Tekmovanja

9. šolsko tekmovanje iz znanja poslovne matematike

1. skupina (nižja stopnja zahtevnosti)

Naloga 1: V tovarni piškotov »Sladko življenje« je 120 delavcev v 9 mesecih speklo 4.250 kg piškotov, če so delali po 8 ur na dan.

a) Koliko ur na dan bi moralo delati 100 delavcev, da bi v desetih mesecih spekli isto količino piškotov, njihova storilnost pa je večja za 15 %? Rezultat zaokroži na dve decimalni mesti natančno.

b) Povpraševanje po piškotih se je v naslednjih treh mesecih precej povečalo. Koliko delavcev bi morali še zaposliti, da bi v treh mesecih napekli 1.870 kg piškotov in bi delali po 9 ur na dan? (Upoštevaš izhodiščne podatke.)

Naloga 2:

a) Slovenski uvoznik je uvozil iz ZDA brusnični sok, katerega cena na ameriškem trgu je znašala 3,24 USD za galono. Koliko EUR stane plastenka po 1,5 l tega soka, če ne upoštevamo stroškov? (1 gl = 3,7856 l; 1 EUR = 1,2961 USD)

b) Koliko EUR stane liter in pol tega soka na policah v slovenskih trgovinah, če je slovenski uvoznik pri kalkulaciji upošteval 10 % stroškov nabave, maržo v višini 25 % in na koncu še 8,5 % DDV? (Stroški si sledijo zaporedno.)

c) Slovenski uvoznik je uvozil 550 gl tega soka. Koliko plastenk po 1,5 l je lahko napolnil, če je pri polnjenju soka v plastenke prišlo do izgube v višini 6,5 %?

Naloga 3:

a) V poplavah so bile prizadete štiri družine in občina jim priskočila na pomoč tako, da je mednje razdelila 118.800,00 EUR, in sicer:

- 2/3 zneska premo sorazmerno nastali škodi,
- ostanek obratno sorazmerno dohodku na družinskega člana.

	škoda	dohodek na druž. člana
1. družina	55.000	560
2. družina	70.000	560
3. družina	45.000	350
4. družina	50.000	280

Razdeli pomoč!

b) V drugi občini pa je zaradi poplav utrpelo škodo pet družin. Občina jim je sklenila pomagati z denarno pomočjo v skupni višini 124.500 EUR, ki so jo razdelili po dveh kriterijih: premo sorazmerno nastali škodi in hkrati premo sorazmerno številu družinskih članov.

	škoda	število druž. članov
1. družina	60.000	4
2. družina	75.000	5
3. družina	45.000	4
4. družina	30.000	6
5. družina	90.000	3

Razdeli pomoč!

Naloga 4: Potovalna agencija je k stroškom potovanja v višini 1.150,00 EUR prištela še 25 % dobička in k temu še 20 % DDV.

a) Koliko je znašala cena z DDV-jem?

b) Ker ni bilo zadostnega povpraševanja, so dobiček znižali za 10 %. Koliko je v tem primeru znašala cena z DDV-jem?

2. skupina (višja stopnja zahtevnosti)

Naloga 1:

a) Na banki imamo vezano vlogo 8.600,00 EUR za 24 mesecev. Banka obrestuje vloge po 3,1 % letni obrestni meri. Koliko obresti prejmemo po izteku varčevanja in kolikšna je končna glavnica, če banka uporablja navadni obrestni račun in dekurzivni način obračunavanja obresti?

b) Na banki imamo vezano še drugo vlogo z začetno vrednostjo 7.300,00 EUR. Ta glavnica se v 12 mesecih poveča na 7.530,00 EUR. Kolikšna je obrestna mera pri tej vezavi, če banka uporablja navadni obrestni račun in dekurzivni način?

c) Privarčevani denar bomo porabili za nakup avtomobila. Najamemo še kredit. Z banko smo se dogovorili za kredit, ki ga moramo vrniti v enkratnem znesku 5.230,00 EUR čez 12 mesecev. Kolikšna je višina najetega kredita, če je letna obrestna mera 7,1 % in dekurzivni način obračunavanja obresti?

Naloga 2:

a) Za posojilo 8.000,00 EUR so obresti v 5 letih narasle na 4.200,00 EUR. Banka uporablja obrestnoobrestni račun, letno kapitalizacijo in anticipativni način obrestovanja. Kolikšna je letna anticipativna obrestna mera? Rezultat zaokroži na 4 decimalna mesta.

b) Za neko drugo posojilo v višini 7.000,00 EUR je anticipativna obrestna mera 7,8 % p. a. in letna kapitalizacija. Kolikšne obresti moramo plačati v štirih letih?

c) Za posojilo 8.000,00 EUR smo morali plačati 2.300,00 EUR obresti, obrestna mera je 7,4 % p. a. in anticipativni obračun z letno kapitalizacijo. Kolikšen je bil čas najema posojila? (odgovor v letih in dnevih)

Naloga 3:

a) V banki smo vezali vlogo 11.000,00 EUR za 390 dni. Kolikšna bo vrednost vloge ob koncu varčevanja? Banka uporablja obrestnoobrestni račun, dnevno kapitalizacijo z relativno obrestno mero in dekurzivni način. Letna obrestna mera je 3,5 %.

b) Za koliko časa (leta in dnevi) bi morali vezati glavnico 11.000 EUR, da bi narasla na 11.500 EUR, na banki, ki uporablja obrestnoobrestni račun in dnevno kapitalizacijo s konformno obrestno mero? Letna obrestna mera je 3,7 %.

c) Recimo, da smo vezali vlogo 11.000,00 EUR za 13 mesecev in privarčevali v tem času 11.450,00 EUR. Banka uporablja mesečno kapitalizacijo, relativno obrestno mero in dekurzivni način. Kolikšna je letna obrestna mera in kolikšna je mesečna relativna obrestna mera? Mesečno obrestno mero zapišite z vsaj 8 decimalnimi mesti.

Naloga 4: Zakoncema se je rodila hči Nika. Odločila sta se, da bosta takoj ob rojstvu z banko sklenila pogodbo o varčevanju. Hčerki namreč želita privarčevati denar za čas študija.

a) Ob koncu vsakega leta bosta na banko vložila 1.200,00 EUR. Kolikšen znesek bo Nika imela privarčevan v 18 letih, če banka obrestuje vloge po 3,8 % p. a. in uporablja dekurzivno obrestovanje z letno kapitalizacijo obresti?

b) Kakšen bi bil privarčevani znesek po 18 letih in pri 3,8 % p. a., če bi se starša odločila, da bosta v banko vlagala ob koncu vsakega meseca po 100,00 EUR, banka pa bi uporabljala dekurzivno obrestovanje z mesečno kapitalizacijo obresti in konformno obrestno mero?

c) Nikina teta se je odločila, da se pridruži staršema. Dogovorili so se, da bo na začetku varčevanja Nikina teta na račun vložila 3.000,00 EUR, starša pa bosta na začetku vsakega meseca vložila toliko, da bo skupna privarčevana vrednost po 18-ih letih znašala točno 30.000,00 EUR. Kolikšna bo mesečna vloga? Pogoji obrestovanja so enaki kot v b) primeru.

---

9. državno tekmovanje iz znanja poslovne matematike

1. skupina (nižja stopnja zahtevnosti)

Naloga 1: V podjetju so v mesecu marcu (22 delovnih dni) z 20 delavci izdelali za naročnika 4.000 izdelkov pri 8-urnem delavniku.

a) V mesecu aprilu je samo 21 delovnih dni. Z bolniškega dopusta so se vrnili trije delavci. Koliko izdelkov bodo izdelali v mesecu aprilu?

b) V mesecu maju je 23 delovnih dni in je na razpolago 22 delavcev. Dobili so naročilo za 5.500 izdelkov. Koliko delavcev bi morali še dodatno zaposliti, če so se delavci strinjali, da bodo opravili še 3 delovne sobote?

Naloga 2:

a) Koliko EUR stane 1 l lanenega olja, ki smo ga uvozili iz ZDA v posebnih posodah z volumnom 0,9 galone? Cena za galono je 19 USD, na to ceno nam je prodajalec priznal skonto 4 %, ob uvozu smo plačali carinske dajatve 12 %, marža znaša 22 %. (1 gl = 3,7853 litra, 1 EUR = 1,3975 USD)

b) Koliko bi stal 1 l, če bi bila cena za posodo 19 USD, carinske dajatve 11,5 %, stroški posredništva 8 ‰, marža 20 % in ne bi dobili skonta, temveč rabat v višini 3,5 %?

Naloga 3: Trgovina je od dobavitelja nabavila 600 kg blaga po 2,50 EUR, 1.200 kg blaga po 3,25 EUR in 800 kg blaga po 5,50 EUR. Koliko stane 1 kg posameznega blaga, če so stroški prevoza premo sorazmerni teži blaga in so znašali 130 EUR, stroški zavarovanja, ki so premo sorazmerni vrednosti blaga, pa so 196 EUR?

Naloga 4:

a) V tovarni koles so v letu 2010 proizvedli 44.000 koles. Gorskih koles so naredili za 20 % manj kot mestnih, proizvodnja otroških koles pa je dosegla le 50 % proizvodnje gorskih koles. Koliko posameznih vrst koles so naredili?

b) Franci si je kupil gorsko kolo za 1.250,00 EUR. Po dveh mesecih je ugotovil, da mu ne ustreza, zato ga je sklenil prodati. Ceno je znižal za 10 %. Ker se po doglednem času ni oglasil nihče, je ceno spustil še za dodatnih 7 %. Po koliko evrov je Franci na koncu prodajal svoje kolo?

c) Franciju še vedno ni uspelo prodati kolesa, zato je ponudbo še znižal in kolo na koncu ponujal za 990,00 EUR. Sosed Toni je bil pripravljen za Francijevo kolo odšteti 900,00 EUR. Za koliko odstotkov morata oba »popustiti« (oba za enak odstotek), da bosta dosegla kompromisno ceno?

2. skupina (višja stopnja zahtevnosti)

Naloga 1: Maja se odloča za varčevanje. Izbira med različnimi ponudbami banke, ki za obračun vlog uporablja navadni obrestni račun:

a) Pri prvi ponudbi bi Maja vložila 1. marca 4.800,00 EUR. Banka bi vlogo obrestovala po 4,5 % letni obrestni meri. Koliko bi v tem primeru imela Maja na računu ob koncu leta, če banka uporablja sistem $(K, 365)$?

b) Za koliko odstotkov bi morala biti večja začetna glavnica 4.800,00 EUR, če bi Maja do konca leta želela privarčevati 6.000,00 EUR ob pogojih varčevanja iz prve naloge?

c) Druga možnost je varčevanje s polletnimi pologi. Maja bi z varčevanjem pričela na začetku leta. Kakšen znesek mora vložiti na začetku vsakega polletja, da bi na svojem računu ob koncu leta imela 6.000,00 EUR. Banka tudi v tem primeru obrestuje vloge po 4,5 % letni obrestni meri.

Naloga 2: Pred leti se je Ana odločila, da bo na poseben račun pri banki vlagala ves denar, ki ga bo zaslužila s pogodbenim delom. Tako je na začetku leta 2006 v banko vložila 4.500,00 EUR, ob polletju leta 2008 še 3.300,00 EUR, konec prvega četrtletja 2010 pa še 2.000,00 EUR. Ker je nujno potrebovala denar, je konec tretjega četrtletja 2010 z računa dvignila 3.000,00 EUR.

a) Koliko je imela v banki konec leta 2010, če banka ves čas uporablja dekurzivno obrestovanje s konformno obrestno mero in četrtletno kapitalizacijo? Obrestna mera je 4 % p. a.

b) Koliko bi bila privarčevana vrednost konec leta 2010, če je obrestovanje dekurzivno z relativno obrestno mero? Banka prva tri leta uporablja polletno kapitalizacijo in 4,5 % p. a. obrestno mero, naslednja leta pa četrtletno kapitalizacijo obresti, obrestna mera je 3,75 % p. a.?

c) V mesecu juliju 2012 Ana načrtuje nakup avtomobila. Kolikšna letna obrestna mera bo veljala v letu 2011 in prvi polovici leta 2012, če se bo v tem času (1,5 leta) končna vrednost glavnice iz naloge b) povečala za 5,78 %? Obrestovanje je dekurzivno, relativno pri mesečni kapitalizaciji obresti.

Naloga 3:

a) Za financiranje investicije najamemo posojilo, ki ga banka izplača v dveh obrokih: 20.000,00 EUR takoj, 30.000,00 EUR pa čez tri leta. S kakšnim zneskom bomo ob koncu 6. leta poplačali posojilo; obrestna mera je 4,8 %, polletna kapitalizacija, relativno, anticipativni način?

b) Za financiranje investicije najamemo posojilo, ki ga bo banka izplačala v dveh enakih zneskih: prvega takoj, drugega pa čez dve leti. Izračunajte višino posameznega izplačila, če celotno posojilo poplačamo z zneskom 50.000,00 EUR ob koncu 5. leta; obrestna mera 4,8 %, celoletna kapitalizacija, anticipativni način.

c) Najamemo kredit v vrednosti 15.000,00 EUR za 5 let. Kakšna je bila obrestna mera, če smo plačali 3.396,50 EUR obresti; celoletna kapitalizacija, anticipativni način?

Naloga 4: Tri leta smo na začetku vsakega četrtletja vplačevali po 1.000,00 EUR. Privarčevana sredstva nam bodo izplačali v petih enakih polletnih rentah, od katerih prva dospe na začetku šestega leta. Banka uporablja 6 % letno obrestno mero.

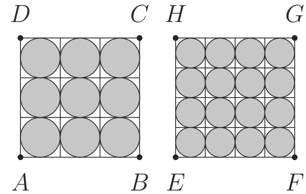
a) Izračunajte rento, če se v računu uporablja dekurzivno relativno obrestovanje in mesečna kapitalizacija obresti.

b) Kakšen denarni znesek bi morali dodatno vložiti ob koncu tretjega leta, če bi želeli prejemati rento v višini 4.000,00 EUR? Banka bo v tem primeru v celotnem računu vlog in rent uporabljala dekurzivno obrestovanje in četrtletno kapitalizacijo z relativno obrestno mero.

55. regijsko matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

1. letnik

A1. Vsak izmed kvadratov $ABCD$ in $EFGH$ s stranico dolžine 1 je razdeljen na skladne kvadratke, v katere so včrtani krogi, kot prikazuje slika. Koliko je razmerje ploščin med osenčenim delom kvadrata $ABCD$ in osenčenim delom kvadrata $EFGH$?



(A) $\frac{9}{16}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** 1 **(D)** $\frac{4}{3}$ **(E)** $\frac{16}{9}$

A2. Za neničelna realna števila a, b in c velja

$$a = b + 2c, \quad a + c = b + d, \quad b = d + c.$$

Katera enakost je zagotovo pravilna?

(A) $d = 2c$ **(B)** $a = 3c$ **(C)** $a = 6c$
(D) $a = b + 2d$ **(E)** $b = 2a + 2d$

A3. Za naravni števili m in n velja $19 \leq m \leq 49$, $51 \leq n \leq 101$. Kolikšno največjo vrednost lahko zavzame izraz $\frac{n+m}{n-m}$?

(A) 20 **(B)** 30 **(C)** 40 **(D)** 50 **(E)** 60

B1. Poišči vsa cela števila x in y, ki rešijo enačbo

$$3xy + 2x + y = 12.$$

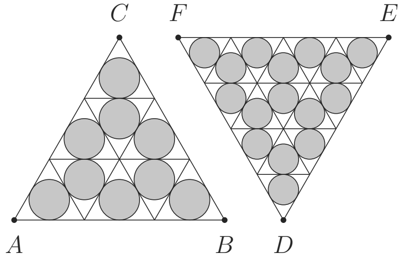
B2. V trikotniku ABC simetrala kota $\sphericalangle BAC$ seka stranico BC v točki D. Trikotnik ADC je enakokrak z vrhom D, velja pa še $|CD| = 36$ in $|BD| = 64$. Izračunaj dolžine stranic trikotnika ABC.

B3. Peter ima doma 111 rdečih in 111 modrih kroglic, ki jih izdeluje Petrov stric. Peter lahko pri stricu vsak dan zamenja 11 rdečih kroglic za 7 modrih ali 20 modrih kroglic za 28 rdečih.

(a) Ali lahko po nekaj dneh Peter skupno število kroglic poveča za 20?
(b) Ali lahko po nekaj dneh Peter skupno število kroglic poveča za 33?
(c) Ali lahko po nekaj dneh Peter doseže, da ima modrih kroglic trikrat toliko kot rdečih?

2. letnik

A1. Vsak izmed enakostraničnih trikotnikov ABC in DEF s stranico dolžine 1 je razdeljen na skladne enakostranične trikotnike, v katere so včrtani krogi, kot prikazuje slika. Koliko je razmerje ploščin med osenčenim delom trikotnika ABC in osenčenim delom trikotnika DEF?



(A) $\frac{9}{16}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** 1 **(D)** $\frac{4}{3}$ **(E)** $\frac{16}{9}$

A2. Za dolžine a, b in c stranic trikotnika ABC velja $c^2 = 2ab$ in $a^2 + c^2 = 3b^2$. Velikosti notranjih kotov trikotnika ABC so

(**A**) $30°$, $60°$ in $90°$. (**B**) $45°$, $60°$ in $75°$. (**C**) $45°$, $45°$ in $90°$.
(**D**) $60°$, $60°$ in $60°$. (**E**) Nemogoče je določiti.

A3. Včeraj opoldne je bilo razmerje med številom fantov in številom deklet na igrišču $3 : 2$. Danes je število fantov na igrišču kvadrat števila deklet, na igrišču pa je 6 fantov in 7 deklet manj kot včeraj opoldne. Koliko otrok je bilo na igrišču včeraj opoldne?

(**A**) 12 (**B**) 13 (**C**) 15 (**D**) 25 (**E**) 30

B1. Določi vsa neničelna cela števila a, različna od 4, za katera je vrednost izraza $\frac{a}{a-4} + \frac{2}{a}$ celo število.

B2. Dan je kvadrat $ABCD$ in taki točki E in F zunaj kvadrata, da sta trikotnika BEC in CFD enakostranična. Naj bo G presečišče premic BE in FD, H pa taka točka, da je štirikotnik $CEHF$ romb. Dokaži, da točke G, E, H in F ležijo na isti krožnici.

B3. Dvanajst kroglic je oštevilčeno s števili $1, 2, 3, \ldots, 12$. Vsako kroglico pobarvamo bodisi rdeče bodisi zeleno tako, da sta izpolnjena pogoja:

(a) če sta kroglici, označeni z različnima številoma a in b, pobarvani rdeče in je $a + b < 13$, je tudi kroglica, označena s številom $a + b$, pobarvana rdeče;

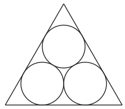
(b) če sta kroglici, označeni z različnima številoma a in b, pobarvani zeleno in je $a+b < 13$, je tudi kroglica, označena s številom $a + b$, pobarvana zeleno.

Na koliko načinov lahko pobarvamo kroglice?

---

3. letnik

A1. V enakostranični trikotnik s stranico dolžine 1 so včrtane tri enake krožnice (glej sliko). Koliko meri polmer krožnic?



(**A**) $\frac{1}{3}$ (**B**) $\frac{1}{4}$ (**C**) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (**D**) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ (**E**) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

A2. Koliko stopinj meri kot x, če velja $2\cos 10° + \sin 100° + \sin 1000° + \sin 10000° = \sin x$ in $-90° \leq x \leq 90°$?

(**A**) -80 (**B**) -10 (**C**) 0 (**D**) 10 (**E**) 80

A3. Koliko parov (m, n) naravnih števil zadošča pogoju $\frac{3}{m} + \frac{2}{n} = 1$?

(**A**) 2 (**B**) 3 (**C**) 4 (**D**) 5
(**E**) Več kot 5.

B1. Poišči vsa realna števila x, ki rešijo enačbo

$$\log_2(10x) + \log_4(100x) + \log_8(1000x) - 2\log_{64} x = 9.$$

Rezultat zapiši v obliki okrajšanega ulomka.

B2. Dan je trikotnik ABC in točke D na stranici AB, E na stranici BC ter F na stranici AC, da je premica CD pravokotna na stranico AB, premica DE pravokotna na stranico BC in premica DF pravokotna na stranico AC. Dokaži, da točke A, B, E in F ležijo na isti krožnici.

B3. Dvanajst kroglic je oštevilčenih s števili $1, 2, 3, \ldots, 12$. Vsako kroglico pobarvamo bodisi rdeče bodisi zeleno tako, da sta izpolnjena pogoja:

(a) če sta kroglici, označeni z različnima številoma a in b, pobarvani rdeče in je $a + b < 13$, je tudi kroglica, označena s številom $a + b$, pobarvana rdeče;

(b) če je kroglica, označena s številom a, pobrvana rdeče in kroglica, označena s številom b, pobarvana zeleno in je $a + b < 13$, je kroglica, označena s številom $a + b$, pobarvana zeleno.

Na koliko načinov lahko pobarvamo kroglice?

---

4. letnik

A1. Kvadrat s stranico dolžine 1 cm je razdeljen na tri trikotnike. Katera trditev je zagotovo pravilna?

(**A**) Eden izmed trikotnikov ima obseg enak $2 + \sqrt{2}$ cm.

(**B**) Eden izmed trikotnikov ima ploščino enako 0.5 cm^2.

(**C**) Dva izmed trikotnikov sta pravokotna.

(**D**) Noben izmed trikotnikov ni topokoten.

(**E**) Eden izmed trikotnikov je ostrokoten.

A2. Prvi člen nekega aritmetičnega zaporedja je enak $\frac{1}{3}$, tretji pa $\frac{1}{5}$. Koliko je drugi člen tega zaporedja?

(**A**) $\frac{1}{4}$ (**B**) $\frac{4}{15}$ (**C**) $\frac{5}{24}$ (**D**) $\frac{7}{30}$ (**E**) $\frac{2}{9}$

A3. Koliko naravnih števil, manjših od 1000, ima vsoto števk deljivo s 7 in so večkratniki števila 3?

(**A**) 7 (**B**) 19 (**C**) 21 (**D**) 28 (**E**) 37

B1. Za *realni* števili x in α velja

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha \,.$$

Dokaži, da za vsako naravno število n velja

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos(n\,\alpha) \,.$$

B2. Naj bo E razpolovišče stranice AB pravokotnika $ABCD$ in F tista točka na diagonali AC, da je premica BF pravokotna na diagonalo AC. Določi razmerje stranic pravokotnika $ABCD$, če je daljica EF pravokotna na diagonalo BD.

B3. V rdeči škatli je dvanajst kroglic, oštevilčenih s številkami od 1 do 12. Jan je nekaj izmed teh kroglic prestavil v zeleno škatlo. Ugotovil je, da za vsaki kroglici v zeleni škatli velja: če sta na teh dveh kroglicah zapisani števili a in b, potem je kroglica s številom $|a - b|$ v rdeči škatli. Največ koliko kroglic je Jan prestavil v zeleno škatlo?

55. državno matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

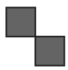
1. letnik

1. Določi vsa praštevila p in q, za katera je tudi število $2^2 + p^2 + q^2$ praštevilo.

2. Poišči vsa realna števila x in y, za katera velja $x + y^2 = xy + 1$ in $xy = 4 + y$.

3. V šestkotniku $ABCDEF$ velja $\angle BAF = 150°$, $\angle ACB = \angle ADC = 90°$, $|AC| = |BC|$, trikotnik ABC je podoben trikotniku ADE in trikotnik BCD je podoben trikotniku DEF. Izračunaj razmerje dolžin daljic AB in AF.

4. Tabela 4×4 je razdeljena na 16 kvadratkov. Na to tabelo postavljamo ploščice oblike

 (ploščico lahko zasukamo),

ki pokrijejo vsaka po dve polji. Najmanj koliko ploščic moramo postaviti na tabelo, da bo imelo vsako nepokrito polje vsaj eno sosednje polje pokrito? (Polji sta sosednji, če imata skupno stranico.)

2. letnik

1. Poišči vsa naravna števila m in n, za katera je vsota največjega skupnega delitelja in najmanjšega skupnega večkratnika enaka 101.

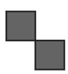
2. Dokaži, da za vsak par realnih števil x in y velja neenakost

$$|x + y| + |x + 1| + |y + 1| \geq 2.$$

Pri katerih številih x obstaja tako število y, da velja $|x+y|+|x+1|+|y+1| = 2$?

3. Naj bo P taka točka znotraj trikotnika ABC, da je $\angle CBP = \angle PAC$. Presečišče premice AP s stranico BC označimo z D, presečišče premice BP s stranico AC pa z E. Trikotnikoma ADC in BEC očrtani krožnici se sekata v točkah C in F. Pokaži, da je premica CP simetrala kota DFE.

4. Tabela 7×7 je razdeljena na 49 kvadratkov. Na to tabelo postavljamo ploščice oblike

 (ploščico lahko zasukamo),

ki pokrijejo vsaka po dve polji. Najmanj koliko ploščic moramo postaviti na tabelo, da bo imelo vsako nepokrito polje vsaj eno sosednje polje pokrito? (Polji sta sosednji, če imata skupno stranico.)

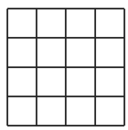
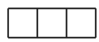
3. letnik

1. Določi vsa cela števila x, za katera je število $9x^2-40x+39$ potenca praštevila. (Naravno število m je potenca praštevila, če je $m = p^a$ za neko praštevilo p in nenegativno celo število a.)

2. Poišči vse polinome P s celimi koeficienti, za katere velja: za vsako celo število a in vsako praštevilo p, ki deli $P(a)$, velja, da p deli a.

3. Točka O_1 je središče krožnice $\mathcal{K}_1$ in leži na krožnici $\mathcal{K}_2$ s središčem O_2. Krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ se sekata v točkah A in B. Krožnica $\mathcal{K}_1$ seka daljico O_1O_2 v točki C. Premica BC seka krožnico $\mathcal{K}_2$ v točkah B in D, premica AD pa seka krožnico $\mathcal{K}_1$ v točkah A in E. Naj bo F razpolovišče daljice AE. Dokaži, da premici O_1A in O_1D razdelita kot CO_1F na tri enake dele.

4. Za katera naravna števila $n \geq 3$ je možno tabelo razsežnosti $n \times n$ brez prekrivanja pokriti s ploščicami

 in ?

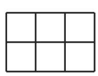
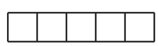
4. letnik

1. Ali obstaja celo število n, za katerega so vse ničle polinoma $p(x) = x^4 - 2011x^2 + n$ cela števila?

2. Določi vse funkcije $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere velja $f(x+y) = f(x-y)+2f(y)\cos x$ za vsa realna števila x in y.

3. Dan je konveksen štirikotnik $ABCD$, točki E in F na stranici AB ter točka G na stranici CD, da so štirikotniki $ABCG$, $AFCD$ in $EFCG$ tetivni. Dokaži, da je $|AE| = |FB|$ natanko tedaj, ko sta stranici AB in CD vzporedni.

4. Za katera naravna števila $n \geq 5$ je možno tabelo razsežnosti $n \times n$ brez prekrivanja pokriti s ploščicami

 in ?

Rešitve nalog 9. šolskega tekmovanja iz znanja poslovne matematike

1. skupina (nižja stopnja zahtevnosti)

Naloga 1:

a)

$$\begin{array}{ccccc} 120 \text{ del} & 9 \text{ mesecev} & 4.250\,\text{kg} & 8\,\text{h/dan} & 100\,\% \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 100 \text{ del} & 10 \text{ mesecev} & 4.250\,\text{kg} & x & 115\,\% \end{array}$$

$$x = 7{,}51\,\text{h/dan}$$

b)

$$\begin{array}{cccc} 120 \text{ del} & 9 \text{ mesecev} & 4.250\,\text{kg} & 8\,\text{h/dan} \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ x & 3 \text{ mesecev} & 1.870\,\text{kg} & 9\,\text{h/dan} \end{array}$$

$$x = 140{,}8$$

Zaposliti je treba še 21 delavcev.

Naloga 2:

a)

$$\begin{array}{l|l} x \text{ EUR} & 1{,}5\,\text{l} \\ 3{,}7856\,\text{l} & 1\,\text{gl} \\ 1\,\text{gl} & 3{,}24\,\text{USD} \\ 1{,}2961\,\text{USD} & 1\,\text{EUR} \end{array}$$

$$x = 0{,}99\,\text{EUR}$$

Plastenka stane 0,99 EUR.

b)

$$\begin{array}{l|l} x \text{ EUR} & 1{,}5\,\text{l} \\ 3{,}7856\,\text{l} & 1\,\text{gl} \\ 1\,\text{gl} & 3{,}24\,\text{USD} \\ 1{,}2961\,\text{USD} & 1\,\text{EUR} \\ 100\,\text{EUR} & 110\,\text{EUR (str)} \\ 100\,\text{EUR (str)} & 125\,\text{EUR (str + marža)} \\ 100\,\text{EUR (str + m)} & 108{,}5\,\text{EUR (str + m + DDV)} \end{array}$$

$$x = 1{,}48\,\text{EUR}$$

V trgovini stane plastenka 1,48 EUR.

c)

$$\begin{array}{l|l} x \text{ plast} & 550\,\text{gl} \\ 1\,\text{gl} & 3{,}7856\,\text{l} \\ 1{,}5\,\text{l} & 1\,\text{plast} \\ 100\,\text{plast} & 93{,}5\,\text{plast} \end{array}$$

$$x = 1.297{,}83$$

Napolnil je lahko 1.298 plastenk.

Naloga 3:

a)

$$\begin{aligned} D_1 : D_2 : D_3 : D_4 &= 55 : 70 : 45 : 50 \\ D_1 : D_2 : D_3 : D_4 &= 11 : 14 : 9 : 10 \\ D_1 + D_2 + D_3 + D_4 &= \frac{2}{3} \cdot 118.800 \\ 11 \cdot x + 14 \cdot x + 9 \cdot x + 10 \cdot x &= 79.200 \\ 37 \cdot x &= 79.200 \\ x &= 1.800 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 : D_2 : D_3 : D_4 &= \frac{1}{560} : \frac{1}{560} : \frac{1}{350} : \frac{1}{280} \\ D_1 : D_2 : D_3 : D_4 &= 5 : 5 : 8 : 10 \\ D_1 + D_2 + D_3 + D_4 &= 118.800 - 79.200 \\ 5 \cdot y + 5 \cdot y + 8 \cdot y + 10 \cdot y &= 39.600 \\ 28 \cdot y &= 39.600 \\ y &= 1.414{,}29 \end{aligned}$$

	I.	II.	skupaj
1. družina	19.800	7.071,45	26.871,43 EUR
2. družina	25.200	7.071,45	32.271,43 EUR
3. družina	16.200	11.314,32	27.514,29 EUR
4. družina	18.000	14.142,90	32.142,86 EUR

b)

$$\begin{aligned} D_1 : D_2 : D_3 : D_4 : D_5 &= (60 \cdot 4) : (75 \cdot 5) : (45 \cdot 4) : (30 \cdot 6) : (90 \cdot 3) \\ D_1 : D_2 : D_3 : D_4 : D_5 &= 240 : 375 : 180 : 180 : 270 \\ D_1 : D_2 : D_3 : D_4 : D_5 &= 16 : 25 : 12 : 12 : 18 \\ D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 &= 124.500 \\ 16 \cdot x + 25 \cdot x + 12 \cdot x + 12 \cdot x + 18 \cdot x &= 124.500 \\ 83 \cdot x &= 124.500 \\ x &= 1.500 \end{aligned}$$

$D_1 = 24.000$, $D_2 = 37.500$, $D_3 = 18.000$, $D_4 = 18.000$, $D_5 = 27.000$.

Naloga 4:

a) $1.150 \cdot 1{,}25 \cdot 1{,}20 = 1.725$ EUR

b) $1.150 \cdot 1{,}225 \cdot 1{,}20 = 1.690{,}50$ EUR

2. skupina (višja stopnja zahtevnosti)

Naloga 1:

a) $G = 8.600$, $n = 24$, $p = 3{,}1$

$$o = \frac{G \cdot p \cdot n}{1.200} = \frac{8.600 \cdot 3{,}1 \cdot 24}{1.200} = 533{,}20$$
$$G^{+} = 8.600 + 533{,}20 = 9.133{,}20$$

Prejmemo 533,20 EUR obresti. Končna glavnica je 9.133,20 EUR.

b) $G = 7.300$, $n = 12\,\text{mes}$, $G^{+} = 7.530$, $o = 230$

$$p = \frac{1.200 \cdot o}{G \cdot n} = \frac{1.200 \cdot 230}{7.300 \cdot 12} = 3{,}15\,\%$$

Obrestna mera znaša 3,15 %.

c) $G^{+} = 5.230$, $n = 12$, $p = 7{,}1\,\%$

$$G = \frac{G^{+} \cdot 1.200}{1.200 + p \cdot n} = \frac{5.230 \cdot 1.200}{1.200 + 7{,}1 \cdot 12} = 4.883{,}29$$

Najamemo 4.883,29 EUR kredita.

Naloga 2:

a) $G_0 = 8.000$, $n = 5\,\text{let}$, $o = 4.200$, $G_n = 12.200$

$$n = \left(1 - \sqrt[5]{\frac{8.000}{12.200}}\right) \cdot 100 = 8{,}0935\,\%$$

Anticipativna obrestna mera znaša 8,0935 %.

b) $G_0 = 7.000$, $\pi = 7{,}8\,\%$, $n = 4$

$$G_n = G_0 \cdot \rho^n = 7.000 \cdot \left(\frac{100}{100 - 7{,}8}\right)^4 = 9.686{,}67$$
$$o = 2.686{,}67$$

Plačati smo morali 2.686,67 EUR obresti.

c) $G_0 = 8.000$, $o = 2.300$, $\pi = 7{,}4\,\%$

$$n = \frac{\log\left(\frac{G_n}{G_0}\right)}{\log \rho} = \frac{\log\left(\frac{10.300}{8.000}\right)}{\log\left(\frac{100}{100 - 7{,}4}\right)} = 3{,}286927$$

Obresti narastejo na 2.300 EUR v 3 letih in 105 dneh.

Naloga 3:

a) $G_0 = 11.000$, $n = 390\,\text{dni}$, $p = 3{,}5\,\%$

$$r_M = 1 + \frac{p}{100 \cdot M}$$

$$G_n = G_0 \cdot r^n = 11.000 \cdot \left(1 + \frac{3{,}5}{36.500}\right)^{390} = 11.419{,}14$$

Na računu imamo 11.419,14 EUR.

b) $G_0 = 11.000$, $G_n = 11.500$, $p = 3{,}7\,\%$ p. a.

$$n = \frac{\log\left(\frac{G_n}{G_0}\right) \cdot 365}{\log r} = \frac{\log\left(\frac{11.500}{11.000}\right) \cdot 365}{\log 1{,}037} = 446{,}57$$

Vezava bi morala trajati 1 leto in 82 dni.

c) $G_0 = 11.000$, $n = 13\,\text{m}$, $G_n = 11.450$

$$p = \left(\sqrt[n]{\frac{G_n}{G}} - 1\right) \cdot 1.200 = \left(\sqrt[13]{\frac{11.450}{11.000}} - 1\right) \cdot 1.200 = 3{,}71$$

Letna obrestna mera je 3,71 %, mesečna pa $3{,}71/12 = 0{,}309166666\,\%$ p. m.

Naloga 4:

a) $r = 1{,}038$

$$S_n = 1.200 \cdot \frac{1{,}038^{18} - 1}{1{,}038 - 1} = 30.215{,}58$$

b) $r = \sqrt[12]{1{,}038} = 1{,}003112817$

$$S_n = a \cdot \frac{r^{216} - 1}{r - 1} = 100 \cdot \frac{r^{216} - 1}{r - 1} = 30.738{,}29$$

c) $r = \sqrt[12]{1{,}038} = 1{,}003112817$

$$30.000 = 3.000 \cdot r^{216} + a \cdot r \cdot \frac{r^{216} - 1}{r - 1}$$

$$s = 78{,}26$$

Rešitve nalog 9. državnega tekmovanja iz znanja poslovne matematike

1. skupina (nižja stopnja zahtevnosti)

Naloga 1:

a)

$$\begin{array}{ccc} 23 \text{ delavcev} & 21 \text{ dni} & x \text{ izdelkov} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 20 \text{ delavcev} & 22 \text{ dni} & 4.000 \text{ izdelkov} \end{array}$$

$$x = \frac{23 \cdot 21 \cdot 4.000}{20 \cdot 22} = 4.390 \,\text{izdelkov}$$

b)

$$\begin{array}{ccc} 5.500 \text{ izdelkov} & 26 \text{ dni} & x \text{ delavcev} \\ \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ 4.000 \text{ izdelkov} & 22 \text{ dni} & 20 \text{ delavcev} \end{array}$$

$$x = \frac{5.500 \cdot 20 \cdot 22}{4.000 \cdot 26} = 23{,}3$$

Zaposliti morajo še 2 delavca.

Naloga 2:

a)

$$\begin{array}{l|l} x \text{ EUR} & 1\,\text{l} \\ 3{,}7853\,\text{l} & 1\,\text{gl} \\ 1\,\text{gl} & 19\,\text{USD} \\ 1{,}3975\,\text{USD} & 1\,\text{EUR} \\ 100\,\text{EUR} & 96\,\text{EUR} \\ 100\,\text{EUR} & 112\,\text{EUR} \\ 100\,\text{EUR} & 122\,\text{EUR} \end{array}$$

$$x = \frac{1 \cdot 1 \cdot 19 \cdot 1 \cdot 96 \cdot 112 \cdot 122}{3{,}7853 \cdot 1 \cdot 1{,}3975 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100} = 4{,}71\,\text{EUR}$$

b)

$$\begin{array}{l|l} x \text{ EUR} & 1\,\text{l} \\ 3{,}7853\,\text{l} & 1\,\text{gl} \\ 0{,}9\,\text{gl} & 19\,\text{USD} \\ 1{,}3975\,\text{USD} & 1\,\text{EUR} \\ 100\,\text{EUR} & 96{,}5\,\text{EUR} \\ 100\,\text{EUR} & 111{,}5\,\text{EUR} \\ 100\,\text{EUR} & 120\,\text{EUR} \\ 1.000\,\text{EUR} & 1.008\,\text{EUR} \end{array}$$

$$x = \frac{1 \cdot 1 \cdot 19 \cdot 1 \cdot 96{,}5 \cdot 111{,}5 \cdot 120 \cdot 1.008}{3{,}7853 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}3975 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 1.000} = 5{,}19\,\text{EUR}$$

Naloga 3:

enota	kriterij	količina	enota	kriterij	količina
A	600	30 EUR	A	$600 \cdot 2{,}50 = 1.500$	30 EUR
B	1.200	60 EUR	B	$1.200 \cdot 3{,}25 = 3.900$	78 EUR
C	800	40 EUR	C	$800 \cdot 5{,}50 = 4.400$	88 EUR
masa		130,00 EUR	masa		196,00 EUR

enota	nab. vr.	transp.	zav.	skupaj	cena za kg
A	1.500	30 EUR	30 EUR	1.560 EUR	2,6 EUR
B	3.900	60 EUR	78 EUR	4.038 EUR	3,365 EUR
C	4.400	40 EUR	88 EUR	4.528 EUR	5,66 EUR
masa	9.800,00 EUR	130,00 EUR	196,00 EUR	196,00 EUR	

Naloga 4:

a) Mestna : $x = 20.000$
Gorska : $0{,}8 \cdot x = 16.000$
Otroška : $0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot x = 8.000$

$$\begin{aligned} 2{,}2 \cdot x &= 44.000 \\ x &= 20.000 \end{aligned}$$

b) $x = 1.250 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}93 = 1.046{,}25$

c)

$$\begin{aligned} 990 - \frac{990 \cdot p}{100} &= 900 + \frac{990 \cdot p}{100} \\ 990 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) &= 900 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \\ 990 - 9{,}9 \cdot p &= 900 + 9 \cdot p \\ 90 &= 18{,}9 \cdot p \\ p &= 4{,}76\,\% \end{aligned}$$

2. skupina (višja stopnja zahtevnosti)

Naloga 1:

a)

$$G^{+} = G + \frac{G \cdot p \cdot d}{36.500} = 4.800 + \frac{4.800 \cdot 4{,}5 \cdot 305}{36.500} = 4.980{,}49$$

b)

$$G = \frac{36.500 \cdot G^{+}}{36.500 + p \cdot d} = \frac{36.500 \cdot 6.000}{36.500 + 4{,}5 \cdot 305} = 5.782{,}56$$

$$\% = \left(\frac{5.782{,}56}{4.800} \cdot 100\right) - 100 = 20{,}47\,\%$$

c)
$$a = \frac{6.000}{2 + \frac{4{,}5 \cdot 18}{1.200}} = 2.902{,}06\,\text{EUR}$$

Naloga 2:

a) $r = \sqrt[4]{1{,}04} = 1{,}009853407$

$$G_n = 4.500 \cdot r^{20} + 3.300 \cdot r^{10} + 2.000 \cdot r^3 - 3.000 \cdot r = 8.145{,}05\,\text{EUR}$$

b) $r_1 = 1{,}0225$, $r_2 = 1{,}009375$

$$G_n = 4.500 \cdot r_1^6 \cdot r_2^8 + 3.300 \cdot r_1 \cdot r_2^8 + 2.000 \cdot r_2^3 - 3.000 \cdot r_2 = 8.205{,}75$$

c)
$$p = \left(\sqrt[18]{\frac{8.205{,}75 \cdot 1{,}0578}{8.205{,}75}} - 1 \right) \cdot 100 \cdot 12 = 3{,}75\,\%$$

Naloga 3:

a)
$$\Pi_m = \frac{4{,}8\,\%}{2} = 2{,}4\,\%$$
$$G_n = 30.000 \cdot \left(\frac{100}{97{,}6}\right)^6 + 20.000 \cdot \left(\frac{100}{97{,}6}\right)^{12} = 61.476{,}42$$

b)
$$G \cdot \rho^5 + G \cdot \rho^3 = 50.000 \qquad G = \frac{50.000}{\rho^5 + \rho^3} = 20.509{,}85$$

c)
$$15.000 \cdot \rho^5 = 18.396{,}50 \qquad \rho = \sqrt[5]{\frac{18.396{,}50}{15.000}} = 1{,}041666...$$
$$\Pi = \frac{100 \cdot (1{,}041666... - 1)}{1{,}041666...} = 4\,\%$$

Naloga 4:

a) $r = 1{,}005$

$$b = \frac{ar^{51} \cdot (r^{36} - 1) \cdot (r^6 - 1)}{(r^3 - 1) \cdot (r^{30} - 1)} = 3.166{,}78\,\text{d. e.}$$

b) $r = 1{,}015$

$$x = \frac{b \cdot (r^{10} - 1)}{r^{16} \cdot (r^2 - 1)} - ar \cdot \frac{r^{12} - 1}{r - 1} = 3.505{,}75\,\text{EUR}$$

Rešitve nalog 55. regijskega matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije

1. letnik

A1	A2	A3
C	C	D

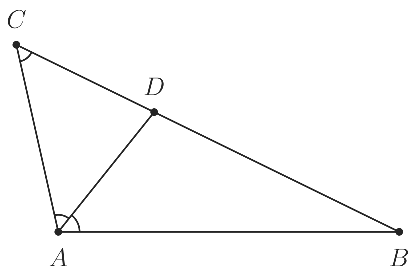
A1. Delež ploščine kvadrata, ki ga pokrije včrtani krog, je $\frac{\pi}{4}$. V kvadratu $ABCD$ ima vsak izmed devetih skladnih kvadratkov osenčen delež ploščine $\frac{\pi}{4}$, zato ima tudi kvadrat $ABCD$ osenčen tak del ploščine. Enako velja v kvadratu $EFGH$. Zato sta razmerji osenčenih ploščin enaki.

A2. Ker je $b = a - 2c$ in $d = b - c = a - 3c$, sledi $a + c = a - 2c + a - 3c$ in $a = 6c$.

A3. Ker je $\frac{n+m}{n-m} = \frac{n-m+2m}{n-m} = 1 + 2\frac{m}{n-m}$, bo vrednost največja, ko bo $n - m = 2$ in $m = 49$. Vrednost bo tedaj enaka 50.

B1. Enačbo preuredimo do $x(3y + 2) = 12 - y$. Očitno je $3y + 2 \neq 0$ in deli $12 - y$. Torej število $3y + 2$ deli $3(12 - y) + (3y + 2) = 38$. Ker ima $3y + 2$ ostanek 2 pri deljenju s 3, imamo štiri možnosti. Število $3y + 2$ je enako $-19, -1, 2$ ali 38. Zaporedoma dobimo, da je število y enako $-7, -1, 0$ ali 12, in nato še, da je število x enako $-1, -13, 6$ ali 0. Rešitve za (x, y) so $(-1, -7), (-13, -1), (6, 0)$ in $(0, 12)$.

B2. Očitno je $|BC| = 100$. Izračunajmo še dolžini ostalih stranic. Ker je $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC = \sphericalangle ACB$, sta si trikotnika ABD in CBA podobna. Torej je $\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|BC|}{|AB|}$. Iz druge enakosti dobimo $|AB| = \sqrt{|BD| \cdot |BC|} = \sqrt{64 \cdot 100} = 80$. Iz prve enakosti pa potem sledi $|AC| = \frac{|AD| \cdot |AB|}{|BD|} = \frac{36 \cdot 80}{64} = 45$.



B3. (a) Peter lahko skupno število kroglic poveča za 20. Najprej trikrat 20 modrih kroglic zamenja za 28 rdečih kroglic. Po tem ima $111 - 60 = 51$ modrih kroglic ter $111 + 3 \cdot 28 = 111 + 84 = 195$ rdečih. Nato 11 rdečih zamenja za 7 modrih. Tedaj ima 184 rdečih in 58 modrih kroglic, skupaj 242, kar je za 20 več od 222.

(b) Pri menjavi 11 rdečih kroglic za 7 modrih se skupno število kroglic zmanjša za 4. Pri menjavi 20 modrih kroglic za 28 rdečih se skupno število kroglic poveča za 8. Na začetku ima sodo mnogo kroglic, zato jih bo imel sodo mnogo tudi po vsaki menjavi. Zato skupnega števila ne more povečati za 33, saj je to število liho.

(c) Denimo, da Peter to lahko doseže. Naj bo x število rdečih kroglic. Modrih kroglic je tedaj $3x$, vseh pa $4x$. Po vsaki menjavi se število kroglic poveča ali zmanjša za večkratnik števila 4. Ker je imel Peter na začetku 222 kroglic, lahko dosega le števila oblike $222 + 4k$. Enačba $222 + 4k = 4x$ nima rešitev, saj število 222 ni deljivo s 4. Zato Peter ne more doseči, da bi bilo modrih kroglic trikrat toliko kot rdečih.

2. letnik

A1	A2	A3
C	C	D

A1. Delež ploščine trikotnika, ki ga pokrije včrtani krog, je $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$. V trikotniku ABC ima vsak izmed devetih skladnih trikotnikov osenčen delež ploščine $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$, zato ima tudi trikotnik ABC osenčen tak del ploščine. Enako velja v trikotniku DEF. Zato sta razmerji osenčenih ploščin enaki.

A2. Iz $c^2 = 2ab$ in $a^2 + c^2 = 3b^2$ sledi $a^2 + 2ab = 3b^2$ oziroma $(a + b)^2 = 4b^2$. Od tod dobimo $(a + b - 2b)(a + b + 2b) = 0$. Ker sta a in b pozitivni števili, je edina možnost $a = b$. Tedaj je $c^2 = 2a^2 = a^2 + b^2$. Trikotnik je tako enakokrak in pravokotni, zato so velikosti notranjih kotov $45°$, $45°$ in $90°$.

A3. Včeraj je bilo na igrišču $3t$ fantov in $2t$ deklet. Danes je na igrišču $3t-6$ fantov in $2t-7$ deklet. Iz zveze $3t - 6 = (2t - 7)^2$ sledi $4t^2 - 31t + 55 = 0$ oziroma $t_{1,2} = \frac{31\pm\sqrt{81}}{8}$. Edina možnost je $t = 5$, saj je t celo število. Včeraj je bilo na igrišču $3t = 15$ fantov in $2t = 10$ deklet, torej 25 otrok.

2. način Naj f in d označujeta števili fantov in deklet na igrišču včeraj opoldne. Velja $\frac{f}{d} = \frac{3}{2}$ oziroma $f = \frac{3d}{2}$. Danes je na igrišču $f - 6$ fantov in $d - 7$ deklet ter velja $f - 6 = (d - 7)^2$. Če vstavimo $f = \frac{3d}{2}$ dobimo $2d^2 - 31d + 110 = 0$ oziroma

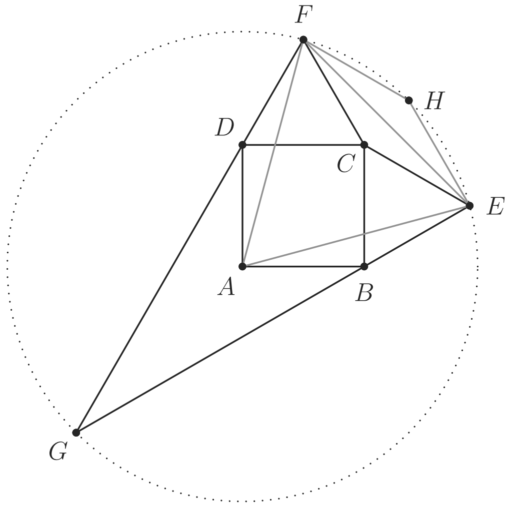
$$d_{1,2} = \frac{31 \pm \sqrt{31^2 - 880}}{4} = \frac{31 \pm 9}{4}.$$

Edina možnost je $d = 10$, saj je d celo število. Tedaj je $f = 15$. Včeraj opoldne je bilo na igrišču 25 otrok.

B1. Če je $\frac{a}{a-4} + \frac{2}{a} = \frac{a^2+2a-8}{a(a-4)}$ celo število, je $a(a-4)$ delitelj a^2+2a-8. Zato a deli a^2+2a-8, torej a deli 8. Vsi celoštevilski delitelji števila 8, različni od 4, so $1, 2, 8, -1, -2, -4$ in -8. Preverimo teh sedem možnosti in ugotovimo, da je vrednost izraza celo število le pri $a = 2$ in $a = -4$.

B2. Ker je štirikotnik $ABCD$ kvadrat, trikotnika BEC in CFD pa sta enakostranična, je $|CE| = |CB| = |CD| = |CF|$. Trikotnik FCE je tako enakokrak in velja

$$\begin{aligned} \sphericalangle ECF &= 2\pi - \sphericalangle FCD - \sphericalangle DCB - \sphericalangle BCE \\ &= 2\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$



Zato je $\sphericalangle CEF = \frac{\pi}{12}$ in $\sphericalangle EFC = \frac{\pi}{12}$. Ker je štirikotnik $CEHF$ romb, velja še $\sphericalangle FEH = \sphericalangle HFE = \frac{\pi}{12}$. Tedaj je $\sphericalangle BEH = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$ in prav tako $\sphericalangle DFH = \frac{\pi}{2}$. V štirikotniku $GEHF$ velja $\sphericalangle GEH + \sphericalangle HFG = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, zato točke G, E, H in F ležijo na isti krožnici.

B3. Predpostavimo, da je kroglica 1 rdeče barve. Če je tudi kroglica 2 rdeče barve, so rdeče še $1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$, $\ldots$, $1 + 11 = 12$. Torej so vse kroglice rdeče.

Če je kroglica 2 zelene barve, spet ločimo dve možnosti. V kolikor je kroglica 3 rdeče barve, so rdeče barve tudi $1+3 = 4$, $1+4 = 5$, $\ldots$, $1+11 = 12$, torej vse ostale kroglice. Če pa je kroglica 3 zelene barve, je tudi $2 + 3 = 5$ zelene barve. Ker je $1 + 4 = 5$ in je kroglica 5 zelene barve, 1 pa rdeče, kroglica 4 ne more biti rdeče barve, torej je zelene. Potem pa so zelene tudi kroglice s števili $4 + 2 = 6$, $5 + 2 = 7$, $6 + 2 = 8$, $\ldots$, $9 + 2 = 11$, $10 + 2 = 12$, torej vse ostale.

Dobili smo tri možnosti. Če zamenjamo vlogi zelene in rdeče barve, dobimo še 3 barvanja. Vseh načinov je 6 in sicer: vse kroglice so rdeče, vse kroglice so zelene, vse kroglice razen kroglice 1 so zelene, vse kroglice razen kroglice 1 so rdeče, vse kroglice razen kroglice 2 so rdeče in vse kroglice razen kroglice 2 so zelene barve.

3. letnik

A1	A2	A3
E	E	C

A1. Če označimo polmere krožnic z r, velja $r\sqrt{3} + 2r + r\sqrt{3} = 1$. Sledi $r = \frac{1}{2(1+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

A2. Ker je $2\cos 10° + \sin 100° + \sin 1000° + \sin 10000° = 2\cos 10° + \sin 80° - \sin 80° - \sin 80° = \sin 80°$, sledi $x = 80°$.

A3. Jasno je $m > 3$ in $n > 2$. Ker z naraščajočim m število n pada, vidimo, da so možne le rešitve $(m, n) \in \{(4, 8), (5, 5), (6, 4), (9, 3)\}$.

B1. Enačbo preoblikujemo

$$
\begin{aligned}
9 &= \log_2(10x) + \log_4(100x) + \log_8(1000x) - 2\log_{64} x \\
&= \log_2(10x) + \frac{\log(100x)}{\log 4} + \frac{\log(1000x)}{\log 8} - \frac{2\log x}{\log 64} = \\
&= \log_2(10x) + \frac{\log(100x)}{2\log 2} + \frac{\log(1000x)}{3\log 2} - \frac{2\log x}{6\log 2} = \\
&= \log_2(10x) + \frac{1}{2}\log_2(100x) + \frac{1}{3}\log_2(1000x) - \frac{1}{3}\log_2 x = \\
&= \log_2(10x) + \log_2(\sqrt{100x}) + \log_2(\sqrt[3]{1000x}) - \log_2 \sqrt[3]{x} = \\
&= \log_2\left(\frac{10x \cdot \sqrt{100x} \cdot \sqrt[3]{1000x}}{\sqrt[3]{x}}\right) \\
&= \log_2(1000\sqrt{x^3}),
\end{aligned}
$$

od koder sledi $1000\sqrt{x^3} = 2^9$ oziroma $x = \left(\frac{2^9}{10^3}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{16}{25}$.

2. način Levo stran lahko preoblikujemo

$$
\begin{aligned}
&\log_2(10x) + \log_4(100x) + \log_8(1000x) - 2\log_{64} x = \\
&= \frac{\log(10x)}{\log 2} + \frac{\log(100x)}{\log 4} + \frac{\log(1000x)}{\log 8} - \frac{2\log x}{\log 64} = \\
&= \frac{\log 10 + \log x}{\log 2} + \frac{\log 100 + \log x}{\log 2^2} + \frac{\log 1000 + \log x}{\log 2^3} - \frac{2\log x}{\log 2^6} = \\
&= \frac{1 + \log x}{\log 2} + \frac{2 + \log x}{2\log 2} + \frac{3 + \log x}{3\log 2} - \frac{2\log x}{6\log 2} = \\
&= \frac{1}{\log 2}\left((1+1+1) + \log x\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)\right) = \\
&= \frac{3 + \frac{3}{2}\log x}{\log 2} = \frac{6 + 3\log x}{2\log 2}.
\end{aligned}
$$

Torej imamo enačbo

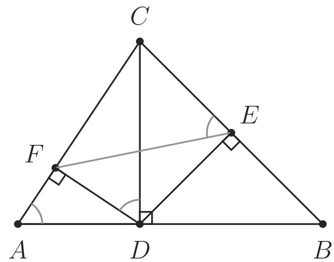
$$
\frac{6 + 3\log x}{2\log 2} = 9.
$$

Od tod lahko izrazimo $\log x = \frac{1}{3}(18\log 2 - 6) = 6\log 2 - 2$, torej je

$$
x = 10^{6\log 2 - 2} = \frac{(10^{\log 2})^6}{10^2} = \frac{2^6}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{2^4}{5^2} = \frac{16}{25}.
$$

B2. Označimo $\sphericalangle BAC = \alpha$. Ker leži točka D na daljici AB, kota $\sphericalangle BAC$ in $\sphericalangle CBA$ nista topa. Če točka D sovpada z A ali B je trditev očitna. V nadaljevanju zato privzemimo, da leži točka znotraj daljice AB.

Tedaj je $\sphericalangle FDA = \frac{\pi}{2} - \alpha$ in $\sphericalangle FDC = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle FDA = \alpha$. V štirikotniku $DECF$ velja $\sphericalangle DEC + \sphericalangle CFD = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, zato je tetiven. Od tod sledi $\sphericalangle CEF = \sphericalangle CDF = \alpha$. Torej je $\sphericalangle FEB = \pi - \sphericalangle FEC = \pi - \alpha$, zato velja $\sphericalangle BAF + \sphericalangle FEB = \alpha + \pi - \alpha = \pi$. Štirikotnik $ABEF$ je zato tetiven.



B3. Očitno ustrezajo vsa barvanja, v katerih je največ ena kroglica rdeča. Denimo, da sta rdeči vsaj dve kroglici. Naj bosta $a < b$ najmanjši števili na rdečih kroglicah.

Če je $a = 1$ in $b = 2$, po pravilu a) dobimo, da so vse kroglice rdeče. Če je $a = 1$ in $b > 2$, je zelena kroglica 2 in po pravilu b) dobimo, da je tudi kroglica 3 zelena. Z večkratno uporabo pravila b) sklepamo, da so vse ostale kroglice zelene, kar je v nasprotju s predpostavko, da sta vsaj dve kroglici rdeči.

Naj bo $a > 1$. Kroglice $1, 2, \ldots, a-1$ so zelene. Po pravilu b) so zelene tudi $a+1, a+2, \ldots, a+(a-1) = 2a-1$. Če je kroglica $2a$ zelena, so po pravilu b) zelene tudi $a+(a+1) = 2a+1, \ldots, a+(2a-1) = 3a-1, a+2a = 3a$. Z uporabo pravila b) nadaljujemo in ugotovimo, da nobena kroglica ne more biti rdeča. Od tod sledi, da je kroglica $2a$ rdeča. Po pravilu b) za tista izmed števil $2a+1, 2a+2, \ldots, 3a-1$, ki so manjša od 13, velja, da so kroglice s temi števili zelene. Če je $3a < 13$ po pravilu a) sledi, da je kroglica $3a$ rdeča. S tem sklepom nadaljujemo in ugotovimo, da so rdeče natanko tiste kroglice, ki so večkratniki števila a. Ker sta rdeči kroglici vsaj dve, je $2a \leq 12$, torej $a \leq 6$.

Ugotovili smo, da so možna naslednja barvanja

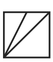
- vse kroglice so zelene,
- natanko ena kroglica je rdeča (teh barvanj je 12),
- rdeče so kroglice s števili, ki so večkratniki števila $a \leq 6$ (možnosti za izbiro a je 6).

Vseh barvanj je 19.

4. letnik

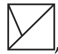
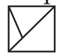
A1	A2	A3
B	B	D

A1. Imamo le tri bistveno različne načine, kako lahko kvadrat razdelimo na tri trikotnike:

 eden od rezov poteka po diagonali, drugi pa od oglišča do točke na stranici,

 eden od rezov poteka po diagonali, drugi pa od oglišča do diagonale,

 oba reza potekata od oglišča do skupne točke na stranici.

Opazimo, da ima v vseh treh primerih večji izmed trikotnikov ploščino 0.5 cm^2. Protiprimeri za trditve A, C, D in E so zaporedoma , ,  in .

A2. Drugi člen aritmetičnega zaporedja je $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + a_3) = \frac{1}{2}(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}) = \frac{4}{15}$.

A3. Večkratniki števila 3 imajo vsoto števk deljivo s 3. Vsota števk iskanih števil je tako deljiva z 21. Ker je vsota števk vsakega števila, manjšega od 1000, manjša ali enaka $9+9+9=27$, vsota števk iskanih števil pa je večkratnik 21, je edina možnost, da je ta vsota enaka 21.

Najmanjša števka je vsaj $21-18=3$ in največ $\frac{21}{3}=7$. Vse možnosti za števke predstavljajo trojice $(3,9,9)$, $(4,8,9)$, $(5,7,9)$, $(5,8,8)$, $(6,6,9)$, $(6,7,8)$ in $(7,7,7)$. Trojica s tremi različnimi števkami določa šest možnih števil, trojica z dvema enakima števkama tri možna števila in trojica $(7,7,7)$ eno število. Vseh takih števil je $3\cdot 6 + 3 \cdot 3 + 1 = 28$.

B1. Obravnavajmo najprej primer $x > 0$. Ker velja $(x-1)^2 \geq 0$ oziroma $x^2+1 \geq 2x$, po deljenju z x dobimo

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \geq 2\cos\alpha = x + \frac{1}{x}.$$

Zato mora biti $\cos\alpha = 1$ in $x + 1/x = 2$. Torej je $x = 1$. Od tod sledi $x^n + 1/x^n = 1 + 1 = 2 = \cos(n\,\alpha)$. Če je $x < 0$, iz podobnega razmisleka za $(x+1)^2 \geq 0$ sledi $x = -1$ in $\cos\alpha = -1$, od tod $x^n + 1/x^n = 2(-1)^n = 2\cos(n\,\alpha)$.

2. način Iz enačbe sledi $x^2 - 2x\cos\alpha + 1 = 0$ oziroma

$$x_{1,2} = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}}{2} = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1}.$$

Diskriminanta mora biti nenegativna, zato velja $\cos^2\alpha \geq 1$, kar je možno le, kadar je $\cos^2\alpha = 1$. Če je $\cos\alpha = 1$, sledi $x = 1$, pri $\cos\alpha = -1$ pa $x = -1$. V obeh primerih velja $x^n + 1/x^n = 2(-1)^n = 2\cos(n\,\alpha)$.

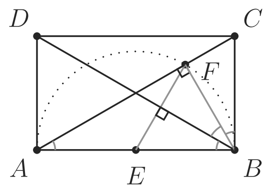
3. način Nalogo dokažimo z indukcijo na n. Za $n = 1$ enakost $x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$ drži po predpostavki naloge. Za $n = 2$ zahtevana enakost tudi drži, saj je

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = (2\cos\alpha)^2 - 2 = 4\cos^2\alpha - 2 = 2(2\cos^2\alpha - 1) = 2\cos 2\alpha.$$

Predpostavimo zdaj, da za nek n veljata enakosti $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos(n\alpha)$ in $x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} = 2\cos((n-1)\alpha)$. Z uporabo te indukcijske predpostavke in znanih formul za produkte kotnih funkcij dobimo

$$\begin{aligned}
x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) - \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) \\
&= 4\cos\alpha\cos n\alpha - 2\cos(n-1)\alpha \\
&= 2(\cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha) - 2\cos(n-1)\alpha \\
&= 2\cos(n+1)\alpha.
\end{aligned}$$

B2. Označimo $\sphericalangle BAC = \alpha$. Trikotnik ABF je pravokotni in točka E je razpolovišče hipotenuze, zato je središče trikotniku ABF očrtane krožnice in velja $|AE| = |BE| = |FE|$. Torej je $\sphericalangle AFE = \sphericalangle EAF = \alpha$, zato je $\sphericalangle EFB = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle AFE = \frac{\pi}{2} - \alpha$, od koder sledi $\sphericalangle FBD = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle EFB = \alpha$. Velja še $\sphericalangle ACB = \frac{\pi}{2} - \alpha$, zato je $\sphericalangle CBF = \alpha$. Prav tako je $\sphericalangle DBA = \sphericalangle BAC = \alpha$. Dobili smo $\frac{\pi}{2} = \sphericalangle CBA = \sphericalangle DBA + \sphericalangle FBD + \sphericalangle CBF = 3\alpha$, od koder sledi $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Trikotnik ABC je polovica enakostraničnega, zato je $\frac{|AB|}{|BC|} = \sqrt{3}$.



2. način Označimo $|AB| = a$ in $|BC| = b$ in naj bo T presečišče premic BD in EF, S pa presečišče diagonal. Po Pitagorovem izreku je $|AC| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Trikotnika ABC in AFB se ujemata v velikosti skupnega ostrega kota in sta oba pravokotna, zato sta si podobna. Sledi $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AF|}{|AB|}$, od koder izpeljemo $|AF| = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Od tod sledi še $|FC| = |AC| - |AF| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Po Pitagorovem izreku v trikotniku BCF sledi $|BF| = \sqrt{|BC|^2 - |CF|^2} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Ker je $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DBA$, sta si tudi pravokotna trikotnika ABC in BTE podobna. Zato je $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BT|}{|BE|}$ in zaradi $|BE| = \frac{|AB|}{2}$ lahko izrazimo $|BT| = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}$.

Po Pitagorovem izreku v trikotniku BFT sledi $|FT|^2 = |BF|^2 - |BT|^2 = \frac{a^2(4b^2-a^2)}{4(a^2+b^2)}$. Velja še Pitagorov izrek za trikotnik SFT in sicer $|TS|^2 + |TF|^2 = |SF|^2$. Ker je $|SF| = |AF| - \frac{|AC|}{2}$ (ali $|SF| = \frac{|AC|}{2} - |AF|$, če je F med A in S) in $|TS| = \frac{1}{2}|BD| - |BT|$, od tod izpeljemo

$$\frac{b^4}{4(a^2+b^2)} + \frac{a^2(4b^2-a^2)}{4(a^2+b^2)} = \frac{(a^2-b^2)^2}{4(a^2+b^2)}$$

oziroma $2a^4 - 6a^2b^2 = 0$. Od tod sledi $2a^2(a^2 - 3b^2) = 0$. Ker sta a in b pozitivni števili, je edina možnost $a = \sqrt{3}b$.

B3. Jan je lahko prestavil 6 kroglic. Če je izbral vse kroglice z lihimi števili, je razlika števil na poljubnih dveh kroglicah sodo število, ki ni zapisano na nobeni kroglici v zeleni škatli.

Denimo, da je Jan prestavil vsaj 7 kroglic. Naj bodo števila na sedmih kroglicah v zeleni škatli $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7$. Tedaj je $a_7 - a_1$, $a_6 - a_1$, $a_5 - a_1$, $a_4 - a_1$, $a_3 - a_1$, $a_2 - a_1$ šest različnih naravnih števil, manjših od 12. Kroglice s temi števili so v rdeči škatli. Slednje ni možno, saj je v rdeči škatli največ pet kroglic.

Rešitve nalog 55. državnega matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije

1. letnik

I/1. Če je (p, q) rešitev naloge, je tudi (q, p) rešitev. Zato je dovolj obravnavati primer $p \leq q$. Očitno $p = q = 2$ ni rešitev. Če sta p in q lihi praštevili, je število $2^2 + p^2 + q^2$ sodo in večje od 2, zato ni praštevilo. Torej je $p = 2$.

Ugotovimo, kdaj je število $8 + q^2$ praštevilo. Če je $q = 3$, je $8 + q^2 = 17$ praštevilo. Sicer je s 3 deljivo eno izmed števil $q - 1$ oziroma $q + 1$, zato 3 deli $9 + (q-1)(q+1) = 8 + q^2$ in ni praštevilo.

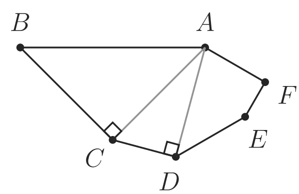
Število $2^2 + p^2 + q^2$ je praštevilo le, če je $p = 2$ in $q = 3$ ali $p = 3$ in $q = 2$.

I/2. Iz prve enačbe sledi $x(1-y) = 1 - y^2$ oziroma $(1-y)(x-1-y) = 0$. Če je $y = 1$, ta enačba velja, iz druge pa sledi $x = 5$. V primeru $y \neq 1$ dobimo $x = 1 + y$. Skupaj z drugo enačbo tedaj velja $(1+y)y = 4 + y$ oziroma $y^2 = 4$. Od tod sledi $y = 2$ ali $y = -2$.

Enačbi veljata za števili $x = 5$, $y = 1$, števili $x = 3$, $y = 2$ in števili $x = -1$, $y = -2$.

2. način Iz druge enačbe izrazimo $x = \frac{4}{y} + 1$ in vstavimo v prvo, še prej pa preverimo, da v primeru $y = 0$ ne dobimo nobene rešitve. Tako imamo $\frac{4}{y} + 1 + y^2 = 5 + y$ oziroma $y^3 - y^2 - 4y + 4 = 0$. Preoblikujemo v $y^2(y-1) - 4(y-1) = 0$ oziroma $(y-1)(y^2-4) = 0$. Od tod sledi $y = 1$ ali $y^2 = 4$, torej $y = 1$ ali $y = 2$ ali $y = -2$.

Enačbi veljata za števili $x = 5$, $y = 1$, števili $x = 3$, $y = 2$ in števili $x = -1$, $y = -2$.



I/3. Označimo $|AB| = a$. Ker je ABC enakokrak pravokotni trikotnik z vrhom C, je $|AC| = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ in $\angle ABC = \angle BAC = \frac{\pi}{4}$. Zaradi podobnosti trikotnikov ADE in ABC sledi $\angle AED = \angle ACB = \frac{\pi}{2}$ in $|DE| = |AE|$.
Iz podobnosti trikotnikov BCD in DEF sklepamo $\angle BCD = \angle DEF$ in $\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|DE|}{|EF|}$. Torej je

$$\angle ACD = \angle BCD - \frac{\pi}{2} = \angle DEF - \frac{\pi}{2} = \angle AEF$$

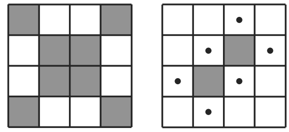
in

$$\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|DE|}{|EF|} = \frac{|AE|}{|EF|},$$

zato sta si trikotnika ACD in AEF podobna in velja še $\angle CAD = \angle EAF$.
Iz

$$150° = \angle BAF = \angle BAC + \angle CAD + \angle CAE + \angle EAF = \frac{\pi}{2} + 2\angle CAD$$

sledi $\angle CAD = 30°$. Tako je trikotnik CAD polovica enakostraničnega trikotnika in je $|AD| = \frac{|AC|\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. Trikotnik ADE je enakokrak pravokotni trikotnik, zato je $|AE| = \frac{|AD|}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Upoštevamo še, da je trikotnik AEF polovica enakostraničnega, in izračunamo $|AF| = \frac{|AE|\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{8}$. Dobili smo $\frac{|AB|}{|AF|} = \frac{8}{3}$.



I/4. Na tabelo lahko položimo štiri ploščice, kot prikazuje prva slika. Vsako nepokrito polje ima vsaj eno sosednje polje pokrito. Utemeljimo, da z manj kot štirimi ploščicami tega ne moremo narediti. Opazujmo ploščico, ki leži na tabeli. Označimo še polja, ki so sosednja pokritim. V vsaki vrstici so največ tri polja takšna, da so bodisi pokrita bodisi sosednja pokritim, in vsa ta polja so zaporedna. Enako velja za stolpce in diagonale. Tabela ima štiri vogalna polja. Če bi jo lahko pokrili z največ tremi ploščicami tako, da bi bilo vsako polje pokrito ali sosednje pokritemu, bi morala ena izmed treh ploščic pokriti oziroma biti sosedna vsaj dvema vogalnima poljema, kar ni možno.

2. letnik

II/1. Naj bo d največji skupni delitelj števil m in n. Tedaj je $m = dm_1$ in $n = dn_1$, števili m_1 in n_1 pa sta si tuji. Najmanjši skupni večkratnik m in n je dm_1n_1. Velja

$$101 = d + dm_1n_1 = d(1 + m_1n_1).$$

Ker je $1 + m_1n_1 \geq 2$ in je 101 praštevilo, je edina možnost $d = 1$ in $m_1n_1 = 100$. Števili $m = m_1$ in $n = n_1$ sta si tuji. Tisto, ki je deljivo z 2, je zato deljivo s 4. Tisto, ki je deljivo s 5, je zato deljivo s 25. Možni pari rešitev so $(1, 100)$, $(4, 25)$, $(25, 4)$ in $(100, 1)$.

II/2. Za vsako realno število a velja $|a| \geq a$ in $|a| \geq -a$. Zato je

$$|x + y| \geq -(x + y), \quad |x + 1| \geq x + 1, \quad |y + 1| \geq y + 1, \tag{1}$$

od koder sledi

$$|x + y| + |x + 1| + |y + 1| \geq -(x + y) + (x + 1) + (y + 1) = 2.$$

Denimo, da velja enakost. Tedaj veljajo enačaji v vseh treh neenakostih v (1) in je $x+y \leq 0$, $x + 1 \geq 0$ ter $y + 1 \geq 0$. Dobimo $-1 \leq x \leq -y \leq 1$ oziroma $-1 \leq x \leq 1$. Če je $-1 \leq x \leq 1$ in $y = -x$, velja

$$|x + y| + |x + 1| + |y + 1| = 2.$$

Zaključimo lahko, da le za realna števila $x \in [-1, 1]$ obstaja število y, da je ta enakost izpolnjena.

2. način. Obravnavajmo primere glede na to, kakšnega predznaka sta števili $x + 1$ in $y + 1$. Ločimo 4 možnosti.

1. Če sta števili x in y obe manjši od -1, velja $x + y < -2$ oziroma $|x + y| > 2$. Zaradi $|x + 1| > 0$ in $|y + 1| > 0$ sledi

$$|x + y| + |x + 1| + |y + 1| > 2. \tag{2}$$

2. V primeru $x \geq -1$, $y < -1$ je

$$|x + y| + |x + 1| + |y + 1| = |x + y| + x + 1 - y - 1 = |x + y| + x - y.$$

Če je $x + y < 0$, dobimo

$$|x + y| + x - y = -(x + y) + x - y = -2y.$$

Zaradi $y < -1$ velja $-y > 1$, torej $-2y > 2$ in zato velja ocena (2). Če je $x + y \geq 0$, dobimo naprej $|x + y| + x - y = x + y + x - y = 2x$. Zaradi $x + y \geq 0$ sledi $x \geq -y > 1$, torej je $2x > 2$ in velja neenakost (2).

3. Podobno obravnavamo $x < -1$, $y \geq -1$ in prav tako dobimo neenakost (2).

4. Ostane še $x \geq -1$, $y \geq -1$. Tedaj velja

$$|x + y| + |x + 1| + |y + 1| = |x + y| + x + y + 2.$$

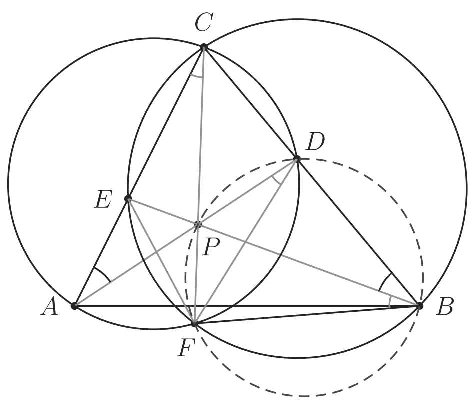
V kolikor je $x + y > 0$, naprej dobimo $|x + y| + x + y + 2 = 2(x + y) + 2 > 2$, torej velja neenkost (2). Sicer je $x + y \leq 0$ in velja $|x + y| + x + y + 2 = -(x + y) + x + y + 2 = 2$.

Pokažimo, da pri vsakem $x \in [-1, 1]$ obstaja tako število y, da velja enačaj. To število je na primer $y = -x$, kajti tedaj je $y \geq -1$ in zato

$$|x + y| + |x + 1| + |y + 1| = 0 + x + 1 + y + 1 = 2 + x + y = 2.$$

Utemeljiti moramo še, da enačba ne more veljati za ostala števila x. Pri obravnavi možnosti smo videli, da velja neenakost (2) v vsakem primeru razen $x \geq -1$, $y \geq -1$ in $x + y \leq 0$. Od tod sledi $x \leq -y \leq -(-1) = 1$, zato velja ocena $-1 \leq x \leq 1$.

II/3. S pomočjo obodnih kotov v štirikotnikih $AFDC$ in $BCEF$ ter dane enakosti $\angle CBP = \angle PAC$ izpeljemo



$$\begin{aligned} \angle CFE &= \angle CBE = \angle CBP = \angle PAC \\ &= \angle DAC = \angle DFC, \end{aligned}$$

zato je premica CF simetrala kota $\angle DEF$. Pokazati moramo še, da točka P leži na premici CF.
V tetivnem štirikotniku $BCEF$ je $\angle EBF = \angle ECF$, v tetivnem štirikotniku $AFDC$ pa $\angle ACF = \angle ADF$. Zato je

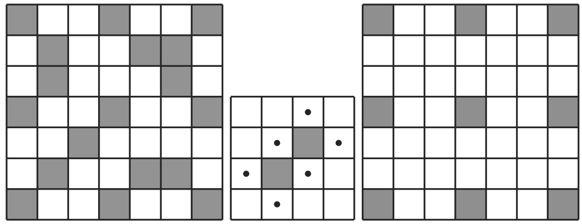
$$\angle PBF = \angle EBF = \angle ECF = \angle ACF = \angle ADF = \angle PDF.$$

Torej točke B, D, P in F ležijo na isti krožnici. S pomočjo obodnih kotov v tetivnih štirikotnikih $BDPF$ in $AFDC$ izpeljemo

$$\angle DFP = \angle DBP = \angle CBP = \angle PAC = \angle DAC = \angle DFC,$$

od koder sledi kolinearnost točke C, P in F.

II/4. Na tabelo lahko položimo devet ploščic, kot prikazuje prva slika. Vsako nepokrito polje ima vsaj eno sosednje polje pokrito. Utemeljimo, da z manj kot devetimi ploščicami tega ne moremo narediti. Opazujmo ploščico, ki leži na tabeli. Označimo še polja, ki so sosednja pokritim. V vsaki vrstici so največ tri polja takšna, da so bodisi pokrita bodisi sosednja pokritim, in vsa ta polja so zaporedna. Enako velja za stolpce in diagonale. Pobarvajmo devet polj, kot prikazuje tretja slika. Če bi tabelo lahko pokrili z največ osmimi ploščicami tako, da bi bilo vsako polje pokrito ali sosednje pokritemu, bi morala ena izmed teh ploščic pokriti oziroma biti sosedna dvema pobarvanima poljema, kar ni možno.



3. letnik

III/1. Naj bo $9x^2 - 40x + 39 = p^n$ za neko praštevilo p in nenegativno celo število n. Iz

$$p^n = 9x^2 - 40x + 39 = (9x - 13)(x - 3)$$

sledi $9x - 13 = p^k$ in $x - 3 = p^l$ ali $9x - 13 = -p^k$ in $x - 3 = -p^l$ za neki števili k in l, kjer je $0 \leq l < k$ in $n = k + l$.

Rešimo najprej sistem enačb $9x - 13 = p^k$ in $x - 3 = p^l$. Velja $9(p^l + 3) - 13 = p^k$ oziroma $14 = p^k - 9p^l = p^l(p^{k-l} - 9)$. Če je $l = 0$, dobimo $p^k = 23$, torej $p = 23$, $k = 1$ in $x = 4$. Sicer je $l \geq 1$ in $p^l \mid 14$, torej je $p^l = 2$ in $p^{k-l} - 9 = 7$ ali $p^l = 7$ in $p^{k-l} - 9 = 2$. V prvem primeru dobimo $p = 2$, $l = 1$, $k = 5$ in $x = 5$, v drugem pa rešitve ni.

Ostane še obravnava sistema enačb $9x - 13 = -p^k$ in $x - 3 = -p^l$. Tedaj je $14 = p^l(9 - p^{k-l})$. Edini možnosti sta $p = 2$, $l = 1$ ali $p = 7$, $l = 1$ (v tem primeru $l = 0$ ni mogoče). Pripadajoči števili sta $x = 1$ in $x = -4$.

Nalogi zadoščajo števila $x = -4$, $x = 1$, $x = 4$ in $x = 5$.

III/2. Naj bo P polinom, ki ustreza pogojem naloge in p poljubno praštevilo. Če je q praštevilo, ki deli $P(p)$, potem deli tudi p, torej je $q = p$. Zato za vsako praštevilo p velja $P(p) = \pm p^{m_p}$ za neko nenegativno celo število m_p, ki je lahko odvisno od p.

Polinoma $P(x) = \pm 1$ očitno ustrezata pogojem. Denimo, da polinom P ni konstantno enak 1 oziroma -1. Naj bo

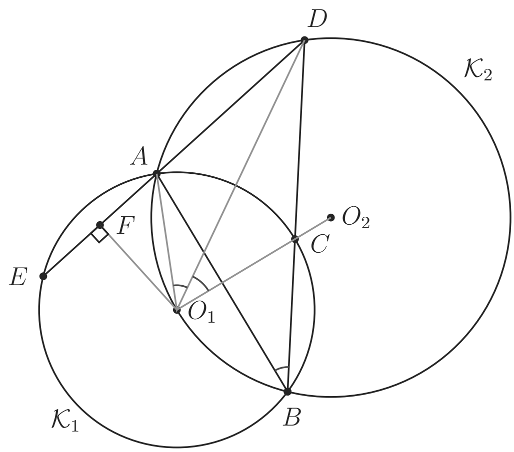
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Polinom P zavzame vrednosti 1 in -1 kvečjemu za končno mnogo praštevil. Zato za neskončno praštevil velja

$$\pm p^{m_p} = P(p) = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$$

oziroma $p \mid a_0$. To je možno le v primeru $a_0 = 0$. Zapišimo $P(x) = x^k Q(x)$, kjer je $k \in \mathbb{N}$ in Q tak polinom s celimi koeficienti, da je $Q(0) \neq 0$. Naj bo a celo število in p praštevilo, ki deli $Q(a)$. Tedaj p deli $P(a)$, zato deli tudi a. To pomeni, da polinom Q ustreza pogojem naloge. Ker je $Q(0) \neq 0$, mora biti polinom Q po zgoraj pokazanem enak 1 oziroma -1. Vsi iskani polinomi so $P(x) = \pm x^n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ti polinomi očitno ustrezajo pogojem naloge.

III/3. Označimo $\angle ABD = \alpha$. Zaradi tetivnosti štirikotnika AO_1BD je $\angle AO_1D = \angle ABD = \alpha$. Središčni kot $\angle AO_1C$ v krožnici $\mathcal{K}_1$ je dvakrat večji od obodnega kota $\angle ABC$, zato je $\angle AO_1C = 2\alpha$. Od tod sledi



$$\begin{aligned} \angle DO_1C &= \angle AO_1C - \angle AO_1D \\ &= 2\alpha - \alpha = \alpha. \end{aligned}$$

Daljica AB je pravokotna na daljico O_1O_2 in štirikotnik AO_1BO_2 je deltoid. Zato je

$$\begin{aligned} \angle ABO_1 &= \angle O_1AB = \frac{\pi}{2} - \angle O_2O_1A \\ &= \frac{\pi}{2} - \angle AO_1D - \angle DO_1C = \frac{\pi}{2} - 2\alpha. \end{aligned}$$

Upoštevamo še tetivnost štirikotnika AO_1BD in izpeljemo $\angle ADO_1 = \angle ABO_1 = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$. Ker je točka F razpolovišče daljice AE, velja $\angle AFO_1 = \frac{\pi}{2}$. Od tod sledi $\angle FO_1D = \frac{\pi}{2} - \angle FDO_1 = 2\alpha$ in

$$\angle AO_1F = \angle DO_1F - \angle DO_1A = 2\alpha - \alpha = \alpha.$$

Pokazali smo $\angle AO_1F = \alpha = \angle AO_1C = \angle DO_1C$, torej premici AO_1 in DO_1 razdelita kot CO_1F na tri enake dele.

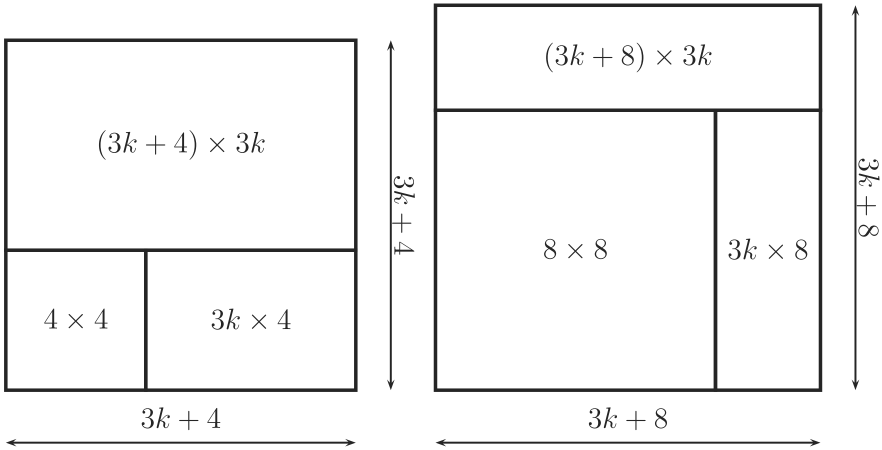
III/4. Tabelo 3×3 lahko pokrijemo s tremi ploščicami velikosti 3×1, tabelo 4×4 pa z eno ploščico velikosti 4×4. Utemeljimo, da tabele 5×5 ne moremo pokriti. S ploščicami 3×1 lahko pokrijemo le število polj, deljivih s 3. Tabela ima 25 polj, zato moramo uporabiti ploščico 4×4. V tem primeru preostalih 9 polj očitno ne moremo pokriti s tremi 3×1 ploščicami.

Naj bo k naravno število. Vsak stolpec tabele $3k \times 3k$ očitno lahko pokrijemo s k ploščicami 3×1, torej lahko pokrijemo tudi celo tabelo. Pokrijemo lahko tudi vsak pravokotnik velikosti $3k \times m$ in prav tako pravokotnike $m \times 3k$ (vsako vrstico pokrijemo s k ploščicami 3×1).

Vsa naravna števila $n \geq 7$, ki dajo pri deljenju s 3 ostanek 1, lahko zapišemo v obliki $3k + 4$ za neko naravno število k. Tabele oblike $(3k + 4) \times (3k + 4)$ razdelimo na kvadrat velikosti 4×4, pravokotnik velikosti $(3k + 4) \times 3k$ in pravokotnik velikosti $3k \times 4$ (glej sliko). Kvadrat 4×4 pokrijemo s ploščico enake velikosti, ostala pravokotnika pa, kot smo že utemeljili, s ploščicami 3×1.

Tabelo 8×8 lahko pokrijemo s štirimi ploščicami 4×4. Vsa naravna števila $n \geq 11$, ki dajo pri deljenju s 3 ostanek 2, lahko zapišemo v obliki $n = 3k + 8$. Tabelo velikosti $(3k+8) \times (3k+8)$ razdelimo na kvadrat velikosti 8×8 in pravokotnika velikosti $(3k+8) \times 8$ ter $3k \times 8$. Kvadrat pokrijemo s štirimi ploščicami 4×4, pravokotnika pa s ploščicami 3×1.

Pokrijemo lahko tabele $n \times n$ za vsa naravna števila $n \geq 3$ razen $n = 5$.



4. letnik

IV/1. Recimo, da tako število obstaja. Iz $x^4 - 2011x^2 + n = 0$ sledi

$$x^2 = \frac{2011 \pm \sqrt{2011^2 - 4n}}{2}.$$

Ker je to število celo, je $2011^2 - 4n$ popolni kvadrat. Zapišemo lahko $2011^2 - 4n = m^2$ za neko liho naravno število m oziroma $n = \frac{2011^2 - m^2}{4}$. Zato je $x^2 = \frac{2011 \pm m}{2}$. Števili $\frac{2011+m}{2}$ in $\frac{2011-m}{2}$ sta tako popolna kvadrata, njuna vsota je 2011. Utemeljimo, da števila 2011 ne moremo zapisati kot vsote dveh popolnih kvadratov. Ostanek popolnega kvadrata pri deljenju s 4 je bodisi 0 bodisi 1. Ostanek vsote dveh popolnih kvadratov pri deljenju s 4 je tako 0, 1 ali 2. Ker da število 2011 pri deljenju s 4 ostanek 3, ne more biti enako vsoti dveh popolnih kvadratov. Tako celo število n, da bi imel polinom $x^4 - 2011x^2 + n$ same cele ničle, ne obstaja.

IV/2. V funkcijsko enačbo vstavimo $x = 0$ in dobimo $f(-y) = -f(y)$ za vsako realno število y. Funkcija f je liha. Vstavimo še $x = \frac{\pi}{2}$ in izpeljemo $f(y + \frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2} - y)$ za vsa realna števila y. Z upoštevanjem lihosti dobimo $f(y + \frac{\pi}{2}) = -f(y - \frac{\pi}{2})$. Iz prvotne enačbe za $y = \frac{\pi}{2}$ sledi

$$f\big(x + \frac{\pi}{2}\big) = f\big(x - \frac{\pi}{2}\big) + 2 \cdot f\big(\frac{\pi}{2}\big) \cdot \cos x.$$

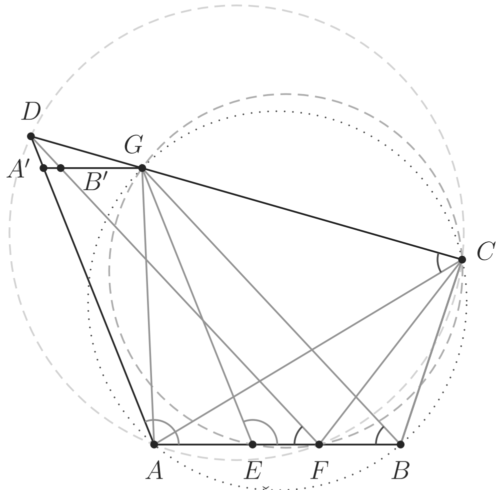
Ker je $f(x + \frac{\pi}{2}) = -f(x - \frac{\pi}{2})$, je $f(x + \frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) \cdot \cos x$ oziroma

$$f(x) = f\big(\frac{\pi}{2}\big) \cdot \cos\big(x - \frac{\pi}{2}\big) = f\big(\frac{\pi}{2}\big) \cdot \sin x.$$

Označimo $a = f(\frac{\pi}{2})$. Tedaj je $f(x) = a \cdot \sin x$. Preverimo lahko, da ta funkcija ustreza funkcijski enačbi za vsako realno število a.

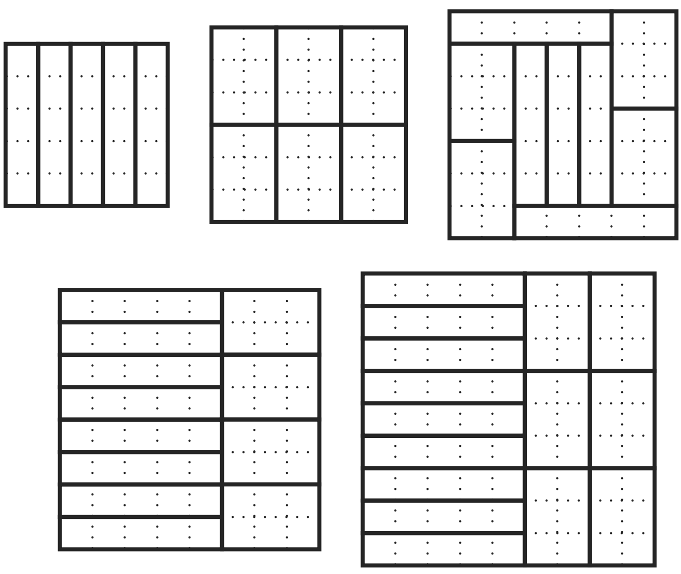
IV/3. Označimo $\angle DCA = \gamma$. Zaradi tetivnosti štirikotnika $AFCD$ je

$$\angle DFA = \angle DCA = \gamma.$$

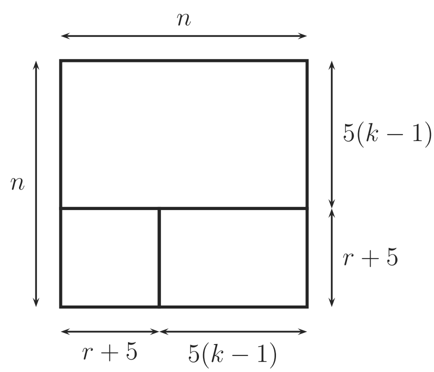


Iz tetivnosti štirikotnika $ABCG$ sledi $\angle GBA = \angle GCA = \gamma$. Od tod dobimo vzporednost premic DF in GB.
V tetivnem štirikotniku $AFCD$ velja $\angle FAD = \pi - \angle DCF$ in v tetivnem štirikotniku $GEFC$ velja $\angle GEF = \pi - \angle GCF$. Ker je $\angle GCF = \angle DCF$, od tod sledi $\angle FAD = \angle GEF$, torej sta premici AD in GE vzporedni.
Naj bosta A' takšna točka na premici AD in B' takšna točka na premici DF, da je $GA' \parallel EA$ in $GB' \parallel FB$. Očitno so točke G, B' in A' kolinearne. Štirikotnik $AEGA'$ je paralelogram, zato je $|A'G| = |AE|$. Prav tako je štirikotnik $FBGB'$ paralelogram in tako velja $|B'G| = |FB|$.
Če je $|AE| = |FB|$, velja $|A'G| = |B'G|$. Ker točka G očitno ne leži med A' in B', od tod sledi $A' = B'$. To je možno le v primeru $A' = B' = D$. Tedaj je GD vzporedna AE, kar pomeni, da sta stranici AB in CD vzporedni.
Obratno, če sta stranici AB in CD vzporedni, sta štirikotnika $AEGD$ in $FBGD$ paralelograma, saj imata dva para vzporednih stranic. Torej je $|AE| = |DG| = |FB|$.

IV/4. Prvih 5 tabel lahko pokrijemo (glej sliko).



Naj bo $n \geq 10$. Zapišimo $n = 5k + r$, kjer je $0 \leq r < 5$. Tedaj je $n = 5(k-1)+(r+5)$. Ker je $n \geq 10$, velja $k \geq 2$, zato je $k-1$ naravno število. Tabelo $n \times n$ razdelimo na tri dele in sicer kvadrat velikosti $(r+5) \times (r+5)$, pravokotnik velikosti $n \times 5(k-1)$ in pravokotnik velikosti $5(k-1) \times (r+5)$. Kvadrat $(r+5) \times (r+5)$ je eden izmed kvadratov na prvi sliki in ga lahko pokrijemo z danimi ploščicami. Vsak izmed pravokotnikov ima eno stranico deljivo s 5. Pravokotnike $5a \times b$ lahko pokrijemo s ploščicami 5×1, saj lahko vsako vrstico pokrijemo z a takimi ploščicami. Prav tako lahko pokrijemo pravokotnike velikosti $c \times 5d$, saj lahko že vsak stolpec pokrijemo s ploščicami 5×1 (postavljenimi pokončno). Torej tabelo $n \times n$ za $n \geq 10$ lahko pokrijemo.



Pokrijemo lahko tabele $n \times n$ za vsa naravna števila $n \geq 5$.
