Tekmovanja

56. področno matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Naloge za prvi letnik

A1. Peter redi na kmetiji konje in krave. Število konjev je bilo enako številu krav in večje od 0. Potem je Peter dokupil nekaj krav in število krav se je povečalo za $50\ \%$. Zdaj predstavlja število konjev le $30\ \%$ števila vseh živali. Koliko konjev ima Peter na kmetiji?

(**A**) 8 (**B**) 9 (**C**) 10
(**D**) Neko drugo število (**E**) Naloga nima rešitve

A2. Največ koliko notranjih kotov n-kotnika je lahko večjih od $180°$?

(**A**) $n-1$ (**B**) $n-2$ (**C**) $n-3$ (**D**) $n-4$ (**E**) $n-5$

A3. Število, katerega kub je 2012^{12}, smo pomnožili s kvadratom števila 2012^{11}. Katero število smo dobili?

(**A**) 2012^{58} (**B**) 2012^{26} (**C**) 2012^{88} (**D**) 2012^{15} (**E**) 2012^{12}

B1. Dan je trikotnik ABC. Označimo z D presečišče simetrale kota $\sphericalangle BAC$ in stranice BC ter z E presečišče simetrale kota $\sphericalangle CBA$ in stranice AC. Denimo, da velja $|CD| = |CE|$. Dokaži, da je tedaj trikotnik ABC enakokrak.

B2. Poišči vsa naravna števila n in praštevila p, za katera je $\sqrt{n + \frac{p}{n}}$ naravno število.

B3. Lara in Sara bosta na pravokoten list papirja narisali n ravnih črt, pri čemer bosta črte risali izmenično, vsaka po eno. Vsaka črta bo vzporedna enemu izmed robov lista in bo potekala od roba do roba. Nobena črta ne sme sovpadati z robom ali že narisano črto. Na koncu bo torej list papirja razdeljen na nekaj pravokotnikov. Če bo število teh pravokotnikov liho, bo zmagala Lara, če pa bo sodo, bo zmagala Sara. V odvisnosti od n in od tega, kdo začne, določi, kdo ima zmagovito strategijo.

Naloge za drugi letnik

A1. V krog s premerom 4 včrtamo kvadrat, v dobljeni kvadrat včrtamo krog, v tega spet kvadrat in postopek ponavljamo. Kolikšen je premer četrtega kroga?

(**A**) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (**B**) $\frac{1}{2}$ (**C**) 1 (**D**) $\sqrt{2}$ (**E**) $2\sqrt{2}$

A2. Kolikšna je vsota vseh realnih števil, ki rešijo enačbo $|x-2011| + |x-2012| = 3$?

(**A**) 2011 (**B**) 2012 (**C**) 2013 (**D**) 4021 (**E**) 4023

A3. Kateri točki ležita na grafu linearne funkcije $y = bx + 1$, kjer je b neko neničelno realno število?

(A) $(0,1)$ in $(\frac{1}{b},0)$ **(B)** $(0,b)$ in $(-\frac{1}{b},0)$ **(C)** $(0,1)$ in $(b,0)$
(D) $(0,1)$ in $(-\frac{1}{b},0)$ **(E)** $(0,-\frac{1}{b})$ in $(1,0)$

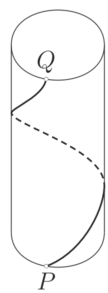
B1. Naj bo ABC pravokotni trikotnik s pravim kotom pri C. Dane so takšne točke K, L in M na stranicah CA, AB in BC, da je kot $\sphericalangle MLK$ pravi in velja $|KC| = |KL|$. Dokaži, da sta simetrali kotov $\sphericalangle AKL$ in $\sphericalangle LMB$ vzporedni.

B2. Poišči vsa naravna števila n in praštevila p, za katera je $\sqrt{n} + \frac{p}{\sqrt{n}}$ kvadrat naravnega števila.

B3. Jure je v vrsto postavil 2012 črnih frnikol. Najprej je vsako tretjo frnikolo v vrsti zamenjal z rdečo frnikolo. Nato je vsako peto frnikolo v vrsti zamenjal z rumeno frnikolo. Nazadnje je vsako sedmo črno frnikolo v vrsti zamenjal z modro frnikolo. Koliko črnih frnikol mu je na koncu ostalo v vrsti?

Naloge za tretji letnik

A1. Dan je 4 cm visok valj, katerega polmer je 1 cm. Od točke P na spodnji osnovni ploskvi do točke Q, ki leži na zgornji osnovni ploskvi točno nad točko P, napnemo po plašču valja vrvico tako, da se enkrat ovije okoli valja. Koliko centimetrov je dolga najkrajša vrvica, ki jo lahko napnemo na tak način?

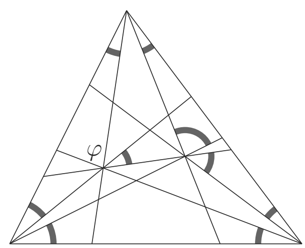


(A) 2π **(B)** 4π **(C)** $\pi\sqrt{2}$ **(D)** $2\sqrt{\pi^2+4}$ **(E)** $\sqrt{2\pi^2+4}$

A2. Med spodnjimi funkcijami poišči tisto, ki zavzame vrednost 0 natančno dvakrat.

(A) $f(x) = \sin x - 1$ **(B)** $f(x) = |x^2 - 1| - 2$ **(C)** $f(x) = e^x - 1$
(D) $f(x) = |2x - 1|$ **(E)** $f(x) = x - 1$

A3. Koliko je vsota velikosti kotov, označenih na sliki, če je $\varphi = 77°$?



(A) $283°$ **(B)** $360°$
(C) $385°$ **(D)** $437°$
(E) Ni mogoče določiti.

B1. Naj bo AB najdaljša stranica tetivnega štirikotnika $ABCD$. Naj simetrali kotov $\sphericalangle DCB$ in $\sphericalangle ADC$ sekata štirikotniku $ABCD$ očrtano krožnico še v točkah E in F. Označimo z G presečišče premic CE in DF ter s H presečišče premic AE in BF. Dokaži, da se premici EF in GH sekata pod pravim kotom.

B2. Poišči vsa naravna števila n in praštevila p, za katera je $\sqrt[3]{n + \frac{8p}{n}}$ naravno število.

B3. Poišči vsa realna števila x, ki rešijo enačbo

$$\cos(\pi \sin^2 x) + \sin(\pi \cos^2 x) = 1.$$

Naloge za četrti letnik

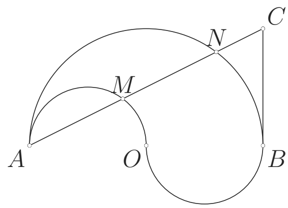
A1. Koliko polinomov pete stopnje, katerih vsi koeficienti so enaki 1 ali -1, ima ničlo v 1?

(**A**) 5 (**B**) 10 (**C**) 15 (**D**) 20 (**E**) 24

A2. Jakob bere knjigo s 630 stranmi. Prvi dan je prebral tretjino knjige. Vsota števil, ki so označevala strani, ki jih je Jakob prebral drugi dan, je bila 4410. Koliko strani je Jakobu ostalo do konca knjige? (Knjiga se začne s stranjo, označeno s številom 1.)

(**A**) 210 (**B**) 211 (**C**) 230 (**D**) 390 (**E**) 400

A3. Andrej začne svoj sprehod v točki A in ga konča pri babici v točki B, pri čemer lahko hodi le po narisanih poteh (glej sliko). (Točke A, O in B so kolinearne, daljica AO je polmer največje polkrožnice, $|AO| = |CB| = 1$, CB pa je pravokotna na AB.)
Kaj oblikuje najkrajšo pot?



(**A**) lok ANB (**B**) lok AO in lok OB

(**C**) daljica AC in daljica CB (**D**) daljica AN in lok NB

(**E**) daljica AM ter loka MO in OB

B1. Naj bo M razpolovišče stranice BC kvadrata $ABCD$ in naj bo P pravokotna projekcija točke C na daljico DM. Dokaži, da je trikotnik DAP enakokrak z vrhom pri A.

B2. Poišči vsa naravna števila n in praštevila p, za katera je $\sqrt[3]{n} + \frac{p}{\sqrt[3]{n}}$ kvadrat naravnega števila.

B3. Naj bo a realno število, večje od 1. Seštej neskončno vrsto

$$a^{\ln \frac{1}{a^0}} + a^{\ln \frac{1}{a^1}} + a^{\ln \frac{1}{a^2}} + \dots .$$

56. državno matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

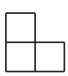
Naloge za prvi letnik

1. Poišči vsa naravna števila $n \geq 10$ z neničelnimi števkami, za katera velja: če odstranimo katerokoli števko števila n, dobimo število, ki deli n.

2. Za celi števili x in y velja $x + xy + y^2 = 1$ in $y(5 + x) \geq 0$. Katerim celim številom je lahko enaka vrednost izraza $x - y$?

3. Naj leži točka E na stranici CD kvadrata $ABCD$. Točka F leži na premici AB, a ne na daljici AB, in zadošča $|BF| = |DE|$. Dokaži, da sta premici AC in EF pravokotni.

4. Dana je tabela velikosti $n \times n$. V vsakem izmed njenih polj je zapisano število 0. Na vsakem koraku izberemo 3 polja tabele, ki tvorijo lik oblike

 (lahko tudi zasukan),

in številom v teh poljih prištejemo 1. Ali lahko v primeru $n = 3$ po končnem številu korakov dosežemo, da so vsa števila v tabeli pozitivna in med seboj enaka? Ali lahko to dosežemo v primeru $n = 4$?

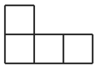
Naloge za drugi letnik

1. Poišči vsa 3-mestna naravna števila n z neničelnimi števkami, za katera velja: če številu n odstranimo levo števko, dobimo število, ki deli n.

2. Naj bosta a in b različni realni števili, za kateri imata enačbi $x^2 + ax + b = 0$ in $x^2 + bx + a = 0$ kakšno skupno rešitev. Koliko je $a + b$?

3. Naj bo $ABCDE$ tetiven petkotnik, v katerem je $|CD| = |DE|$. Diagonali AD in BE se sekata v točki K, diagonali AC in BD pa v točki L. Dokaži, da sta premici KL in EC vzporedni.

4. Dana je tabela velikosti $m \times n$. V vsakem izmed njenih polj je zapisano število 0. Na vsakem koraku izberemo 4 polja tabele, ki tvorijo lik oblike

   (lahko tudi zasukan ali prezrcaljen),

   in številom v teh poljih prištejemo 1. Ali lahko v primeru $m = 5$ in $n = 5$ po končnem številu korakov dosežemo, da so vsa števila v tabeli pozitivna in med seboj enaka? Ali lahko to dosežemo v primeru $m = 3$ in $n = 4$?

Naloge za tretji letnik

1. Poišči vsa cela števila a, b, c in d, ki zadoščajo enakosti

$$2a^2 + 3b^2 = c^2 + 6d^2.$$

2. Naj bo p polinom stopnje 2, katerega vsaj en koeficient ni celo število. Denimo, da je za vsako celo število n tudi število $p(n)$ celo. Dokaži, da ima tedaj polinom $q(x) = p(x) - \frac{1}{2}x(x+1)$ same celoštevilske koeficiente.

3. Naj bo $\mathcal{K}$ trikotniku ABC očrtana krožnica. Označimo z D razpolovišče tistega loka AB, ki ne vsebuje točke C, in z E razpolovišče tistega loka AC, ki ne vsebuje točke B. Naj bosta F in G dotikališči trikotniku ABC včrtane krožnice s stranicama AB in AC. Naj bo X presečišče premic EG in DF. Denimo, da je trikotnik DEX enakokrak z vrhom pri X. Dokaži, da je tedaj tudi trikotnik ABC enakokrak z vrhom pri A.

4. Krt Črt ima v svojem brlogu 5 sob, oštevilčenih s številkami od 1 do 5. Med nekaterimi izmed njih je Črt izvrtal rove, tako da se iz vsake sobe lahko po nekaj rovih splazi v vsako drugo sobo. Nobena dva rova se ne sekata. Vsak rov se začne v neki sobi, konča pa v neki drugi (od začetne različni) sobi in vmes ne gre skozi nobeno sobo. Sobi, ki ju rov neposredno povezuje, imenujemo *sosednji*. Naštej pare sosednjih sob, če velja:

   - če se Črt splazi po natanko treh (ne nujno različnih) rovih, iz sobe 5 ne more priti v sobi 1 in 5;
   - če se Črt splazi po natanko dveh rovih, lahko iz sobe 5 pride v sobi 2 in 3;
   - če se Črt splazi po natanko treh (ne nujno različnih) rovih, lahko iz sobe 3 pride v sobo 1.

Naloge za četrti letnik

1. Poišči vsa cela števila a, b, c in d, ki zadoščajo enakosti

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{5} + c = d\sqrt{10}.$$

2. Dokaži, da ne obstaja injektivna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katero bi veljalo

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + f(2012) \qquad \text{za vse } x, y \in \mathbb{R}.$$

3. Naj bosta D in E taki točki na stranicah BC in AC trikotnika ABC, da točke A, B, D in E ležijo na isti krožnici. Središče krožnice, včrtane trikotniku BCE, označimo z L, njeno dotikališče s stranico EC pa z G. Središče krožnice, včrtane trikotniku DCA, označimo s K, njeno dotikališče s stranico DC pa z F. Naj bo N presečišče premic EL in DK, M pa presečišče premic KF in LG. Dokaži, da točke A, B, D in N ležijo na isti krožnici in da je $KMLN$ deltoid.

4. Krt Črt ima v svojem brlogu 6 sob, oštevilčenih s številkami od 1 do 6. Med nekaterimi izmed njih je Črt izvrtal rove, tako da se iz vsake sobe lahko po nekaj rovih splazi v vsako drugo sobo. Nobena dva rova se ne sekata. Vsak rov se začne v neki sobi, konča pa v neki drugi (od začetne različni) sobi in vmes ne gre skozi nobeno sobo. Sobi, ki ju rov neposredno povezuje, imenujemo *sosednji*. Naštej pare sosednjih sob, če velja:

   - če se Črt splazi po natanko treh (ne nujno različnih) rovih, lahko iz sobe 1 pride v sobi 1 in 6;
   - če se Črt splazi po natanko treh (ne nujno različnih) rovih, iz sobe 1 ne more priti v sobo 2;
   - če se Črt splazi po natanko štirih (ne nujno različnih) rovih, iz sobe 1 ne more priti v sobo 6;
   - če se Črt splazi po natanko dveh rovih, iz sobe 1 ne more priti v sobo 5.

---

12. področno tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Naloge za prvi letnik

A1 Koruzno zrno tehta približno $8 \cdot 10^{-2}$ g. Približno koliko koruznih zrn je v 1 toni koruze?

(**A**) $12\,500\,000$ (**B**) $1\,250$ (**C**) $1\,250\,000$
(**D**) $8\,000$ (**E**) $80\,000$

A2 Koliko deliteljev ima število 7425?

(**A**) 6 (**B**) 19 (**C**) 24 (**D**) 165 (**E**) več kot 200

A3 Če člani smučarskega kluba plačajo 100 evrov letne članarine, imajo $50\,\%$ popusta pri nakupu dnevne smučarske vozovnice. Če pa plačajo 200 evrov letne članarine, pa imajo $80\,\%$ popusta pri nakupu dnevne smučarske vozovnice. Dnevna vozovnica stane 30 evrov. Najmanj koliko dni na leto bi morali smučati, da jim je ugodneje plačati dražjo članarino?

(**A**) 50 (**B**) 12 (**C**) 18
(**D**) 20 (**E**) 15

A4 Napolnili smo 240 steklenic soka po $0{,}75$ litra. Koliko steklenic po $0{,}5$ litra potrebujemo, če jih želimo napolniti z isto količino soka?

(**A**) 120 (**B**) 36 (**C**) 180
(**D**) 360 (**E**) 280

A5 Katero izmed navedenih števil je iracionalno?

(**A**) $\left(\sqrt{2}\right)^6$ (**B**) $\sqrt{256}$ (**C**) $\sqrt{\sqrt{4}}$
(**D**) $\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)$ (**E**) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^3$

A6 Rešitev enačbe $\frac{5y}{6}+\frac{11-3y}{4}=\frac{2y-5}{3}-\frac{1}{4}$ je:

(**A**) $y=\frac{41}{7}$ (**B**) $y=-\frac{56}{11}$ (**C**) $y=8$
(**D**) $y=-41$ (**E**) enačba nima nobene rešitve

B1. Izračunaj količnik števil a in b, če je a vsota števil $\frac{2}{3}$ in $\frac{3}{4}$, število b pa je razlika med številom 1 in količnikom števil $\frac{2}{3}$ in $\frac{3}{4}$.

B2. Poenostavi izraz $\left(\frac{x}{3}-\frac{x+1}{4}-\frac{1}{3x}\right)^{-1}:\frac{12x^2-24x}{x^2-6x+8}$ in izračunaj njegovo vrednost za $x=-2\frac{3}{7}$.

B3. Jana in Jan sta ugotovila, da je število njunih prijateljev na družabnem omrežju v razmerju $5:4$. Če bi Jana imela $6\,\%$ manj prijateljev in Jan za $\frac{1}{20}$ več prijateljev, bi imela Jana še vedno 15 prijateljev več kot Jan. Koliko prijateljev ima Jana?

B4. Tone je lani kupil delnice nekega podjetja. Zanje je plačal 2504 evre. Nekaj jih je kupil po 26 evrov, ostale pa po 18 evrov. Če bi jih prodal danes, ko je cena ene delnice 21 evrov, bi za njih dobil 2436 evrov. Koliko delnic je Tone kupil po 26 evrov in koliko delnic po 18 evrov?

Naloge za drugi letnik

A1 Katera točka je enako oddaljena od točk $A(1,4)$ in $B(7,2)$ ter leži na nosilki daljice AB?

(**A**) $(4,3)$ (**B**) $(3,0)$ (**C**) $(3,3)$ (**D**) $(0,0)$ (**E**) $(5,6)$

A2 Katero izmed navedenih lastnosti ima funkcija f s predpisom $f(x)=2(x-1)-4$?

(**A**) Funkcija je padajoča. (**B**) Začetna vrednost funkcije je -4.
(**C**) Smerni koeficient funkcije je 2. (**D**) Graf funkcije seka abscisno os pri $x=-6$.
(**E**) Funkcija je pozitivna za vsa realna števila.

A3 Fotograf je na šoli fotografiral razredne skupnosti. Vsaki razredni skupnosti je zaračunal 2 evra za stroške fotografiranja, za vsako naročeno fotografijo pa še $0{,}70$ evrov. Katera funkcija nam opisuje odvisnost zneska, ki ga plača razredna skupnost, od števila naročenih fotografij?

(**A**) $f(x)=2x+0{,}70$ (**B**) $f(x)=0{,}70x+2$ (**C**) $f(x)=x+2+0{,}70$
(**D**) $f(x)=x+2$ (**E**) nobena izmed navedenih

A4 Katere izmed navedenih treh dolžin niso dolžine stranic pravokotnega trikotnika?

(**A**) 3 cm, 4 cm, 5 cm (**B**) 20 cm, 21 cm, 29 cm (**C**) 12 cm, 35 cm, 36 cm
(**D**) 9 cm, 40 cm, 41 cm (**E**) 5 cm, 12 cm, 13 cm

A5 Riba in pol stane $3\sqrt{5}$ evrov. Koliko stane ena riba?

(**A**) $2\sqrt{5}$ evrov (**B**) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ evrov (**C**) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ evrov (**D**) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ evrov (**E**) $6\sqrt{5}$ evrov

A6 Katera izmed navedenih enakosti ne velja?

(**A**) $\sqrt{32}+3\sqrt{50}=19\sqrt{2}$ (**B**) $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)=2$

(**C**) $\frac{\sqrt{\sqrt{6^n}}}{\sqrt{6^n}}=\frac{1}{\sqrt[4]{6^n}}$ (**D**) $\sqrt{2012^{16}}=2012^4$

(**E**) $\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=1$

B1. Nariši množico točk (x,y) v pravokotnem koordinatnem sistemu v ravnini, ki zadoščajo pogoju $(x\leq 4)\wedge(y\geq -1)\wedge(y\leq x)$. Izračunaj ploščino lika, ki ga množica točk predstavlja.

B2. Premica je oddaljena 3 cm od središča kroga s premerom $6\sqrt{2}$ cm. Izračunaj dolžino tetive, ki je presečišče kroga in premice. Nariši skico.

B3. Izračunaj, za katere vrednosti parametra m sta premici z enačbama $y=(m+5)x+m-1$ in $y=(m-1)^2x-3m-6$ vzporedni.

B4. Poenostavi izraz $\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1+a^2)^{\frac{1}{2}}+6{,}25^{-\frac{1}{2}}\cdot 0{,}008^{-\frac{2}{3}}$ brez uporabe žepnega računala.

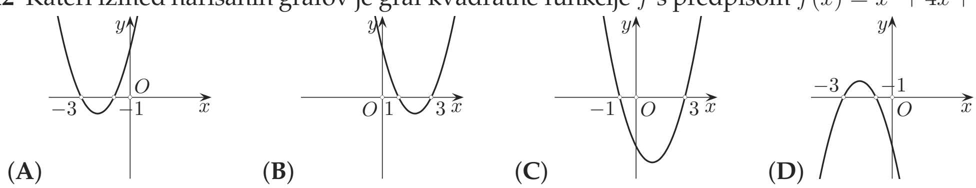
Naloge za tretji letnik

A1 Rešitev neenačbe $x^2+2x-3>x-1$ so tista realna števila x, za katera velja:

(**A**) $x<-2$ ali $x>1$ (**B**) $x\geq 1$ (**C**) $x\geq -3$

(**D**) $x\in(-2,1)$ (**E**) $x\in[-2,1]$

A2 Kateri izmed narisanih grafov je graf kvadratne funkcije f s predpisom $f(x)=x^2+4x+3$?

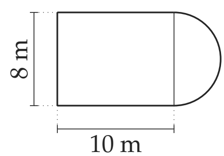


(**E**) nobeden izmed narisanih

A3 Katera izmed navedenih točk ne leži na grafu funkcije f s predpisom $f(x)=\log_2(3x+2)+1$?

(**A**) $(2,4)$ (**B**) $\left(-\frac{1}{3},1\right)$ (**C**) $\left(\frac{2}{3},3\right)$ (**D**) $(10,6)$ (**E**) $\left(\frac{1}{3},0\right)$

A4 Luka bo na svojem dvorišču prebarval igralno polje košarkarskega igrišča. Igralno polje tvorita pravokotnik in polkrog kot kaže slika. Ploščina igralnega polja je:



(**A**) 80 m^2 (**B**) $(80+8\pi)$ m^2 (**C**) $(80+16\pi)$ m^2

(**D**) $(80+64\pi)$ m^2 (**E**) 244π m^2

A5 Začetna vrednost funkcije f s predpisom $f(x)=-\frac{1}{2}\cdot 5^x+4$ je:

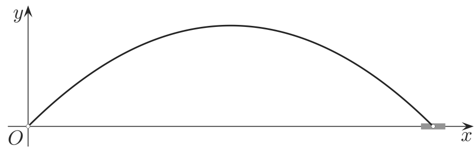
(**A**) 4 (**B**) 5 (**C**) 0 (**D**) $-\frac{1}{2}$ (**E**) $\frac{7}{2}$

A6 Dolžina osnovnega roba a pravilne štiristrane piramide je $3\sqrt{2}$ cm, dolžina višine v_1 stranske ploskve pa $\frac{1}{2}\sqrt{30}$ cm. Velikost kota med stranskim robom in osnovno ploskvijo je:

(**A**) $45°$ (**B**) $22{,}5°$ (**C**) $60°$ (**D**) $120°$ (**E**) $30°$

B1. Mirko nastopa v cirkusu v točki »izstrelitev iz topa«. Njegovo gibanje, ki je prikazano na sliki, opisuje funkcija f s predpisom

$$f(x) = x - \frac{1}{50}x^2.$$



a) Kako daleč od izstrelitve mora biti postavljeno središče mreže, da bo Mirko varno padel vanjo?

b) Kolikšna je največja višina nad tlemi, ki jo Mirko doseže?

B2. Grafično določi presečišče grafov funkcij f in g s predpisoma $f(x) = 3^x - 1$ in $g(x) = x^2 - 2x$. Rešitev računsko preveri.

B3. V kleti imamo poln sod vina s prostornino $\frac{3}{4}\pi$ m^3. Vino pretočimo v dve cisterni. Najprej napolnimo cisterno, ki ima obliko pravilne štiristrane prizme z osnovnim robom dolžine 1 m in višine 2 m. S preostankom pa napolnimo cisterno oblike valja, katerega višina je enaka polmeru. Kolikšna je višina valjaste cisterne? Rezultat zaokroži na centimeter natančno.

B4. Izračunaj celoštevilsko rešitev enačbe $\log_2(x^2 + 7) = \frac{\log_2(x+1)}{\log_8 2} - \log_2 x$.

Naloge za četrti letnik

A1 Katera izmed zapisanih funkcij ima največjo amplitudo in največjo osnovno periodo?

(**A**) $f(x) = 3\sin 3x$ (**B**) $f(x) = 2\sin\frac{x}{2}$ (**C**) $f(x) = -3\sin\frac{x}{4}$

(**D**) $f(x) = 3\cos 2x$ (**E**) $f(x) = 3\sin 4x$

A2 Polinoma p in q s predpisoma $p(x) = -2x^2 + 1 - 3x$ in $q(x) = a(2 - x^2) + b + c(2 - x)$ sta enaka, če je:

(**A**) $a = 4, b = 1, c = 3$ (**B**) $a = 2, b = 9, c = 3$ (**C**) $a = 2, b = -9, c = 3$

(**D**) $a = -4, b = 1, c = 3$ (**E**) $a = -2, b = 9, c = -3$

A3 Katere stopnje je polinom p s predpisom $p(x) = (x + 1)(x^2 + 1)(x^3 + 1)...(x^{33} + 1)$?

(**A**) 671 (**B**) 198 (**C**) 463

(**D**) 561 (**E**) 560

A4 Katera izmed naslednjih trditev velja za racionalno funkcijo f s predpisom $f(x) = x^{-1} - \frac{1}{x^3}$?

(**A**) Funkcija ima natanko eno ničlo $x = 1$. (**B**) Funkcija ima vodoravno asimptoto $y = -1$.

(**C**) Funkcija nima polov. (**D**) Definicijsko območje funkcije je $\mathbb{R} - \{0\}$.

(**E**) Funkcija nima asimptot.

A5 Poenostavljen izraz $(\sin x + 2\cos x)^2 + (2\sin x - \cos x)^2$ je enak:

(**A**) 0 (**B**) $3\sin x + \cos x$ (**C**) $\cos 2x$
(**D**) 1 (**E**) 5

A6 Podano je zaporedje $a_n, n \in \mathbb{N}$, za katerega velja $a_{n+1} - a_n = 5$ ter $a_1 = 37$. Katero izmed navedenih števil je člen tega zaporedja?

(**A**) 500 (**B**) 1000 (**C**) 1500
(**D**) 2000 (**E**) nobeno izmed navedenih

B1. Natančno, brez uporabe žepnega računala, izračunaj vrednost izraza

$$\frac{\cos 20^\circ - \sin 650^\circ}{\sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos(-520^\circ)} + 2^2 \cdot \cos \frac{\pi}{4}.$$

Imenovalec racionaliziraj.

B2. Določi tiste vrednosti spremenljivke x, za katere so vrednosti funkcije f s predpisom $f(x) = \frac{x-2}{x}$ večje od vrednosti funkcije g s predpisom $g(x) = 2x - 4$.

B3. Direktor je novo zaposlenemu Žanu obljubil, da bo dobil 500 evrov plače za prvi mesec, nato pa bo imel vsak naslednji mesec za $0{,}5\,\%$ višjo plačo. Čez koliko mesecev bo njegova plača presegla 1500 evrov? Izračunaj Žanovo povprečno plačo v tem obdobju (od prve plače do vključno tiste plače, ki prva preseže 1500 evrov).

B4. Za katera pozitivna realna števila x so vrednosti izrazov 3^{x^2-4}, 3^{-2} in $9^{-x-\frac{1}{2}}$ zaporedni členi geometrijskega zaporedja?

---

12. državno tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Naloge za prvi letnik

1. Kaja in Matic sta lovila ribe. Vsaka riba, ki jo je ulovila Kaja, je tehtala 144 g. Matic pa je ulovil ribe, ki so tehtale vsaka po 168 g. Na koncu dneva sta ugotovila, da je skupna masa njunega ulova rib enaka. Najmanj koliko rib je ulovil vsak? Kolikšna je bila v tem primeru skupna masa Kajinega in Matičevega ulova?

2. Reši enačbo $\left(1 - (1 + x^{-2})^{-1}\right)^{-1} = 3{,}25$.

3. Zapiši vsa naravna števila x, za katera je vrednost izraza $6\,(x-1) - 2(3x + 2(x-1))$ večja od vrednosti izraza $5(x+1) - 3x - 57$.

4. V trgovino so pripeljali 475 kg sadja: jabolka, mandarine in banane. Koliko kg tehta posamezna vrsta sadja, če polovica jabolk tehta dvakrat toliko kot tehta $30\,\%$ mandarin, banan pa je za 35 kg manj kot jabolk?

5. Koliko odstotkov od $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3}{\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)} - \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$ je $\frac{1}{12} \cdot \frac{\left(0{,}5-\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 8}{0{,}008 \cdot \left(2+\frac{1}{2}\right)^4}$? Rezultat zaokroži na stotine. Nalogo reši brez uporabe žepnega računala.

Naloge za drugi letnik

1. Za dani vrednosti $a = \sqrt{3}$ in $b = \sqrt{2}$ izračunaj natančno vrednost izraza

$$\sqrt[4]{a^{-1}b^{3} \cdot \sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{\frac{6a^{4}b^{-2}}{\sqrt{2}}}.$$

2. Določi parameter a tako, da se bosta premici z enačbama $(a-1)x + ay - 5 = 0$ in $ax + (3a-1)y - 7 = 0$ sekali na abscisni osi. Zapiši koordinati presečišča premic.

3. V trikotniku ABC je kot α velik $30°$, stranica a je dolga 4 cm, stranica c je dolga dvakrat toliko kot težiščnica na stranico c. Natančno izračunaj dolžine stranic trikotnika ABC. Nariši skico.

4. Natančno izračunaj dolžini stranic pravokotnika, katerega obseg je 4 cm, kot med diagonalama pa $60°$.

5. Dana je premica z enačbo $2x - 3y + 15 = 0$ in točka $T(3, y)$ na njej. Izračunaj x, tako da bo razdalja med točkama $A(x, 4)$ in T enaka $3\sqrt{5}$.

Naloge za tretji letnik

1. Obrtnik izdeluje pločevinke v obliki valja. Vsaka pločevinka ima premer 6 cm in prostornino 600 cm^3. Obrtnik se odloči spremeniti premer pločevink, tako da bodo imele prostornino 700 cm^3 in enako višino kot prej. Koliko cm^2 pločevine porabi za izdelavo spremenjene pločevinke?

2. Grafično reši enačbo $\log_2(x-1) + 1 = -\frac{3}{2}x + 4$. Rešitev računsko preveri.

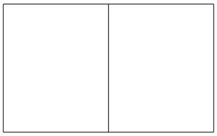
3. V računalniškem omrežju se širi računalniški virus. Število okuženih računalnikov določimo s predpisom $N(t) = 30 \cdot e^{0,1t}$, kjer je N število okuženih računalnikov in t čas v minutah.

   a) Največ koliko računalnikov je okuženih v eni uri?

   b) Najmanj koliko minut je potrebnih, da virus okuži $60\,000$ računalnikov?

4. Izračunaj parameter a tako, da bosta imeli parabola z enačbo $y = (a-1)x^2 + ax - 1$ in premica z enačbo $y = x - 2$ le eno skupno točko. Zapiši koordinati te točke.

5. Janja se je odločila za ekološko vzrejo kokoši in gosk. Ograditi namerava parcelo v obliki pravokotnika s ploščino 1632 m^2. Goske in kokoši bo imela ločene, tako da bo parcelo po širini pregradila na pol (glej sliko). Za ograditev bo skupno potrebovala 198 m ograde. Kolikšna je širina in kolikšna dolžina parcele?



Naloge za četrti letnik

1. Tilen je metal igralno kocko. V tabeli je predstavil število metov za posmezne pike.

število pik	1	2	3	4	5	6
število metov	$3(x-2)$	$2x$	$2(x-1)$	$x+2$	$2x+1$	x

   a) Kolikokrat je vrgel posamezno število pik, če število šestic predstavlja natanko $10\,\%$ vseh metov?

   b) Izračunaj povprečno število padlih pik.

   c) Nariši frekvenčni kolač.

2. Poenostavi izraz $\frac{2\cos^2 x}{\sin x - \sin^{-1} x} - \sin x$. Za katere vrednosti x izraz nima pomena?

3. Nariši graf funkcije f s predpisom $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}\,(2x+3)^{-1}$. Katera premica (zapiši njeno enačbo) ne seka grafa funkcije f in je vzporedna osi x?

4. V prvi vrsti dvorane je 15 sedežev, v vsaki naslednji vrsti so trije sedeži več.

   a) V dvorani je 870 sedežev. Koliko vrst ima ta dvorana in koliko sedežev je v njeni zadnji vrsti?

   b) Vstopnica za predstavo stane 9 evrov za otroke in 12 evrov za odrasle. Na dopoldanski predstavi je bila dvorana polno zasedena z otroki. Najmanj koliko odraslih bi moralo zasesti dvorano na popoldanski predstavi, da bi imel lastnik dvorane popoldne večji zaslužek kot dopoldne?

5. Dan je polinom p s predpisom $p(x) = x^4 + 3x^3 + ax^2 + bx + 7$. Določi števili a in b tako, da bo premica z enačbo $y = 2x + 7$ sekala graf polinoma p v točkah z abscisama 1 in -4.

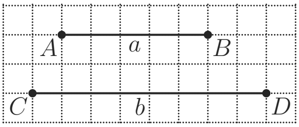
---

12. področno tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol

A1 Kolikšen del šolske ure je zadnjih 5 minut?

(A) $\frac{1}{9}$ **(B)** $\frac{1}{8}$ **(C)** $\frac{1}{6}$ **(D)** $\frac{5}{12}$ **(E)** $\frac{1}{3}$

A2 V kolikšnem razmerju sta dolžini daljic?



(A) $a : b = 8 : 5$ **(B)** $a : b = 5 : 8$ **(C)** $a : b = 6 : 5$
(D) $a : b = 5 : 13$ **(E)** nič od tega

A3 Pri kateri vrednosti spremenljivke x imata izraza $x \cdot \frac{1}{2}$ in $x - \frac{1}{2}$ enako vrednost?

(A) -2 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 1 **(E)** 2

A4 Med časoma 3.25 in 13.01 je:

(A) 9,36 h **(B)** 9 h 36 min **(C)** 9,6 h **(D)** 10 h 26 min **(E)** 10 h 36 min

A5 Katero število moramo nadomestiti s $\square$, da bo enakost $8 + \frac{5}{\square} + \frac{2}{1000} = 8,052$ pravilna?

(A) 1 **(B)** 10 **(C)** 50 **(D)** 100 **(E)** 1000

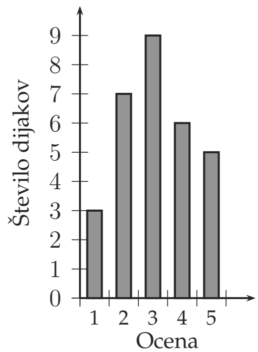
A6 Pravokotnik je razdeljen na 12 enakih manjših pravokotnikov. Koliko majhnih pravokotnikov moramo pobarvati, da bosta pobarvani $\frac{2}{3}$ od $\frac{3}{4}$ pravokotnika?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 6 (**D**) 8 (**E**) 9

A7 Na pasji razstavi se postavijo na oštevilčena mesta štirje psi. Na koliko različnih načinov se lahko razporedijo?

(**A**) 4 (**B**) 8 (**C**) 16 (**D**) 24 (**E**) 48

A8 Diagram prikazuje ocene, ki so jih dobili dijaki na izpitu. Kateri dve trditvi med naslednjimi sta pravilni?



A Oceno 3 je dobil 1 dijak.
B Dvajset dijakov je dobilo oceno najmanj 3.
C Oceno 2 je dobilo 20 % dijakov.
D Izpit je opravljalo 25 dijakov.
E Oceno 4 je dobilo 20 % dijakov.

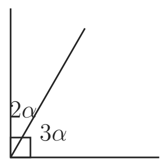
(**A**) A in E (**B**) B in E (**C**) C in D
(**D**) C in E (**E**) B in C

A9 Na koliko manjših kock z robom 6 cm lahko razrežemo večjo kocko z robom 24 cm?

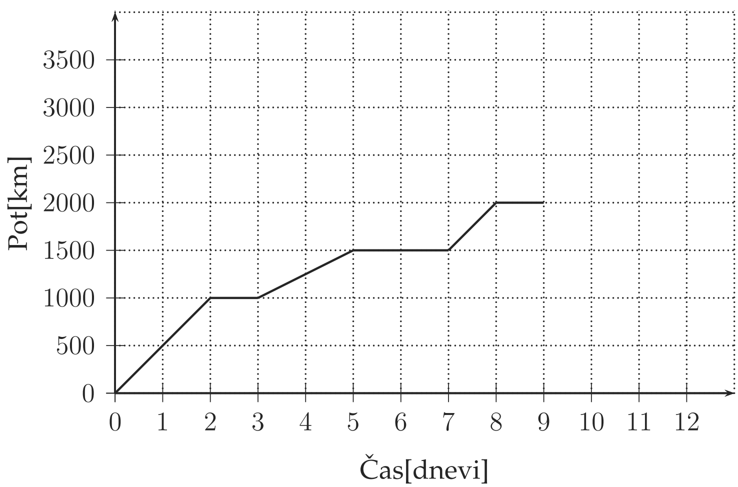
(**A**) 4 (**B**) 12 (**C**) 16 (**D**) 36 (**E**) 64

A10 Koliko je vrednost α?

(**A**) $10°$ (**B**) $15°$ (**C**) $18°$ (**D**) $20°$ (**E**) $30°$



B1. Starši so Špelo peljali na počitniško križarjenje z ladjo. Narisala je del grafa, ki prikazuje prepotovano pot po dnevih.



A. Dani graf dopolnite za zadnje tri dni križarjenja, v katerih je s stalno hitrostjo preplula še 1000 km.

B. Koliko dni je v celoti trajalo počitniško križarjenje?

C. Koliko km je ladja prevozila na celotnem križarjenju?

D. V krajih z bogato zgodovino je ladja mirovala, da so si lahko ogledali znamenitosti. Koliko dni je ladja mirovala?

B2. Izdelati želimo posodo brez pokrova v obliki kocke z robom 30 cm.

A. Najmanj koliko m^2 pločevine potrebujemo za njeno izdelavo?

B. Koliko mm je dolga najdaljša možna ravna tanka neupogljiva palica, ki jo lahko spravimo v posodo?

C. Koliko litrov drži posoda?

B3. Dopolnite besedilo, tako da bo izraz $10-(1{,}08+3\cdot 0{,}52+5\cdot 0{,}29)$ pravilen zapis računskega reševanja dane naloge.

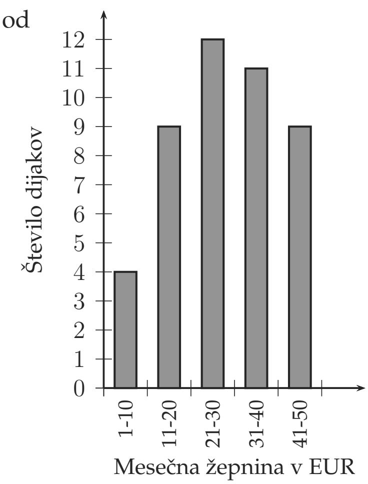
Špela je v trgovini kupila tri jogurte, pet žemljic in kilogram moke.
Račun je plačala z bankovcem za ______________ evrov.
Vsak jogurt stane ______________ evrov.
Vsaka žemljica stane ______________ evrov.
Kilogram moke stane ______________ evrov.
Špeli so v trgovini vrnili ______________ evrov.

B4. Diagram prikazuje zneske žepnin, ki jih dijaki prejemajo od staršev v enem mesecu.

A. Koliko dijakov dobi vsaj 31 EUR žepnine?

B. Koliko $\%$ dijakov dobi manj od 21 EUR mesečne žepnine?

C. Izračunajte povprečno vrednost žepnine v celih evrih za dijake, prikazane v diagramu.



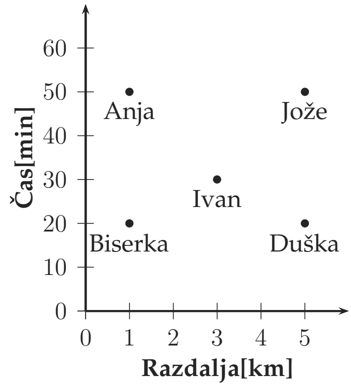
12. državno tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol

A1 Koliko praznih plastenk z maso 50 g moramo zbrati, če želimo eno tono plastenk?

(**A**) 200 (**B**) 2000 (**C**) 20000 (**D**) 200000 (**E**) 2000000

A2 Slika prikazuje, koliko časa porabi pet ljudi, da prepotuje določeno razdaljo. Kateri od njih je v povprečju najhitrejši?

(**A**) Anja (**B**) Biserka (**C**) Duška
(**D**) Ivan (**E**) Jože

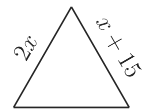


A3 V avtomehanični delavnici smo plačali za popravilo avtomobila 300 EUR. V tem znesku je vštetih 240 EUR za material. Koliko so obračunali eno delovno uro, če je popravilo trajalo $\frac{3}{4}$ ure?

(**A**) 30 EUR (**B**) 45 EUR (**C**) 60 EUR
(**D**) 80 EUR (**E**) 100 EUR

A4 Stranici enakostraničnega trikotnika merita $2x$ in $x + 15$, kot kaže slika. Obseg trikotnika meri:

(**A**) 15 (**B**) 30 (**C**) 45 (**D**) 60 (**E**) 90



A5 Babica ima na mizi štiri vrečke bonbonov in še pet posameznih bonbonov. V vsaki vrečki je n bonbonov. Kateri izraz prikazuje število vseh bonbonov na mizi?

(**A**) $5 + 4n$ (**B**) $4 + 5 + n$ (**C**) $4 + 5$
(**D**) $(4 + 5)n$ (**E**) $4 + 5n$

A6 Če je $\binom{5}{1} = \frac{5}{1}$, $\binom{5}{2} = \frac{5\cdot4}{1\cdot2}$, $\binom{5}{3} = \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}$, $\binom{5}{4} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$, potem je $\binom{4}{1} + \binom{4}{3}$:

(**A**) 8 (**B**) 10 (**C**) 12 (**D**) 14 (**E**) 16

B1. Jan je med počitnicami opravljal počitniško delo. Njegov zaslužek je prikazan v tabeli.

Dnevi	**Zaslužek v EUR**
Ponedeljek	12
Torek	
Sreda	20
Četrtek	

A. Koliko je zaslužil v torek, če je njegov povprečni zaslužek v prvih treh dneh 14 EUR na dan?

B. Koliko je zaslužil v četrtek, če je v štirih dneh od ponedeljka do četrtka zaslužil 50 EUR?

C. Glede na zahtevnost dela, ki ga je opravljal, je imel vsak dan različno urno postavko. Kolikšno urno postavko je imel v ponedeljek, če je delal 1 uro in 15 minut?

D. V sredo je bila njegova urna postavka 4 EUR, v četrtek pa samo petina sredine ure. Koliko ur je opravil v četrtek?

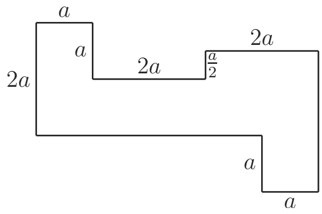
B2. Sašo se je sedem tednov pripravljal za kolesarski maraton. Kolesaril je trikrat tedensko. Vsak naslednji teden je prekolesaril 30 km več kot prejšnji teden. Vsak teden je prva dva dneva prekolesaril enaki razdalji, tretji dan pa za 10 km daljšo razdaljo od prvih dveh dnevov. Prvi teden je prekolesaril 70 km.

A. Koliko km je Sašo prekolesaril prvi dan priprav?

B. Koliko km je prekolesaril zadnji dan priprav?

C. Koliko km je prekolesaril v sedemtedenskih pripravah?

B3. Dvorišče ima tloris lika na sliki:



A. Zapišite izraz (s spremenljivko a) za obseg lika in ga poenostavite.

B. Zapišite izraz (s spremenljivko a) za ploščino lika in ga poenostavite.

C. Dvorišče bi radi tlakovali s kvadratnimi ploščicami dimenzije 20 cm $\times$ 20 cm. Najmanj koliko ploščic potrebujemo, če je $a = 2$ m?

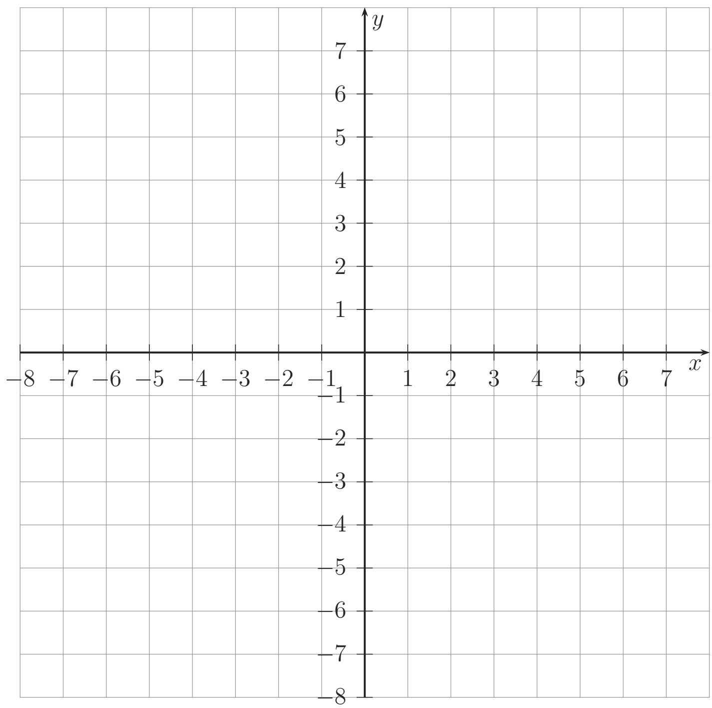
B4. Pitagorejska trojica imenujemo tri naravna števila a, b, c, za katere velja $a^2 + b^2 = c^2$. Trojica števil $3, 4, 5$ je pitagorejska trojica.

A. Preverite z računom, ali je trojica števil $7, 8, 9$ pitagorejska.

B. Poiščite še eno pitagorejsko trojico.

C. Zapišite vsa trimestna števila, ki jih lahko tvorimo s števkami $3, 4, 5$, pri čemer se števke ne ponavljajo.

D. V koordinatnem sistemu narišite trikotnik, katerega dolžine stranic so pitagorejska trojica $3, 4, 5$ in ima eno izmed oglišč v točki $(-2, 1)$. Konstruirajte težišče ali izračunajte njegovi koordinati.



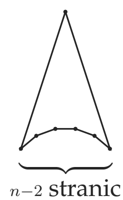
Rešitve nalog 56. področnega matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije

Rešitve nalog za prvi letnik

A1	A2	A3
E	C	B

A1. Denimo, da je bilo na začetku na kmetiji x krav in x konjev. Ko se je število krav povečalo za 50%, je bilo na kmetiji $x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x$ krav. Torej je bil delež konjev enak $x/(x + \frac{3}{2}x) = \frac{2}{5}$, kar je 40% in ne 30%. Pravilen odgovor je torej (**E**).

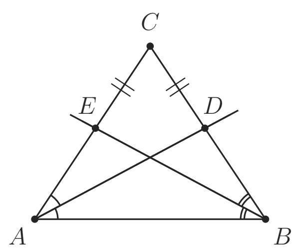
A2. Odgovor je $n-3$. S skice je razvidno, da je lahko $n-3$ notranjih kotov n-kotnika večjih od $180°$.



Vsota notranjih kotov poljubnega n-kotnika je enaka $(n-2)\cdot 180°$. Če bi bilo vsaj $n-2$ notranjih kotov večjih od $180°$, potem bi bila vsota notranjih kotov večja od $(n-2)\cdot 180°$, kar pa je protislovje.

A3. Število 2012^4 smo pomnožili z $(2012^{11})^2$ in dobili $2012^4 \cdot 2012^{22} = 2012^{26}$.

B1.



Označimo presečišče premic AD in BE z F. Tedaj je premica CF simetrala kota $\sphericalangle ACB$. Trikotnika CFD in CFE se ujemata v dveh stranicah in kotu med njima, torej sta skladna. Zato sta kota $\sphericalangle CDF$ in $\sphericalangle FEC$ enaka. Trikotnika ADC in BEC se ujemata v eni stranici in priležnima kotoma, torej sta skladna. Zato sta kota $\sphericalangle DAC$ in CBE enaka. Od tod očitno sledi, da je trikotnik ABC enakokrak z vrhom pri C.

2. način. Označimo $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$ in $|CD| = |CE| = x$. Ker je premica AD simetrala kota $\sphericalangle BAC$, velja $\frac{b}{c} = \frac{x}{a-x}$. Ker je premica BE simetrala kota $\sphericalangle CBA$, velja $\frac{a}{c} = \frac{x}{b-x}$. Od tod sledi $b(a-x) = cx = a(b-x)$ oziroma $ba - bx = ab - ax$, torej $a = b$. To pa ravno pomeni, da je trikotnik ABC enakokrak z vrhom pri C.

B2. Označimo $\sqrt{n + \frac{p}{n}} = k$, kjer je k naravno število, torej $n + \frac{p}{n} = k^2$. Od tod sledi, da n deli p. Ker je p praštevilo, mora biti $n = 1$ ali $n = p$. V obeh primerih dobimo enačbo $1 + p = k^2$ oziroma $p = (k+1)(k-1)$. Od tod sledi, da mora biti $k = 2$, torej $p = 3$. Dobimo rešitvi $n = 1$, $p = 3$ in $n = 3$, $p = 3$.

B3. Če je n lih, zmaga Sara, neglede na to, kdo začne. Če pa je n sod, zmaga tisti, ki ne začne. Denimo, da je na koncu na listu papirja p navpičnih in r vodoravnih črt, kjer je $p+r=n$. Potem je list papirja razdeljen na $(p+1)(r+1)$ pravokotnikov. Če je n lih, potem je eno od števil p in r liho, torej je $(p+1)(r+1)$ sodo število. V tem primeru torej zmaga Sara, neglede na to, kdo je začel in kako sta igrali. Naj bo sedaj n sod. Naj bo po $n-1$ potezah na papirju narisanih s navpičnih in t vodoravnih črt, pri čemer je $s+t=n-1$. Ker je $n-1$ liho število, sta števili s in t različnih parnosti. Ko bo narisana še zadnja črta, bo papir razdeljen bodisi na $(s+1)t$ bodisi na $s(t+1)$ pravokotnikov. Ker sta števili s in t različnih parnosti, sta tudi števili $(s+1)t=st+t$ in $s(t+1)=st+s$ različnih parnosti. Tisti, ki je zadnji na potezi, se torej lahko odloči, ali bo na koncu število pravokotnikov liho ali sodo, torej lahko zmaga in to neglede na to, kako je igra potekala pred tem. Če je n sod torej zmaga tisti, ki je zadnji na potezi oziroma tisti, ki ne začne.

Rešitve nalog za drugi letnik

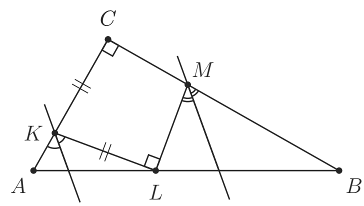
A1	A2	A3
D	E	D

A1. Razmerje premerov zaporednih dveh krogov je enako razmerju med diagonalo in stranico kvadrata, torej $\sqrt{2}$. Torej je razmerje premerov med prvim in četrtim krogom enako $(\sqrt{2})^3=2\sqrt{2}$. Premer četrtega kroga je zato enak $\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

A2. Taki števili sta samo dve, to sta 2010 in 2013. Njuna vsota je enaka 4023.

A3. Od omenjenih točk, le točki $(0,1)$ in $(-\frac{1}{b},0)$ vedno ustrezata enačbi.

B1.



Naj bosta K' in L' presečišči stranice AB s simetralama kotov $\sphericalangle AKL$ in $\sphericalangle LMB$. Trikotnika KMC in KML se ujemata v dveh stranicah in kotu nasproti daljši izmed teh dveh stranic, zato sta skladna. Torej je premica KM simetrala kotov $\sphericalangle LKC$ in $\sphericalangle CML$. Od tod sledi, da sta kota $\sphericalangle K'KM$ in $\sphericalangle KML'$ prava. Od tod trditev naloge očitno sledi.

B2. Označimo $\sqrt{n}+\frac{p}{\sqrt{n}}=k^2$, kjer je k naravno število. Enačbo kvadriramo, da dobimo $n+2p+\frac{p^2}{n}=k^4$. Od tod sledi, da n deli p^2. Ker je p praštevilo, mora biti $n=1$, $n=p$ ali $n=p^2$. Če je $n=p$, dobimo enačbo $p+2p+p=k^4$ oziroma $4p=k^4$. Od tod sledi, da mora biti k sod in zato p deljiv s 4, kar pa ni mogoče. Če je $n=1$ ali $n=p^2$, dobimo enačbo $1+2p+p^2=k^4$ oziroma $1+p=k^2$, torej $p=(k-1)(k+1)$. Od tod sledi, da mora biti $k=2$, torej $p=3$. Dobimo rešitvi $n=1$, $p=3$ in $n=9$, $p=3$.

2. način. Označimo $\sqrt{n}+\frac{p}{\sqrt{n}}=k^2$, kjer je k naravno število. Enačbo pomnožimo s $\sqrt{n}$, da dobimo $n+p=k^2\sqrt{n}$. Od tod sledi, da mora biti n kvadrat naravnega števila. V začetno enačbo vstavimo $n=m^2$, kjer je m naravno število, da dobimo $m+\frac{p}{m}=k^2$. Od tod sledi, da m deli p. Ker je p praštevilo, mora biti $m=1$ ali $m=p$. V obeh primerih dobimo enačbo $1+p=k^2$, torej $p=(k-1)(k+1)$. Od tod sledi, da mora biti $k=2$, torej $p=3$. Dobimo rešitvi $n=1$, $p=3$ in $n=9$, $p=3$.

B3. Označimo frnikole po vrsti s številkami od 1 do 2012. Izračunajmo najprej koliko črnih frnikol je bilo v vrsti po drugem koraku. Jure je zamenjal natanko tiste črne frnikole, katerih številka je deljiva s 3 ali 5. Ker je $2012 = 670 \cdot 3 + 2 = 402 \cdot 5 + 2 = 134 \cdot 15 + 2$, je teh frnikol natanko $670 + 402 - 134 = 938$. Torej po drugem koraku je bilo v vrsti še 1074 črnih frnikol. Ker je $1074 = 153 \cdot 7 + 3$, je v tretjem koraku Jure zamenjal 153 črnih frnikol. Na koncu mu je v vrsti ostalo $1074 - 153 = 921$ črnih frnikol.

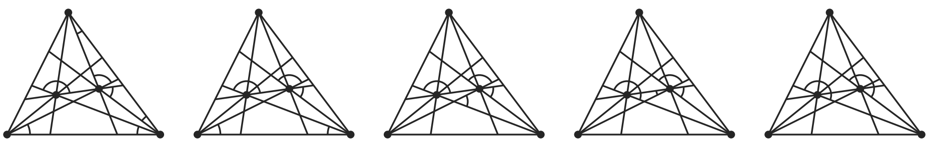
Rešitve nalog za tretji letnik

A1	A2	A3
D	B	A

A1. Če cilinder prerežemo po navpičnici PQ in razgrnemo, dobimo pravokotnik z dolžinama stranic 4 cm in 2π cm. Naloga potem sprašuje po dolžini najkrajše poti med nasprotnima ogliščema pravokotnika. Ta je enaka dolžini diagonale, torej $\sqrt{(2\pi)^2 + 4^2} = 2\sqrt{\pi^2 + 4}$ cm.

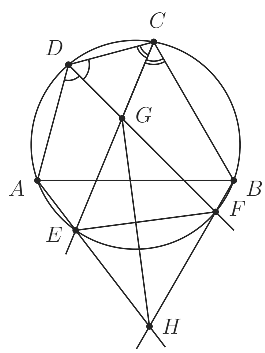
A2. Graf funkcije pod (**A**) seka x-os neskončnokrat, graf funkcije pod (**B**) seka x-os v točkah $(\sqrt{3}, 0)$ in $-\sqrt{3}, 0$, graf funkcije pod (**C**) seka x-os le v točki $(0, 0)$, graf funkcije pod (**D**) seka x-os le v točki $(\frac{1}{2}, 0)$, graf funkcije pod (**E**) pa seka x-os le v točki $(1, 0)$. Torej je pravilen odgovor (**B**).

A3. Dodatno označimo še kot φ. Z upoštevanjem dejstva, da je vsota notranjih kotov pri dveh ogliščih v trikotniku enaka zunanjemu kotu pri tretjem oglišču, zaporedoma sklepamo, da je vsota kotov na skici enaka vsoti kotov na naslednjih skicah:



Vsota kotov označenih na skici je torej $2 \cdot 180° = 360°$, vsota prvotno označenih kotov pa je $360° - \varphi = 360° - 77° = 283°$.

B1.



Ker so točke C, D, E in F koncikličn e, sta kota $\sphericalangle FDC$ in $\sphericalangle FEC$ enaka. Ker so točke A, E, F in D konciklične, sta kota $\sphericalangle ADF$ in $\sphericalangle HEF$ enaka. Torej sta kota $\sphericalangle HEF$ in $\sphericalangle FEG$ enaka. Na podoben način pokažemo tudi, da sta kota $\sphericalangle GFE$ in $\sphericalangle EFH$ enaka. Trikotnika EFG in EFH se ujemata v eni stranici in priležnima kotoma, torej sta skladna. Zato velja $|EG| = |EH|$, torej je trikotnik HGE enakokrak z vrhom pri E. Od tod pa sledi, da se premici EF in GH res sekata pod pravim kotom.

B2. Označimo $\sqrt[3]{n+\frac{8p}{n}}=k$, kjer je k naravno število, torej $n+\frac{8p}{n}=k^3$. Od tod sledi, da n deli $8p$. Ker je p praštevilo, mora biti $n=1$, $n=2$, $n=4$, $n=8$, $n=p$, $n=2p$, $n=4p$ ali $n=8p$. Če je $n=1$ ali $n=8p$, dobimo enačbo $1+8p=k^3$ oziroma $8p=(k-1)(k^2+k+1)$. Ker je k^2+k+1 liho naravno število, mora biti $k-1=8$ in $p=k^2+k+1$, torej $p=91$, kar pa ni praštevilo. Če je $n=2$ ali $n=4p$, dobimo enačbo $2+4p=k^3$. Od tod sledi, da mora biti k sod, zato je desna stran deljiva s 4, leva pa ne. Če je $n=4$ ali $n=2p$, dobimo enačbo $4+2p=k^3$. Od tod sledi, da mora biti k sod, torej je desna stran deljiva s 4, zato mora biti tudi p sod, torej $p=2$. Od tod dobimo rešitev $n=4$, $p=2$. Če je $n=8$ ali $n=p$, dobimo enačbo $8+p=k^3$ oziroma $p=(k-2)(k^2+2k+4)$. Od tod sledi, da mora biti $k=3$, torej $p=19$. Od tod dobimo rešitvi $n=8$, $p=19$ in $n=19$, $p=19$.

B3. Označimo $y=\pi\sin^2 x$. Ker je $\sin(\pi\cos^2 x)=\sin(\pi(1-\sin^2 x))=\sin(\pi-\pi\sin^2 x)=\sin(\pi\sin^2 x)$, dobimo enačbo $\cos y+\sin y=1$. Ker je $\cos y+\sin y=\sin y+\sin(\frac{\pi}{2}-y)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{2y-\frac{\pi}{2}}{2}=1$, sledi $\cos(y-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$, kar nam da $y=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$. Ker pa je $y=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi=\pi\sin^2 x\in[0,\pi]$, je lahko le $k=0$. Torej je $y=0$ ali $y=\frac{\pi}{2}$. Če je $y=0$, je $x=n\pi$, kjer je n celo število. Za $y=\frac{\pi}{2}$, pa mora biti $\sin^2 x=\frac{1}{2}$, kar nam da $\sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ oz. $x=\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2}$, kjer je n celo število.

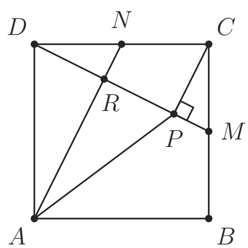
Rešitve nalog za četrti letnik

A1	A2	A3
D	E	D

A1. Vrednost polinoma v točki 1 je enaka vsoti vseh koeficientov polinoma. Ker mora biti ta vrednost enaka 0, morajo biti natanko trije koeficienti enaki 1, trije pa enaki -1. Število iskanih polinomov je torej $\binom{6}{3}=20$.

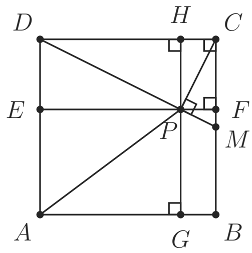
A2. Prvi dan je prebral 210 strani. Če je drugi dan prebral n strani, je bila vsota številk teh strani enaka $211+212+213+\ldots+(210+n)=210n+\frac{n(n+1)}{2}$. Torej mora biti $210n+\frac{n(n+1)}{2}=4410$. Od tod sledi $210n\leq 4410$ oziroma $n\leq 20$. Pri $n=20$ je $210n+\frac{n(n+1)}{2}=4410$, torej je drugi dan prebral 20 strani, ostalo pa mu je še $630-210-20=400$ strani.

B1.



Naj bo N razpolovišče stranice CD in R presečišče premic DP in AN. Potem je $\sphericalangle DRA=180^\circ-\sphericalangle ADR-\sphericalangle NAD=180^\circ-\sphericalangle ADR-\sphericalangle MDC=180^\circ-90^\circ=90^\circ$. Torej je premica RN vzporedna premici PC in ker je $|DN|=|NC|$, sledi $|DR|=|RP|$. Torej sta trikotnika DRA in PRA skladna, saj se ujemata v dveh stranicah in vmesnem kotu. Torej je $|DA|=|AP|$.

2. način.



Naj premica skozi P vzporedna stranici AB seka stranici AD in BC v točkah E in F, premica skozi P vzporedna stranici AD pa naj seka stranici AB in CD v točkah G in H. Naj bo dolžina stranice kvadrata enaka a. Potem je ploščina trikotnika DMC enaka $\frac{1}{2}a\frac{a}{2} = \frac{1}{2}|DM||CP|$. Po Pitagorovem izreku je $|DM| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$, torej je $|CP| = \frac{a^2}{2|DM|} = \frac{a}{\sqrt{5}}$. Po Pitagorovem izreku je $|DP| = \sqrt{a^2 - |CP|^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$ in $|PM| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - |CP|^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{5}} = \frac{a}{2\sqrt{5}}$. Ploščina trikotnika DPC je torej enaka $\frac{1}{2}a|HP| = \frac{1}{2}|DP||PC| = \frac{a^2}{5}$, zato je $|HP| = \frac{2}{5}a$ oziroma $|PG| = a - |HP| = \frac{3}{5}a$. Podobno je ploščina trikotnika CPM enaka $\frac{1}{2}\frac{a}{2}|PF| = \frac{1}{2}|PM||PC| = \frac{a^2}{20}$, zato je $|PF| = \frac{1}{5}a$ oziroma $|AG| = |PE| = a - |PF| = \frac{4}{5}a$. Po Pitagorovem izreku sledi $|AP| = \sqrt{|AG|^2 + |PG|^2} = a = |AD|$. Torej je trikotnik DAP enakokrak z vrhom pri A.

B2. Označimo $\sqrt[3]{n} + \frac{p}{\sqrt[3]{n}} = k^2$, kjer je k naravno število. Enačbo potenciramo na 3, da dobimo $n + 3p\sqrt[3]{n} + 3\frac{p^2}{\sqrt[3]{n}} + \frac{p^3}{n} = k^6$, kar lahko prepišemo v $n + 3pk^2 + \frac{p^3}{n} = k^6$. Od tod sledi, da n deli p^3. Ker je p praštevilo, mora biti $n = 1$, $n = p$, $n = p^2$ ali $n = p^3$. Če je $n = p$ ali $n = p^2$, dobimo enačbo $p + 3pk^2 + p^2 = k^6$. Od tod sledi, da mora biti k deljiv s p, zato je desna stran deljiva s p^2, leva pa ne. Ostaneta nam še možnosti $n = 1$ in $n = p^3$, ki ju vstavimo v začetno enačbo in dobimo $1 + p = k^2$, torej $p = (k-1)(k+1)$. Od tod sledi, da mora biti $k = 2$, torej $p = 3$. Dobimo rešitvi $n = 1$, $p = 3$ in $n = 27$, $p = 3$.

2. način. Označimo $\sqrt[3]{n} + \frac{p}{\sqrt[3]{n}} = k^2$, kjer je k naravno število. Enačbo pomnožimo s $k^2\sqrt[3]{n}$ oziroma $\sqrt[3]{n^2}$, da dobimo enačbi $k^2\sqrt[3]{n^2} + k^2p = k^4\sqrt[3]{n}$ in $n + p\sqrt[3]{n} = k^2\sqrt[3]{n^2}$. Ti dve enačbi seštejemo in nekoliko preuredimo, da dobimo $n + k^2p = (k^4 - p)\sqrt[3]{n}$. Od tod sledi, da mora biti n kub naravnega števila. V začetno enačbo vstavimo $n = m^3$, kjer je m naravno število, da dobimo $m + \frac{p}{m} = k^2$. Od tod sledi, da m deli p. Ker je p praštevilo, mora biti $m = 1$ ali $m = p$. V obeh primerih dobimo enačbo $1 + p = k^2$, torej $p = (k-1)(k+1)$. Od tod sledi, da mora biti $k = 2$, torej $p = 3$. Dobimo rešitvi $n = 1$, $p = 3$ in $n = 27$, $p = 3$.

B3. Velja

$$a^{\ln\frac{1}{a}} = (e^{\ln a})^{-\ln a} = \left(\frac{1}{e}\right)^{(\ln a)^2}.$$

Ker je $a \neq 1$, je $\ln a \neq 0$, torej $(\ln a)^2 > 0$. Zato je $(\frac{1}{e})^{(\ln a)^2} < 1$, saj je $\frac{1}{e} < 1$, torej $a^{\ln\frac{1}{a}} < 1$. Velja $a^{\ln\frac{1}{a^n}} = a^{n\ln\frac{1}{a}} = (a^{\ln\frac{1}{a}})^n$. Torej je dana vsota vsota geometrijskega zaporedja z začetnim členom 1 in koeficientom $a^{\ln\frac{1}{a}} < 1$. Zato je ta vsota enaka $\frac{1}{1-a^{\ln\frac{1}{a}}}$.

Rešitve nalog 56. državnega matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije

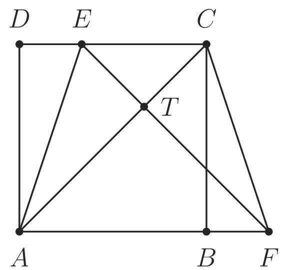
Rešitve nalog za prvi letnik

I/1. Naj ima število n decimalni zapis enak $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1}$. Po predpostavki število $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_2}$ deli število $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1} = 10 \cdot \overline{a_k a_{k-1} \dots a_2} + a_1$, torej deli tudi število a_1. Ker je $a_1 \neq 0$, je lahko število $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_2}$ kvečjemu enomestno, torej je $k = 2$. Če je $n = \overline{a_2 a_1}$, potem mora po zgornjem a_2 deliti a_1, torej je $a_2 = a_1$ ali $a_2 \leq 4$. Torej je število n lahko enako le $99, 88, 77, 66, 55, 48, 44, 39, 36, 33, 28, 26, 24, 22, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12$ ali 11. Od teh pa le števila $99, 88, 77, 66, 55, 48, 44, 36, 33, 24, 22, 15, 12$ in 11 zadoščajo pogoju naloge.

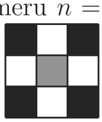
Povzemimo: vse rešitve so 11, 12, 15, 22, 24, 33, 36, 44, 48, 55, 66, 77, 88, 99.

I/2. Iz enakosti sledi $x(1+y) = 1-y^2 = (1+y)(1-y)$. Če je $y = -1$, je enakost izpolnjena, iz neenakosti pa potem sledi $-(5+x) \geq 0$ oziroma $x \leq -5$. Tako je $x - y = x + 1 \leq -4$. Če pa je $y \neq -1$, potem lahko iz enakosti pokrajšamo $(1+y)$, da dobimo $x = 1 - y$. Slednje vstavimo v neenakost, da dobimo $y(6-y) \geq 0$. Torej je $0 \leq y \leq 6$. Tako je $x - y = 1 - 2y \in \{1, -1, -3, -5, -7, -9, -11\}$. Izraz $x - y$ lahko zavzame vse vrednosti manjše ali enake -4 ter vrednosti $-3, -1$ in 1.

I/3. Označimo s T presečišče premic AC in EF. Ker je $|BF| = |DE|$, $|BC| = |DA|$ in $\angle CBF = \angle ADE = \frac{\pi}{2}$, sta trikotnika ADE in CBF skladna. Zato je $|AE| = |CF|$ in štirikotnik $AFCE$ je enakokrak trapez. Sledi $\angle EFA = \angle CAF$, ta kot pa je enak $\frac{\pi}{4}$, saj je AC diagonala kvadrata $ABCD$. Dobimo $\angle ATF = \pi - \angle EFA - \angle CAF = \frac{\pi}{2}$, zato sta premici AC in EF pravokotni.



2. način. Zaradi $|BF| = |ED|$ in vzporednosti premic BF in DE, je štirikotnik $BFED$ paralelogram. Premica EF je vzporedna premici BD. Ker sta AC in BD diagonali kvadrata $ABCD$, se sekata pravokotno. Torej se tudi premici AC in EF sekata pravokotno.

I/4. V primeru $n = 3$ je odgovor ne. Pobarvamo tabelo z belo, sivo in črno barvo, kot prikazuje slika . Opazimo, da vsak lik predpisane oblike vedno pokrije vsaj toliko belih polj kot črnih. Vsota števil na belih poljih mora biti na koncu enaka vsoti števil na črnih poljih. Zato lahko na vsakem koraku izberemo le tisti lik, ki pokrije enako belih kot črnih polj. Taki liki so natanko tisti, ki vsebujejo po eno polje vsake barve. Torej na vsakem koraku število na sivem polju povečamo za 1. Zato bi morali na vsakem koraku povečati tudi števila na vseh ostalih poljih, kar pa ni mogoče.

V primeru $n = 4$ je odgovor da. Preveriti zadošča, da je že v primeru $n = 2$ odgovor da, saj primer $n = 4$ od tod očitno sledi. Primer $n = 2$ rešimo na primer kot prikazuje spodnja slika.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 3 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array}$$

2. način. Naj bo najprej $n = 3$. Pobarvajmo vogalna 4 polja v tabeli z belo barvo, ostalih 5 polj pa s črno. S predpisanim likom lahko pokrijemo največ eno belo polje, ostali dve pa sta črni (ali pa so kar vsa tri črna). Denimo, da smo uspeli doseči, da je na vseh mestih v tabeli vpisano neko število $k > 0$. Za to smo morali izbrati natanko $4k$ likov, ki so pokrili natanko eno belo polje (in morda še nekaj takih, ki pokrijejo samo črna polja). Vsoto vseh števil na črnih poljih je torej vsaj $8k$. Po drugi strani pa bi morala biti končna vsota vseh števil na črnih poljih natanko $5k$. To protislovje nam pove, da v tabeli ne moremo doseči željenega stanja s samimi enakimi pozitivnimi števili.

Pri $n = 4$ pa opazimo, da lahko za poljubno izbrano polje v tabeli preostanek tabele pokrijemo s petimi danimi liki brez prekrivanj. Torej lahko dosežemo, da po prvih petih korakih za 1 povečamo vrednosti v vseh poljih z izjemo prvega. V naslednjih petih korakih lahko za 1 povečamo vrednosti v vseh poljih z izjemo drugega. Potem to ponovimo na vseh poljih z izjemo tretjega. Tako nadaljujemo in po $16 \cdot 5$ korakih bo na vseh poljih v tabeli število 15.

Rešitve nalog za drugi letnik

II/1. Pišimo $n = \overline{abc}$. Pogoj naloge pove, da $\overline{bc}$ deli $\overline{abc} = 100a + \overline{bc}$, torej deli tudi $100a$. Denimo najprej, da $\overline{bc}$ ni deljivo s 5. Potem mora $\overline{bc}$ deliti $4a$. Ker je $\overline{bc}$ dvomestno, mora biti tudi $4a$ dvomestno, torej je $3 \leq a \leq 9$. Torej $4a$ lahko zavzame vrednosti $12, 16, 20, 24, 28, 32$ ali 36. Dvomestni delitelji teh števil so zaporedoma 12, 16, 20 in 10, 24 in 12, 28 in 14, 32 in 16 ter 36 in 18 in 12. Ker morajo biti števke neničelne, dobimo rešitve 312, 416, 624, 612, 728, 714, 832, 816, 936, 918 in 912. Če pa je $\overline{bc}$ deljivo s 5, je $c = 5$, saj mora biti c neničelna števka. Torej je $\overline{bc} = 10b + 5 = 5(2b + 1)$ in zato mora $(2b + 1)$ deliti $20a$. Ker je $2b + 1$ liho število, mora deliti celo $5a$. Če je $2b + 1$ deljiv s 5, je bodisi $b = 2$ (torej $2b + 1 = 5$) in a poljuben, bodisi $b = 7$ (torej $2b + 1 = 15$) in a enak $3, 6$ ali 9. Tako dobimo rešitve $125, 225, 325, 425, 525, 625, 725, 825$ in 925 ter $375, 675$ in 975. Če pa $2b + 1 \neq 5$, potem je tuj 5 in zato mora deliti celo a. Torej mora biti $2b + 1 \leq 9$ in zato $b \leq 4$ in $b \neq 2$ (sicer bi bil $2b + 1 = 5$). Če je b zaporedoma enak $4, 3$ in 1, potem je lahko a zaporedoma enak 9, 7 in 3 ali 6 ali 9. Tako dobimo še rešitve $945, 735, 315, 615$ in 915.

Povzemimo: vse rešitve so 125, 225, 312, 315, 325, 375, 416, 425, 525, 612, 615, 624, 625, 675, 714, 725, 728, 735, 816, 825, 832, 912, 915, 918, 925, 936, 945, 975.

II/2. Kvadratni enačbi enačimo in dobimo $x^2 + ax + b = x^2 + bx + a$. Sledi $ax + b = bx + a$ in $(x - 1)(a - b) = 0$. Ker $a \neq b$, sledi $x = 1$, nato $x = 1$ vstavimo v eno od enačb in dobimo $a + b = -1$.

2. način. Rešitvi prve enačbe sta $\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$, rešitvi druge pa $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2}$. Torej mora za neka predznaka veljati $-a \pm \sqrt{a^2 - 4b} = -b \pm \sqrt{b^2 - 4a}$ oziroma

$$b - a = \mp\sqrt{a^2 - 4b} \pm \sqrt{b^2 - 4a}.$$

To enačbo kvadriramo in preuredimo, da dobimo

$$2a + 2b - ab = \pm\sqrt{(b^2 - 4a)(a^2 - 4b)}.$$

Slednje še enkrat kvadriramo in preuredimo v

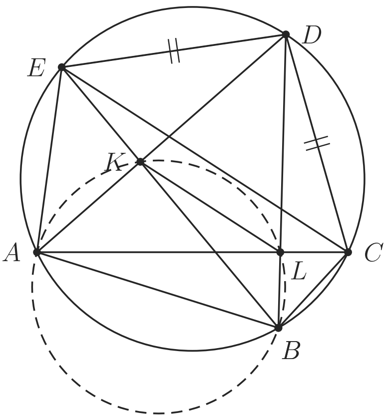
$$a^2 - 2ab + b^2 = a^2 b + ab^2 - a^3 - b^3,$$

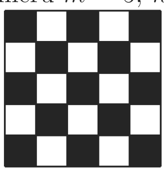
kar pa lahko razstavimo, da dobimo

$$(a - b)^2 = -(a - b)^2 (a + b).$$

Ker sta a in b različni, lahko delimo z $(a - b)^2$ in dobimo $a + b = -1$. Hitro opazimo, da imata v tem primeru enačbi res skupno rešite 1. Torej $a + b = -1$.

II/3. Po izreku o obodnih kotih v krogu je $\angle CED = \angle CAD$ in $\angle DCE = \angle DBE$. Ker je ECD enakokrak trikotnik z vrhom pri D, je $\angle CED = \angle DCE$. Zaradi kolinearnosti točk ALC ter zaradi kolinearnosti točk AKD je tudi $\angle LAK = \angle LBK$ in so zato točke A, B, L, K konciklične. Sledi $\angle KLA = \angle KBA = \angle EBA = \angle ECA$. Torej sta premici KL in EC vzporedni.



II/4. V primeru $m = 5$, $n = 5$ je odgovor ne. Pobarvamo tabelo z belo črno barvo, kot prikazuje slika . Opazimo, da vsak lik predpisane oblike vedno pokrije dve beli in dve črni polji. Torej je na vsakem koraku vsota števil na belih poljih enaka vsoti števil na črnih poljih. Ker pa je črnih polj več, bi morala biti na koncu vsota števil na črnih poljih strogo večja od vsote števil na belih poljih.

V primeru $m = 3$, $n = 4$ je odgovor da. Ta primer rešimo na primer kot prikazuje spodnja slika.

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

$\longrightarrow$

1	0	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

$\longrightarrow$

1	1	0	0
1	1	0	0
2	2	0	0

$\longrightarrow$

1	1	1	0
1	1	1	0
2	2	1	1

$\longrightarrow$

1	1	1	1
1	1	1	1
2	2	2	2

$\longrightarrow$

2	1	1	1
2	2	2	1
2	2	2	2

$\longrightarrow$

2	2	2	2
2	2	2	2
2	2	2	2

Rešitve nalog za tretji letnik

III/1. Očitno je ena rešitev $a = b = c = d = 0$. Pokazali bomo, da je edina. Denimo, da obstaja še kaka druga rešitev (a, b, c, d). Predpostavimo lahko, da so si števila a, b, c in d tuja, saj bi sicer največji skupni delitelj lahko pokrajšali iz enačbe (ker niso vsa števila enaka 0 največji skupni delitelj obstaja). Enačbo lahko preuredimo v

$$2a^2 - c^2 = 6d^2 - 3b^2.$$

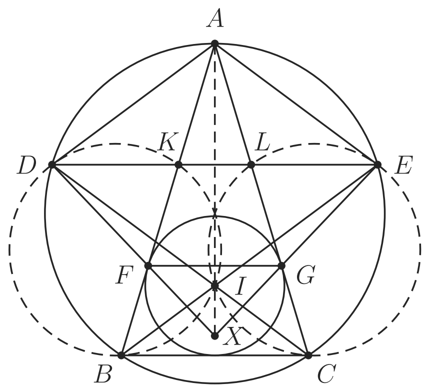
Ker je desna stran deljiva s 3, mora biti tudi leva. Toda kvadrat naravnega števila da pri deljenju s 3 ostanek 0 ali 1. Torej je edina možnost, da sta ostanka števil a^2 in c^2 pri deljenju s 3 enaka 0, to pa pomeni, da sta a in c deljivi s 3. Torej je leva stran deljiva z 9 in zato mora biti tudi desna. To pomeni, da mora biti $2d^2 - b^2$ deljivo s 3. Podobno kot prej sklepamo, da sta b in d deljiva s 3. Torej so vsa števila a, b, c in d deljiva s 3, kar pa je protislovje, saj so si tuja.

III/2. Označimo $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Tedaj morajo biti števila $P(0) = \gamma$, $P(1) - P(0) = (\alpha + \beta + \gamma) - \gamma = \alpha + \beta$ in $P(2) - 2P(1) + P(0) = (4\alpha + 2\beta + \gamma) - 2(\alpha + \beta + \gamma) + \gamma = 2\alpha$ cela. Označimo $2\alpha = a \in \mathbb{Z}$, torej $\alpha = \frac{a}{2}$. Če je a sod, je število α celo, zato mora biti tudi število β celo, to pa je v protislovju s predpostavko naloge, saj so vsi koeficienti polinoma P celoštevilski. Zato mora biti a lih, torej oblike $a = 2a' + 1$, $a' \in \mathbb{Z}$. Tako je $\alpha = a' + \frac{1}{2}$. Od tod sledi, da mora biti tudi β oblike $\beta = b + \frac{1}{2}$, $b \in \mathbb{Z}$. Zato je $P(x) = a'x^2 + \frac{1}{2}x^2 + bx + \frac{1}{2}x + \gamma$, torej ima polinom $Q(x) = a'x^2 + bx + \gamma$ res same celoštevilske koeficiente.

2. način. Označimo $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Tedaj morajo biti števila $P(0) = \gamma$, $P(1) - P(0) = (\alpha + \beta + \gamma) - \gamma = \alpha + \beta$ in $P(-1) - P(0) = (\alpha - \beta + \gamma) - \gamma = \alpha - \beta$ cela. Torej vemo, da $\alpha + \beta, \alpha - \beta \in \mathbb{Z}$. Če zadnji dve števili seštejemo in odštejemo, ugotovimo, da morata biti celi tudi števili 2α in 2β. Če je 2α sodo število, je α celo število. Ker $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}$, je tudi β celo število – pogoj naloge zato ni izpolnjen. Tako mora biti 2α liho število. S podobnim sklepom ugotovimo, da je tudi 2β liho število.

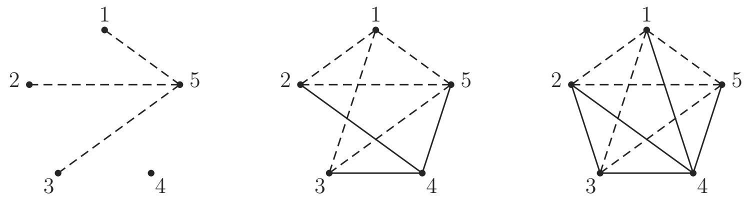
Tako lahko zapišemo $2\alpha = 2a + 1$, $a \in \mathbb{Z}$ in $2\beta = 2b + 1$, $b \in \mathbb{Z}$. To vstavimo v polinom Q in dobimo $Q(x) = ax^2 + bx + \gamma$. Vsi njegovi koeficienti so res cela števila.

III/3. Naj bo I središče trikotniku ABC včrtane krožnice, K in L pa presečišči premice DE s premicama AB in AC. Simetrala kota trikotnika gre skozi središče včrtane krožnice in razpolovišče nasprotnega loka, zato točke B, I in E ležijo na isti premici (simetrali kota pri B). Torej je $\angle IBK = \angle CBI = \angle CDE$. Zato točke B, I, K in D ležijo na isti krožnici. Podobno pokažemo, da točke C, I in D ležijo na isti premici (simetrali kota pri C) in da točke C, E, L in I ležijo na isti krožnici. Od tod sledi $\angle LKA = \angle DKB = \angle DIB = \angle CIE = \angle CLE = \angle ALK$. To pomeni, da je trikotnik KLA enakokrak z vrhom pri A. Ker sta AF in AG tangentna odseka, je tudi trikotnik FGA enakokrak z vrhom pri A. Torej sta premici DE in FG vzporedni. Ker je po predpostavki trikotnik EDX enakokrak z vrhom pri X, sledi, da je tudi trikotnik GFX enakokrak z vrhom pri X. Štirikotnik $AFXG$ je torej deltoid in zato je premica AX pravokotna na GF in posledično tudi na DE. To pomeni, da je tudi $ADXE$ deltoid in zato je ADE enakokrak trikotnik z vrhom pri A. Torej sta kota $\angle ACD$ in $\angle EBA$ enaka, saj sta obodna kota nad enako dolgima tetivama. Od tod sledi, da je trikotnik ABC enakokrak z vrhom pri A.



III/4. Gotovo sobi 5 in 1 nista sosednji, saj bi se Črt sicer lahko trikrat sprehodil po tem rovu iz sobe 5 v sobo 1, od tam nazaj v sobo 5 in nato še enkrat v sobo 1. S tem bi iz sobe 5 prišel v sobo 1 po natanko treh rovih, kar je protislovno z navodili naloge. Prav tako soba 5 ni neposredno povezana s sobama 2 in 3. Če bi bila neposredno povezana na primer s sobo 2, bi se Črt iz sobe 5 lahko splazil po natanko treh rovih nazaj v sobo 5, tako da bi se po natanko dveh rovih splazil iz sobe 5 v sobo 2 in za tem po neposrednem rovu iz 2 v 5. Ker se Črt lahko po natanko dveh rovih splazi iz sobe 5 v sobo 2 in ker je soba 5 lahko sosednja le sobi 4, morajo biti neposredno povezani pari sob 5 in 4, 4 in 2 ter 4 in 3. Ker se iz sobe 5 Črt ne more splaziti v sobo 1 po natanko treh rovih, soba 1 ne more biti sosednja sobama 2 in 3. V nasprotnem primeru bi se Črt lahko splazil iz sobe 5 v sobo

1 preko sob 4 in 2 ali 4 in 3. Ker se iz sobe 3 Črt lahko splazi v sobo 1 po natanko treh hodnikih, morata biti sosednja tudi para sob 1 in 4 ter 2 in 3. Vsi sosednji pari sob so torej $(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)$ in $(4,5)$.



Rešitve nalog za četrti letnik

IV/1. Očitno je ena rešitev $a=b=c=d=0$. Pokazali bomo, da je edina. Denimo, da obstaja še kaka druga rešitev (a,b,c,d). Predpostavimo lahko, da so si števila a,b,c in d tuja, saj bi sicer največji skupni delitelj lahko pokrajšali iz enačbe (ker niso vsa števila enaka 0 največji skupni delitelj obstaja). Enačbo preuredimo v $a\sqrt{2}+b\sqrt{5}=d\sqrt{10}-c$ in kvadriramo, da dobimo

$$2a^2+5b^2-c^2-10d^2=2\sqrt{10}(cd-ab).$$

Ker $\sqrt{10}$ ni racionalno število, mora biti $2a^2+5b^2-c^2-10d^2=0$ oziroma

$$2a^2-c^2=10d^2-5b^2.$$

Ker je desna stran deljiva s 5, mora biti tudi leva. Toda kvadrat naravnega števila da pri deljenju s 5 ostanek 0, 1 ali 4. Torej je edina možnost, da sta ostanka števil a^2 in c^2 pri deljenju s 5 enaka 0, to pa pomeni, da sta a in c deljivi s 5. Torej je leva stran deljiva s 25 in zato mora biti tudi desna. To pomeni, da mora biti $2d^2-b^2$ deljivo s 5. Podobno kot prej sklepamo, da sta b in d deljiva s 5. Torej so vsa števila a,b,c in d deljiva s 5, kar pa je protislovje, saj so si tuja.

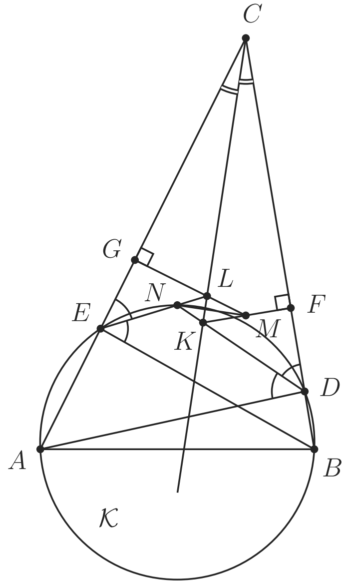
2. način. Če je (a,b,c,d) rešitev enačbe, kot v prvi rešitvi dobimo, da mora veljati $2a^2+5b^2-c^2-10d^2=0$. Če enačbo kvadriramo v obliki $a\sqrt{2}+c=d\sqrt{10}-b\sqrt{5}$, s podobnimi sklepi dobimo, da mora veljati $2a^2+c^2-10d^2-5b^2=0$. Če ti dve enačbi odštejemo, dobimo $10b^2-2c^2=0$ oziroma $c^2=5b^2$. Torej je $c=\pm\sqrt{5}b$, ker pa $\sqrt{5}$ ni racionalno število sledi $b=c=0$. Iz ene od enačb potem sledi $a^2=5d^2$, od koder dobimo še $a=d=0$. Torej ima enačba le eno rešitev $a=b=c=d=0$.

3. način. Kvadriramo enačbo $a\sqrt{2}+b\sqrt{5}=d\sqrt{10}-c$, dobimo $2a^2+5b^2-c^2-10d^2=(-ab-cd)\sqrt{10}$. Veljati mora $ab=-cd$. Če je $d=0$, potem je $ab=0$ in sledi $a\sqrt{2}+c=0$ ali $b\sqrt{5}+c=0$. V obeh primerih dobimo rešitev $a=b=c=d=0$. Denimo, da je $d\neq 0$, tedaj je $c=-\frac{ab}{d}$. Vstavimo v začetno enačbo in dobimo $ad\sqrt{2}+bd\sqrt{5}-ab-d^2\sqrt{10}=0$, oziroma $(d\sqrt{5}-a)(b-d\sqrt{2})=0$. Ker je $d\neq 0$ ne dobimo nove rešitve.

IV/2. Če v enačbo vstavimo $y=-x$, dobimo $f(f(x)-x)=f(0)+f(2012)$. Ker je na desni strani konstanta, f pa je injektivna funkcija, mora biti tudi $f(x)-x$ konstanta. Torej je $f(x)=x+c$ za neko realno število c. Če to vstavimo v začetno enačbo, dobimo $x+y+2c=x+y+2c+2012$, kar nam da protislovje $0=2012$.

2. način. Če v enačbi zamenjamo x in y, dobimo $f(f(y)+x)=f(x+y)+f(2012)=f(f(x)+y)$. Zaradi injektivnosti funkcije f sledi $f(y)+x=f(x)+y$ oziroma $f(x)-x=f(y)-y$ za vsa realna števila x in y. To pomeni, da je $f(x)-x$ konstanta. Zaključimo enako kot v prvi rešitvi.

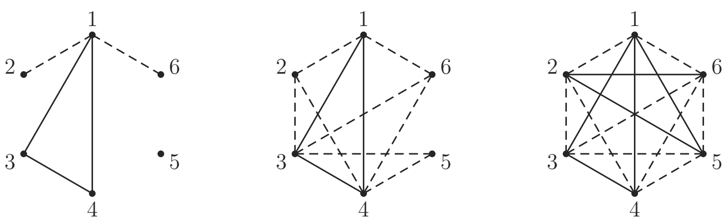
IV/3. Naj bo $\mathcal{K}$ krožnica, na kateri ležijo točke A, B, D in E. Ker je EL simetrala kota $\angle BEC$, razpolavlja tisti lok $\widehat{AB}$, na katerem leži E. Podobno premica DK razpolavlja tisti lok $\widehat{AB}$, na katerem leži D. Ker E in D ležita na istem bregu premice AB, premici EL in DK razpolavljata isti lok $\widehat{AB}$ in se zato sekata na krožnici $\mathcal{K}$ (v točki N). Točke A, B, D, N so torej koncikliène. Ker so točke A, B, D, E koncikliène, sta kota $\angle CDA$ in $\angle BEC$ enaka. Torej, če označimo $\alpha = \angle CDK$, potem je $\angle CDK = \angle KDA = \angle BEL = \angle LEC = \alpha$. Točke K, L in C so kolinearne, zato velja



$$\begin{aligned} \angle NLK &= \angle 180^\circ - CLE = \angle ECL + \alpha = \\ &= \angle KCD + \alpha = 180^\circ - \angle DKC = \\ &= \angle LKN. \end{aligned}$$

Podobno pokažemo tudi $\angle MKL = \angle KLM$. Torej je $KMLN$ deltoid.

IV/4. Sobi 1 in 2 nista sosednji, saj bi sicer Črt prek treh rovov lahko prišel iz sobe 1 v sobo 2 s sprehodom $1-2-1-2$. Ker lahko prek treh rovov pride v sobo 1, ne pa prek štirih rovov v sobo 6, soba 1 ne sme biti sosednja sobi 6. Ker lahko Črt prek treh rovov iz sobe 1 pride nazaj v sobo 1, morata obstajati dve različni sobi X in Y (različni od 1), tako da so si sobe 1, X in Y sosednje. Ker lahko iz sobe 1 v sobi X in Y pride prek dveh rovov, nobena od teh dveh sob ni soba 5. Iz že dokazanega sledi tudi, da nobena od teh dveh sob ni soba 2 ali 6, zato sta sobi X in Y sobi 3 in 4. Pokazali smo torej, da so si sobe 1, 3 in 4 sosednje. Soba 3 ni sosednja sobi 5, saj bi sicer Črt lahko prek dveh rovov prišel iz sobe 1 v sobo 5 s sprehodom $1-3-5$. Podobno soba 4 ni sosednja sobi 5. Soba 3 ni sosednja sobi 2, saj bi sicer Črt lahko prek treh rovov prišel iz sobe 1 v sobo 2 s sprehodom $1-4-3-2$. Podobno soba 4 ni sosednja sobi 2. Soba 3 ni sosednja sobi 6, saj bi sicer Črt lahko prek štirih rovov prišel iz sobe 1 v sobo 6 s sprehodom $1-3-1-3-6$. Podobno soba 4 ni sosednja sobi 6. Edini preostali možen sprehod iz sobe 1 v sobo 6 prek treh rovov je sprehod $1-5-2-6$, torej sta sobi 1 in 5 sosednji, sobi 5 in 2 sosednji ter sobi 2 in 6 sosednji. Sobi 5 in 6 nista sosednji, saj bi sicer Črt lahko prek štirih rovov prišel iz sobe 1 v sobo 6 s sprehodom $1-5-1-5-6$. Pari sosednjih sob so torej pari $(1,3), (1,4), (1,5), (2,5), (2,6)$ in $(3,4)$.



2. način. Iz prvega pogoja sledi, da obstajata taki različni sobi $X \neq 1$ in $Y \neq 1$, da so sobe 1, X in Y sosednje. Prav tako obstajata različni sobi $Z \neq 1$ in $W \neq 6$, da je 1 sosednja Z, Z sosednja W in W sosednja 6. Soba 6 ni sosednja sobi 1, saj bi sicer imeli sprehod $1-X-Y-1-6$. Torej $X, Y, Z \neq 6$ in $W \neq 1$. Če bi veljalo $Z = X$, bi imeli sprehod $1-Y-X-W-6$, kar pa ni mogoče. Torej $Z \neq X$ in podobno $Z \neq Y$. Če bi veljalo

$W = X$, bi imeli sprehod $1 - X - 1 - X - 6$, kar spet ni mogoče. Torej $W \neq X$ in podobno $W \neq Y$. Dokazali smo, da so sobe $1, 6, X, Y, Z$ in W različne, ker pa jih je skupaj 6, so to natanko vse sobe. Iz drugega pogoja sledi, da soba 2 ni sosednja sobi 1, saj bi sicer imeli sprehod $1 - 2 - 1 - 2$. Torej $2 \neq X, Y, Z$ in zato $2 = W$. Ker iz sobe 1 lahko pridemo prek dveh rovov do sob X in Y, sledi $5 = Z$. Sobi X in Y sta torej sobi 3 in 4 (zaradi simetrije je vseeno, katera je katera). Podobno kot v prvi rešitvi pokažemo, da drugih sosednjosti med sobami ni. Pari sosednjih sob so torej natanko pari $(1,3), (1,4), (1,5), (2,5), (2,6)$ in $(3,4)$.

Rešitve nalog 12. področnega tekmovanja v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Rešitve nalog za prvi letnik

A1	A2	A3	A4	A5	A6
A	C	B	D	C	C

A1. Število koruznih zrn je $\frac{1000 \quad kg}{8 \cdot 10^{-2} \quad g} = \frac{10^6 \quad g}{8 \cdot 10^{-2} \quad g} = 12\,500\,000$.

A2. Število 7425 razcepimo na prafaktorje $7425 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11$. Izračunamo število deliteljev $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

A3. Če plačamo 200 evrov članarine, je cena vozovnice 6 evrov. Če pa plačamo 100 evrov članarine je cena vozovnice 15 evrov. Sklepamo, da se nam nakup izplača, če velja $100 + x \cdot 15 > 200 + x \cdot 6$. Neenačbo uredimo $9x > 100$ in rešimo $x > 11\frac{1}{9}$. Sklepamo, da se nam nakup izplača, če bomo smučali vsaj 12 dni.

A4. Izračunamo količino soka $240 \cdot 0{,}75$ l$= 180$ l, kar razdelimo v pol litrske steklenice. Tako je $180 \cdot 2 = 360$ steklenic.

A5. Izračunamo vrednosti posameznih izrazov. $\left(\sqrt{2}\right)^6 = 2^3 = 8$, $\sqrt{256} = 16$, $\sqrt{\sqrt{4}} = \sqrt{2}$, $(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1$, $\left(\sqrt[3]{3}\right)^3 = 3$. Torej je iracionalno število $\sqrt{\sqrt{4}}$.

A6. V enačbi odpravimo ulomke, tako da množimo z 12. Dobimo $10y + 66 - 18y = 16y - 40 - 6$. Enačbo uredimo $-24y = -112$ in izračunamo $y = 8$.

B1. Izračunamo $a = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$ ter $b = 1 - \frac{2}{3} : \frac{3}{4} = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$. Izračunamo $\frac{a}{b} = \frac{17}{12} : \frac{1}{9} = \frac{17}{12} \cdot 9 = \frac{51}{4}$.

B2. V oklepaju razširimo ulomke na skupni imenovalec $12x$. Dobimo $\frac{4x^2-3x^2-3x-4}{12x}$ oziroma $\frac{x^2-3x-4}{12x}$ in upoštevamo negativni eksponent. Drugi ulomek razstavimo $\frac{12x(x-2)}{(x-4)(x-2)}$ in ga okrajšamo, dobimo $\frac{12x}{x-4}$. V izrazu upoštevamo deljenje in dobimo $\frac{12x}{x^2-3x-4} \cdot \frac{x-4}{12x}$. Razstavimo še imenovalec prvega ulomka $\frac{12x}{(x-4)(x+1)} \cdot \frac{x-4}{12x}$. Ulomka okrajšamo in dobimo $\frac{1}{x+1}$. Izračunamo še vrednost izraza za $x = -2\frac{3}{7}$. Dobimo $\frac{1}{-2\frac{3}{7}+1}$ in poenostavimo$\frac{1}{-1\frac{3}{7}} = \frac{1}{-\frac{10}{7}}$. Razrešimo še dvojni ulomek ter dobimo $-\frac{7}{10}$.

B3. Zapišemo Jana : Jan = $5 : 4$ oziroma Jana $= 5x$ in Jan $= 4x$. Zapišemo enačbo z ulomki ali s procenti: $5x - \frac{6}{100} \cdot 5x = 4x + \frac{1}{20} \cdot 4x + 15$ ali $5x - 6\,\% \cdot 5x = 4x + 5\,\% \cdot 4x + 15$. Linearno enačbo uredimo $5x - \frac{3}{10}x = 4x + \frac{x}{5} + 15$, množimo z 10 in dobimo $50x - 3x = 40x + 2x + 150$. Rešitev enačbe je $x = 30$. Torej ima Jana 150 prijateljev in Jan 120 prijateljev.

B4. Če z x označimo število kupljenih delnic po 26 evrov in z y število kupljenih delnic po 18 evrov, lahko nakup delnic zapišemo z enačbo $26x + 18y = 2504$. Če upoštevamo ceno 21 evrov in vrednost delnic 2436 evrov, dobimo skupno število delnic $x + y = 2436 : 21 = 116$. Rešimo dobljeni sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama in dobimo $x = 52$ in $y = 64$.

Rešitve nalog za drugi letnik

A1	A2	A3	A4	A5	A6
A	C	B	C	A	D

A1. Točko izračunamo po formuli $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Odgovor je točka $(4,3)$.

A2. Poenostavimo predpis funkcije in dobimo $f(x) = 2x - 6$. Smerni koeficient funkcije je 2.

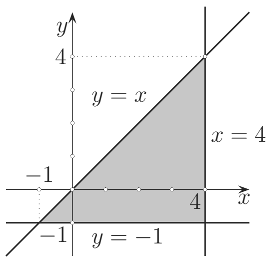
A3. Zapišemo predpis za linearno funkcijo z začetno vrednostjo 2 in smernim koeficientom $0{,}7$: $f(x) = 0{,}7x + 2$.

A4. S pomočjo Pitagorovega izreka ugotovimo, da 12 cm, 35 cm in 36 cm niso dolžine stranic pravokotnega trikotnika.

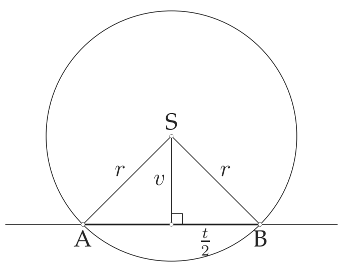
A5. Ena riba stane $\frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{5}$ evrov $= 2\sqrt{5}$ evrov.

A6. Enakosti preverimo z izračunom.

B1. Narišemo polravnine z enačbami $x \leq 4$, $y \geq -1$ in $y \leq x$ (robovi polravnin so premice z enačbami $x = 4$, $y = -1$, $y = x$) in označimo presečišče polravnin - pravokotni trikotnik. Ploščina pravokotnega trikotnika je $S = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2}$.



B2. Naj bo S središče kroga, A in B pa krajišči tetive t. Daljici SA in SB sta polmera kroga. Torej je triklotnik ABS enakokrak. Višina na osnovnico trikotnika ABS razpolovi tetivo t in je dolga 3 cm (razdalja od S do premice). Uporabimo Pitagorov izrek $\left(\frac{t}{2}\right)^2 = r^2 - v^2$ oziroma $\left(\frac{t}{2}\right)^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 - 3^2$. Enačbo uredimo $\left(\frac{t}{2}\right)^2 = 9$. Rešitev enačbe je $t = 6$.



B3. Vzporedni premici imata enak smerni koeficient. Torej mora veljati $m+5 = (m-1)^2$. Enačbo preoblikujemo v $m^2 - 3m - 4 = 0$ in razstavimo $(m-4)(m+1) = 0$. Rešitvi sta $m = 4$ in $m = -1$.

B4. Izraz v prvem oklepaju $1 + \frac{1}{a^2}$ poenostavimo v $\frac{a^2+1}{a^2}$. Upoštevamo definicijo potence z racionalnim eksponentom in poenostavimo izraz $\frac{1}{a}\left(\frac{a^2+1}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{a}{a\sqrt{a^2+1}}$. Poenostavimo oba oklepaja v $\frac{a}{a\sqrt{a^2+1}} \cdot \sqrt{1+a^2} = 1$. Izračunamo $6{,}25^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$ in $0{,}008^{-\frac{2}{3}} = 25$. Izračunamo $\frac{2}{5} \cdot 25 = 10$. Seštejemo in dobimo rezultat 11.

Rešitve nalog za tretji letnik

A1	A2	A3	A4	A5	A6
A	A	E	B	E	E

A1. Neenačbo uredimo $x^2+x-2>0$. Razstavimo levo stran neenačaja $(x+2)(x-1)>0$. Ničli kvadratne funkcije na levi strani neenačaja sta $x_1=-2$ in $x_2=1$. Iz skice odčitamo $x<-2$ ali $x>1$.

A2. Predpis dane funkcije zapišemo v obliki za ničle $f(x)=(x+3)(x+1)$. Ničli sta $x_1=-3$ in $x_2=-1$, začetna vrednost je 3. Upoštevamo, da je za $a>0$ parabola obrnjena navzgor, torej je pravilen odgovor A.

A3. Vstavimo abscise vsake izmed točk v predpis funkcije in izračunamo vrednosti. Ugotovimo, da točka $\left(\frac{1}{3},0\right)$ ne leži na grafu.

A4. Igralno polje igrišča je sestavljeno iz pravokotnika s ploščino $80\ \mathrm{m}^2$ in iz polkroga s ploščino $\frac{\pi\cdot 4^2}{2}=8\pi$. Seštejemo obe ploščini in dobimo ploščino igralnega polja $(80+8\pi)\ \mathrm{m}^2$.

A5. Izračunamo $f(0)=-\frac{1}{2}\cdot 5^0+4=-\frac{1}{2}+4=\frac{7}{2}$.

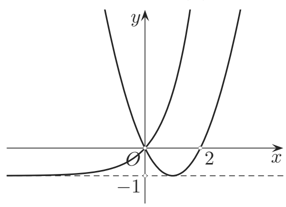
A6. Po Pitagorovem izreku izračunamo dolžino stranskega roba $s=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+v_1^2}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sqrt{30}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{2}+\frac{15}{2}}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$. Izračunamo dolžino diagonale osnovne ploskve kvadrata $d=a\sqrt{2}=3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=6$. Z uporabo kotnih funkcij izračunamo $\cos\alpha=\frac{\frac{d}{2}}{s}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, torej je kot $\alpha=30°$.

B1.

a) Središče mreže je od izstrelišča topa oddaljeno za pozitivno ničlo funkcije f, ki je rešitev enačbe $x-\frac{1}{50}x^2=0$. Rešitvi sta $x_1=0$ in $x_2=50$. Središče mreže je torej oddaljeno 50 m.

b) Največja višina, ki jo Mirko doseže je maksimum dane funkcije f. Izračunamo drugo koordinato temena $q=12{,}5$. Največja višina, ki jo Mirko doseže, je $12{,}5$ m.

B2. Narišemo asimptoto $y=-1$, presečišče z ordinato $(0,0)$ in izračunamo še dodatno točko npr. $(1,2)$ ter narišemo graf eksponentne funkcije. Za kvadratno funkcijo izračunamo ničli $x_1=0$ in $x_2=2$ ter teme $(1,1)$ in narišemo njen graf. Odčitamo presečišče $(0,0)$. Računsko preverimo rešitev: $f(0)=3^0-1=1-1=0$ in $g(0)=0^2-2\cdot 0=0$.



B3. Izračunamo prostornino prizme $V_1=a^2\cdot v=2\ \mathrm{m}^3$. Razlika prostornin $V-V_1==\left(\frac{3}{4}\pi-2\right)\ \mathrm{m}^3\doteq 0{,}3562\ \mathrm{m}^3$ je preostanek vina, ki ga pretočimo v valjasto posodo s prostornino $V_2=\pi r^2\cdot v=\pi r^3$. Iz enačbe izrazimo polmer oziroma višino cisterne $v=r\doteq\doteq\sqrt[3]{\frac{0{,}3562\ \mathrm{m}^3}{\pi}}\doteq 0{,}484$ m. Tako je višina valjaste cisterne 48 cm.

B4. Uporabimo pravila za računanje z logaritmi: $\log_8 2=\frac{1}{3}$, zato je desna stran enačbe enaka $3\log_2(x+1)-\log_2 x$. Na desni strani uporabimo še pravilo za logaritem potence, torej je desna stran enačbe enaka: $\log_2(x+1)^3-\log_2 x$. Razliko preoblikujemo v $\log_2\frac{(x+1)^3}{x}$. Ko enačbo antilogaritmiramo, dobimo $x^2+7=\frac{(x+1)^3}{x}$. Enačbo preoblikujemo in dobimo kvadratno enačbo $3x^2-4x+1=0$. Rešitvi enačbe sta $x_1=1$ in $x_2=\frac{1}{3}$. Celoštevilska rešitev enačbe je 1.

Rešitve nalog za četrti letnik

A1	A2	A3	A4	A5	A6
C	C	D	D	E	E

A1. Pri vsakem primeru določimo amplitudo in osnovno periodo ter ugotovimo, da je pravilni odgovor C.

A2. Uredimo polinom q: $q(x) = 2a - ax^2 + b + 2c - cx = -ax^2 - cx + 2a + b + 2c$. Enačimo koeficiente polinomov $-2 = -a, -3 = -c$ in $1 = 2a + b + 2c$. Izračunamo $a = 2, c = 3$ in $2 \cdot 2 + b + 2 \cdot 3 = 1$, iz česar izračunamo $b = -9$.

A3. Stopnja polinoma je vsota stopenj vseh faktorjev $1 + 2 + 3 + \cdots + 33 = 561$.

A4. Enačbo racionalne funkcije preoblikujemo v obliko $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3}$ in ugotovimo, da je pravilen odgovor D.

A5. V izrazu odpravimo oklepaje in dobimo $5\sin^2 x + 5\cos^2 x = 5(\sin^2 x + \cos^2 x) = 5 \cdot 1 = 5$.

A6. Ugotovimo, da je to aritmetično zaporedje s prvim členom 37 in diferenco 5. Splošni člen je $a_n = 37 + (n-1) \cdot 5 = 32 + 5n = 5(6+n) + 2$. Nobeno izmed navedenih števil nima pri deljenju s 5 ostanka 2, zato je pravilni odgovor E.

B1. Kotne funkcije poljubnih kotov izrazimo s kotnimi funkcijami ostrih kotov: $\sin 650° = \sin(650° - 2 \cdot 360°) = \sin(-70°) = -\sin 70° = -\cos 20°$, $\cos(-520°) = \cos 520° = \cos(520° - 360°) = \cos 160° = -\cos 20°$. Za $\sin\frac{\pi}{2}$ uporabimo adicijski izrek: $\sin\frac{\pi}{12} = \sin 15° = \sin(45° - 30°) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Izračunamo drugi sumand $4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$. Vstavimo podatke v izraz in izraz poenostavimo $\frac{\cos 20° + \cos 20°}{-\cos 20° \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} + 2\sqrt{2} = \frac{2\cos 20°}{-\cos 20° \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} + 2\sqrt{2} = -\frac{2 \cdot 4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}$. Racionaliziramo imenovalec $-\frac{2\cdot 4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} = -\frac{8(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} + 2\sqrt{2}$, krajšamo in dobimo $-2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = -2\sqrt{6}$.

B2. Zapišemo neenačbo $\frac{x-2}{x} > 2x - 4$ in jo uredimo $\frac{x-2}{x} - 2x + 4 > 0$. Levo stran neenačaja razširimo na skupni imenovalec $\frac{x-2-2x^2+4x}{x} > 0$ oziroma $\frac{2x^2-5x+2}{x} < 0$. Izračunamo ničli racionalne funkcije $x_1 = 2$ in $x_2 = \frac{1}{2}$ ter pol $x = 0$. Iz skice odčitamo rešitev $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

B3. Upoštevamo obrestno obrestni račun $G_t = G_1 \cdot r^{t-1}$, pri čemer je $r = 1 + \frac{0{,}5}{100} = 1{,}005$. Zapišemo eksponentno enačbo $1500 = 500 \cdot 1{,}005^{t-1}$, ki jo preoblikujemo v $3 = 1{,}005^{t-1}$. Enačbo logaritmiramo in dobimo $t = \frac{\log 3}{\log 1{,}005} + 1 \doteq 221{,}3$. Prva plača, ki bo večja od 1500 evrov, bo šele čez 222 mesecev. Za izračun povprečne plače moramo vsoto vseh plač deliti s številom plač, to je 222. Uporabimo formulo za vsoto n členov geometrijskega zaporedja in dobimo $S_{222} = 500 \cdot \frac{1{,}005^{222}-1}{1{,}005-1} \doteq 202597{,}76$. Vsoto delimo z 222. Povprečna Žanova plača je torej $912{,}60$ evrov.

B4. Upoštevamo, da je kvocient sosednjih členov konstanten $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$. Dobimo $\frac{3^{-2}}{3^{x^2-4}} = \frac{9^{-x-\frac{1}{2}}}{3^{-2}}$. Dobljeno enačbo preoblikujemo do oblike $\frac{1}{81} = 3^{x^2-4} \cdot 9^{-x-\frac{1}{2}}$ ali $3^{-4} = 3^{x^2-4} \cdot 3^{2(-x-\frac{1}{2})}$. Uredimo desno stran enačbe ter dobimo $3^{-4} = 3^{x^2-2x-5}$. Enačimo eksponenta $x^2 - 2x - 5 = -4$ ter rešimo nastalo kvadratno enačbo $x^2 - 2x - 1 = 0$. Rešitvi enačbe sta $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Rešitev naloge je le $x = 1 + \sqrt{2}$, saj je $1 - \sqrt{2} < 0$.

Rešitve nalog 12. državnega tekmovanja v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Rešitve nalog za prvi letnik

1. Ugotovimo, da je skupna masa Kajinih oziroma Matičevih rib enaka najmanjšemu sku-

pnemu večkratniku števil 144 in 168. Števili razcepimo na prafaktorje, zmnožimo ustrezne faktorje in dobimo maso rib 1008 g. Da dobimo število Kajinih rib, delimo 1008 g s 144 g. Število Matičevih rib pa dobimo tako, da 1008 g delimo s 168 g. Kaja je torej ulovila 7 rib, Matic pa 6 rib. Izračunamo še skupno maso ulovljenih rib, ki je $2 \cdot 1008$ g$= 2016$ g.

2. Uredimo notranji oklepaj $\left(1-\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-1}\right)^{-1} = 3{,}25$, razširimo na skupni imenovalec $\left(1-\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{-1}\right)^{-1} = 3{,}25$. Upoštevamo negativni eksponent $\left(1-\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{-1} = 3{,}25$ in znova razširimo na skupni imenovalec $\left(\frac{x^2+1-x^2}{x^2+1}\right)^{-1} = 3{,}25$. Znova upoštevamo negativni eksponent $\frac{x^2+1}{1} = 3{,}25$, uredimo $x^2 = 2{,}25$ in korenimo. Izračunamo rešitvi $x_1 = 1{,}5$ in $x_2 = -1{,}5$.

3. Zapišemo neenačbo $6\,(x-1) - 2(3x+2(x-1)) > 5(x+1) - 3x - 57$. Odpravimo oklepaje na levi in desni strani neenačbe. Dobimo $6x - 6 - 10x + 4 > 2x - 52$. Izračunamo $-6x > -50$ oziroma $x < \frac{25}{3}$. Za naravna števila $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ in 8 je vrednost prvega izraza večja od vrednosti drugega izraza.

4. Naj bodo neznane količine označene: npr. j pomeni količino jabolk v kg, m pomeni količino mandarin v kg in b pomeni količino banan v kg. Zapišemo zvezo med količinami $j + m + b = 475$ in enačbi $\frac{1}{2}j = 2 \cdot \frac{30}{100}m$ in $b = j - 35$. Rešimo sistem treh enačb s tremi neznankami. Rešitev je $j = 180$ kg, $m = 150$ kg in $b = 145$ kg.

5. Poenostavimo prvi izraz $\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}} - \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{2}{12}} - \frac{2}{3} = \frac{9}{4} - \frac{2}{3} = \frac{19}{12}$. Poenostavimo tudi drugi izraz $\frac{1}{12} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^2\cdot 8}{\frac{1}{125}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^4} = \frac{1}{16} \cdot \frac{\frac{1}{16}\cdot 8}{\frac{1}{125}\cdot\frac{625}{16}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{8}{5} = \frac{2}{15}$. Zapišemo enačbo $\frac{x}{100} \cdot \frac{19}{12} = \frac{2}{15}$. Izračunamo $x = \frac{2\cdot 12}{19\cdot 15} \cdot 100 = 8{,}42$.

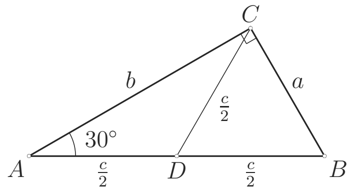
Rešitve nalog za drugi letnik

1. I. način:
Vstavimo vrednosti $a = \sqrt{3}$ in $b = \sqrt{2}$ v dani izraz. Dobimo $\sqrt[4]{\left(\sqrt{3}\right)^{-1} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^3 \cdot \sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{\frac{6\cdot\left(\sqrt{3}\right)^4\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{-2}}{\sqrt{2}}}$. Poenostavimo in dobimo $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{27}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \cdot \frac{3}{\sqrt[6]{2}}$. Racionaliziramo imenovalec in zmnožimo korene $\frac{3\sqrt{2}\,\sqrt[6]{2^5}}{2} = \frac{3\,\sqrt[6]{2^8}}{2}$. Delno korenimo $\frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{2^4} = 3\sqrt[3]{2}$.

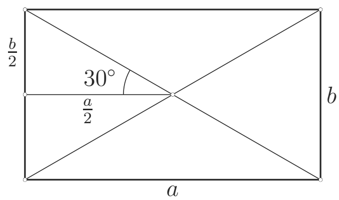
II. način:
Poenostavimo prvi faktor $\sqrt[8]{a^{-2}b^6 \cdot 6}$ in drugi faktor $\sqrt[6]{\frac{6^2a^8b^{-4}}{2}}$. Množimo korena in dobimo $\sqrt[24]{\frac{a^{26}b^2\cdot 6^{11}}{2^4}}$. Vstavimo $a = \sqrt{3}$ in $b = \sqrt{2}$. Dobimo $\sqrt[24]{\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{26}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot 6^{11}}{2^4}} = \sqrt[24]{2^8 \cdot 3^{24}} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} = 3\sqrt[3]{2}$.

2. Upoštevamo, da je ordinata presečišča enaka 0. V enačbi premic vstavimo $y = 0$: $(a-1)x - 5 = 0$ in $ax - 7 = 0$. Iz druge enačbe izrazimo $x = \frac{7}{a}$ in vstavimo v prvo. Dobimo $(a-1)\frac{7}{a} - 5 = 0$, odpravimo ulomek, poenostavimo $7a - 7 - 5a = 0$. Izračunamo $a = \frac{7}{2}$, kar vstavimo v eno izmed enačb premic: npr. $\frac{7}{2}x - 7 = 0$. Izračunamo $x = 2$. Zapišemo koordinati presečišča $P(2, 0)$.

3. Točka D naj bo razpolovišče stranice c. Trikotnik CAD je enakokrak, zato velja $\angle ACD = 30°$ in $\angle CDA = 120°$. Torej je $\angle BDC = 60°$. Ker je tudi trikotnik BCD enakokrak, velja $\angle CBD = \angle DCB = 60°$. To pomeni, da je trikotnik ABC pravokoten ($\gamma = 90°$). S pomočjo kotnih funkcij izračunamo dolžini stranic b in c, npr. $\tan 30° = \frac{a}{b}$ in $\sin 30° = \frac{a}{c}$. Izračunamo $b = \frac{a}{\tan 30°} = 4\sqrt{3}$ cm in $c = \frac{a}{\sin 30°} = 8$ cm.



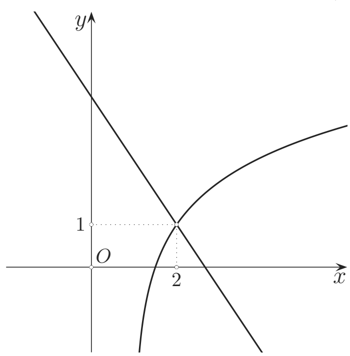
4. Narišemo skico in zapišemo zvezi med dolžinami stranic: $\tan 30° = \frac{b}{a}$ in $2a + 2b = 4$. Izrazimo npr. $b = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ in vstavimo v $2a + 2b = 4$. Dobimo $2a + 2\frac{\sqrt{3}}{3}a = 4$. Izračunamo $a = 3 - \sqrt{3}$ cm in $b = \sqrt{3} - 1$ cm.



5. Izračunamo neznano koordinato točke T, tako da vstavimo $x = 3$ v enačbo premice in rešimo enačbo $2 \cdot 3 - 3y + 15 = 0$. Izračunamo $y = 7$. Koordinato x točke A izračunamo z uporabo formule za razdaljo med točkama oziroma Pitagorovega izreka $d(A, T) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Vstavimo podatke $\left(3\sqrt{5}\right)^2 = (4 - 7)^2 + (x - 3)^2$ in poenostavimo $45 = (-3)^2 + (x - 3)^2$ oziroma $(x - 3)^2 = 36$. Rešimo enačbo in dobimo rešitev $x_1 = 9$ in $x_2 = -3$.

Rešitve nalog za tretji letnik

1. Obe pločevinki imata enako višino. Iz formule za prostornino valja $V = \pi r^2 \cdot v$ izrazimo višino $v = \frac{V}{\pi \cdot r^2}$. Enačimo višini obeh valjev in iz zveze $\frac{V_1}{\pi r_1^2} = \frac{V_2}{\pi r_2^2}$ izračunamo polmer druge pločevinke $r_2 \doteq 3{,}24$ cm. Izračunamo površino spremenjene pločevinke, ki je $P = 2\pi r_2^2 + 2\pi r_2 \cdot v \doteq 2\pi \cdot 3{,}24 + 2\pi \cdot 3{,}24 \cdot 21{,}22 \doteq 498$.
2. Narišemo logaritemsko funkcijo f s predpisom $f(x) = \log_2(x-1)+1$ in linearno funkcijo g s predpisom $g(x) = -\frac{3}{2}x + 4$. Odčitamo rešitev $x = 2$ ter jo računsko preverimo.



3. Izračunamo število okuženih računalnikov v eni uri $N(60) = 30 \cdot e^6 \doteq 12\,102{,}8$. V eni uri je torej okuženih največ 12102 računalnikov. Zapišemo enakost $60\,000 = 30 \cdot e^{0{,}1t}$. Logaritmiramo $0{,}1t \ln e = \ln 2\,000$. Dobimo rešitev $t = \frac{\ln 2\,000}{0{,}1} \doteq 76{,}009$. Da virus okuži $60\,000$ računalnikov je potrebnih najmanj 77 minut.

4. Zapišemo enačbo $(a-1)x^2 + ax - 1 = x - 2$ in jo uredimo $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1 = 0$. Enačba mora imeti eno samo rešitev, zato upoštevamo pogoj $D = 0$. Dobimo enačbo $a^2 - 6a + 5 = 0$. Rešitvi te enačbe sta $a_1 = 1$ in $a_2 = 5$. Izločimo prvo rešitev, saj za $a = 1$ enačba $y = (a-1)x^2 + ax - 1$ ni enačba parabole. Izračunamo koordinati presečišča $M\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$.

5. Dolžino parcele označimo z x in širino z y. Ploščina parcele (ploščina pravokotnika) je $x \cdot y = 1632$. Ograbo sestavljajo vse 4 stranice in prečna ograda: $2x + 3y = 198$. Dobili smo sistem enačb, najlažje ga rešimo z zamenjalnim načinom. Iz prve enačbe izrazimo npr. $y = \frac{1632}{x}$ in vstavimo v drugo enačbo. Množimo z x, dobimo kvadratno enačbo $x^2 - 99x + 2448 = 0$. Dobimo dve rešitvi: $x_1 = 51$ ($y_1 = 32$) in $x_2 = 48$ ($y_2 = 34$).

Rešitve nalog za četrti letnik

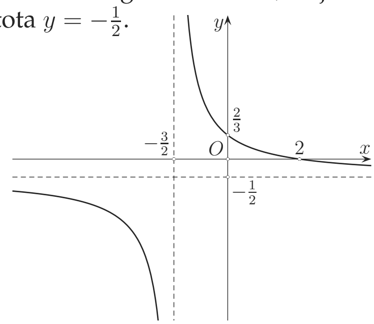
1. **a)** Izračunamo skupno število vseh metov
   $3(x-2) + 2x + 2(x-1) + x + 2 + 2x + 1 + x = 11x - 5$. Zapišemo enačbo $10\,\%(11x - 5)$ oziroma $11x - 5 = 10x$. Rešimo linearno enačbo in dobimo rešitev oz. število šestic $x = 5$. Z izračunanim x lahko nato določimo število metov za posamezno številko: enka je padla 9 krat, dvojka 10 krat, trojka 8 krat, štirica 7 krat in petica 11 krat.

   b) Povprečno število pik izračunamo po formuli za aritmetično sredino $\frac{1\cdot 9 + 2\cdot 10 + 3\cdot 8 + 4\cdot 7 + 5\cdot 11 + 6\cdot 5}{50} = 3{,}32$.

   c) Za posamezno število pik izračunamo velikost središčnega kota: enka: $\frac{9}{50} \cdot 360° = 64{,}8°$, dvojka: $\frac{10}{50} \cdot 360° = 72°$, trojka: $\frac{8}{50} \cdot 360° = 57{,}6°$, štirica: $\frac{7}{50} \cdot 360° = 50{,}4°$, petica: $\frac{11}{50} \cdot 360° = 79{,}2°$ in šestica: $\frac{5}{50} \cdot 360° = 36°$.

2. Upoštevamo $\sin^{-1} x = \frac{1}{\sin x}$ in uredimo imenovalec $\sin x - \sin^{-1} x = \sin x - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin^2 x - 1}{\sin x}$. Uporabimo zvezo med sinusom in kosinusom $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, iz katere izrazimo $\sin^2 x - 1 = -\cos^2 x$. Ulomek preoblikujemo v $\frac{2\cos^2 x}{\frac{-\cos^2 x}{\sin x}} = -2\sin x, \cos x \neq 0$ in $\sin x \neq 0$ oziroma $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ in $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Izraz poenostavimo $-2\sin x - \sin x = -3\sin x$. Izraz nima pomena za $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

3. Poenostavimo predpis funkcije f: $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2(2x+3)} = \frac{-2x+4}{2(2x+3)} = \frac{2-x}{2x+3}$. Izračunamo ničlo $x = 2$, pol $x = -\frac{3}{2}$, vodoravno asimptoto $y = -\frac{1}{2}$ funkcije f in koordinati presečišča grafa z ordinatno osjo $N\left(0, \frac{2}{3}\right)$. Narišemo graf. Premica, ki je vzporedna z x osjo in ne seka grafa, je vodoravna asimptota $y = -\frac{1}{2}$.



4. Ugotovimo, da so števila sedežev v posamezni vrsti členi aritmetičnega zaporedja $a_1 = 15$ in $d = 3$, skupno število sedežev je vsota aritmetičnega zaporedja. Uporabimo formulo $s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$. Vstavimo podatke in dobimo enačbo $870 = \frac{n}{2}(30 + (n-1)\cdot 3)$. Poenostavimo enačbo in dobimo $n^2 + 9n - 580 = 0$. Enačba ima dve rešitvi $n_1 = 20$ in $n_2 = -29$, pri čemer negativna rešitev odpade. Število sedežev v zadnji vrsti je enako $a_{20} = a_1 + (20-1)d = 15 + 19\cdot 3 = 72$. Zapišemo odgovor: Dvorana ima 20 vrst in v zadnji vrsti 72 stolov. Izračunamo zaslužek pri polni zasednosti dvorane z otroki $870 \cdot 9$ evrov $= 7830$ evrov. Rešimo neenačbo $x \cdot 12 > 7830$. Dobimo $x > 652{,}5$. Zapišemo odgovor: Dvorano mora zasesti najmanj 653 odraslih.

5. I. način:
Zapišemo enačbo $2x + 7 = x^4 + 3x^3 + ax^2 + bx + 7$. Enačbo uredimo in dobimo $x^4 + 3x^3 + ax^2 + (b-2)x = 0$. V enačbo vstavimo $x = 1$ in dobimo $1 + 3 + a + b - 2 = 0$ oziroma $a + b + 2 = 0$. V enačbo vstavimo še $x = -4$ in dobimo $256 - 192 + 16a - 4b + 8 = 0$ oziroma $4a - b + 18 = 0$. Rešimo sistem enačb in dobimo $a = -4$ in $b = 2$.
II. način:
Izračunamo koordinate presečišč premice in grafa polinoma $(1, 9)$ in $(-4, -1)$. Koordinate obeh točk vstavimo v predpis za polinom. Dobimo enačbi: $a + b = -2, 8a - 2b = -36$. Rešimo sistem enačb in dobimo $a = -4$ in $b = 2$.

Rešitve nalog 12. področnega tekmovanja v znanju matematike za dijake poklicnih šol

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
A	B	D	B	D	C	D	B	E	C

A1. 5 minut od 45 minut je $\frac{5}{45} = \frac{1}{9}$.

A2. Daljica a je dolga 5 enot, daljica b 8 enot, zato je $a : b = 5 : 8$.

A3. Izraza enačimo: $x \cdot \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$ in rešimo enačbo. Neznanka $x = 1$.

A4. Med 3.25 in 4.00 je 35 minut, med 4.00 in 13.00 je 9 ur, med 13.00 in 13.01 je 1 minuta, skupaj 9 ur in 36 minut.

A5. Decimalno število $8{,}052 = 8 + 0{,}05 + 0{,}002 = 8 + \frac{5}{100} + \frac{2}{1000}$, zato $\square$ nadomestimo s 100.

A6. $\frac{3}{4}$ od velikega pravokotnika je 9 malih pravokotnikov ($\frac{3}{4}$ od 12), $\frac{2}{3}$ od 9 pa je 6 malih pravokotnikov.

A7. Prvi pes, ki se razporeja, lahko izbira med štirimi mesti, drugi med tremi, tretji med dvema in zadnji med enim praznim mestom. Upoštevajoč pravilo produkta $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

A8. Diagram prikazuje trditve:

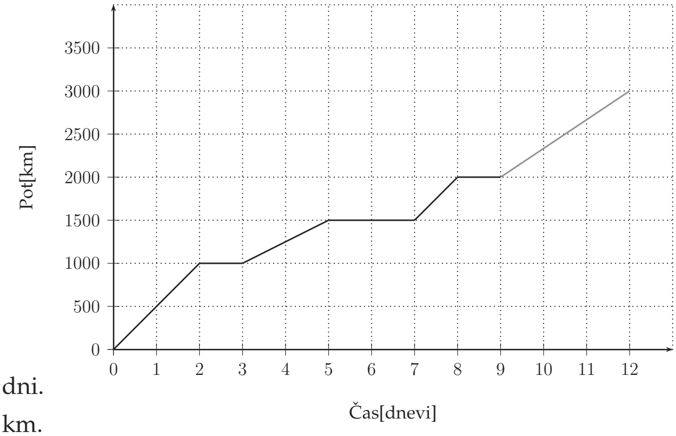
- **A** Oceno 3 je dobilo 9 dijakov.
- **B** 20 dijakov je dobilo oceno najmanj 3.
- **C** 23,3 % dijakov je dobilo oceno 2.
- **D** Izpit je opravljalo 30 dijakov.
- **E** 20 % dijakov je dobilo oceno 4.

Pravilno zapisani sta trditvi pod B in E.

A9. V kocko z robom 24 cm lahko zložimo $4 \times 4 \times 4 = 64$ kock z robom 6 cm.

A10. Vsota kotov $2\alpha + 3\alpha = 90°$. Rešitev enačbe $\alpha = 18°$.

B1. **A.** Dopolnjen graf.



B. Križarjenje je trajalo 12 dni.

C. Ladja je prevozila 3000 km.

D. Ladja je mirovala 4 dni.

B2. Površina kocke brez pokrova $P = 5a^2 = 4500\ \text{cm}^2 = 0{,}45\ \text{m}^2$. Palica je postavljena v lego telesne diagonale z dolžino $D = \sqrt{3a^2} \approx 519$ mm. Prostornina kocke $V = a^3 = 27000\ \text{cm}^3 = 27$ l.

B3. Izraz v oklepaju predstavlja strošek nakupa kilograma moke, treh jogurtov in petih žemljic, ki znaša: $4{,}09$ EUR $= 1{,}08 + 3 \cdot 0{,}52 + 5 \cdot 0{,}29$ EUR. Špela je račun plačala z bankovcem za 10 evrov. Vrnili so ji $10 - 4{,}09 = 5{,}91$ evrov.

Pravilno dopolnjeno besedilo:
Račun je plačala z bankovcem za ______10______ evrov.
Vsak jugort stane ______0,52______ evrov.
Vsaka žemljica stane ______0,29______ evrov.
Kilogram moke stane ______1,08______ evrov.
Špeli so v trgovini vrnili ______5,91______ evrov.

B4. Iz diagrama odčitamo trditvi: 20 dijakov dobi vsaj 31 EUR žepnine in 13 dijakov dobi manj kot 21 EUR žepnine (to je približno 28,9 %).
Povprečna žepnina je $\frac{4\cdot 5{,}5+9\cdot 15{,}5+12\cdot 25{,}5+11\cdot 35{,}5+9\cdot 45{,}5}{45} \approx 28$ EUR.

Rešitve nalog 12. državnega tekmovanja v znanju matematike za dijake poklicnih šol

A1	A2	A3	A4	A5	A6
C	C	D	E	A	A

A1. Potrebno je zbrati 20000 plastenk, saj je $1\ \text{t} = 1000000\ \text{g} = 20000 \cdot 50\ \text{g}$.

A2. Hitrost izračunamo po formuli $v = \frac{s}{t}$, kjer je s razdalja, t pa čas. Iz grafa odčitamo podatke in izračunamo posamične hitrosti:
$v_{Anja} = \frac{1\ \text{km}}{50\ \text{min}} = 0,02\ \frac{\text{km}}{\text{min}}$,
$v_{Biserka} = \frac{1\ \text{km}}{20\ \text{min}} = 0,05\ \frac{\text{km}}{\text{min}}$,
$v_{Ivan} = \frac{3\ \text{km}}{30\ \text{min}} = 0,1\ \frac{\text{km}}{\text{min}}$,
$v_{Joze} = \frac{5\ \text{km}}{50\ \text{min}} = 0,1\ \frac{\text{km}}{\text{min}}$,
$v_{Duska} = \frac{5\ \text{km}}{20\ \text{min}} = 0,25\ \frac{\text{km}}{\text{min}}$. Največjo hitrost ima Duška.

A3. Iz enačbe $\frac{3}{4} \cdot x + 240 = 300$ izračunamo neznano vrednost delovne ure $x = 80$ EUR.

A4. Ker so v enakostraničnem trikotniku vse stranice enako dolge, iz enačbe $2x = x+15$ dobimo, da je $x = 15$. Od tod je stranica a enaka $2x = 30$. Obseg trikotnika je $3 \cdot 30 = 90$.

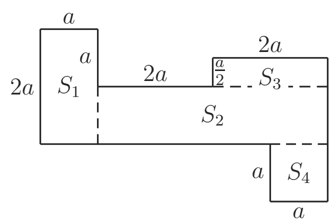
A5. Štiri vrečke po n bonbonov pomeni $4n$. Če zraven dodamo še 5 bonbonov, dobimo izraz $5 + 4n$.

A6. Po analogiji je $\binom{4}{1} = \frac{4}{1} = 4$ in $\binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$. Zato je $\binom{4}{1} + \binom{4}{3} = 4 + 4 = 8$.

B1. Iz enačbe $\frac{12+x+20}{3} = 14$ izračunamo torkov zaslužek $x = 10$ evrov. Od ponedeljka do srede je zaslužil $12 + 10 + 20 = 42$ evrov. Ker je v prvih štirih dneh skupaj zaslužil 50 evrov, je četrtkov zaslužek znašal $50 - 42 = 8$ evrov.
Za 1 h in 15 min $= 1{,}25$ h dela v ponedeljek je prejel 12 evrov. Njegova urna postavka ta dan je bila $\frac{12 \text{ EUR}}{1{,}25 \text{ h}} = 9,6 \ \frac{\text{EUR}}{\text{h}}$. Četrtkova urna postavka je $\frac{1}{5}$ od $4 \ \frac{\text{EUR}}{\text{h}} = 0,8 \ \frac{\text{EUR}}{\text{h}}$. Za 8 evrov zaslužka je Jan v četrtek opravil 10 ur.

B2. Enačba $x + x + (x + 10) = 70$ opisuje prevožene kilometre v prvem tednu. Prvi dan priprav je prevozil $x = 20$ km. Za zadnji teden priprav zapišemo enačbo $z + z + (z + 10) = 250$, $z = 80$. Zadnji dan priprav je Sašo prevozil $z + 10 = 90$ km. Ker vsak teden prevozi 30 km več kot prejšnji teden, je celotno prevoženo število km: $70 + 100 + 130 + 160 + 190 + 220 + 250 = 1120$ km.

B3. Obseg lika je vsota dolžin vseh njegovih stranic: $2a + a + a + 2a + \frac{a}{2} + 2a + \frac{3a}{2} + a + a + a + 4a = 17a$. Tloris dvorišča razdelimo na manjše pravokotnike, naprimer kot na sliki. Ploščina lika je vsota ploščin teh štirih pravokotnikov: $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 2a \cdot a + 4a \cdot a + 2a \cdot \frac{a}{2} + a \cdot a = 2a^2 + 4a^2 + a^2 + a^2 = 8a^2$
Če je $a = 2$ m, je ploščina dvorišča $S = 8 \cdot (2 \text{ m})^2 = 32 \text{ m}^2$.
Ploščina ene ploščice je $20 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} = 400 \text{ cm}^2 = 0,04 \text{ m}^2$.
Za tlakovanje dvorišča bi potrebovali najmanj $\frac{32 \text{ m}^2}{0{,}04 \text{ m}^2} =$ 800 ploščic.



B4. Ker $7^2 + 8^2 \neq 9^2$, trojica števil $7, 8, 9$ ni pitagorejska.
Pitagorejskih števil je neskončno mnogo, npr. $6, 8, 10$.
S ciframi $3, 4, 5$ lahko tvorimo 6 različnih števil, pri čemer se števke ne ponavljajo: 345, 354, 435, 453, 534, 543.
V koordinatnem sistemu narišemo pravokotni trikotnik s katetama 3 in 4 ter hipotenuzo 5 (več možnosti). Težišče trikotnika je presečišče težiščnic; težiščnica je daljica, ki povezuje oglišče z razpoloviščem nasprotne stranice. Koordinate težišča lahko odčitamo ali izračunamo: $T\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$, pri čemer so točke (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) oglišča trikotnika. Npr. za narisan primer je težišče $T\left(-1, \frac{7}{3}\right)$.