)$, $(-2,-1)$, $(0,0)$, $(2,1)$, $(2,8)$ in $(3,9)$.

B2. Ker mora biti osnova logaritma pozitivna in različna od 1, je $\sin x > 0$ in $\sin x \neq 1$. Poleg tega mora biti $\frac{1}{2}\sin 2x > 0$, saj je logaritem definiran le za pozitivna števila. Če to velja, lahko z upoštevanjem definicije logaritma enačbo preoblikujemo v ekvivalentno enačbo $\sin^2 x = \frac{1}{2}\sin 2x = \sin x\cos x$ oziroma $\sin x(\sin x - \cos x) = 0$. Ker mora biti $\sin x > 0$, sledi $\sin x - \cos x = 0$. Če bi bil $\cos x = 0$, bi moral biti tudi $\sin x = 0$, kar pa ni mogoče. Torej lahko delimo s $\cos x$, da dobimo $\tan x = 1$. Od tod dobimo rešitve $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ in $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, kjer je k celo število. Toda $\sin(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi) = \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$, torej so rešitve enačbe le $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, kjer je k celo število.

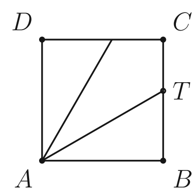
B3. Označimo dolžino stranice pravilnega šestkotnika z a. Štirikotnik $APRF$ je trapez z višino $\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, torej je njegova ploščina enaka $P_{APRF} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{|PR|+|AF|}{2} = \frac{a\sqrt{3}(\frac{3}{2}a+a)}{8} = \frac{5\sqrt{3}a^2}{16}$. Trikotnik PBD ima stranico dolgo $|BD| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}a$ in višino $|PB| = \frac{a}{2}$, torej je njegova ploščina enaka $P_{PBD} = \frac{\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$. Trikotnik BCD ima stranico dolgo $|BD| = \sqrt{3}a$ in višino $\frac{a}{2}$, torej je njegova ploščina spet enaka $P_{BCD} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$. Ploščina štirikotnika $BCDP$ je torej $P_{BCDP} = P_{PBD} + P_{BCD} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}$. Razmerje med ploščinama je enako $\frac{P_{APRF}}{P_{BCDP}} = \frac{5}{8}$.

4. letnik

A1. Označimo število modrih, rumenih in zelenih kroglic po vrsti z m, r in z, kjer je $m + r + z = 10$. Te kroglice lahko v vrsto postavimo na $\frac{10!}{m!r!z!}$ različnih načinov. Torej je $\frac{10!}{m!r!z!} = 360$. Slednjo enakost lahko preuredimo v $10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (m+1) = 360 \cdot r! \cdot z!$. Od tod sledi $10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (m+1) \geq 360 = 10 \cdot 9 \cdot 4$, torej mora biti $m + 1 \leq 8$ oziroma $m \leq 7$. Če imamo na primer $m = 7$, $r = 2$ in $z = 1$, potem je $\frac{10!}{m!r!z!} = \frac{10!}{7!2!1!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2} = 360$. V posodi je lahko največ 7 modrih kroglic. Pravilen odgovor je D.

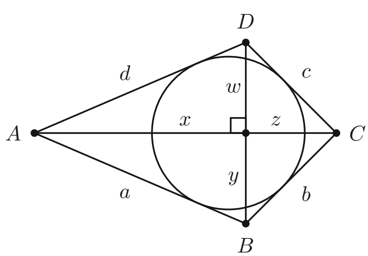
A2. Če upoštevamo predpis funkcije f, dobimo $\frac{f(f(x)+x)}{f(x)} = \frac{(x^2+1+x)^2+1}{x^2+1} = \frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}{x^2+1}$. Ko polinoma zdelimo, dobimo rezultat $x^2 + 2x + 2$. Pravilen odgovor je torej B.

A3. Iz podatkov naloge izračunamo $\sphericalangle BAT = 30°$. Ker je $\tan(\sphericalangle BAT) = \frac{|TB|}{|AB|}$, sledi $|TB| = |AB| \tan 30° = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Pravilen odgovor je D.



B1. Enačbo prepišemo v $\overline{cdab} + \overline{13cd} = \overline{ab20}$. Ker sta b in d neničelni števki, iz enačbe za enice dobimo $b + d = 10$. Slednje odštejemo na obeh straneh enačbe, da dobimo $\overline{cda0} + \overline{13c0} = \overline{ab10}$, in nato enačbo delimo z 10, da dobimo $\overline{cda} + \overline{13c} = \overline{ab1}$. Ker sta a in c neničelni števki, njuna vsota ne more biti enaka 1, zato iz enačbe za enice sledi $a + c = 11$. Slednje spet odštejemo na obeh straneh enačbe in enačbo delimo z 10, da dobimo $\overline{cd} + \overline{13} = \overline{a(b-1)}$, saj je $b - 1 \geq 0$. Obravnavamo dve možnosti. Če je $d \leq 6$, potem mora biti $d + 3 = b - 1$ in $c + 1 = a$. Iz vseh dobljenih enačb poračunamo, da je $a = 6$, $b = 7$, $c = 5$ in $d = 3$. Če pa je $d \geq 7$, potem mora biti $d + 3 = 10 + (b - 1)$ in $c + 1 = a - 1$. Toda v tem primeru iz enačb poračunamo $c = \frac{9}{2}$, kar pa je protislovje. Edina rešitev enačbe je torej $(a, b, c, d) = (6, 7, 5, 3)$.

B2. Privzemimo oznake s skice. Po Pitagorovem izreku velja $a^2 = x^2 + y^2$, $b^2 = y^2 + z^2$, $c^2 = z^2 + w^2$ in $d^2 = w^2 + x^2$. Od tod sledi $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Ker pa je štirikotnik tangenten, velja $a + c = b + d$. Če to enakost kvadriramo in upoštevamo enakost s kvadrati, dobimo $2ac = 2bd$ oziroma $ac = bd$. Ko v to enakost vstavimo $a = b + d - c$, dobimo $c^2 - (b + d)c + bd = 0$, kar lahko razstavimo kot $(c - b)(c - d) = 0$. Torej je $c = b$ in zato $a = d$ ali pa $c = d$ in zato $a = b$. V obeh primerih je štirikotnik deltoid.



B3. Označimo drugi in tretji člen Žanovega zaporedja z x in y. Potem je $3, x, y$ geometrijsko zaporedje, zato velja $x^2 = 3y$. Hkrati je $x, y, 9$ aritmetično zaporedje, zato je $2y = x + 9$. Iz druge enačbe izrazimo $y = \frac{x+9}{2}$. Ko slednje vstavimo v prvo enačbo in enačbo preuredimo, dobimo $2x^2 - 3x - 27 = 0$ oziroma $(2x - 9)(x + 3) = 0$. Ker je x pozitiven, je $x = \frac{9}{2}$. Od tod izračunamo še $y = \frac{27}{4}$. Žanovo zaporedje je torej $3, \frac{9}{2}, \frac{27}{4}, 9$.

Rešitve s 57. matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje

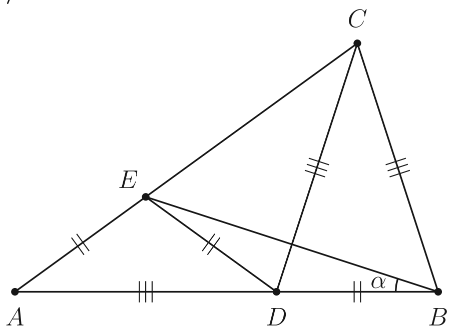
1. letnik

I/1. Enačbo preoblikujemo v $p = r^4 - q^2 = (r^2 - q)(r^2 + q)$. Ker je p praštevilo, mora biti $r^2 - q = 1$ in $r^2 + q = p$. Prvo enačbo preoblikujemo v $q = r^2 - 1 = (r-1)(r+1)$. Ker je q praštevilo, mora biti $r - 1 = 1$. Torej je $r = 2$ in $q = 3$. Iz enačbe $r^2 + q = p$ dobimo še $p = 7$.

2. način. Ugotovimo, da mora biti eno od praštevil 2. Izločimo možnosti, da je $p = 2$ ali $q = 2$ (s kongruencami ali preoblikovanjem enačbe podobno kot pri prvi rešitvi). Dobimo, da je $r = 2$ in $p + q^2 = 16$. Preverimo možnosti in dobimo $q = 3$ in $p = 7$.

I/2. Naj bo y tako število. Potem velja $\sqrt{x} \geq [\sqrt{x}] = y$. Ker je $\sqrt{x} \geq 0$, je tudi $y = [\sqrt{x}] \geq 0$, torej lahko neenakost kvadriramo, da dobimo $x \geq y^2$. Poleg tega je $\frac{x+23}{8} < [\frac{x+23}{8}] + 1 = y + 1$ oziroma $x < 8y - 15$. Od tod sledi $y^2 < 8y - 15$ oziroma $(y-3)(y-5) < 0$, kar pomeni, da je $3 < y < 5$. Ker pa mora biti y celo število, je $y = 4$. V tem primeru res obstaja x, ki ustreza pogoju, na primer $x = 16$.

I/3.

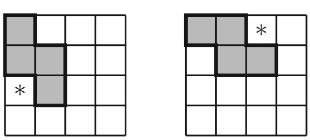


Označimo $\angle EBD = \alpha$. Potem je $\angle DEB = \alpha$, torej je $\angle EDA = 2\alpha$ in $\angle DAE = 2\alpha$. Sledi $\angle DEC = 4\alpha$ oziroma $\angle BEC = 3\alpha$. Hkrati je $\angle ACD = \angle DAC = 2\alpha$, torej je $\angle BDC = 4\alpha$ in $\angle CBD = 4\alpha$ oziroma $\angle CBE = 3\alpha$. Sledi, da je trikotnik EBC enakokrak z vrhom pri C, torej je $|CE| = |CD|$ in zato $\angle CDE = \angle DEC = 4\alpha$. Torej je

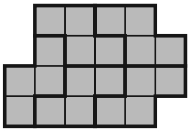
$$180^\circ = \angle BDC + \angle CDE + \angle EDA = 4\alpha + 4\alpha + 2\alpha = 10\alpha,$$

oziroma $\alpha = 18^\circ$. Od tod izračunamo $\angle BAC = 2\alpha = 36^\circ$, $\angle CBA = 4\alpha = 72^\circ$ ter $\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle CBA = 72^\circ$.

I/4. Potrebujemo vsaj 5 domin. Če bi tabelo lahko pokrili s štirimi dominami, se te med sabo ne bi smele prekrivati in ne bi smele segati čez rob tabele, saj imajo štiri domine skupaj natanko 16 polj. Če to upoštevamo, potem lahko polje v levem zgornjem kotu pokrijemo le na dva načina, kot prikazuje skica, vendar potem polja označenega z $*$ ne moremo nikakor pokriti.



Da 5 domin zadostuje, prikazuje naslednja skica.



2. letnik

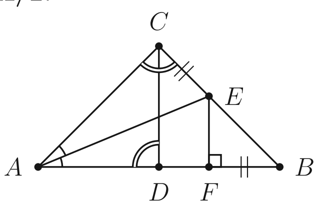
II/1. Največji skupni delitelj števil $11n+4$ in $7n+2$ deli tudi $7(11n+4)-11(7n+2)=6$, torej je lahko največ 6. Če je $n=4$, je $11n+4=48$ in $7n+2=30$, največji skupni delitelj teh dveh števil pa je natanko 6. Odgovor je torej 6.

2. način. Največji skupni delitelj števil $11n+4$ in $7n+2$ poiščimo z Evklidovim algoritmom.

$$\begin{aligned} 11n+4 &= 1\cdot(7n+2)+(4n+2)\\ 7n+2 &= 1\cdot(4n+2)+3n\\ 4n+2 &= 1\cdot 3n+(n+2)\\ 3n &= 3\cdot(n+2)-6 \end{aligned}$$

Največji skupni delitelj zgornjih dveh števil deli 6. Če je $n=4$, je $11n+4=48$ in $7n+2=30$, največji skupni delitelj teh dveh števil pa je natanko 6. Odgovor je torej 6.

II/2.



Ker je $\angle CDA = \angle ACB$, sta si trikotnika ADC in ACB podobna, zato je

$$\frac{|AC|}{|AB|}=\frac{|AD|}{|AC|}=\frac{|AB|}{2|AC|},$$

od koder sledi $|AB|=|AC|\sqrt{2}$. Ker je AE simetrala kota $\angle BAC$, je

$$\frac{|BE|}{|CE|}=\frac{|AB|}{|AC|}=\sqrt{2}$$

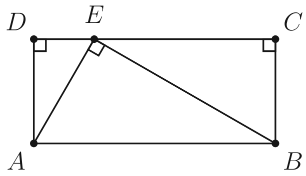
in iz $|CE|=|BF|$ sledi $|BE|=\sqrt{2}|BF|$. Ker je EFB pravokotni trikotnik s pravim kotom pri oglišču F, po Pitagorovem izreku sledi, da je tudi $|EF|=|BE|\sqrt{2}$, kar pomeni, da je trikotnik EFB tudi enakokrak in je $\angle CBA = \angle EBF = \frac{\pi}{4}$. Vemo že, da sta si trikotnika ABC in ACD podobna, zato je $\angle ACD = \angle CBA = \frac{\pi}{4}$. Naj bo D' pravokotna projekcija točke A na premico CD. Potem je $AD'C$ enakokrak pravokotni trikotnik, zato je $|AD'|=\frac{|AC|}{\sqrt{2}}$. Po drugi strani pa smo že izračunali, da je $|AD|=\frac{1}{2}|AB|=\frac{|AC|}{\sqrt{2}}$. Ker točki D in D' obe ležita na premici CD, pri čemer je D' pravokotna projekcija točke A na CD, sledi, da je $D'=D$. Torej je $\angle CDA=\frac{\pi}{2}$. Sledi $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$ in $\angle BAC=\frac{\pi}{4}$.

2. način. Kot v prvi rešitvi pokažemo, da je $|AB|=\sqrt{2}|AC|$ in $\angle CBA=\frac{\pi}{4}$. Od tod po kosinusnem izreku sledi

$$|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2-2|AB||BC|\frac{\sqrt{2}}{2}=2|AC|^2+|BC|^2-2|AC||BC|,$$

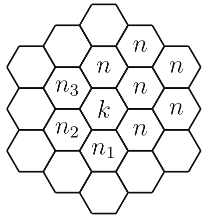
kar lahko preoblikujemo v $(|AC| - |BC|)^2 = 0$. Tore je $|AC| = |BC|$ in zato $\angle BAC = \angle CBA = \frac{\pi}{4}$ in $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$.

II/3.



Označimo $|AB| = |CD| = a$, $|BC| = |DA| = b$ in $|EC| = c$. Tedaj je $|EA| = \frac{2}{3}c$ in $|ED| = a - c$. Po Pitagorovem izreku za trikotnik AED velja $b^2 + (a-c)^2 = \frac{4}{9}c^2$ oziroma $b^2 = -a^2 + 2ac - \frac{5}{9}c^2$. Po Pitagorovem izreku za trikotnika BCE in ABE velja $c^2 + b^2 = |EB|^2 = a^2 - \frac{4}{9}c^2$ oziroma $b^2 = a^2 - \frac{13}{9}c^2$. Ti dve enačbi primerjamo in dobimo $-a^2 + 2ac - \frac{5}{9}c^2 = a^2 - \frac{13}{9}c^2$ oziroma $a^2 - ac - \frac{4}{9}c^2 = 0$. Slednje lahko razstavimo kot $(a - \frac{4}{3}c)(a + \frac{1}{3}c) = 0$. Ker sta a in c pozitivna, mora torej veljati $a = \frac{4}{3}c$. Od tod dobimo še $b^2 = \frac{1}{3}c^2$ oziroma $b = \frac{1}{\sqrt{3}}c$. Torej je razmerje med dolžinama stranic pravokotnika enako $\frac{a}{b} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

II/4. Ker so vsa števila v satovju naravna, obstaja najmanjše izmed njih. Označimo ga z n. Dovolj je pokazati, naslednje: če je v nekem šestkotniku zapisano število n, potem so v sosednjih šestkotnikih tudi zapisana števila n. Ker obstaja šestkotnik s številom n, bo potem namreč sledilo, da je v vseh šestkotnikih zapisano število n. Naj bo v nekem šestkotniku zapisano število n. Ker je n najmanjše število v satovju, so na sosednjih šestkotnikih zapisana števila večja ali enaka n. Ker pa je povprečje petih izmed njih enako n, mora biti teh pet števil enakih n. Naj bo število na šestem sosednjem šestkotniku enako k. Denimo, da je $k \neq n$. Označimo preostala tri števila na šestkotnikih sosednjih šestkotniku s številom k z n_1, n_2 in n_3 (glej sliko).



Na sliki si poglejmo šestkotnik s številom n, ki je soseden šestkotniku s številom n_1. Ker je na njem zapisano število n, podobno kot prej sklepamo, da je pet izmed števil na sosednjih šestkotnikih enakih n. Ker pa je $k > n$, sledi, da je $n_1 = n$. Če sedaj pogledamo šestkotnik s številom $n_1 = n$, podobno sklepamo, da je tudi $n_2 = n$. Če nazadnje pogledamo še šestkotnik s številom $n_2 = n$, spet lahko sklepamo, da je tudi $n_3 = n$. Torej so vsa števila na šestkotnikih sosednjih šestkotniku s številom k enaka n, zato bi moralo biti tudi število k enako n, kar pa je protislovje. Torej je $k = n$ in s tem je dokaz končan.

3. letnik

III/1. Pišimo $p^4-q^6=r^n$ za neko praštevilo r in naravno število n. Izraz p^4-q^6 najprej razstavimo kot $p^4-q^6=(p^2-q^3)(p^2+q^3)$. Ker je $p^4-q^6>0$, praštevili p in q ne moreta biti enaki, torej sta si tuji. Naj bo d največji skupni delitelj števil p^2-q^3 in p^2+q^3. Potem d deli tudi $2p^2$ in $2q^3$, zato je zaradi tujosti p in q lahko d največ 2.

Če je $d=2$, je tudi $r=2$ in je $p^2-q^3=2$ in $p^2+q^3=2^{n-1}$. Enačbi seštejemo, delimo z 2 in dobimo $p^2=1+2^{n-2}$ oziroma $2^{n-2}=p^2-1=(p-1)(p+1)$. Števili $p-1$ in $p+1$ morata biti obe potenci števila 2, kar pa je možno le v primeru $p=3$. Toda zdaj dobimo protislovje $q^3=7$.

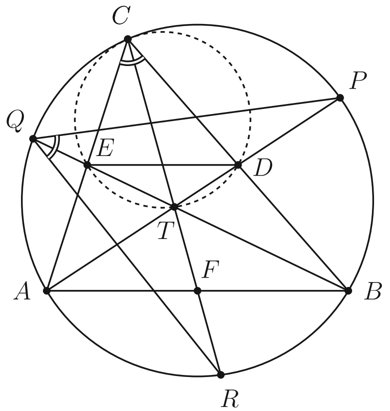
Torej je $d=1$. Ker sta števili p^2-q^3 in p^2+q^3 tuji, njun produkt pa je potenca praštevila, mora biti $p^2-q^3=1$ oziroma $p^2=q^3+1=(q+1)(q^2-q+1)$. Ker je q praštevilo, je $q+1>2$ in $q^2-q+1>2$, torej noben od faktorjev $q+1$ in q^2-q+1 ni enak 1. Če želimo, da bo njun produkt kvadrat praštevila, morata biti torej faktorja enaka. Iz enakosti $q+1=q^2-q+1$ sledi $q=2$ in iz $p^2=1+q^3$ dobimo še $p=3$. Nazadnje še preverimo, da je $3^4-2^6=17$ res potenca praštevila. Edina rešitev je torej $p=3$, $q=2$.

2. način. Spet pišimo $p^4-q^6=r^n$. Z razmislekom o sodosti in lihosti ugotovimo, da vsi trije izmed p, q, r hkrati ne morejo biti lihi. Ker je $r>0$, velja še $p>q$. Zaradi pozitivnosti vseh členov pridemo tudi do sklepa, da so si p, q, r paroma različni. Ker je vsaj en sod, lahko obravnavamo 3 možnosti. Če je $p=2$, zaradi $p>q$ sledi $q=1$. V tem primeru torej ni rešitev. Če je $q=2$, lahko izraz razstavimo: $(p^2-8)(p^2+8)=r^n$, oziroma $p^2-8=r^a$ in $p^2+8=r^b$, kjer sta $a,b\in\mathbb{N}_0$, in $b>a$. Spet ločimo dve možnosti: če $a=0$, dobimo rešitev $p=3$, $q=2$, $r=17$. Če pa je $a>0$, lahko enačbi odštejemo in izpostavimo r: $16=r(r^{b-1}-r^{a-1})$. Dobimo torej, da $r|16$, od koder sledi $r=2=q$, kar spet ne da rešitev. Ostane še obravnava primera, ko je le $r=2$. Spet zapišemo $p^2-q^3=2^a$ in $p^2+q^3=2^b$, kjer sta $a,b\in\mathbb{N}_0$ in $a<b$. Tokrat ločimo tri primere: če je $a=0$, dobimo $(p-1)(p+1)=q^3$, od koder (zaradi $p\neq 2$) sledi $p-1=q$ in $p+1=q^2$ oziroma $q=2$. Torej spet ni rešitev. Če je $a=1$ pa lahko enačbi seštejemo in izpostavimo 2. Po razcepu dobimo: $(p-1)(p+1)=2^{b-1}$, kjer $b>1$. Sledi, da sta tako $p-1$ kot $p+1$ potenci dvojke, kar je možno le, če $p=3$, od koder pa dobimo, da je $q^3=7$. Spet ni rešitev. Če pa je $a>1$, spet seštejemo enačbi in izpostavimo štirico: $2p^2=4(2^{b-2}-2^{a-2})$. Od tod pa sledi $p=2$, kar spet ne da rešitev.

III/2. Če enakost logaritmiramo in upoštevamo zvezi $\log a^b=b\log a$ ter $\log_a b=\frac{\log b}{\log a}$, dobimo $\frac{\log x\log 2013}{\log 3}=\frac{\log y\log 2013}{\log 5}$ oziroma $\log y=\frac{\log 5}{\log 3}\log x=\log_3 5\log x$. Od tod med drugim sledi, da sta $\log y$ in $\log x$ istega predznaka, torej sta x in y bodisi oba manjša od 1 bodisi oba enaka 1 bodisi oba večja od 1. Po drugi strani lahko neenakost preuredimo v $\log_{\frac{1}{2}}(xy)>0$ in ker je $\frac{1}{2}<1$, sledi $xy<1$. Iz obojega sledi, da sta x in y manjša od 1, torej sta $\log x$ in $\log y$ negativna. Ker pa je $\log_3 5>1$, sledi $\log y=\log_3 5\log x<\log x$, oziroma $y<x$. Torej je večje število x.

2. način. Ker sta x in y pozitivni števili, ju lahko zapišemo v obliki $x=3^\alpha$ in $y=5^\beta$, kjer sta α in β realni števili. Če slednje vstavimo v enakost, dobimo $2013^\alpha=\left(5^{\log_5 2013}\right)^\beta=2013^\beta$, torej je $\alpha=\beta$. Če x in y vstavimo še v neenakost, dobimo $\alpha(\log_{\frac{1}{2}}3+\log_{\frac{1}{2}}5)>0$. Ker je $\log_{\frac{1}{2}}3+\log_{\frac{1}{2}}5<0$, sledi $\alpha<0$. Torej je $x=3^\alpha>5^\alpha=y$. Večje število je torej x.

III/3.



Zaradi tetivnosti štirikotnika $RBCQ$ je $\angle RQB = \angle RCB$, torej iz pogoja naloge sledi $\angle ECT = \angle ACR = \angle BQP$. Ker je štirikotnik $QABP$ tetiven, pa je $\angle BQP = \angle BAP$. Ker sta E in D razpolovišči stranic, sta premici AB in DE vzporedni, torej je $\angle BAP = \angle EDA = \angle EDT$. Iz vsega sledi $\angle ECT = \angle EDT$, torej je štirikotnik $DCET$ tetiven.

2. način. Označimo dolžine stranic trikotnika in njegove kote kot običajno in naj bo F razpolovišče stranice AB. Zaradi tetivnosti šestkotnika $ARBPCQ$ in predpostavke naloge je $\angle RAT = \angle RAP = \angle RQP = \gamma$ in $\angle TRA = \angle CRA = \beta$. To pomeni, da sta si trikotnika ABC in TRA podobna in velja $\angle ATR = \alpha$. Po drugi strani pa je zaradi tetivnosti tudi $\angle BRT = \angle BRC = \alpha$. Torej sta si trikotnika AFT in BFR podobna in zaradi $|AF| = |BF|$ sta celo skladna. Zato je $ARBT$ paralelogram, od koder sledi $\angle DTE = \pi - \angle BTP = \pi - \angle TBR = \pi - \angle RAT = \pi - \gamma$, torej je štirikotnik $TDCE$ res tetiven.

3. način. Kot v drugi rešitvi ugotovimo, da je $\angle ATR = \alpha$. Od tod pa sledi podobnost trikotnikov AFT in CFA. Zato je

$$\frac{|AF|}{|FT|} = \frac{|CF|}{|AF|}.$$

Ker težišče deli težiščnico v razmerju 2 : 1, je $|FT| = \frac{1}{3}|CF|$, in ker je $|AF| = \frac{c}{2}$, sledi $|CF| = \frac{\sqrt{3}}{2}c$. Prav tako zaradi podobnosti trikotnikov AFT in CFA velja

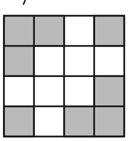
$$\frac{|AT|}{|AC|} = \frac{|AF|}{|CF|}.$$

Upoštevamo, da je $|AF| = \frac{c}{2}$ in $|CF| = \frac{\sqrt{3}}{2}c$, in dobimo $|AT| = \frac{b}{\sqrt{3}}$ in $|AD| = \frac{3}{2}|AT| = \frac{\sqrt{3}}{2}b$. Sledi

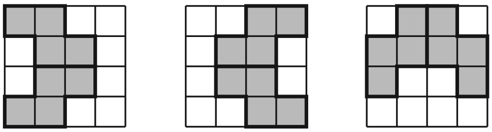
$$\frac{|AT|}{|AE|} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{|AC|}{|AD|},$$

torej sta si trikotnika ATE in ACD podobna. Torej je $\angle ECD = \pi - \angle DTE$, kar pomeni, da je štirikotnik $ECDT$ tetiven.

III/4. Potrebujemo vsaj 6 domin. Oglejmo si osenčena polja na naslednji skici.



Za pokritje levega spodnjega in desnega zgornjega vogala potrebujemo dva domini in ti dve domini ne pokrijeta nobenega drugega osenčenega polja. Za pokritje treh osenčenih polj v levem zgornjem vogalu potrebujemo vsaj dve domini (ker domine ne smejo segati čez rob tabele) in ti dve domini ne bosta pokrili nobenega drugega osenčenega polja. Za pokritje treh osenčenih polj v desnem spodnjem vogalu prav tako potrebujemo vsaj dve domini. Skupaj torej potrebujemo vsaj 6 domin. Da 6 domin zadostuje, je razvidno iz naslednjih skic, ki prikazujejo položaje vseh šestih domin.

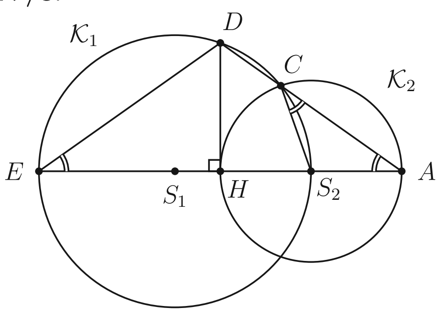


4. letnik

IV/1. V funkcijsko enačbo vstavimo $x = y = 0$, da dobimo $f(0) = f(0)^2$. Torej je $f(0) = 0$ ali $f(0) = 1$. Če je $f(0) = 0$, v funkcijsko enačbo vstavimo $y = 0$ in dobimo $f(x) = 0$ za vsak x. Očitno ta funkcija zadošča pogojem naloge. Če pa je $f(0) = 1$, v funkcijsko enačbo spet vstavimo $y = 0$ in izpeljemo $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Prepričamo se lahko, da tudi ta funkcija zadošča pogojem naloge. Rešitvi naloge sta torej funkciji $f(x) = 0$ in $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

IV/2. Odgovor je 2. Primer takega zaporedja je na primer zaporedje $a_n = 2(\frac{3}{2})^{n-1}$, ki vsebuje praštevili 2 in 3. Denimo, da geometrijsko zaporedje $a_n = aq^{n-1}$, kjer je $q \neq 1$ vsebuje tri praštevila. Denimo, da so to a_k, a_m in a_n, kjer je $k < m < n$. Ker je zaporedje nekonstantno, so ta tri praštevila različna. Ker je $\frac{a_n}{a_m} = q^{n-m}$ in $\frac{a_m}{a_k} = q^{m-k}$, velja $\left(\frac{a_n}{a_m}\right)^{m-k} = \left(\frac{a_m}{a_k}\right)^{n-m}$ oziroma $a_n^{m-k}a_k^{n-m} = a_m^{n-k}$. Ker pa so $m-k, n-m, n-k > 0$ in so a_k, a_m, a_n različna praštevila, to ni mogoče.

IV/3.



Ker je štirikotnik ES_2CD tetiven, je $\angle S_2ED = \angle S_2CA = \angle CAS_2$. Torej je trikotnik EAD enakokrak z vrhom D. Od tod sledi $|AH| = |EH|$ oziroma $|AH| = \frac{1}{2}|EA| = \frac{1}{2}\left(2r + \frac{2}{3}r\right) = \frac{4}{3}r$. Ker je $\frac{4}{3}r$ natanko premer krožnice $\mathcal{K}_2$, točka H leži na krožnici $\mathcal{K}_2$.

2. način.

Postavimo problem v pravokotni koordinatni sistem z izhodiščem v S_1. Brez škode za splošnost lahko izberemo koordinatni sistem tako, da je $r = 1$ in da tudi S_2 leži na x-osi. Tedaj velja $S_1(0,0)$, $S_2(1,0)$, $A(\frac{5}{3},0)$, $\mathcal{K}_2 : x^2 + y^2 = 1$, $\mathcal{K}_2 : (x-1)^2 + y^2 = (\frac{2}{3})^2$. Presečišče

$\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$: $x^2 - 2x + 1 + y^2 = \frac{4}{9}$, upoštevamo $x^2 + y^2 = 1$, torej $x = \frac{7}{9}$ in $y = \pm\frac{4\sqrt{2}}{9}$. Brez škode za splošnost lahko izberemo pozitivni y, torej dobimo $C(\frac{7}{9}, \frac{4\sqrt{2}}{9})$. Premica p skozi AC: $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{5\sqrt{2}}{6}$. Izračunamo presečišče p in $\mathcal{K}_1$: $x^2 + (-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{5\sqrt{2}}{6})^2 = 1$, torej $\frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{7}{18} = 0$, in dobimo $x_1 = \frac{7}{9}$ in $x_2 = \frac{1}{3}$. Prvi je x koordinata točke C, drugi pa x koordinata točke D. Koordinate točke H, ki je pravokotna projekcija točke D na x-os, so torej $H(\frac{1}{3}, 0)$. Ta točka ustreza enačbi za $\mathcal{K}_2$, torej leži na $\mathcal{K}_2$.

3. način.

Naj bo X od A različno presečišče $\mathcal{K}_2$ z S_1S_2. $\angle CS_2B = 2\angle CAX$ (obodni in središčni kot). $\angle ACS_2 = \angle ACS_2 = \angle DBS_2$ torej $\angle S_2S_1D = 2\angle DBS_2 = \angle CS_2B$. $\frac{|S_1D|}{|S_1X|} = \frac{r}{r-\frac{2}{3}r} = 3$ in $\frac{|BS_2|}{S_2C} = \frac{2r}{\frac{2}{3}r} = 3$, torej sta trikotnika BS_2C in DS_1X podobna. Ker pa je $\angle BCS_2 = \frac{\pi}{2}$, je $\angle DXS_1 = \frac{\pi}{2}$ in torej $H = X$.

4. način.

Brez škode za splošnost si lahko izberemo enote tako, da je $r = 1$. Naj bo F drugo presečišče $\mathcal{K}_1$ s S_1S_2 in naj bo P pravokotna projekcija točke C na S_1SS_2. Tedaj velja $|S_1P + PS_2 = 1$. Uporabimo Pitagorov izrek v trikotniku CPS_2: $|CP|^2 = (\frac{2}{3})^2 - |PS_2|^2$ in v trikotniku S_1CP: $|CP|^2 = 1 - |S_1P|^2 = 1 - (1 - |S_2P|)^2$. Iz teh dveh enačb sedaj dobimo $|PS_2| = \frac{2}{9}$ in $|CP| = \sqrt{\frac{32}{81}}$. Pitagorov izrek v trikotniku ACP: $|AC|^2 = |CP|^2 + |PA|^2 = \frac{32}{27}$, torej $|AC| = \sqrt{\frac{32}{27}}$. Potenca točke A na $\mathcal{K}_1$: $|AC| \cdot |AD| = |AS_2| \cdot |AF| = \frac{16}{9}$, torej $|AD| = \frac{16}{9\sqrt{\frac{32}{27}}}$. Trikotnika PAC in DHA sta podobna, torej velja $\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AP|}{|AH|}$, torej $|AH| = \frac{|AD|\cdot|AP|}{|AC|} = \frac{4}{3}$, kar je ravno premer $\mathcal{K}_2$, torej H leži na $\mathcal{K}_2$.

IV/4. Če je na turnirju 2013 tekmovalcev, potem gre v drugi krog $1 + \frac{2012}{2} = 1007$ tekmovalcev. V tretji krog se uvrsti $1 + \frac{1006}{2} = 504$ tekmovalcev, v četrti krog pa $\frac{504}{2} = 252$ tekmovalcev. V peti krog nato napreduje $\frac{252}{2} = 126$ tekmovalcev, v šestega $\frac{126}{2} = 63$ tekmovalcev, v sedmega pa $1 + \frac{62}{2} = 32$ tekmovalcev. V osmi krog gre $\frac{32}{2} = 16$ tekmovalcev, v devetega $\frac{16}{2} = 8$ tekmovalcev, v desetega pa $\frac{8}{2} = 4$ tekmovalci. V enajsti krog se uvrstita 2 tekmovalca, ki se v tem krogu pomerita za zmago. Torej je $f(2013) = 11$.

Če je na turnirju manj ali enako $1024 = 2^{10}$ tekmovalcev, potem bo na turnirju največ 10 krogov. Po j-tem krogu bo namreč ostalo največ $\frac{2^{10}}{2^j} = 2^{10-j}$ tekmovalcev. Torej jih po 10-ih krogih ostane največ $2^{10-10} = 1$ in turnir je že zaključen. Poračunajmo, da velja $f(1025) = 11$. Ker je $1025 = 1 + 2^{10}$, se v drugi krog uvrsti $1 + 2^9$ tekmovalcev, v tretji krog $1 + 2^8$ tekmovalcev, v četrtega $1 + 2^7$ tekmovalcev in tako dalje, vse do desetega kroga, v katerega se uvrstijo $1 + 2^1 = 3$ tekmovalci. V enajsti krog se uvrstita dva tekmovalca, ki se pomerita za zmago. Najmanjše naravno število n, pri katerem je $f(n) = f(2013)$, je torej 1025.