Tekmovanja

47. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje – področno tekmovanje

7. razred

A1. Za koliko se razlikujeta največje in najmanjše pravo štirimestno naravno število, ki ga sestavimo iz vseh štirih števk števila 2011?

(**A**) 100 (**B**) 198 (**C**) 1089 (**D**) 1098 (**E**) 1998

A2. V enakokrakem trikotniku višina na osnovnico seka simetralo kota ob osnovnici pod kotom $72°20'$. Koliko meri kot ob vrhu trikotnika?

(**A**) $17°40'$ (**B**) $35°20'$ (**C**) $72°20'$ (**D**) $109°20'$ (**E**) $144°40'$

A3. Namesto števcev in imenovalcev v vsoti ulomkov: $\frac{\square}{\square}+\frac{\square}{\square}$ postavi štiri enomestna števila: 3, 4, 6 in 7, vsako natanko enkrat. Kolikšna je največja možna vsota ulomkov?

(**A**) $\frac{19}{2}$ (**B**) $\frac{13}{7}$ (**C**) $\frac{5}{2}$ (**D**) $\frac{15}{4}$ (**E**) $\frac{23}{6}$

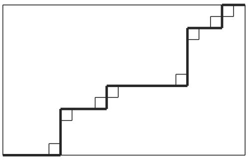
A4. Na digitalni uri se pokaže čas $5:55$. Čez koliko minut bodo spet vse števke v prikazu enake?

(**A**) 71 (**B**) 111 (**C**) 305 (**D**) 316 (**E**) 376

A5. Koliko lihih pravih trimestnih naravnih števil zadošča vsem trem naslednjim pogojem:
a) vse števke so različne,
b) vsota števk števila je 14,
c) število je manjše od 300?

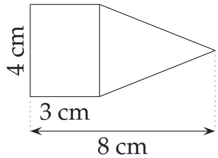
(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

A6. Odebeljena črta na sliki meri 26 cm. Kolikšna je četrtina obsega narisanega pravokotnika?



(**A**) 6.5 cm (**B**) 8 cm (**C**) 13 cm
(**D**) 26 cm (**E**) Četrtine obsega se ne da natanko določiti.

A7. Na sliki sta narisana pravokotnik in enakokrak trikotnik. Koliko meri vsota ploščin obeh likov?



(**A**) 15 cm^2 (**B**) 22 cm^2 (**C**) 28 cm^2
(**D**) 32 cm^2 (**E**) 52 cm^2

A8. Iz 20 kg volne dobimo 7 m tkanine, široke 80 cm. Koliko metrov te tkanine širine 120 cm dobimo iz 30 kg volne?

(**A**) 7 m (**B**) 7.8 m (**C**) 8 m (**D**) 8.2 m (**E**) 9.6 m

B1. V enakokrakem trikotniku ABC (osnovnica AB je krajša od kraka) simetrala kota ob osnovnici in višina na krak oklepata kot $10°$. Izračunaj velikosti notranjih kotov v stopinjah in minutah.

B2. Narisan je del številske premice. Natančno nariši točko, ki predstavlja število 1, in postopek opiši.

B3. V manjši šoli z desetimi oddelki je v vsakem oddelku enako število učencev. V času gripe je v petih oddelkih manjkala polovica učencev. V treh oddelkih je bilo prisotnih $\frac{3}{4}$ učencev. V ostalih oddelkih pa jih je manjkala osmina. Na vsej šoli je bilo odsotnih 70 učencev. Koliko je vseh učencev na šoli?

8. razred

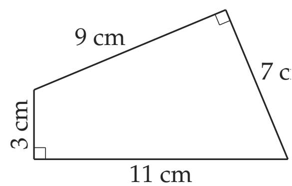
A1. Kolikšna je vrednost izraza $2^{30} + 2^{30} + 2^{30} + 2^{30}$?

(**A**) 8^{30} (**B**) 2^{30} (**C**) 16^{8} (**D**) 8^{15} (**E**) $2 \cdot 1^{30}$

A2. Če neko število na številski premici prezrcalimo preko njegove nasprotne vrednosti, dobimo $\frac{1}{5}$. Katero število smo zrcalili?

(**A**) $\frac{2}{5}$ (**B**) $\frac{1}{15}$ (**C**) $-\frac{2}{5}$ (**D**) $-\frac{1}{10}$ (**E**) $-\frac{1}{15}$

A3. Koliko meri ploščina štirikotnika na sliki?



(**A**) $96\ \mathrm{cm}^2$ (**B**) $40\ \mathrm{cm}^2$ (**C**) $48\ \mathrm{cm}^2$
(**D**) $33\ \mathrm{cm}^2$ (**E**) $24\ \mathrm{cm}^2$

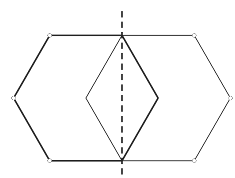
A4. Koliko števk ima v desetiškem zapisu število 1000^{2011}?

(**A**) 2014 (**B**) 2015 (**C**) 6033 (**D**) 6034 (**E**) 2011000

A5. V trikotniku so dolžine stranic tri zaporedna števila: a, $a+1$ in $a+2$. Kaj mora veljati za število a?

(**A**) $a = 0$ (**B**) $0 < a < 1$ (**C**) $a > 1$ (**D**) $0 < a < 2$ (**E**) $a = 1$

A6. Pravilni 6-kotnik preslikamo preko ene od najkrajših diagonal. Kolikokrat je ploščina dobljenega šestkotnika večja od ploščine prvotnega šestkotnika?



(**A**) dvakrat (**B**) 1.75-krat (**C**) $\frac{5}{3}$-krat
(**D**) 1.5-krat (**E**) $\frac{4}{3}$-krat

A7. Za pecivo po osnovnem receptu potrebujemo $\frac{3}{4}$ kg moke in 40 dag sladkorja. Pecivo pripravimo iz 60 dag sladkorja in ustrezne količine moke. Koliko kilogramov moke potrebujemo?

(**A**) 1 kg (**B**) $1\frac{1}{8}$ kg (**C**) $1\frac{1}{4}$ kg (**D**) $1\frac{3}{8}$ kg (**E**) $1\frac{1}{2}$ kg

A8. V štirikotniku $ABCD$ meri kot β 80% kota α. Kot γ meri $\frac{5}{13}$ vsote preostalih treh kotov. Kot δ pa je enak $\frac{4}{5}$ kota γ. Za kateri štirikotnik gre?

(**A**) paralelogram (**B**) pravokotnik (**C**) deltoid
(**D**) raznostranični štirikotnik (**E**) ni mogoče določiti

B1. Izračunaj vrednost številskega izraza:

$$\sqrt{256} \cdot \left(\frac{(1-\frac{1}{3})^2 - (\frac{1}{3}-1)^3}{(\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^3}\right)^3 + \sqrt{(3^2+\sqrt{4}) \cdot 11}$$

B2. V enakokrakem trapezu $ABCD$ z osnovnicama $|AB| = 6$ cm in $|CD| = 4$ cm sta diagonali pravokotni druga na drugo. Izračunaj višino trapeza.

B3. V nekem mestu je 20 % odraslih prebivalcev brezposelnih, 80 % pa jih hodi v službo. Po enem mesecu 20 % brezposelnih najde zaposlitev, službo pa izgubi 20 % prej zaposlenih. Kolikšen odstotek prebivalcev je sedaj zaposlenih?

9. razred

A1. V dveh enakih, polnih posodah sta mešanici vode in sirupa. Razmerje vode in sirupa v prvi posodi je $2:1$, v drugi pa $4:1$. Obe mešanici prelijemo v eno posodo. Kolikšno je sedaj razmerje vode in sirupa?

(**A**) $3:1$ (**B**) $5:1$ (**C**) $6:1$ (**D**) $8:3$ (**E**) $11:4$

A2. V kakšni medsebojni legi sta premici z enačbama $2x + y = 2$ in $x - 2y = 0$?

(**A**) vzporedni (**B**) mimobežni (**C**) pravokotni
(**D**) enaki (**E**) ni mogoče določiti

A3. Učitelj je popravil 25 preizkusov in izračunal povprečno uspešnost 72 točk od 100 možnih. Pri pregledu preizkusov Maja ugotovi, da je dosegla 86 točk in ne 36 točk. Kolikšna je povprečna uspešnost po tem popravku Majinega rezultata?

(**A**) 71% (**B**) 72% (**C**) 74% (**D**) 75% (**E**) 80%

A4. Kolikšna je vrednost izraza $(x^2 - 2x)(x^2 + 2x)$, če je $(x + 2)(x - 2) = 21$?

(**A**) 400 (**B**) 441 (**C**) 450 (**D**) 525 (**E**) 625

A5. V krog je včrtan kvadrat. Kolikšno je razmerje med ploščino kvadrata s stranico a in kroga?

(**A**) $2:\pi$ (**B**) $a^2:\pi$ (**C**) $2\pi:1$ (**D**) $1:\pi$ (**E**) $a:2$

A6. Katero število reši enačbo $\sqrt{\dfrac{2011^2 - x^2}{x+1}} = 2$?

(**A**) 2008 (**B**) 2009 (**C**) 2010
(**D**) 2011 (**E**) enačba nima rešitev

A7. Besedilo šifriramo tako, da vsaki črki priredimo število, ki je premo sorazmerno z zaporednim številom črke v slovenski abecedi. Katero število pripada črki K, če pripada črki N število 27 in črki G število 13?

(**A**) 23 (**B**) 21 (**C**) 19 (**D**) 17 (**E**) 15

A8. Trikotniku s stranicami 33 cm, 56 cm in 65 cm očrtamo krožnico. Koliko meri njen polmer?

(**A**) 20 cm (**B**) 25 cm (**C**) 27.5 cm (**D**) 32.5 cm (**E**) 35 cm

B1. Luka je kupil zbirateljske karte. Posamezna karta ene vrste je stala 0.25 EUR, karta druge vrste pa 15 centov. Porabil je 4.20 EUR. Vemo še to, da število dražjih kart deli število cenejših. Izračunaj, koliko enih in drugih kart je kupil.

B2. Imamo romb $ABCD$, katerega osnovnica meri 13 cm, višina pa 12 cm. Na stranici DC leži točka E, tako da sta kota $\sphericalangle DAB$ in $\sphericalangle EBA$ med sabo skladna. Daljica BE razdeli romb na dva lika. Izračunaj razmerje njunih ploščin.

B3. Hudič in graščak sta na mostu sklenila kupčijo. Graščak je predlagal: »Ob vsakem prehodu mi denar, ki ga imam, podvojiš, jaz pa ti nato dam vsakokrat 24 goldinarjev.« Hudič je privolil. Po trikratnem prekoračenju mostu graščak ni imel več denarja, hudiču pa tudi ni bil nič dolžan. Koliko goldinarjev je imel graščak na začetku?

47. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje – državno tekmovanje

7. razred

1. V novi hiši moramo iz kleti v pritličje premostiti 1.47 m, iz pritličja v prvo nadstropje 2.52 m in iz prvega nadstropja na podstrešje 2.10 m višinske razlike. Postavili bomo stopnice enake višine na vseh nivojih. Koliko naj bo višina vsake stopnice, da bo potrebnih čimmanj stopnic? (Višina stopnice v cm mora biti celo število.)

2. V trikotniku ABC meri razlika kotov ob stranici AB $90°$. Simetrala notranjega kota ob oglišču C seka nosilko stranice AB v točki M, simetrala zunanjega kota ob oglišču C pa jo seka v točki N. Dokaži, da sta daljici CM in CN enako dolgi.

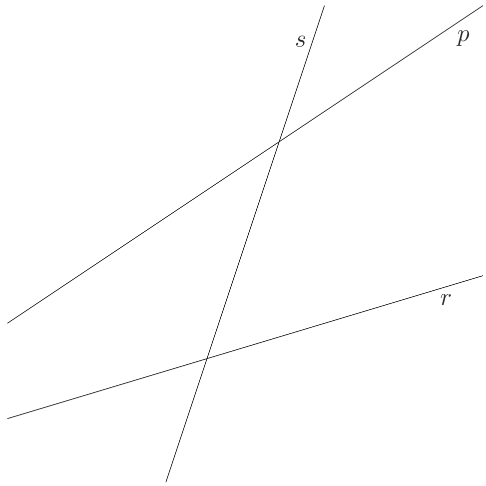
3. Branjevka je prvi dan prodala 30% krompirja. Drugi dan je prodala $\frac{4}{7}$ ostanka. Za tretji dan ji je ostalo 200 kg krompirja manj od prodanega v prvih dveh dneh. Koliko krompirja je imela na začetku?

4. Lina je vsaki črki abecede priredila drugo naravno število. Nato je za zapisane besede (v tabeli) izračunala produkt števil, ki pripadajo črkam v besedi. Dobila je naslednje vrednosti besed:

GNU	33
VENA	56
ANA	49
GOS	440

Kakšno vrednost bi po tem sistemu dobila beseda VEGA?

5. Dane so tri premice p, r in s, kot kaže slika. Na premici p poišči tako točko P, na premici r pa tako točko R, da bosta ležali zrcalno glede na premico s. Konstrukcijo opiši.



8. razred

1. Za naravna števila a, b, c in d velja: $a < b$, $c < d$ in $d < a$. Vstavi $<$, $>$ ali $=$ v narisane okvirčke, da dobiš pravilne trditve.

$$\frac{c}{d}\,\square\,\frac{c}{b} \qquad \frac{a}{b}\,\square\,\frac{d}{b} \qquad \frac{c}{a}+\frac{d}{a}\,\square\,\frac{c}{a}+\frac{b}{a}$$

$$\frac{a}{b}\cdot b\,\square\,\frac{c}{b}:c \qquad \frac{a}{d}\cdot\frac{b}{d}\,\square\,1 \qquad \frac{a}{b}\,\square\,\frac{a}{d}\,\square\,\frac{a}{c}$$

$$a\cdot b\,\square\,c\cdot d \qquad b-c\,\square\,a-d \qquad \frac{a}{b}\,\square\,\frac{b}{a}$$

2. Črpalka A napolni vodni rezervoar v 4 urah, črpalka B v 6 urah. Ob 8. uri vključimo obe črpalki hkrati. Po eni uri delovanja se črpalka B pokvari, A pa še naprej deluje nemoteno. Po enournem popravilu spet normalno deluje tudi črpalka B. Ob kateri uri (na minuto natančno) je rezervoar poln?

3. Izračunaj vrednost izraza:

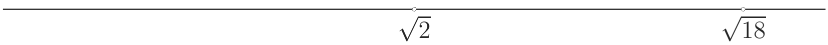
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

4. Nariši ostrokotni trikotnik s podatki $v_a = 3.5$ cm, $b = 4$ cm, polmer trikotniku očrtane krožnice pa meri 3 cm. Konstrukcijo opiši.

5. V 3 posodah so bile mešanice soka in vode. V prvi posodi je bilo 30% soka, v drugi 10% in v tretji 40%. Vse skupaj smo prelili v 4. posodo, tako da smo dobili 20 litrov tekočine, v kateri je 78% vode. Izračunaj, koliko tekočine je bilo v vsaki posodi, če je bilo v prvi posodi 2.5 krat toliko tekočine kot v tretji.

9. razred

1. Na številski premici sta označeni točki, ki predstavljata števili $\sqrt{2}$ in $\sqrt{18}$. Natančno načrtaj še točki, ki pripadata številoma 0 in $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Načrtovanje opiši.

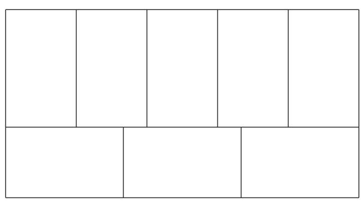


2. Razlika kvadratov dveh naravnih števil je 167-krat tolikšna kot razlika teh dveh naravnih števil. Če večje število delimo z manjšim, dobimo ostanek 15. Izračunaj obe števili.

3. Iz središča osnovne ploskve 12 m dolgega in 9 m širokega zabojnika v obliki kvadra poteka jeklena vrv do enega oglišča na zgornji ploskvi. Ob 11.00 začne v zabojnik enakomerno pritekati voda. Ob 12.00 je suhe še 6.8 metra jeklene vrvi. Do roba se napolni zabojnik natanko ob 16. uri. Izračunaj hitrost pritekanja vode v $\frac{m^3}{h}$.

4. V neki restavraciji na mize razpostavijo košare z jabolki. Na voljo imajo točno določeno število jabolk, na vsaki mizi pa jih mora biti enako. Če bi dodali 5 miz in jabolka razdelili v košare na vse mize, bi morali dati v vsako košaro po 6 jabolk manj. Če bi nato prinesli v restavracijo novih 5 miz, bi v vsako košaro na mizi dali še 4 jabolka manj. Koliko jabolk imajo na voljo v restavraciji?

5. 8 skladnih pravokotnikov zložimo v enega večjega, kot kaže slika. Diagonala velikega pravokotnika meri 136 cm. Izračunaj ploščino enega od malih pravokotnikov.



Rešitve nalog 47. tekmovanja iz matematike za Vegovo priznanje – področno tekmovanje

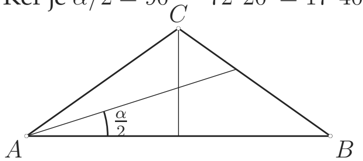
7. razred

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
D	D	E	D	E	C	B	A

Utemeljitve:

A1. Največje in najmanjše število sta 2110 in 1012, njuna razlika pa je $2110–1012 = 1098$

A2. Ker je $\alpha/2 = 90° - 72°20' = 17°40'$, sledi $\alpha = 35°20'$. Torej je $\gamma = 180°–2\alpha = 109°20'$.



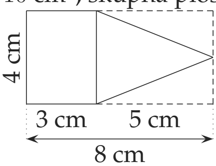
A3. Vsota bo največja, če bo 7 v števcu in 3 v imenovalcu. Torej sta možni vsoti $\frac{7}{3} + \frac{\square}{\square}$ ali $\frac{7}{\square} + \frac{\square}{3}$. V prvem primeru dobimo največ $\frac{7}{3} + \frac{6}{4} = \frac{36}{12}$, v drugem pa $\frac{7}{4} + \frac{6}{3} = \frac{46}{12} = \frac{23}{6}$.

A4. Naslednjič bodo na digitalni uri števke enake, ko bo pokazala $11 : 11$. To je čez 5 ur in 16 minut ali 316 minut.

A5. Število je manjše od 300, zato mora biti prva števka obvezno 1 ali 2. $14 = 1 + 4 + 9 = 1 + 5 + 8 = 1 + 6 + 7$, v tem primeru dobimo števila 149, 185 in 167, ki zadoščajo vsem pogojem. $14 = 2 + 3 + 9 = 2 + 4 + 8 = 2 + 5 + 7 = 2 + 6 + 6$. Če želimo liho število, dobimo še 239, 293, 257 in 275, skupaj torej 7 takih števil.

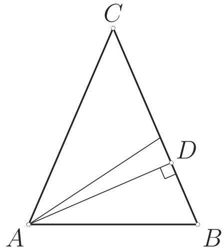
A6. Dolžina odebeljene črte predstavlja vsoto dolžin stranic pravokotnika, torej polovico obsega. Tako meri četrtina obsega 13 cm.

A7. Ploščino pravokotnika izračunamo kot produkt stranic in znaša $12\ \text{cm}^2$, ploščina trikotnika pa prestavlja polovico ploščine pravokotnika s stranicama 5 cm in 4 cm, torej $10\ \text{cm}^2$, skupna ploščina je torej $22\ \text{cm}^2$.



A8. 20 kg volne nam da tkanino površine $700 \cdot 80 = 56000\ \text{cm}^2$, 30 kg pa torej še za polovico več in znaša površina tkanine $84000\ \text{cm}^2$. Ker je širina blaga 120 cm, mora biti dolžina $84000 : 120 = 700$ cm $= 7$ m.

B1. Z D označimo nožišče višine na krak. V trikotniku ABD merijo koti α, $\frac{\alpha}{2}$–$10°$ in $90°$. Od tod izračunamo notranji kot α, ki meri $\frac{200°}{3} = 66°40'$.
Kot ob vrhu dobimo, če od $180°$ odštejemo 2α, $\gamma = 46°40'$.



B2. Razlika med narisanima ulomkoma je $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$. Število 1 je za $\frac{1}{4}$ večje od števila $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{4} = 3 \cdot \frac{1}{12}$. Razdaljo med $\frac{3}{4}$ in $\frac{2}{3}$ torej trikrat s šestilom nanesemo desno od točke, ki predstavlja število $\frac{3}{4}$.

B3. V petih oddelkih je manjkala $\frac{1}{2}$ učencev, v treh oddelkih $\frac{1}{4}$ in v dveh preostalih še ena osmina: $5 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{2}$, manjka torej toliko učencev, da bi napolnili 3 oddelke in pol. Ker je manjkajočih učencev 70, jih je v oddelkih torej $(70 : 7) \cdot 2 = 20$. Na celi šoli pa imajo 200 učencev.

8. razred

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
C	E	C	D	C	C	B	A

Utemeljitve:

A1. Računajmo: $2^{30} + 2^{30} + 2^{30} + 2^{30} = 4 \cdot 2^{30} = 2^2 \cdot 2^{30} = 2^{32} = (2^4)^8 = 16^8$

A2. Z zrcaljenjem števila a čez njegovo nasprotno vrednost dobimo $-3a$, $-3a = \frac{1}{5}$, torej smo zrcalili število $-\frac{1}{15}$.

A3. Lik je sestavljen iz dveh pravokotnih trikotnikov s ploščinama $\frac{9 \cdot 7}{2}$ cm^2 in $\frac{3 \cdot 11}{2}$ cm^2, skupaj torej 48 cm^2.

A4. Število $1000^{2011} = (10^3)^{2011} = 10^{6033}$, ki ga zapišemo s števko 1 in 6033 ničlami, ima torej 6034 števk.

A5. Vsota dolžin krajših stranic mora biti daljša od tretje: $a + (a + 1) > a + 2$ ali $a > 1$.

A6. Prvotni šestkotnik je sestavljen iz 6 skladnih enakostraničnih trikotnikov, v novonastalem šestkotniku pa je takih enakostraničnih trikotnikov 10. Ploščina je torej $\frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$ krat večja.

A7. Na 10 dag sladkorja pride $\frac{3}{4}:4\text{ kg}=\frac{3}{16}$ kg moke. Za 60 dag sladkorja, potrebujemo $6\cdot\frac{3}{16}=\frac{9}{8}=1\frac{1}{8}$ kg moke.

A8. Vsota kotov $\alpha+\beta+\delta=\frac{13}{5}\gamma$, $\alpha+\beta+\delta+\gamma=360°$ ali $\frac{18}{5}\gamma=360°$, γ potem meri $100°$, δ pa $80°$. α in β skupaj merita tudi $180°$ in ker je β 80% kota α, meri α $100°$, β pa $80°$. Po dva nasprotna kota sta skladna in štirikotnik je paralelogram.

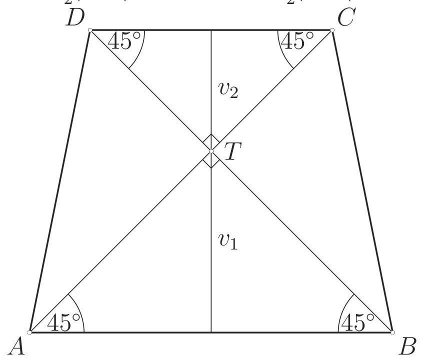
B1.

$$\sqrt{256}\cdot\left(\frac{(1-\frac{1}{3})^2-(\frac{1}{3}-1)^3}{(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{3})^3}\right)^3+\sqrt{(3^2+\sqrt{4})\cdot 11}=$$

$$=16\cdot\left(\frac{(\frac{2}{3})^2-(-\frac{2}{3})^3}{\frac{1}{9}+\frac{1}{27}}\right)^3+\sqrt{(9+2)\cdot 11}=$$

$$=16\cdot\left(\frac{\frac{4}{9}-(-\frac{8}{27})}{\frac{4}{27}}\right)^3+\sqrt{11\cdot 11}=16\cdot\left(\frac{\frac{20}{27}}{\frac{4}{27}}\right)^3+11=16\cdot 5^3+11=16\cdot 125+11=2011$$

B2. Višina trapeza je enaka vsoti višin v trikotnikih ABT in CDT, kjer je T presečišče diagonal. Ker je trapez enakokrak, sta tudi trikotnika ABT in CDT enakokraka, tako je $|AT|=|BT|$ in $|DT|=|CT|$. Zato merijo koti BAC, ABD, BDC in DCA vsi po $45°$. $v_1=\frac{1}{2}|AB|=3$ cm, $v_2=\frac{1}{2}|DC|=2$ cm. Višina meri 5 cm.



B3. Med 20% brezposelnih prebivalcev jih 20% najde zaposlitev, kar pomeni, da se na novo zaposli $20\%\cdot 20\%=4\%$ vseh prebivalcev mesta. Med zaposlenimi pa službo izgubi 20% ljudi, zaposlitev obdrži 80% zaposlenih, kar pomeni $80\%\cdot 80\%=64\%$ vseh prebivalcev. Skupaj je po spremembi zaposlenih $4\%+64\%=68\%$ vseh prebivalcev mesta.

9. razred

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
E	C	C	D	A	B	B	D

Utemeljitve:

A1. V prvi posodi s prostornino x je $\frac{x}{3}$ sirupa in $\frac{2x}{3}$ vode, v drugi posodi je $\frac{x}{5}$ sirupa in $\frac{4x}{5}$ vode, v mešanici bo torej $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}=\frac{8x}{15}$ sirupa, vode pa bo $2x-\frac{8x}{15}=\frac{22x}{15}$. Razmerje količine vode in sirupa je torej $22:8=11:4$.

A2. Smerna koeficienta danih premic sta -2 in $\frac{1}{2}$, kar pomeni, da sta premici pravokotni.

A3. Vsota vseh doseženih točk na testu znaša $25 \cdot 72 = 1800$ točk. Ta vsota se popravi za 50 točk in znaša 1850. Povprečje doseženih točk pa je $1850 : 25 = 74$.

A4. $(x+2)(x-2) = x^2-4 = 21$, torej je $x^2 = 25$. $(x^2–2x)(x^2+2x) = x^4–4x^2 = 25^2–4\cdot 25 = 525$.

A5. Ploščina kvadrata meri a^2, očrtani krog pa ima za polmer polovico diagonale kvadrata $a\sqrt{2}$ in meri njegova ploščina $\pi(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2 = \pi\frac{a^2}{2}$. Razmerje ploščin je torej $1 : \frac{\pi}{2}$ ali $2 : \pi$.

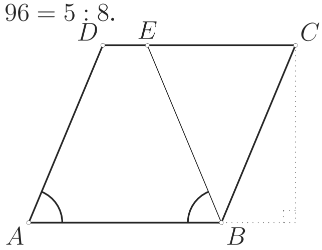
A6. Enačbo reši število 2009: $\frac{2011^2-2009^2}{2009+1} = \frac{(2011-2009)(2011+2009)}{2010} = \frac{2\cdot 4020}{2010} = 4$.

A7. Črka G je 8. po vrsti v slovenski abecedi, črka N pa 15. Razlika med njunima prirejenima številoma je 14, med njunima pozicijama pa 7, kar pomeni, da vsaki naslednji črki v abecedi pripada za 2 večja šifra. Ker je črka K dvanajsta, ji pripada število, ki je za $4 \cdot 2 = 8$ večje od števila, ki pripada G, to število je 21.

A8. Trikotnik je pravokoten ($33^2 + 56^2 = 65^2$), tako meri polmer očrtanega kroga polovico hipotenuze ali $\frac{65}{2} = 32.5$ cm.

B1. Kupil je x kart po 0.25 EUR in y kart po 0.15 EUR. Torej $25x + 15y = 420$. Po krajšanju lahko zapišemo $5x + 3y = 84$. x deli y in je torej $y = kx$. k, x in y so naravna števila. V enačbi lahko x izpostavimo in dobimo $x(5 + 3k) = 84$. x deli število 84, hkrati pa mora biti manjši od 11, saj je drugo število $5 + 3k$ vsaj 8. x bi bil lahko torej 1, 2, 3, 4, 6 ali 7. Vrednosti $5 + 3k$ pa bi bile potem 84, 42, 28, 21, 14 in 12. Iz tega sledi $3k$ je lahko 79, 37, 16, 9, 7. Ker je k naravno število, pride v poštev samo rezultat $3k = 9$, $k = 3$, $x = 6$ in $y = 18$. Kupil je 6 kart po 0.25 EUR in 18 kart po 0.15 EUR.

B2. Daljica BE razdeli romb na enakokrak trapez in enakokrak trikotnik. Trikotniku ECB lahko izračunamo stranico s pomočjo Pitagorovega izreka in meri 10 cm, ploščina tega trikotnika je potem $\frac{10\cdot 12}{2} = 60$ cm^2. Trapez ima osnovnici dolgi 13 cm in 3 cm. Ploščino trapeza izračunamo po enačbi: $\frac{(|AB|+|CE|)\cdot v}{2} = 96$ cm^2. Razmerje ploščin je potem $60 : 96 = 5 : 8$.



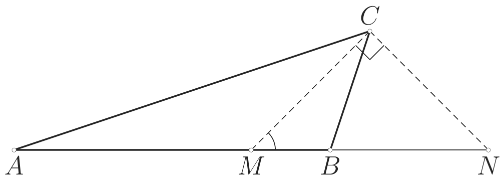
B3. Recimo da je imel graščak na začetku x goldinarjev, po prvem prehodu je imel potem $2x–24$, po drugem prehodu $2(2x–24)–24$ in po tretjem prehodu $2(2(2x–24)–24) - 24$. Na koncu nima več denarja, zato velja enačba $2(2(2x–24)–24) - 24 = 0$. Rešitev enačbe $x = 21$, na začetku je imel graščak 21 goldinarjev.

Rešitve nalog 47. tekmovanja iz matematike za Vegovo priznanje – državno tekmovanje

7. razred

1. Višina stopnice mora biti največje celo število, ki deli 147, 252 in 210. Največji skupni delitelj teh števil je 21. Višina ene stopnice naj bi torej znašala 21 cm.

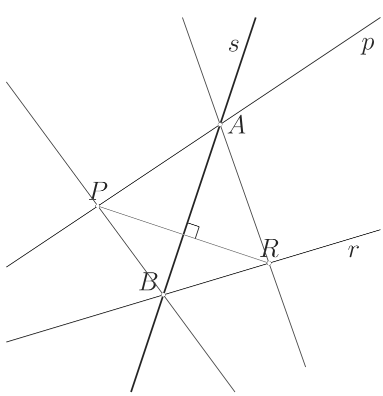
2. Trikotnik CMN mora biti enkokrak. Dovolj je, če pokažemo, da sta kota ob osnovnici skladna. Kote v trikotniku ABC označimo z α, β in γ. Kot $\beta = 90° + \alpha$. Kot γ pa meri potem $90° - 2\alpha$. Kot CMN meri $180° - \frac{\gamma}{2} - \beta = 45°$. Velikost kota CNM dobimo iz zveze $180° - \frac{\gamma'}{2} - \beta'$, kjer sta γ' in β' zunanja kota in merita po vrsti $180° - \gamma = 90° - 2\alpha$ in $180° - \beta = 90° - \alpha$. Tako tudi kot CNM meri $45°$ in $|CM| = |CN|$.



3. Branjevka ima na začetku x kg krompirja. Prvi dan ga proda $0.3x$ kg, ostane pa ji $0.7x$ kg. Drugi dan proda $\frac{4}{7} \cdot 0.7x = 0.4x$ kg, torej ji za tretji dan ostane $0.3x$ kg. Razlika med količino prodanega in ostalega krompirja je torej $0.4x$ kg, kar znaša 200 kg in $x = 500$ kg.

4. Številske vrednosti prirejene črkam abecede označimo z malimi črkami. Iz podatkov v tabeli izvemo, da je $a^2 \cdot n = 49$, torej mora biti črki A prirejena vrednost 7, črki N pa 1. Iz vrednosti besede $VENA$ sklepamo, da je $v \cdot e = 8$. Izvedeti moramo samo še vrednost g. Nastopa v besedah GNU in GOS, edino število, ki deli tako 33 kot 440 in je različno od 1, pa je 11. $v \cdot e \cdot g \cdot a = 8 \cdot 11 \cdot 7 = 616$.

5. Če prezrcalimo premici p in r čez premico s, tvorijo presečišča vseh narisanih premic deltoid (ali dva skladna trikotnika). Točki, ki sta oglišči obeh trikotnikov, ki ne ležita na premici s, pa sta torej enako oddaljeni od nje in sta iskani točki P in R.



8. razred

1.

$$\frac{c}{d} > \frac{c}{b} \qquad \frac{a}{b} > \frac{d}{b} \qquad \frac{c}{a} + \frac{d}{a} < \frac{c}{a} + \frac{b}{a}$$

$$\frac{a}{b} \cdot b > \frac{c}{b} : c \qquad \frac{a}{d} \cdot \frac{b}{d} > 1 \qquad \frac{a}{b} < \frac{a}{d} < \frac{a}{c}$$

$$a \cdot b > c \cdot d \qquad b - c > a - d \qquad \frac{a}{b} < \frac{b}{a}$$

2. Prva črpalka v eni uri napolni $\frac{1}{4}$ rezervoarja, druga pa $\frac{1}{6}$. Skupaj torej v eni uri napolnita $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$ rezervoarja. Tolikšen del je poln ob 9. uri. Nato do desetih dela samo prva in napolni še $\frac{1}{4}$, tako da je ob 10.00 rezervoar napolnjen do $\frac{2}{3}$. Ostane še $\frac{1}{3}$ rezervoarja, tega pa obe črpalki skupaj napolnita v $\frac{1}{3} : \frac{5}{12} = \frac{4}{5}$ ure ali v 48 minutah. Rezervoar bo torej poln ob 10.48.

3.

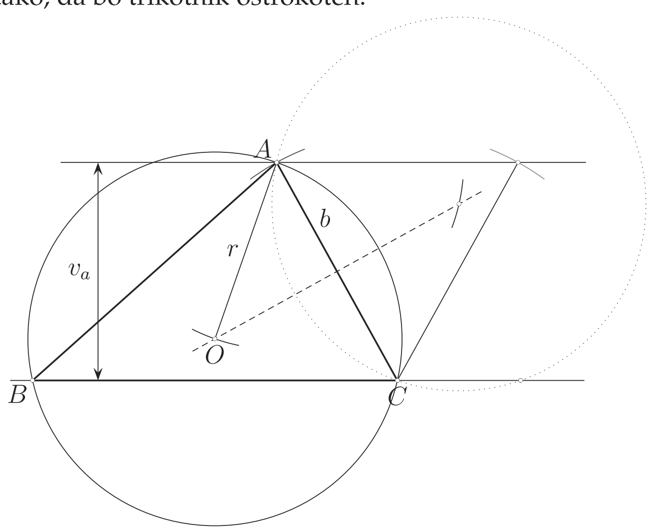
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{6}}\right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{6}}{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{6}}{6} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} = 1\frac{1}{12}$$

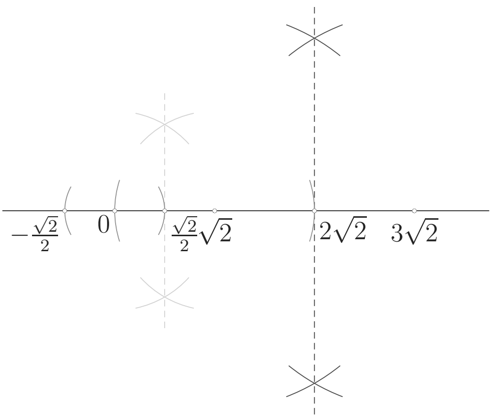
4. Najprej načrtamo nosilko stranice CB in na njej označimo oglišče C. Narišemo njeno vzporednico na razdalji 3.5 cm in s pomočjo šestila z lokom dolžine 4 cm in središčem v C na vzporednici določimo oglišče A. Nato narišemo simetralo stranice AC in določimo središče očrtane krožnice na simetrali z oddaljenostjo 3 cm od A in C. Narišemo očrtano krožnico. Oglišče B leži v enem od presečišč krožnice in nosilke stranice CB. Izberemo ga tako, da bo trikotnik ostrokoten.



5. Naj bo količina tekočine v tretji posodi x litrov, potem je v prvi posodi $2.5x$ litrov in v drugi $(20 - x - 2.5x) = 20 - 3.5x$ litrov tekočine. Čistega soka v končni mešanici je 22%, $0.22 \cdot 20 = 4.4$ litra. V prvi posodi imamo $0.3 \cdot 2.5x = 0.75x$ litra soka, v drugi posodi $0.1(20-3.5x) = 2-0.35x$ litra in v tretji $0.4x$ litra soka. Če vse troje seštejemo je čistega soka v vseh treh posodah $0.75x+2-0.35x+0.4x = 2+0,8x$ litra. Ker mora biti soka v mešanici 4.4 litra, je $0.8x = 2.4$ litra in $x = 3$ litre. Tretja posoda torej vsebuje 3 litre, prva 7.5 litra in druga 9.5 litra tekočine.

9. razred

1. Število $\sqrt{18}$ lahko zapišemo kot $3\sqrt{2}$, kar pomeni, da je razdalja med narisanima točkama $2\sqrt{2}$. Če to razdaljo razpolovimo in jo s šestilom prenesemo levo od $\sqrt{2}$, dobimo točko, ki predstavlja število 0. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ z racionaliziranjem zapišemo kot $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, pomeni, da razpolovimo razdaljo med 0 in $\sqrt{2}$ in jo s šestilom prenesemo levo od točke, ki predstavlja število 0.

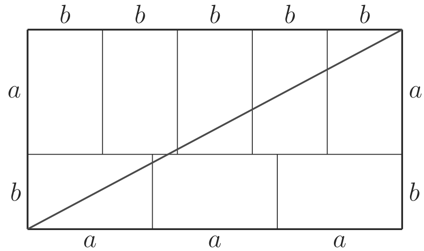


2. Večje število označimo z a, manjše pa z b, tako velja $a^2 - b^2 = 167(a-b)$, $(a-b)(a+b) = 167(a-b)$, iz česar sledi $a + b = 167$. Ostanek pri deljenju števil je 15, $a = k \cdot b + 15$. $k \cdot b + 15 + b = 167$. $b(k + 1) = 152$. Število b mora deliti 152, hkrati pa mora biti večje od 15. Zapišemo 152 kot produkt prafaktorjev: $152 = 2^3 \cdot 19$. b je torej lahko 19, 38, 76 ali 152, a pa je 148, 129, 91 in 15. Zadnja rešitev ne pride v poštev, ker mora biti a večji od b, da bo razlika kvadratov večja od razlike teh števil.

3. Zabojnik se napolni v 5 urah, kar pomeni, da je ob 12. uri v zabojniku ena petina vode in je suhe $\frac{4}{5}$ jeklene vrvi. Ta jeklenica potem meri 8.5 m. Dolžino jeklene vrvi lahko izračunamo s pomočjo Pitagorovega izreka $8.5^2 = v^2 + d^2$, kjer je v višina zabojnika in d diagonala osnovne ploskve. $d = \frac{1}{2}\sqrt{12^2 + 9^2} = 7.5$ m. Višina zabojnika potemtakem meri 4 m. Vsako uro priteče v zabojnik $\frac{1}{5}$ njegove prostornine, ta pa znaša $V = 12 \cdot 9 \cdot 4\ \text{m}^3 = 432\ \text{m}^3$. Hitrost pritekanja vode je $86.4\frac{m^3}{h}$.

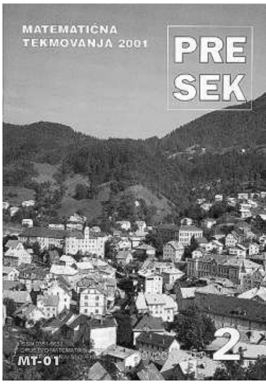
4. Število miz označimo z m, število jabolk na eni mizi pa z j. Skupno število jabolk je $m \cdot j$. Če dodamo 5 miz, se zmanjša število jabolk na mizi za 6, skupno število le-teh je sedaj $(m+5)(j-6)$. Če dodamo še 5 novih miz in zmanjšamo število jabolk v košari za 4, dobimo skupaj $(m+10)(j-10)$ jabolk. Iz enačbe $m \cdot j = (m+5)(j-6)$ sledi zveza $j = \frac{6m+30}{5}$. Če to zvezo uporabimo v enačbi $m \cdot j = (m+10)(j-10)$, pridemo do rešitve sistema enačb: $m = 20$ in $j = 30$. V restavraciji imajo na voljo $20 \cdot 30 = 600$ jabolk.

5. Stranici enega od osmih skladnih pravokotnikov označimo z a (daljšo) in b. $3a = 5b$. Sestavljen večji pravokotnik ima stranici dolgi $3a$ in $a+b$. Diagonalo dobimo kot $d = \sqrt{(3a)^2 + (a+b)^2}$. Z upoštevanjem $b = \frac{3a}{5}$, dobimo $d = \sqrt{\frac{289a^2}{25}} = \frac{17a}{5}$. $a = 5 \cdot \frac{136}{17} = 40$ cm, $b = 24$ cm. Ploščina enega od malih pravokotnikov meri $a \cdot b = 960$ cm^2.



Tekmovanja v reviji Presek

Za lažjo pripravo na matematična tekmovanja so pred leti izšle rešene tekmovalne naloge tudi v tematskih številkah revije Presek.



MATEMATIČNA TEKMOVANJA 2001

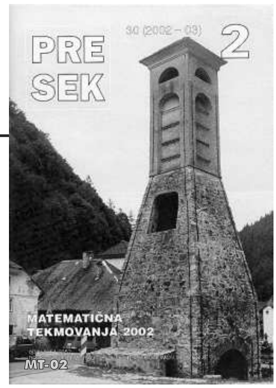
64 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

6,26 EUR

MATEMATIČNA TEKMOVANJA 2002

64 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

6,26 EUR



MATEMATIČNA TEKMOVANJA 2003

72 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

6,26 EUR

Poleg omenjenih lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog različnih zahtevnosti za osnovnošolce, srednješolce in študente s tekmovanj v znanju matematike, fizike, logike, astronomije in računalništva. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite s popustom:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/tekmovanja/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvu 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.

Matematični kenguru

Vsako šolsko leto na šolah potekajo različna tekmovanja v znanju.
Za lažjo pripravo vam ponujamo več zbirk tekmovalnih nalog z rešitvami.

EVROPSKI MATEMATIČNI KENGURU

2002–2004

več kot 500 nalog s tekmovanj

+ dodanih še 160 novih nalog

208 strani
format 16,5 × 23,5 cm
mehka vezava

10,99 EUR

MEDNARODNI MATEMATIČNI KENGURU

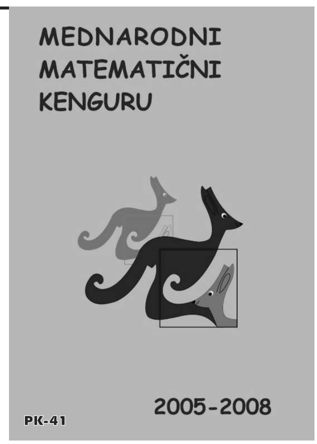
2005–2008

več kot 500 nalog s tekmovanj

+ dodanih še 120 novih nalog

296 strani
barvni tisk
format 16,5 × 23,5 cm
mehka vezava

18,74 EUR



Poleg omenjenih lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog različnih zahtevnosti za osnovnošolce, srednješolce in študente s tekmovanj v znanju matematike, fizike, logike, astronomije in računalništva. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite s popustom:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/tekmovanja/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvu 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.