Tekmovanja

33. mednarodno matematično tekmovanje mest – pomladanski krog 2011/12

Prva skupina – prvi del

1. Pod enim izmed polj tabele velikosti 8×8 je skrit zlatnik. Pod vsakim izmed ostalih polj je sporočilo, ki pove koliko premikov moramo narediti, da s tega polja pridemo na polje s skritim zlatnikom. V enem premiku se lahko preselimo iz polja na sosednje polje, tj. polje, ki ima skupno stranico z danim poljem. Najmanj koliko sporočil moramo odkriti, da zagotovo najdemo zlatnik?

2. Ali obstaja naravno število, ki ima liho število sodih deliteljev in sodo število lihih deliteljev?

3. V paralelogramu $ABCD$ se krožnici, včrtani v trikotnika ABC in ACD, diagonale AC zapored dotikata v točkah W in Y, krožnici, včrtani v trikotnika BCD in BDA, pa se diagonale BD zapored dotikata v točkah Z in X. Denimo, da so W, X, Y in Z različne točke. Dokaži, da je tedaj $WXYZ$ pravokotnik.

4. V izraz $10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1$ postavimo oklepaje tako, da je vrednost dobljenega izraza naravno število. Določi

   a) največjo možno vrednost tega števila.

   b) najmajšo možno vrednost tega števila.

5. Nosorog ima na trupu 17 lusk, med katerimi so ene vodoravne, druge pa navpične. Ko se nosorog z eno stranjo trupa podrgne ob drevo na tej strani odpadeta bodisi dve vodoravni, bodisi dve navpični luski, hkrati pa se mu na drugi strani trupa pojavita ena navpična in ena vodoravna luska. Če se nosorog ob drevo podrgne s stranjo, ki nima dveh enako obrnjenih lusk, se ne zgodi nič. Ali je možno, da se števila vodoravnih in navpičnih lusk na obeh straneh nosorogovega trupa zamenjajo, ko se nekajkrat podrgne ob drevo?

Druga skupina – prvi del

1. Iz vsakega oglišča konveksnega poliedra izhajajo trije robovi, med katerimi sta vsaj dva enako dolga. Dokaži, da ima tak polieder vsaj tri enako dolge robove.

2. V poljih traku z $2n$ polji so zapored zapisana števila $1, 2, 3, \ldots, n, -n, -n+1, \ldots, -2, -1$. Po traku premikamo žeton, pri čemer ga iz nekaga polja premaknemo za toliko polj, kot zapoveduje število, zapisano v tem polju. Žeton premaknemo v desno, če je število pozitivno in v levo, če je število negativno. Ugotovimo, da pri takem premikanju ne glede na začetno polje, žeton obišče vsa polja na traku. Dokaži, da je tedaj $2n+1$ praštevilo.

3. V koordinatnem sistemu označimo tiste točke s koordinatama $x, y > 0$, kjer se sekata krivulji z enačbama $y = \cos x$ in $x = 100\cos(100y)$. Naj bo a vsota vseh abscis označenih točk, b pa vsota vseh ordinat označenih točk. Določi razmerje $\frac{a}{b}$.

4. Štirikotnik $ABCD$, ki nima nobenega para vzporednih stranic, je včratn v krožnico. Izberimo taki krožnici s tetivama AB in CD, ki se dotikata v neki točki X. Dokaži, da vse možne točke X, ki jih dobimo pri takih izbirah, ležijo na skupni krožnici.

5. Bela trdnjava stoji na polju $b2$, črna trdnjava pa stoji na polju $c4$, šahovnice velikosti 8×8. Igralca začneta izmenično premikati svoji trdnjavi, pri čemer začne igralec z belo trdnjavo. Igralec, ki je na potezi lahko trdnjavo premakne na polje, ki ga ne napada nasprotnikova trdnjava in še ni bilo zasedeno v nobeni od prejšnjih potez. Igralec, ki ne more več narediti svoje poteze, izgubi igro. Kateri od igralcev lahko vedno zmaga, ne glede na poteze njegovega nasprotnika?

Prva skupina – drugi del

1. Sodo število hrušk postavimo v vrsto in ugotovimo, da se masi poljubnih dveh sosednjih hrušk ne razlikujeta za več kot 1 gram. Dokaži, da lahko hruške zapakiramo v pakete z dvema hruškama, ki jih lahko razporedimo v tako vrsto, da se masi poljubnih dveh sosednjih paketov ne razlikujeta za več kot 1 gram.

2. V ravnini označimo 100 točk, tako da nobene tri ne ležijo na isti premici. Množico označenih točk nato razdelimo na 50 parov in točki vsakega od parov povežemo z daljico. Ali je to vedno možno storiti tako, da se poljubni dve izmed 50 dobljenih daljic sekata?

3. V četi stražarjev ima vsak stražar svoj čin, ki je neko naravno število. Stražar s činom N je na straži N dni, zatem pa N dni ne stražari in tako dalje. Za vsak par stražarjev vemo, da je razmerje med činom višjega in činom nižjega vsaj 3. Ali je možno, da je v taki četi vsak dan na straži vsaj en stražar? (Stražarji ne začnejo stražiti nujno istega dne.)

4. V vsakem polju tabele velikosti $n \times n$ je zapisan znak '+' ali znak '−'. V eni potezi lahko izberemo vrsto ali stolpec tabele in spremenimo vse znake v tej vrsti ali tem stolpcu. Izkaže se, da lahko po nekaj korakih na vseh poljih dobimo znak '+'. Dokaži, da lahko tedaj to dosežemo že po največ n korakih.

5. Naj bo p praštevilo. Nabor, ki vsebuje $2+p$ (ne nujno različnih) naravnih števil, imenujmo *zanimiv nabor*, če je vsota poljubnih p števil iz tega nabora deljiva s preostalima dvema številoma. Določi vse zanimive nabore.

6. Banka ima milijon strank, ki imajo vsaka svojo unikatno šestmestno geslo PIN. Doktor Rak pozna seznam vseh strank in sme po enkrat vdreti v PIN vsake stranke. Pri tem zve N mest gesla PIN po svoji izbiri, pri čemer lahko izbiro spreminja pri vsaki od strank. Namen doktorja Raka je izvedeti geslo svojega nasprotnika inšpektorja Ribiča, ki je ena od strank banke. Določi najmanjšo možno vrednost za N, pri kateri lahko doktor Rak zagotovo ugotovi geslo inšpektorja Ribiča.

7. Naj bo AH višina enakostraničega trikotnika ABC. Točka I naj bo središče trikotniku ABH včrtane krožnice, točke L, K in J pa naj bodo zapored središča trikotnikom ABI, BCI in CAI včrtanih krožnic. Določi kot $\angle KJL$.

Druga skupina – drugi del

1. V četi stražarjev ima vsak stražar svoj čin, ki je neko naravno število. Stražar s činom N je na straži N dni, zatem pa N dni ne stražari in tako dalje. Za vsak par stražarjev vemo, da je razmerje med činom višjega in činom nižjega vsaj 3. Ali je možno, da je v taki četi vsak dan na straži vsaj en stražar? (Stražarji ne začnejo stražiti nujno istega dne.)

2. V notranjosti kroga označimo 100 točk, tako da nobene tri ne ležijo na isti premici. Množico označenih točk nato razdelimo na 50 parov in skozi točki vsakega od parov potegnemo premico. Dokaži, da lahko pare vedno izberemo tako, da se poljubni dve izmed 50 dobljenih premic sekata v notranjosti kroga?

3. Dokaži, da za vsako naravno število n obstaja zaporedje celih števil $a_1, a_2, \ldots, a_n$, za katero je pri vsakem celem številu x vrednost izraza

$$(\cdots((x^2 + a_1)^2) + a_2)^2 + \cdots)^2 + a_n$$

deljiva z $2n - 1$.

4. Aleš je v notranjosti vsake od šestih stranskih ploskev enotske kocke označil po eno točko. Zatem je vsak par označenih točk na sosednjih ploskvah povezal z daljico in seštel dolžine vseh dobljenih daljic. Dokaži, da vsota, ki jo je dobil, ni bila manjša od $6\sqrt{2}$.

5. Premica l naj bo tangenta na krožnico, včrtano trikotniku ABC. Premice l_a, l_b in l_c naj bodo zrcalne slike premice l preko simetral treh zunanjih kotov trikotnika ABC. Dokaži, da premice l_a, l_b in l_c določajo trikotnik, ki je skladen s trikotnikom ABC.

6. a) Dano je zaporedje pravokotnikov P_n v ravnini, kjer je ploščina pravokotnika P_n enaka n^2. Ali je s takimi pravokotniki vedno možno prekriti celo ravnino, če se pravokotniki lahko tudi prekrivajo?

   b) Dana je taka množica kvadratov v ravnini, da za vsako število N obstaja nekaj kvadratov iz te množice, katerih skupna ploščina je večja od N. Ali je s takimi kvadrati vedno možno prekriti celo ravnino, če se kvadrati lahko tudi prekrivajo?

7. Jure stoji pred kupom s stotimi kamni. V vsaki potezi lahko izbere enega od kupov in ga razdeli na dva manjša kupa, dokler vsak kamen ne tvori enega kupa. Dokaži, da

   a) v nekem trenutku med kupi obstaja 30 kupov, ki skupno vsebujejo natanko 60 kamnov.

   b) v nekem trenutku med kupi obstaja 20 kupov, ki skupno vsebujejo natanko 60 kamnov.

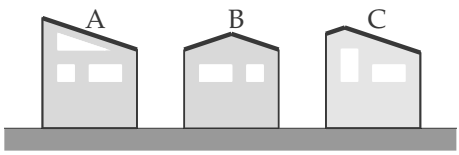
   c) lahko Jure kamne razporeja tako, da v nobenem trenutku ne najdemo 19 kupov, ki skupno vsebujejo natanko 60 kamnov.

---

32. tekmovanje iz fizike za bronasto Stefanovo priznanje – šolsko tekmovanje

8. razred

A1 Tri sosednje hiše na Krivem potu imajo vse enak pravokoten tloris in različno oblikovane strehe. Lastniki hiš zbirajo kapnico s celotne površine svoje strehe vsak v svojem zbiralniku. Sprednje ploskve hiš so v merilu narisane na sliki. Preden je včeraj pričelo deževati, so bili vsi zbiralniki prazni. Katera izjava je pravilna?



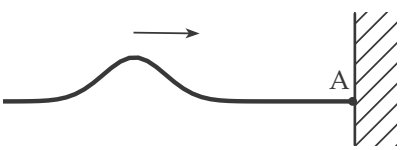
(**A**) Danes je največ kapnice v zbiralniku hiše A.

(**B**) Danes je največ kapnice v zbiralniku hiše B.

(**C**) Danes je največ kapnice v zbiralniku hiše C.

(**D**) Danes je v vseh zbiralnikih enaka količina kapnice.

A2 Vrv je na svojem desnem koncu pripeta na kavelj v steni. Po vrvi potuje v desno val take oblike, kot kaže slika. Na vpetem koncu se val odbije in potem potuje nazaj. Točka A je na vrvi na mestu, kjer se vrv dotika kavlja. Katera izjava pravilno opiše gibanje točke A medtem, ko se val na desnem koncu vrvi odbija?



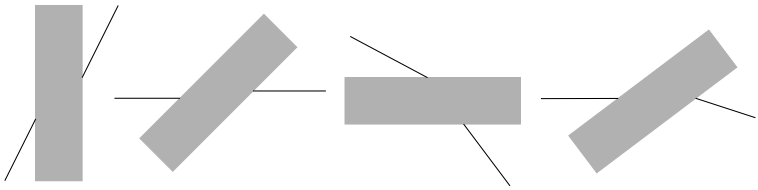
(**A**) Točka A se premakne navzgor.

(**B**) Točka A se premakne navzdol.

(**C**) Točka A miruje.

(**D**) Točka A se premakne v desno in takoj zatem v levo.

A3 Svetlobni žarek prehaja v zraku skozi stekleno ploščico. Katera slika pravilno prikazuje ta prehod?



(**A**) (**B**) (**C**) (**D**)

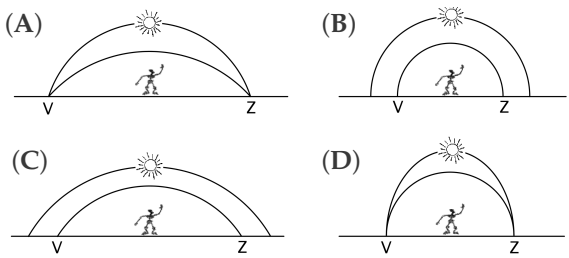
A4 Jan je pravilno napisal svoje ime na list papirja, zdaj pa opazuje sliko napisa v ravnem zrcalu. Zrcalo stoji pravokotno na list papirja in ima spodnji rob vzporeden z vrhom napisa. Katero sliko vidi v zrcalu?

(**A**) (**B**) (**C**) (**D**)

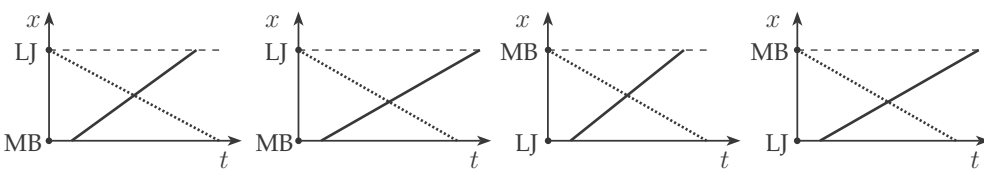
A5 Peter in njegov brat Miha merita dolžino hodnika tako, da postavljata svoja stopala eno pred drugo. Peter nameri 32 dolžin, Miha pa 40 dolžin stopala. Hodnik je dolg 8,00 m. Za koliko centimetrov se razlikujeta dolžini njunih stopal?

(**A**) 8 cm. (**B**) 5 cm. (**C**) 3 cm. (**D**) 2 cm.

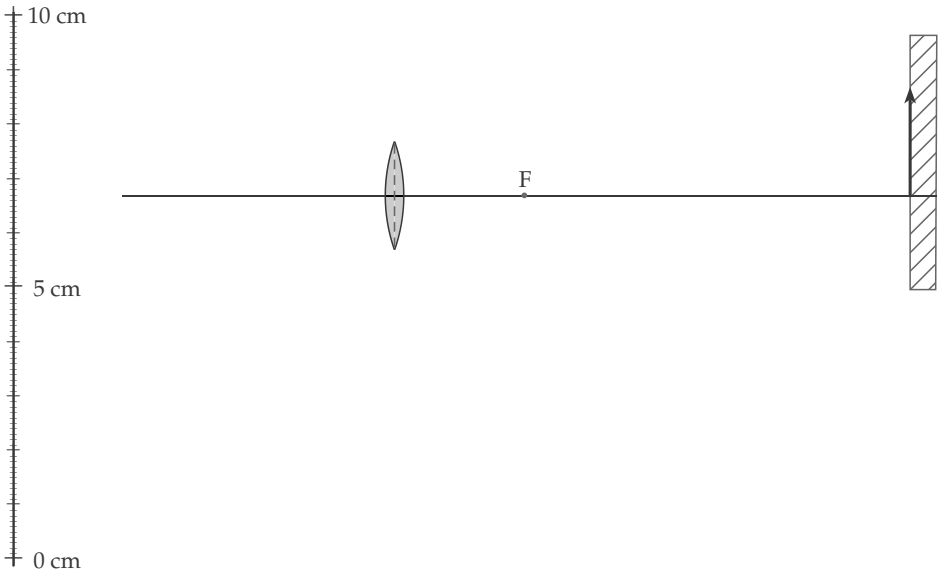
A6 Slavka je oskrbnica na Joštu (vzpetini nad Kranjem). Odloči se, da bo opravila nekaj astronomskih opazovanj. Katera panoramska slika pravilno kaže poti Sonca čez nebo ob spomladanskem enakonočju (ekvinokciju) in poletnem obratu (solsticiju), kot ju opazi Slavka?



A7 Potniški vlak odpelje ob 6:15 iz Ljubljane proti Mariboru, kamor prispe ob 9:00. Pol ure prej odpelje iz Maribora proti Ljubljani tovorni vlak s povprečno hitrostjo 42 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Razdalja med Ljubljano in Mariborom je 156 km. Na kateri sliki grafa pravilno kažeta lego vlakov v odvisnosti od časa?



B1 Po preslikavi predmeta skozi zbiralno lečo nastane na zaslonu 30 cm visoka slika, kot kaže skica. Skica je narisana v merilu.



(a) V katerem merilu je narisana skica?

(b) Kolikšna je goriščna razdalja leče?

(c) Na ustrezno mesto na zgornji skici vriši in označi predmet, katerega slika je na zaslonu.

(d) Na zgornjo skico vriši temenski žarek (žarek, ki gre ob prehodu skozi lečo skozi njeno središče), ki prispeva k nastanku slike. Žarek označi s črko t.

(e) Na zgornjo skico vriši goriščni žarek (žarek, ki gre po prehodu skozi lečo skozi njeno gorišče), ki prispeva k nastanku slike. Žarek označi s črko g.

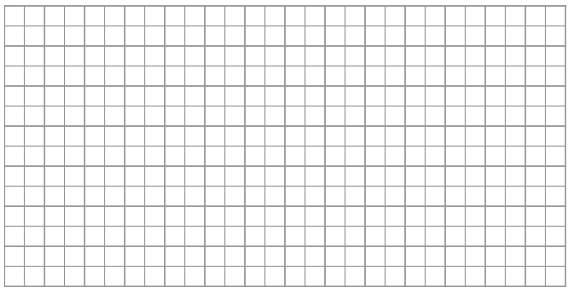
B2 Mojca se ob 8:00 odpelje od doma na obisk k babici, ki živi 120 km daleč. Skoraj celotno pot prevozi po avtocesti. Po 80 km vožnje s stalno hitrostjo 120 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ se na počivališču ustavi za 20 minut, nato pa se v naslednje pol ure pripelje do babice.

(a) Koliko minut se Mojca vozi od doma do počivališča?

(b) Koliko je ura, ko Mojca prispe k babici?

(c) Kolikšna je povprečna Mojčina hitrost na celotni poti od doma do babice? Zapiši jo v enoti $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

(d) Nariši graf poti v odvisnosti od časa $s_{\mathrm{M}}(t)$, ki kaže, kako Mojčina prevožena pot narašča s časom od doma do babice. Predpostavi, da se Mojca tudi po odhodu s počivališča vozi enakomerno.



(e) Mojčin brat Borut se odpravi od doma 10 minut za Mojco, k babici pa prispe 10 minut pred njo. Borut se ne ustavi na počivališču. S kolikšno povprečno hitrostjo vozi Borut? Zapiši jo v enoti $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

(f) V isti koordinatni sistem nariši graf poti v odvisnosti od časa $s_{\mathrm{B}}(t)$, ki kaže, kako Borutova prevožena pot narašča s časom od doma do babice. Predpostavi, da se Borut giblje enakomerno.

(g) Koliko je Mojca oddaljena od babice, ko jo Borut prehiti?

(h) Izračunaj, koliko je takrat ura.

---

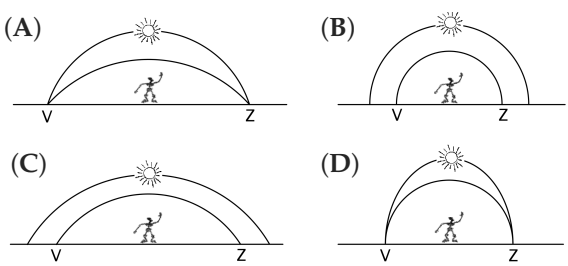
9. razred

A1 Na mizi stojijo posode, ki so vse enako velike, imajo enako obliko in sobno temperaturo. Prva je izdelana iz kovine, druga iz lesa in tretja iz stiroporja. V vsako od njih postavimo enako kocko ledu. V kateri posodi se kocka ledu tali najhitreje?

(**A**) V kovinski. (**B**) V leseni.

(**C**) V stiroporni. (**D**) Vse kocke ledu se talijo enako hitro.

A2 Slavc je oskrbnik na Joštu (vzpetini nad Kranjem). Odloči se, da bo opravil nekaj astronomskih opazovanj. Katera panoramska slika pravilno kaže poti Sonca čez nebo ob spomladanskem enakonočju (ekvinokciju) in poletnem obratu (solsticiju), kot ju opazi Slavc?



A3 Martin vrže navpično navzgor kamen z maso 0,2 kg. Po 4 s kamen leti mimo iste višine, s katere ga je Martin vrgel. Kolikšna je bila njegova začetna kinetična energija?

(**A**) 2 J. (**B**) 4 J. (**C**) 40 J. (**D**) 80 J.

A4 Leta 1969 je na Luni pristal Apollo 11. Masa Apolla 11 je bila v primerjavi z maso Lune majhna. Kolikšna gravitacijska sila Zemlje je delovala na Apolla takoj zatem, ko se je Apollo ob vzletu odlepil od Zemljine površine?

(**A**) Enaka nič.

(**B**) Manjša kot malo pred pristankom Apolla 11 na Luni.

(**C**) Enaka kot malo pred pristankom Apolla 11 na Luni.

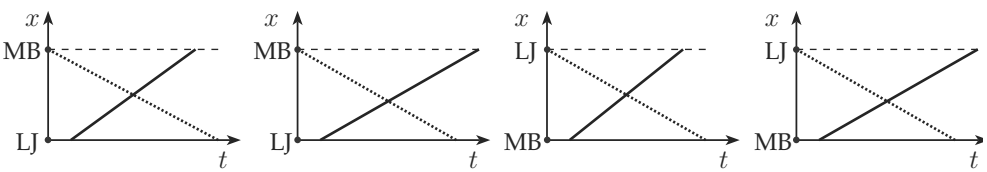
(**D**) Večja kot malo pred pristankom Apolla 11 na Luni.

A5 Kolesarka Špela se giblje enakomerno s hitrostjo 5 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Kolesar Jaka spelje in se giblje enakomerno pospešeno do trenutka, ko doseže hitrost 10 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Kolikšno pot prevozi Špela v primerjavi z Jakom, medtem ko Jaka pospešuje?

(**A**) Enako. (**B**) Pol krajšo.

(**C**) Dvakrat tolikšno. (**D**) Odvisno od trenja in upora.

A6 Potniški vlak odpelje ob 6:15 iz Ljubljane proti Mariboru, kamor prispe ob 8:59. Pol ure prej odpelje iz Maribora proti Ljubljani tovorni vlak s povprečno hitrostjo 42 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Razdalja med Ljubljano in Mariborom je 156 km. Na kateri sliki grafa pravilno kažeta lego vlakov v odvisnosti od časa?



(**A**) (**B**) (**C**) (**D**)

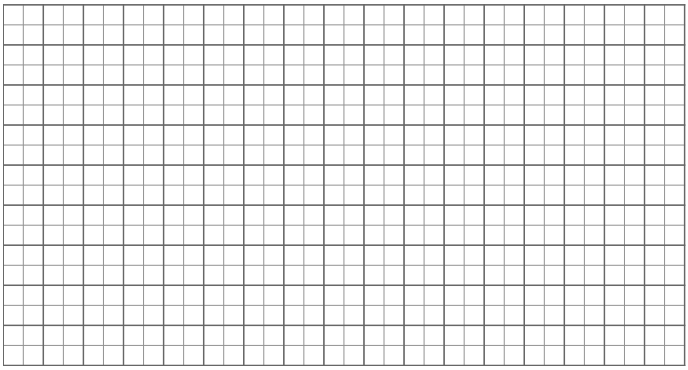
B1 V soboto zvečer je v Solkanu odbojkarska tekma med Salonitom in Krko. Igralci Krke se v 170 km oddaljeni Solkan odpeljejo z dvema kombijema. Prvi kombi odpelje iz Novega mesta ob 15:00. Po 95 km vožnje s povprečno hitrostjo 114 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ se na počivališču ustavi za 20 minut, nato pa v naslednjih 60 minutah pripelje v Solkan.

(a) Koliko minut vozi prvi kombi od Novega mesta do počivališča?

(b) Ob kateri uri prispe v Solkan?

(c) Kolikšna je povprečna hitrost prvega kombija na njegovi celotni poti od Novega mesta do Solkana? Hitrost izrazi v enoti $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

(d) Nariši graf $s_1(t)$, ki kaže, kako prevožena pot prvega kombija narašča s časom od Novega mesta do Solkana.



(e) Drugi kombi se odpravi iz Novega mesta 10 min za prvim, v Solkan pa prispe 20 min pred njim. Drugi kombi se ne ustavi na počivališču. S kolikšno povprečno hitrostjo vozi drugi kombi? Hitrost izrazi v enoti $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

(f) V isti koordinatni sistem nariši graf $s_2(t)$, ki kaže, kako prevožena pot drugega kombija narašča s časom od Novega mesta do Solkana. Predpostavi, da drugi kombi vozi enakomerno.

(g) Koliko sta kombija oddaljena od Solkana, ko drugi dohiti prvega?

(h) Izračunaj, koliko je tedaj ura.

(i) S kolikšno hitrostjo bi moral drugi kombi nadaljevati pot od njunega srečanja, da bi v Solkan prispela hkrati? Prvi kombi bi vozil enako hitro kot prej.

B2 Letala na letalonosilkah vzletajo tako, da letalskim motorjem pri pospeševanju letala na kratkih vzletnih stezah pomagajo s katapultom. Za vzlet potrebuje letalo vzletno hitrost 288 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Predpostavi, da je pospešek letala na vzletni stezi stalen. Upor in trenje zanemari.

(a) S kolikšnim pospeškom mora letalo pospeševati, če je vzletna steza na letalonosilki dolga 100 m? Pospešek zapiši v enoti $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

(b) S kolikšno povprečno silo morajo letalski motorji in katapult pospeševati letalo, če je njegova masa 17 t?

(c) S kolikšno povprečno silo mora katapult vleči letalo, če ima letalo dva motorja, vsakega s potiskom 45 kN?

(d) Kolikšno delo opravi katapult na letalu pri pospeševanju?

(e) Kolikšen je pospešek letala, če ga pri vzletu potiskajo le letalski motorji?

(f) Najmanj kolikšna mora biti dolžina vzletne steze za isto letalo na kopnem, kjer nimajo katapulta?

Rešitve nalog 33. mednarodnega matematičnega tekmovanja mest

Prva skupina – prvi del

1. Razkriti moramo najmanj tri polja, saj nobeno sporočilo ne more enolično določati polja z zlatnikom. Dokažimo, da lahko zlatnik vedno najdemo najkasneje v treh poizkusih. Odkrijmo najprej vogalni polji spodaj levo in spodaj desno in denimo, da zlatnika ni pod nobenim od teh dveh polj. Denimo, da je na sporočilu v levem vogalnem polju L število m, na sporočilu v desnem vogalnem polju D pa število n. Tedaj se je treba s polja L premakniti za m_1 polj navpično in m_2 polj v desno, da pridemo do polja Z, kjer se skriva zlatnik s polja D pa moramo do polja Z narediti n_1 premikov navpično in n_2 premikov v levo. Jasno je, da velja $n_1 = m_1$ in $m_2 + n_2 = 7$, poleg tega pa veljata še zvezi $m = m_1 + m_2$ in $n = n_1 + n_2$. Ni se težko prepričati, da iz teh štirih enačb lahko določimo števila m_1, m_2, n_1 in n_2, s čimer je določeno polje, kjer se skriva zlatnik.

2. Vse delitelje naravnaga števila n lahko razdelimo v take pare različnih števil $k \neq l$, da je produkt $k \cdot l$ enak n, razen v primeru, ko je število n popolni kvadrat in $\sqrt{n}$ nima ustreznega para. Denimo, da obstaja število n, ki ima liho mnogo sodih deliteljev in sodo mnogo lihih deliteljev. Tedaj ima skupno liho mnogo vseh deliteljev, od koder po prejšnjem premisleku sledi, da je število n popolni kvadrat, torej oblike $n = m^2$. Naj bo $m = 2^k \cdot l$, kjer je l liho število. Potem je $n = 2^{2k} l^2$, kar pomeni, da so lihi delitelji števila n hkrati lihi delitelji števila l^2. Od prej vemo, da ima popolni kvadrat l^2 liho mnogo vseh deliteljev, ki pa so hkrati tudi liha števila, saj je l^2 liho število. Od tod sledi, da n ne more imeti sodo mnogo lihih deliteljev.

3. Denimo najprej, da je $ABCD$ romb. Tedaj se diagonali sekata v skupnem razpolovišču S in velja $W = X = Y = Z = S$. Torej $ABCD$ ni romb ter nobena od točk W, X, Y in Z ne sovpada s skupnim razpoloviščem diagonal AC in BD, zato so W, X, Y in Z štiri različne točke. Zaradi simetrije velja $|AW| = |CY|$ in $|BX| = |DZ|$, od koder sklepamo, da se tudi WZ in XZ razpolavljata, kar pomeni, da je $WXYZ$ paralelogram. Denimo, da se krožnica, včratna trikotniku ABC, dotika stranic AB in BC zapored v točkah P in Q in predpostavimo, da je točka W bližje oglišču A točka Y pa bližje oglišču C. Od tod sledi

$$|WY| = |CW| - |CY| = |CW| - |AW| = |CQ| - |AP| = |CB| - |AB|.$$

   Na enak način ugotovimo še $|XZ| = |AD| - |AB| = |WY|$, torej je $WXYZ$ paralelogram z enako dolgima diagonalama, zato je $WXYZ$ res pravokotnik.

4. a) Velja

$$10 : (((((((9 : 8) : 7) : 6) : 5) : 4) : 3) : 2) : 1 = \frac{10 \cdot 8!}{9},$$

   kar je očitno največja možna vrednost, saj je število 9 ne glede na postavitev oklepajev v imenovalcu dobljenega ulomka.

   b) Ker je 7 edino med števili v izrazu, ki je deljivo s 7, mora nastopati v števcu iskanega ulomka in je tako vrednost izraza vsaj 7. Ker je

$$(10 : 9) : ((8 : 7) : (6 : ((5 : 4) : (3 : 2)))) : 1 = 7,$$

je 7 res najmanjša možna vrednost.

5. Naj bodo a, b, c in d zapored števila vodoravnih lusk na levi strani, navpičnih lusk na levi strani, vodoravnih lusk na desni strani in navpičnih lusk na desni strani. Denimo, da se v obeh začetnih parih (a, b) in (c, d) zamenjata komponenti, ko se nosorog nekajkrat podrgne ob drevo. Vsoti $a + b$ in $c + d$ se ob tem ne spremenita. Izločimo lahko drgnjenja, kjer se razporeditev lusk ne spremeni. Tedaj se vsoti $a + b$ in $c + d$ spremenita za 2 ob vsakem drgnjenju, zato se mora nosorog ob drevo podrgniti tolikokrat z ene kot z druge strani, če naj oba para zamenjata komponenti. Recimo, da se nosorog n-krat podrgne po vsaki strani. Če posplošeno dopustimo tudi negativni vsoti, lahko opazujemo primer, ko se nosorog izmenično drgne po eni in drugi strani. Ko se nosorog enkrat podrgne po levi in enkrat po desni strani, se spremeni parnost vseh štirih števil a, b, c in d. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da je bila vsota $a + b$ na začektu liha, vsota $c + d$ pa zato soda. Če je n liho število, se parnost obema štaviloma c in d spremeni, torej bodisi iz para lihih števil dobimo par sodih števil, bodisi iz para sodih števil dobimo par lihih števil. Števili c in d se tako nista mogli zamenjati. Če je n sodo število, pa se ohrani parnost obeh števil v paru a in b, med katerima je eno liho, drugo pa sodo, torej se v tem primeru števili a in b nista zamenjali.

   S tem smo dokazali, da se željena prerazporeditev lusk ne more primeriti.

Druga skupina – prvi del

1. Naj bo v število oglišč in e število robov danega poliedra. Ker vsako oglišče leži na natanko treh robovih in vsak rob vsbuje natanko dve oglišči, velja $3v = 2e$. Denimo, da dani polieder ne premore treh robov enake dolžine. Tedaj iz vsakega oglišča izhajata dva robova enake dolžine, ki je različna od dolžine vseh ostalih robov poliedra. Torej ima polieder vsaj $2v$ robov, od koder dobimo protislovno zvezo $3v = 2e \geq 4v$.

2. Recimo, $2n + 1$ ni praštevilo in je $p < 2n + 1$ nek njegov prafaktor. Naj bo $n = kp$. Prepričajmo se, da so polja označena z večkratniki števila p enakomerno razporejejna vzdolž traku. Na levi polovici je razmik med poljema z oznakama mp in $(m + 1)p$ enak p, podobno pa velja tudi na desni polovici traku. Število n ni deljivo s p, ker je s p deljivo število $2n + 1$ in je zato število $2n$ tuje p. Zapišimo $n = lp + r$, kjer sta l in r naravni števili ter $0 < r < p$. Tedaj je polje z oznako lp zadnje polje z leve polovice traku, katerega oznaka je deljiva s p, polje $-lp$ pa prvo polje z desne polovice traku, katerega oznaka je deljiva s p. Razmik med tema dvema poljema je

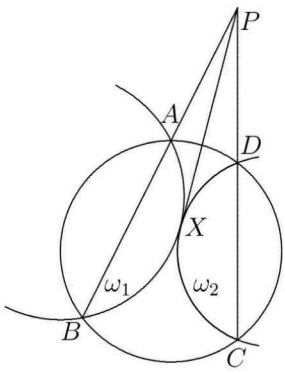
$$2r + 1 = 2(n - lp) + 1 = (k - l)p.$$

   Velja $2r < 2p$, torej je $2r + 1 \leq 2p$. Ker je $2r + 1$ liho število, je $2r + 1 < 2p$, od koder sledi $2r + 1 = p$. S tem smo ugotovili, da so polja, katerih oznake so deljive s p enakomerno razporejena. Žeton, ki na začetku leži na polju označenim z večkratnikom p, lahko obišče le polja, katerih oznake so deljive s p in ne vseh polj na traku, kot predpostavljamo.

3. Označimo $X = \frac{x}{10}$ in $Y = 10y$. Tedaj enačbi grafov preideta v simetrični par $Y = 10\cos(10X)$ in $X = 10\cos(10Y)$. Koordinati X in Y sta pozitivni natanko tedaj, ko sta pozitivni koordinati x in y. Naj bo A vsota vseh pozitivnih vrednosti koordinat X in B vsota vseh pozitivnih vrednosti koordinat Y. Potem velja $A = \frac{a}{10}$ in $B = 10b$. Iz simetrije sledi, da je $A = B$, od koder dobimo

$$\frac{a}{b} = \frac{10a}{\frac{B}{10}} = 100.$$

4. Označimo opisani krožnici s tetivama AB in CD zapored z ω_1 in ω_2 (glej sliko), točka X pa naj bo njuno dotikališče. Naj bo P presečišče premic AB in CD. Tedaj leži P izven krožnice, očrtane štirikotniku $ABCD$ in zunaj krožnic ω_1 in ω_2. Denimo, da premica PX poleg točke X krožnici ω_1 in ω_2 seka še zapored v točkah Y_1 in Y_2. Potem velja $|PA||PB| = |PC||PD| = k$, $|PA||PB| = |PX||PY_1|$ in $|PC||PD| = |PX||PY_2|$, od koder sledi $Y_1 = Y_2$. Torej je $Y_1 = Y_2 = X$, zato vse možne točke X, ki zadoščajo zvezi $|PX|^2 = k$, ležijo na krožnici s središčem v P.



5. Dokažimo, da igralec s črno trdnjavo premore zmagovalno strategijo. Oznake vrstic šahovnice razporedimo v pare $R_1 = (1, 3)$, $R_2 = (2, 4)$, $R_3 = (5, 7)$ in $R_4 = (6, 8)$, oznake stolpcev pa v pare $C_1 = (b, c)$, $C_2 = (d, e)$, $C_3 = (f, g)$ in $C_4 = (h, a)$. Nato v pare razporedimo še vsa polja šahovnice, tako da dve polji tvorita par, če sta v dveh različnih vrsticah, ki tvorita nek par R_i in hkrati v dveh različnih stolpich, ki tvorita nek par C_j. Začetni poziciji obeh trdnjav tako tvorita enega od takih parov. Strategija črnega je taka, da svojo figuro premakne na polje, ki s poljem, kamor je svojo trdnjavo prestavil beli, tvori par. Recimo, da je beli premaknil trdnjavo s polja X na polje Y, ki tvori par s poljem W. Črna trdnjava stoji tedaj na polju Z, ki s poljem X tvori par. Tedaj polje W zagotovo še ni bilo zasedeno, saj bi bilo v nasprotnem primeru že zasedeno tudi polje Y na katero se je premaknila bela trdnjava. Če sta polji X in Y v isti vrstici, sta v isti vrstici tudi polji Z in W, zato se črni lahko preseli na polje W, če pa sta X in Y v istem stolpcu, sta v istem stolpcu tudi polji Z in W, zato se črni lahko tudi tedaj preseli na polje W. Ker sta polji Z in W tako v različnih vrsticah, kot tudi v različnih stolpcih, bela trdnava na polju Z ne napada črne trdnjave na polju W. Ugotovili smo, da lahko na ta način črni vedno naredi naslednjo potezo in zato na koncu zmaga.

5. Naj bo $a_1, a_2, \ldots, a_{p+2}$ nek zanimiv nabor. Če delimo vsa števila tega nabora z njihovim največjim skupnim deliteljem, dobimo zanimiv nabor z največjim skupnim deliteljem 1, zato predpostavimo, da je tak že začetni nabor. Označimo $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_{p+2}$. Za vsak $1 \leq k \leq p+2$ število a_k deli razliko $S - a_j$, za vsak $j \neq k$, torej a_k deli $(p+1)S - (S - a_k) = pS - a_k$, kar pomeni, da a_k deli pS. Ločimo dva primera.

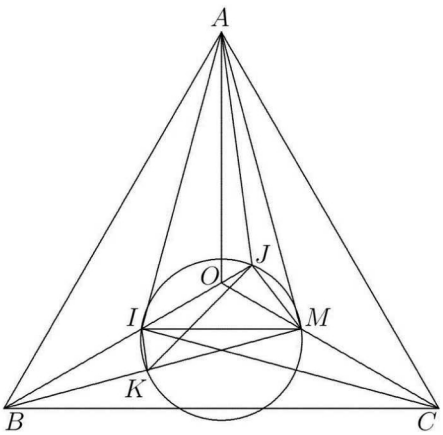
   Primer 1: Nobeden od členov a_k ni deljiv s p. Potem vsak a_k deli S in zato za vsak $j \neq k$ deli a_j, ker po predpostavki deli $S - a_j$. Tedaj so vsi členi nabora enaki. Po predpostavki so vsi členi nabora enaki 1.

   Primer 2: Vsaj en od členov a_k je deljiv s p. Po predpostavki niso vsi členi nabora deljivi s p, zato lahko člene prerazporedimo tako, da a_k ni deljiv s p za $1 \leq k \leq n$ in je a_k deljiv s p za $n+1 \leq k \leq p+2$, kjer je $n \leq p+1$. Denimo, da je $n \leq p$ in naj bo $T = a_1 + \cdots a_n$. Če T ni deljivo s p, vsota $a_1 + \cdots + a_p$ ni deljiva z a_{p+2}. Če je T deljivo s p, vsota $a_2 + \cdots + a_{p+1}$ ni deljiva z a_{p+2}. To pomeni, da je $n = p+1$, zato je a_{p+2} edini člen, ki je deljiv s p. Če uporabimo premislek iz Primera 1 za $k, j \leq p+1$, dobimo $a_1, a_2, \ldots, a_{p+1} = 1$ in zato $a_{p+2} = p$.

   Vsi zanimivi nabori so tako oblike $a_1 = a_2 = \cdots = a_{p+1} = d$ in $a_{p+2} = d$ ali $a_{p+2} = dp$, kjer je d poljubno naravno število.

6. Za $N = 3$ lahko doktor Rak pogleda prva tri mesta PIN gesla inšpektorja Ribiča, pri vseh otalih klientih banke pa zadnja tri mesta njihovih PIN gesel. Ker se mora vsaka oblika druge polovice gesla PIN pojaviti tisočkrat, iz tega lahko ugotovi tudi zadnja tri mesta PIN gesla inšpektorja Ribiča. Za $N \leq 2$, lahko Rak direktno ugotovi le dve mesti Ribičevega gesla PIN, za vsako ostalo mesto pa mora pregledati to mesto pri vseh ostalih klientih, torej lahko ugotovi kvečjemu štiri mesta Ribičevega gesla PIN.

7. Ker je K središče očrtane krožnice trikotnika BCI, velja $\angle BKI = 90° + \frac{1}{2}\angle BCI = 97{,}5°$. Naj bo O središče trikotnika ABC in M zrcalna slika točke I preko premice AO. Potem točka K leži na premici BM. Velja $\angle MAJ = 7{,}5° = \angle OAJ$. Ker velja $\angle AOJ = 60° = \angle MOJ$, je točka J središče očrtane krožnice trikotnika MAO. Od tod sledi, da je $\angle MJO = 90° + \frac{1}{2}\angle MAO = 97{,}5° = \angle BKI$, zato je $IJMK$ tetivni štirikotnik in $\angle IJK = \angle IMK = 15°$. Ker leži točka L simetrično točki K preko premice BO, dobimo $\angle KJL = 2\angle IJK = 30°$.



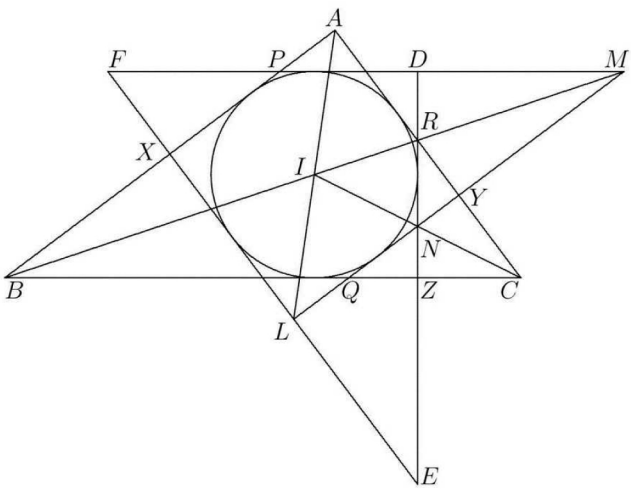
5. Označimo z I središče trikotniku ABC včrtane krožnice in si oglejmo zrcalne slike premice l preko simetral notranjih kotov trikotnika ABC. Zrcalne slike so tako enake zrcalnim slikam preko simetral zunanjih kotov. Denimo, da premica l seka premice AI, BI in CI zapored v točkah L, M in N. Privzamemo lahko, da premica l seka stranici BC in AC zapored v točkah Q in Y. Predpostavimo, da premica l_a seka premice l_b, l_c in AB zapored v v točkah F, E in X, premica l_b seka premici l_c in AB zapored v točkah D in P, premica l_c pa naj seka premici BC in AC zapored v točkah Z in R. Zaradi simetrije preko premice BM dobimo $\angle BQM = \angle BPM$, zaradi simetrije preko premice CN pa velja $\angle CQN = \angle CRN$. Sledi

$$\angle ARD = \angle CRN = \angle CQN = 180^\circ - \angle BQM = 180^\circ - \angle BPM = \angle APD,$$

kar pomeni, da je $ADRP$ tetivni štirikotnik. Od tod sledi $\angle FDE = \angle CAB$. Zaradi simetrije preko BM velja $\angle AXL = \angle AYL$, simetrija preko CN pa nam pove, da je $\angle CYN = \angle CZN$. Od tod izpeljemo

$$\angle BZE = \angle CZN = \angle CYN = 180^\circ - \angle AYL = 180^\circ - \angle AYL = \angle BXE.$$

To pomeni, da je $BEZX$ tetivni štirikotnik, od koder sledi $\angle DEF = \angle ABC$. Ugotovili smo, da sta trikotnika ABC in DEF podobna ter imata skupno včrtano krožnico. Od tod sledi željena skladnost teh trikotnikov.



6. a) Denimo, da je pravokotnik P_n velikosti $n^2 2^n \times \frac{1}{2^n}$. Prepričajmo se, da s takimi pravokotniki ne moremo prekriti niti kroga K s polmerom 1. Jasno je, da je presek $S_n = K \cap P_n$ vsebovan v nekem pravokotniku velikosti $2 \times \frac{1}{2^n}$, torej je ploščina S_n manjša od $\frac{1}{2^{n-1}}$. Od tod sledi, da je vsota ploščin vseh S_n manjša od $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots = 2 < \pi$.

b) Denimo najprej, da obstaja tako pozitivno število a, da med danimi kvadrati najdemo neskončno mnogo takih, ki imajo stranico dolžine vsaj a. Tedaj lahko ravnino razrežemo na kvadratno mrežo s polji velikosti $a \times a$ in jo iz nekega začetnega polja 'spiralno' pokrijemo z obstoječim neskončnim naborom.

Predpostavimo sedaj nasprotno, da tako pozitivno število a ne obstaja. Tedaj za vsak $a > 0$ obstaja le kočno mnogo kvadratov s stranico dolžine vsaj a, zato lahko dolžine stranic vseh kvadratov razvrstimo v padajoče zaporedje $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$. S primernim raztegom lahko dosežemo, da je $a_1 < 1$. Naj bo $Q_1, Q_2, \ldots$ dan nabor kvadratov, kjer je Q_i velikosti $a_i \times a_i$ za vsak $i \in \mathbf{N}$. Ravnino razrežimo na polja velikosti 1×1, ki jih znova 'spiralno' razvrstimo v zaporedje $P_1, P_2, \ldots$ in jih poskušamo zapored prekrivati z našim naborom kvadratov. Postavimo najprej kvadrat Q_1 v levi spodnji vogal polja P_1. Nato desno poleg kvadrata Q_1 na spodnji rob polja P_1 dodamo še kvadrat Q_2 in tako dalje. Na ta način lahko prekrijemo spodnji rob polja P_1, saj obstaja tako število k_1, da je $1 \leq a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{k_1}^2 < a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1}$ in zato kvadrati $Q_1, \ldots, Q_{k_1}$ prekrijejo spodnji rob polja P_1. Naj bo $b_1 = a_{k_1}$. Tedaj smo na opisani način prekrili spodnji trak kvadrata P_1 višine b_1. Nato s kvadrati $Q_{k_1+1}, Q_{k_1+2}, \ldots, Q_{k_2}$ prekrijemo naslednji spodnji trak preostanka kvadrata P_1 (tj. pravokotnika velikosti $1 \times (1 - b_1)$), kjer ima prekriti trak višino $b_2 = a_{k_2}$. Na ta način v kvadratu P_1 prekrivamo še trakove višin $b_3, b_4, \ldots$. Dokažimo, da obstaja tak indeks h, da je $b_1 + b_2 + \cdots + b_h \geq 1$, torej kvadrati $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{k_h}$ prekrivajo cel kvadrat P_1. Denimo, da tak indeks h ne obstaja. To pomeni, da za vsak $h \in \mathbf{N}$ velja

$$2 > 2(b_1 + b_2 + \cdots + b_h) \geq b_1(a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \cdots + a_{k_2}) +$$
$$+ b_2(a_{k_2+1} + a_{k_2+2} + \cdots + a_{k_3}) + \cdots + b_h(a_{k_h+1} + a_{k_h+2} + \cdots + a_{k_{h+1}}) \geq$$
$$\geq a_{k_1+1}^2 + a_{k_1+2}^2 + \cdots + a_{k_{h+1}^2}.$$

Prišli smo do protislovja, saj je zadnja vsota po predpostavki navzgor neomejena.

7. a) V nekem trenutku je pred Juretom 70 kupov kamnov. Vsaj 40 izmed teh kupov vsebuje natanko en kamen, saj bi v nasprotnem primeru kupi vsebovali skupno vsaj $39 + 2 \cdot 39 = 101$ kamen. Če odmislimo teh 40 kupov z enim kamnom, preostalih 30 kupov vsebuje skupaj natanko 60 kamnov.

b) Nabor k kupov imenujmo *dober nabor*, če teh k kupov skupaj vsebuje natanko $2k + 20$ kamnov. Trdimo, da za $k \geq 23$ dober nabor bodisi vsebuje kup z dvema kamnoma, bodisi dva kupa s po enim kamnom. V nasprotnem primeru, bi imeli v nekem dobrem naboru skupno vsaj $1 + 3(k - 1) = 3k - 2 > 2k + 20$ kamnov. Vsako razbitje prvotnega kupa kamnov na 40 kupov predstavlja dober nabor za $k = 40$, saj je $2 \cdot 40 + 20 = 100$. Iz tega nabora nastane dober nabor z 39 kupi, če bodisi odmislimo en kup z dvema kamnoma, bodisi odmislimo dva kupa s po enim kamnom in enega od preostalih kupov z vsaj dvema kamnoma razdelimo na dva kupa. Ta premislek nas vodi do nekega dobrega nabora z 22 kupi, ki vsebuje skupno 64 kamnov. Prepričajmo se, da obstaja podnabor z vsaj dvema kupoma, ki skupno vsebuje natanko 4 kamne. Denimo, da to ne drži. Če naš dobri nabor ne bi vseboval nobenega kupa z enim kamnom, bi vseboval skupno vsaj $2 + 3 \cdot 21 = 65$ kamnov. Če bi v našem naboru obstajali kupi z enim kamnom, pa bi nabor skupno

vseboval vsaj $3 + 4 \cdot 19 = 79$ kamnov. S tem smo našo trditev dokazali, zato lahko štiri kamne, ki tvorijo vsaj dva kupa odmislimo in dobimo nabor z največ 20 kupi, ki vsebuje skupno natanko 60 kamnov. V enem od nadaljnih korakov bo tako iz tega nabora nastalo 20 kupov s skupno 60 kamni.

c) Jure najprej nakajkrat od kupa z največ kamni odvzame kup s tremi kamni, tako da v nekem trenutku dobi 32 kupov s tremi kamni in en kup s štirimi kamni. Med tako delitvijo vedno obstaja natanko en kup s številom kamnov, ki ni deljivo s 3. Če ta kup vključimo v nek nabor z 19 kupi, ta nabor tako ne more vsebovati skupno natanko 60 kamnov. Če tega kupa ne vključimo, pa imamo na voljo le 19 kupov s tremi kamni, ki skupno vsebujejo manj kot 60 kamnov. Nato Jure razdeli kup s štirimi kamni na dva kupa s po dvema kamnoma. Od te delitve dalje vsi kupi vsebujejo kvečjemu tri kamne in zato poljubnih 19 kupov vsebuje skupno kvečjemu 57 kamnov. S tem je trditev dokazana.

Gregor Cigler

Rešitve nalog 32. tekmovanja iz fizike za bronasto Stefanovo priznanje – šolsko tekmovanje

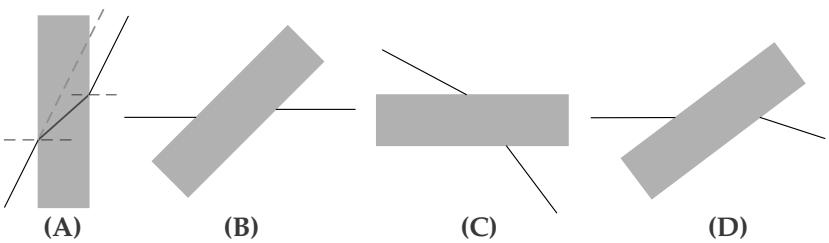
8. razred

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
D	C	A	A	B	C	C

A1 Ker imajo vse tri hiše enak tloris in zato enak prečni presek glede na smer padavin, pade na vse strehe enaka količina dežja. Zbiralniki zberejo enake količine kapnice.

A2 Točka A je na pritrjenem koncu vrvi in prav zato se ne more nikamor premakniti.

A3 Ob prehodu iz zraka v steklo se žarek lomi **proti** vpadni pravokotnici, pri prehodu iz stekla v zrak pa **stran** od vpadne pravokotnice. Poleg tega sta vpadni žarek in žarek, ki iz planparalelne ploščice izstopa, **vzporedna**. Obema pogojema zadosti le prikaz na sliki (A).



A4 Zrcalna slika pravilnega zapisa JAN je slika (A).

(A) **(B)** **(C)** **(D)**

A5 Dolžini Petrovega in Mihovega stopala sta

$$d_{\mathrm{P}} = \frac{8{,}00\ \mathrm{m}}{32} = 25\,\mathrm{cm}\,, \quad d_{\mathrm{M}} = \frac{8{,}00\,\mathrm{m}}{40} = 20\,\mathrm{cm}\,,$$

razlika med njima je $d_{\mathrm{P}} - d_{\mathrm{M}} = 5$ cm.

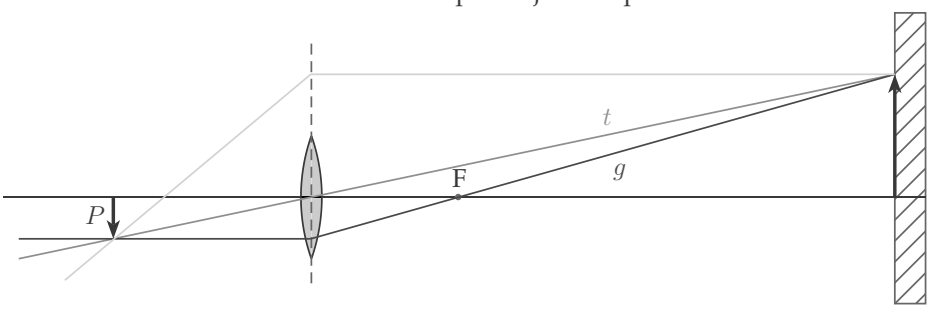
A6 Sonce ob enakonočju **ne** vzhaja (zahaja) na istem mestu na obzornici kot ob obratu ter se med vzhajanjem (zahajanjem) **ne** dviga (spušča) pravokotno na obzornico. Temu ne ustrezajo odgovori (A), (B) in (D).

A7 Potniški vlak potuje iz Ljubljane do Maribora 2 uri in 45 minut, tovorni vlak iz Maribora pa potuje do Ljubljane $\frac{156\,\mathrm{km\cdot h}}{42\,\mathrm{km}} = 3$ ure in 43 minut, kar je približno 1 uro dlje. Vlak iz Maribora krene na pot pol ure **pred** vlakom iz Ljubljane in prispe na cilj približno pol ure **za** vlakom iz Ljubljane. Temu ustrezata grafa (C).

B1 (a) Slika na skici je visoka 2 cm $\pm$ 1 mm. Na zaslonu je slika visoka 30 cm, kar pomeni, da je skica narisana v merilu (2 cm $\pm$ 1 mm) : 30 cm = 1 : (15 $\mp$ 1).

(b) Razdalja med goriščem in središčem leče je 2,4 cm $\pm$ 1 mm, kar v danem merilu ustreza goriščni razdalji (15 $\mp$ 1) $\cdot$ (2,4 cm $\pm$ 1 mm) = 36 cm $\pm$ 2 cm.

(c) Predmet lahko tekmovalec konstruira s pomočjo dveh pravilno narisanih žarkov.



(d) Pravilno narisan **temenski** žarek je katerikoli žarek, ki gre od predmeta (ne nujno od vrha predmeta) skozi **središče** leče, nato skozi lečo **naravnost** in konča na zaslonu v območju slike.

(e) Pravilno narisan **goriščni** žarek je katerikoli žarek, ki gre od predmeta (ne nujno od vrha predmeta) do leče **vzporedno** z optično osjo leče, od leče naprej pa skozi **označeno** gorišče leče F (na strani med lečo in zaslonom) ter konča na zaslonu v območju slike.

B2 (a) Razdaljo 80 km od doma do počivališča prevozi Mojca s hitrostjo 120 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ v času

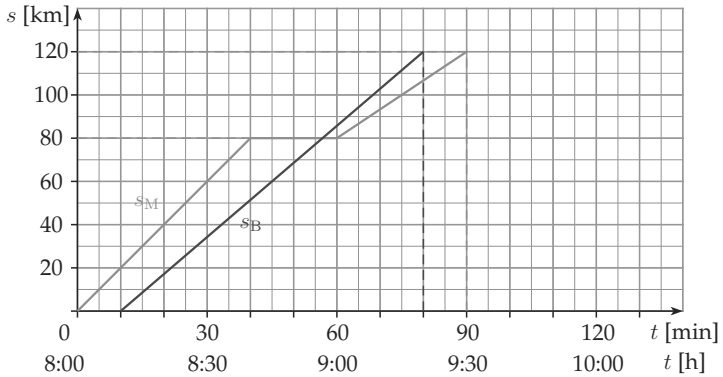
$$t_1 = \frac{80\,\text{km} \cdot \text{h}}{120\,\text{km}} = \frac{2}{3}\,\text{h} = 40\,\text{min}.$$

(b) Mojca vozi 40 minut od doma do počivališča, tam stoji 20 minut in se zatem še 30 minut vozi do babice, kar pomeni, da njena celotna vožnja traja 40 min + 20 min + 30 min = 90 min = 1 h 30 min. Ker od doma krene ob 8:00, prispe k babici ob 9:30.

(c) Mojca razdaljo 120 km prevozi v 1 uri in pol, torej je njena povprečna hitrost

$$\bar{v}_\text{M} = \frac{120\,\text{km}}{1,5\,\text{h}} = 80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\,.$$

(d) Graf Mojčine prevožene poti v odvisnosti od časa $s_\text{M}(t)$ je narisan z rdečo (podvprašanje (d)), graf Borutove prevožene poti v odvisnosti od časa $s_\text{B}(t)$ je narisan z modro (podvprašanje (f)).



(e) Borutov čas vožnje je za 20 minut krajši kot Mojčin (Borut gre od doma 10 minut za Mojco in k babici prispe 10 minut pred Mojco), torej traja 90 min – 20 min = 70 min. Borut prevozi isto razdaljo od doma do babice kot Mojca. Njegova povprečna hitrost je

$$\bar{v}_\text{B} = \frac{120\,\text{km}}{70\,\text{min}} = 1{,}71\,\frac{\text{km}}{\text{min}} = 103\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\,.$$

(f) Graf Borutove prevožene poti v odvisnosti od časa $s_\text{B}(t)$ je prikazan z modro v istem koordinatnem sistemu kot graf $s_\text{M}(t)$.

(g) Iz grafov preberemo, da Borut prehiti Mojco med njenim postankom na počivališču, ko je Mojca od babice oddaljena 120 km – 80 km = 40 km.

(h) Ker Borut prehiti Mojco med njenim postankom na počivališču, ki je od doma oddaljeno 80 km, je on do tedaj prevozil natanko toliko. Ker vemo, s kolikšno (povprečno) hitrostjo vozi, lahko izračunamo čas njegove vožnje od doma do počivališča,

$$t_2 = \frac{80\,\text{km} \cdot \text{h}}{103\,\text{km}} = 0,78\,\text{h} = 47\,\text{min}.$$

Borut je od doma krenil 10 minut za Mojco, ob 8:10, kar pomeni, da je Mojco prehitel ob 8:57.

9. razred

A1	A2	A3	A4	A5	A6
A	C	C	D	A	A

A1 Kocka ledu, ki se tali, prejema toploto iz okolice. Okolica je tudi posoda, s katero je kocka ledu v stiku. Ker so kovine dobri toplotni prevodniki (boljši kot zrak, les in stiropor), prejme kocka ledu v kovinski posodi v enakem času od posode več toplote kot kocki v drugih dveh posodah in se zato v kovinski posodi tali najhitreje.

A2 Sonce ob enakonočju **ne** vzhaja (zahaja) na istem mestu na obzornici kot ob obratu ter se med vzhajanjem (zahajanjem) **ne** dviga (spušča) pravokotno na obzornico. Temu **ne** ustrezajo odgovori (A), (B) in (D).

A3 Pri navpičnem metu se pri letu navzgor velikost hitrosti enakomerno zmanjšuje od začetne hitrosti v_0 do 0 s pojemkom g. To pomeni, da se vsako sekundo zmanjša za 10 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Kamen leti navzgor 2 s, kar pomeni, da je bila njegova začetna hitrost $v_0 = 20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Kamen ima maso m = 0,2 kg in na začetku meta kinetično energijo

$$W_k = \frac{1}{2}\, m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,2\,\mathrm{kg} \cdot \left(20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 40\,\mathrm{J}\,.$$

A4 Apollo 11 je malo pred pristankom na Luni dlje od Zemlje kot takoj po svojem vzletu z Zemlje, zato je gravitacijska sila Zemlje na Apolla po njegovem vzletu z Zemlje **večja** kot pred njegovim pristankom na Luni.

A5 V omenjenem časovnem intervalu je povprečna hitrost kolesarja Jaka, ki pospešuje enakomerno, enaka stalni hitrosti kolesarke Špele, zato v tem časovnem intervalu oba prevozita enako pot.

A6 Potniški vlak potuje iz Ljubljane do Maribora 2 uri in 44 minut, tovorni vlak iz Maribora pa potuje do Ljubljane $\frac{156\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}}{42\,\mathrm{km}}$ = 3 ure in 43 minut, kar je približno 1 uro dlje. Vlak iz Maribora krene na pot pol ure **pred** vlakom iz Ljubljane in prispe na cilj približno pol ure **za** vlakom iz Ljubljane. Temu ustrezata grafa (A).

B1 (a) Razdaljo 95 km od Novega mesta (NM) do počivališča prevozi prvi kombi s hitrostjo 114 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ v času

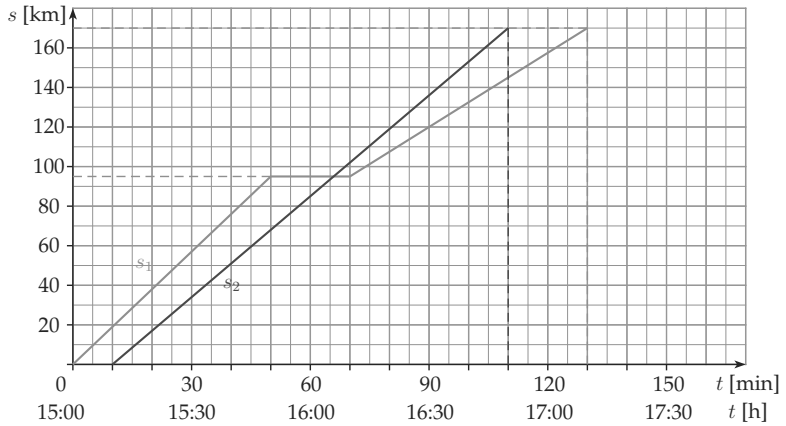
$$t_1 = \frac{95\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}}{114\,\mathrm{km}} = 0,833\,\mathrm{h} = 50\,\mathrm{min}.$$

(b) Prvi kombi vozi 50 minut do počivališča, tam stoji 20 minut in se zatem še 60 minut vozi do Solkana, kar pomeni, da traja celotna vožnja 50 min + 20 min + 60 min = 130 min = 2 h 10 min. Ker iz NM krene ob 15:00, prispe v Solkan ob 17:10.

(c) Prvi kombi razdaljo 170 km prevozi v času 2 uri in 10 minut = 2,167 h, torej je njegova povprečna hitrost

$$\bar{v}_1 = \frac{170\,\mathrm{km}}{2,167\,\mathrm{h}} = 78,5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\,.$$

(d) Graf prevožene poti prvega kombija v odvisnosti od časa $s_1(t)$ je narisan z rdečo (podvprašanje (d)), graf prevožene poti drugega kombija v odvisnosti od časa $s_2(t)$ je narisan z modro (podvprašanje (f)).



(e) Čas vožnje drugega kombija je za 30 minut krajši kot čas vožnje prvega kombija (drugi kombi gre iz NM 10 minut za prvim in v Solkan prispe 20 minut pred prvim), torej traja 130 min – 30 min = 100 min. Tudi drugi kombi prevozi razdaljo 170 km. Njegova povprečna hitrost je

$$\bar{v}_2 = \frac{170\,\mathrm{km}}{100\,\mathrm{min}} = 1,7\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}} = 102\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\,.$$

(f) Graf poti drugega kombija v odvisnosti od časa $s_2(t)$ je prikazan z modro v istem koordinatnem sistemu kot graf $s_1(t)$.

(g) Iz grafov preberemo, da drugi kombi dohiti prvega med njegovim postankom na počivališču, ki je od Solkana oddaljeno 170 km – 95 km = 75 km.

(h) Ker drugi kombi prehiti prvega med njegovim postankom na počivališču, ki je od NM oddaljeno 95 km, je drugi kombi do tedaj prevozil natanko toliko. Ker vemo, s kolikšno (povprečno) hitrostjo vozi, lahko izračunamo čas njegove vožnje od NM do počivališča,

$$t_2 = \frac{95\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}}{102\,\mathrm{km}} = 0,93\,\mathrm{h} = 56\,\mathrm{min}.$$

Drugi kombi je iz NM krenil 10 minut za prvim kombijem, ob 15:10, kar pomeni, da je prvega dohitel ob 16:06.

(i) Ob 16:06 se drugi kombi pelje mimo počivališča, ki je od Solkana oddaljeno 75 km. Če naj v Solkan prispe sočasno s prvim kombijem ob 17:10 (kar je nespremenjen čas prihoda prvega kombija), je čas, ki naj ga drugi kombi porabi za to razdaljo, 64 minut. V tem primeru je njegova povprečna hitrost na tem odseku

$$\bar{v}_3 = \frac{75\,\mathrm{km}}{64\,\mathrm{min}} = 1,17\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}} = 70,3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\,.$$

B2 (a) Pri premem enakomerno pospešenem gibanju je pot s_1, ki jo letalo opravi na 100 m dolgi vzletni stezi,

$$s_1 = 100\,\mathrm{m} = \bar{v} \cdot t_1\,.$$

Čas t_1 je čas pospeševanja in $\bar{v}$ je povprečna hitrost letala med pospeševanjem. Povprečna hitrost $\bar{v}$ je enaka polovici končne (vzletne) hitrosti v_v,

$$\bar{v} = \frac{1}{2}\,v_v = \frac{1}{2}\,288\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 144\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 40\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

Zdaj lahko iz poti in povprečne hitrosti izračunamo čas pospeševanja t_1,

$$t_1 = \frac{s}{\bar{v}} = \frac{100\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}}{40\,\mathrm{m}} = 2,5\,\mathrm{s}\,.$$

Pri enakomerno pospešenem gibanju hitrost letala narašča enakomerno, v času t_1 naraste od 0 do vzletne hitrosti v_v = 288 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ = 80 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, velja $v_v = a_1 \cdot t_1$. Od tod izrazimo pospešek letala,

$$a_1 = \frac{v_v}{t_1} = \frac{80\,\mathrm{m}}{2,5\,\mathrm{s}^2} = 32\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

(b) Ker lahko upor in trenje zanemarimo, je edina sila, ki deluje na letalo z maso $m = 17$ ton na vzletni stezi v smeri pospeška, povprečna sila letalskih motorjev in katapulta $F_{\mathrm{k+lm}}$. Drugi Newtonov zakon pravi

$$F_{\mathrm{k+lm}} = m \cdot a_1 = 17 \cdot 10^3\,\mathrm{kg} \cdot 32\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 544 \cdot 10^3\,\mathrm{N} = 544\,\mathrm{kN}\,.$$

(c) Povprečna sila letalskih motorjev in katapulta $F_{\mathrm{k+lm}} = 544$ kN je vsota povprečne sile letalskih motorjev $F_{\mathrm{lm}} = 2 \cdot 45$ kN = 90 kN in povprečne sile katapulta $F_{\mathrm{k}} =$ 544 kN – 90 kN = 454 kN.

(d) Delo sile katapulta F_{k}, ki ga ta opravi na letalu na vzletni stezi, dolgi s_1, je $A_{\mathrm{k}} = F_{\mathrm{k}} \cdot s_1 = 454$ kN $\cdot$ 100 m = 45,4 $\cdot 10^6$ J = 45,4 MJ.

(e) Če letalo pri vzletu potiskajo le letalski motorji (s povprečno silo 90 kN), je njegov pospešek

$$a_2 = \frac{F_{\mathrm{lm}}}{m} = \frac{90 \cdot 10^3\,\mathrm{N}}{17 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}} = 5,3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

(f) Tudi na kopnem mora letalo za vzlet doseči isto vzletno hitrost v_v = 80 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ kot na letalonosilki. Ker na kopnem letalo potiskajo le letalski motorji, je njegov pospešek a_2. Da letalo doseže vzletno hitrost, potrebuje čas t_2,

$$t_2 = \frac{v_v}{a_2} = \frac{80\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^2}{\mathrm{s}\cdot 5,3\,\mathrm{m}} = 15,1\,\mathrm{s}\,.$$

Med pospeševanjem prevozi pot

$$s_2 = \bar{v} \cdot t_2 = 40\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 15,1\,\mathrm{s} = 604\,\mathrm{m}\,.$$

Vzletna steza na kopnem mora biti dolga vsaj toliko, torej 604 m.

Matematični kenguru

Vsako šolsko leto na šolah potekajo različna tekmovanja v znanju.
Za lažjo pripravo vam ponujamo več zbirk tekmovalnih nalog z rešitvami.

EVROPSKI MATEMATIČNI KENGURU

2002–2004

več kot 500 nalog s tekmovanj

+ dodanih še 160 novih nalog

208 strani
format 16,5 × 23,5 cm
mehka vezava

10,99 EUR

MEDNARODNI MATEMATIČNI KENGURU

2005–2008

več kot 500 nalog s tekmovanj

+ dodanih še 120 novih nalog

296 strani
barvni tisk
format 16,5 × 23,5 cm
mehka vezava

18,74 EUR

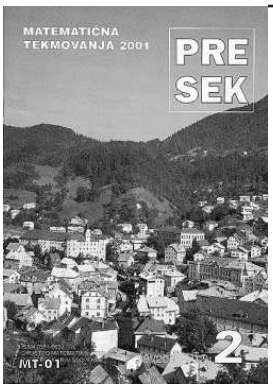
Poleg omenjenih lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog različnih zahtevnosti za osnovnošolce, srednješolce in študente s tekmovanj v znanju matematike, fizike, logike, astronomije in računalništva. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite s popustom:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/tekmovanja/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvu 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.

Tekmovanja v reviji Presek

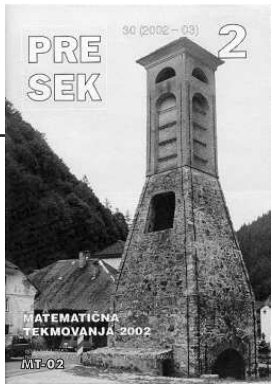
Za lažjo pripravo na matematična tekmovanja so pred leti izšle rešene tekmovalne naloge tudi v tematskih številkah revije Presek.



MATEMATIČNA TEKMOVANJA 2001

64 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

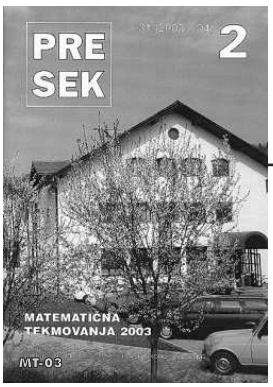
6,26 EUR



MATEMATIČNA TEKMOVANJA 2002

64 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

6,26 EUR



MATEMATIČNA TEKMOVANJA 2003

72 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

6,26 EUR

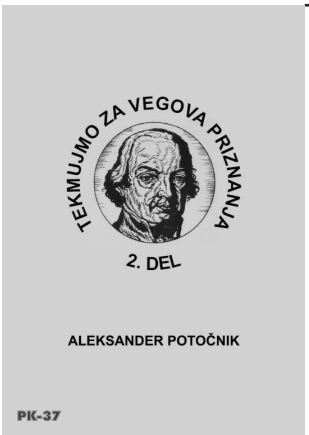
Poleg omenjenih lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog različnih zahtevnosti za osnovnošolce, srednješolce in študente s tekmovanj v znanju matematike, fizike, logike, astronomije in računalništva. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite s popustom:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/tekmovanja/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvu 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.

Zbirke nalog s tekmovanj

Vsako šolsko leto na šolah potekajo različna tekmovanja v znanju.
Za lažjo pripravo vam ponujamo več zbirk tekmovalnih nalog z rešitvami.



Aleksander Potočnik:

TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA – 2. del

Zbirka rešenih nalog s področnih in državnih tekmovanj od 1992 do 1998

80 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

6,99 EUR

Matjaž Željko:

REŠENE NALOGE IZ MATEMATIKE S SREDNJEŠOLSKIH TEKMOVANJ

5. del: Izbirna in državna tekmovanja 1997–2006

172 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

21,24 EUR

Poleg omenjenih lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog različnih zahtevnosti za osnovnošolce, srednješolce in študente s tekmovanj v znanju matematike, fizike, logike, astronomije in računalništva. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite s popustom:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/tekmovanja/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvu 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.