Tekmovanja

Rešitve nalog z regijskega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2009/10

Skupina I

1. *Podatki:* $m = 15$ kg, $N_0 = 10$, $F = 70$ N.

   a) Zaveso si mislimo razdeljeno na 10 navpičnih trakov, ki visijo na kolescih. Krajna dva imata polovično širino. Teža posameznega traku je potem $mg/(N_0 - 1) = mg/9 = 16{,}3$ N, razen prvega in zadnjega, ki tehtata po $mg/18 = 8{,}17$ N. Zadnja nit je torej napeta s silo 8,17 N.

   b) Denimo, da smo iztaknili N kolesc. Zadnje kolesce naj bo v povsem na robu, tako kot je prikazano na sliki pri besedilu naloge. Sila na nit na zadnjem kolescu mora potem uravnovesiti težo N trakov in še težo polovičnega traku. Iz pogoja, da je sila manjša od največje dovoljene sile, $N\,mg/9 + mg/18 > F$, sledi

   $$N < \frac{F - \frac{1}{18}\,mg}{\frac{1}{9}\,mg} = 3{,}78\,.$$

   Iztakniti smemo največ 3 kolesca.

2. *Podatki:* $a = 4$ m/s^2, $m = 3$ g, $k_{\mathrm{tr}} = 0{,}6$, $h = 50$ cm.

   a) Koščček zemlje v vodoravni smeri pospešuje pravokotna sila podlage (vetrobranskega stekla). Ker se koščček v tej smeri giblje z enakim pospeškom kot avtomobil, velja $F_n = ma = 12$ mN.

   b) Pri gibanju navzdol deluje na koščček teža in trenje. Velja

   $$ma_y = mg - k_{\mathrm{tr}}F_n\,,$$

   torej

   $$a_y = g - k_{\mathrm{tr}}\,a = 7{,}4\ \mathrm{m/s}^2\,,$$

   od koder sledi

   $$t = \sqrt{\frac{2h}{a_y}} = 0{,}37\ \mathrm{s}\,.$$

   c) Iz pogoja $a_y = 0$ dobimo mejno vrednost pospeška, pri kateri koščček ne bi več drsel: $a \geq g/k_{\mathrm{tr}} = 16{,}3$ m/s^2.

3. *Podatki:* $m_1 = 80$ kg, $m_2 = 70$ kg, $k = 400$ N/m, $l = 12$ m.

a) Z x označimo raztezek vrvi. S pomočjo energijskega izreka določimo najnižjo točko skoka v globini $x + l$. Na tej točki ima skakalec hitrost nič, zato se vsa njegova potencialna energija pretvori v prožnostno energijo vrvi:

$$\frac{1}{2}kx_0^2 = m_1 g(l + x_0)\,. \tag{1}$$

Izrazimo

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{m_1 g}{k}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2kl}{m_1 g}}\right) = 9{,}1\ \text{m}\,, \\ h &= l + x_0 = 21\ \text{m}\,. \end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je smiselna le rešitev s pozitivnim predznakom pred korenom, rešitev z negativnim predznakom, ko je $x_0 < 0$, pa ne pride v poštev. Ta bi veljala le v primeru vzmeti, ko sila deluje proti ravnovesni legi tudi pri skrčitvi.

b) Zapišimo energijski izrek za skupinski skok:

$$(m_1 + m_2)g\,(l + x_0) = \tfrac{1}{2}kx_0^2 + \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2\,.$$

Upoštevamo enačbo (1) in za hitrost v v globini $l + x_0$ sledi:

$$m_2 g(l + x_0) = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2\,, \qquad v = \sqrt{\frac{2m_2 g(l + x_0)}{m_1 + m_2}}\,.$$

Za x_0 vzamemo rezultat pri a) in dobimo

$$v = 13{,}9\,\text{m/s}\,.$$

Na tej točki mora prvi kaskader delovati s tolikšnim sunkom sile na drugega, da se pri tem popolnoma ustavi, kot bi se to zgodilo pri samostojnem skoku. Sprememba gibalne količine prvega skakalca je enaka sunku sile, s katero drugi skakalec deluje na prvega. Z F_{12} označimo silo prvega skakalca na drugega, z F_{21} pa silo drugega na prvega. Velja

$$F_{21}\Delta t = -F_{12}\Delta t = 0 - m_1 v\,,$$

Gibalna količina drugega skakalca pa se poveča za sunek sile, s katerim prvi skakalec odrine drugega:

$$\begin{aligned} m_2 v' &= m_2 v + F_{12}\Delta t = (m_1 + m_2)v\,, \\ v' &= (1 + m_1/m_2)v = 29{,}8\,\text{m/s}\,. \end{aligned}$$

Hitrost drugega skakalca mora torej takoj po odrivu biti $v' = 29{,}8\,\text{m/s}$.

Skupina II

1. *Podatki:* $U_0 = 12$ V, $P_1 = 24$ W, $P_2 = 18$ W, $U_g = 24$ V, $R_0 = 20\ \Omega$.

   Upor prve žarnice je $R_1 = U_0^2/P_1 = 6\ \Omega$, druge žarnice pa $R_2 = U_0^2/P_2 = 8\ \Omega$.

   Drsni upornik si mislimo sestavljen iz dveh zaporedno vezanih upornikov z uporoma R_x in $R_0 - R_x$. Da bo na žarnicah nominalna napetost $U_0 = U_g/2$, mora biti nadomestni upor vzporedno vezanih upornikov R_1 in R_x enak nadomestnemu uporu vzporedno vezanih upornikov R_2 in $R_0 - R_x$:

   $$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_0 - R_x}\,.$$

   Od tod sledi kvadratna enačba za R_x:

   $$(R_2 - R_1)R_x^2 + (2R_1R_2 - (R_2 - R_1)R_0)R_x - R_1R_2R_0 = 0\,,$$

   s smiselno rešitvijo $R_x = 12\ \Omega$. Delilno razmerje $R_x : R_0 - R_x$ je torej $3 : 2$.

2. *Podatki:* $2r = 5$ cm, $l = 15$ cm, $m_a = 15$ g, $m_b = 100$ g, $T = 87$ K, $d = 1$ mm, $\lambda = 0{,}04$ W/mK, $T_0 = 300$ K, $p_0 = 101$ kPa, $\Delta p = 1000$ kPa, $\rho = 808{,}6$ kg/m^3, $q = 200$ kJ/kg, $M = 28$ kg/kmol.

   a) Najprej iz splošne plinske enačbe izračunajmo, koliko dušika mora izpariti, da bo tlak v plastenki enak $p_0 + \Delta p$:

   $$m_i = \frac{(p_0 + \Delta p)V_0M}{RT} = \frac{(p_0 + \Delta p)\pi r^2 lM}{RT} = 12{,}5\ \text{g}\,.$$

   Prostornina neizparelega tekočega dušika je zanemarljiva v primerjavi z V_0 in zato ni bilo potrebno upoštevati zmanjšanja prostornine plina na račun preostale kapljevine.

   Skozi stene teče toplotni tok

   $$P = \lambda\,\frac{S(T_0 - T)}{d} = \lambda\,\frac{2\pi r(r + l)(T_0 - T)}{d} = 234\ \text{W}\,,$$

   tako da m_i dušika izpari v času

   $$t = \frac{m_i q}{P} = 11\ \text{s}\,.$$

   c) V tem primeru prostornina preostale kapljevine ni zanemarljiva in moramo upoštevati, da je prostornina plina manjša od V_0 za prostornino preostale kapljevine: $V = V_0 - (m_b - m_i)/\rho$. V duhu približka pri a) lahko v tem izrazu zanemarimo maso izparelega dušika m_i; potem je $V = V_0 - m_b/\rho = 170$ cm^3 in

   $$m_i = \frac{(p_0 + \Delta p)VM}{RT} = 7{,}2\ \text{g}\,.$$

   (Če ne bi zanemarili m_i v izrazu za V, bi dobili 7,6 g.)

   V tem primeru plastenko raznese v 6 s.

3. *Podatki:* $l = 1$ m, $S = 1$ mm^2, $s = 1$ cm, $h = 2$ cm, $\rho = 8{,}9 \cdot 10^3$ kg/m^3, $j_m = 6$ A/mm^2.

a) Tok v zgornji prečki ima nasprotno smer kot tok v spodnji, zato spodnja deluje na zgornjo z odbojno silo. V ravnovesni legi je odbojna sila enaka teži; od tod izluščimo iskani tok:

$$\frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi s} = mg = Sl\rho g\,, \qquad I = \sqrt{\frac{2\pi s S\rho g}{\mu_0}} = 66 \text{ A}\,.$$

b) V tem primeru se tok razdeli med obe zgornji prečki. Če zanemarimo kratka navpična odseka z dolžinama po $h - s$, teče po srednji prečki tok $I_1 = I/2$ in po zgornji $I_2 = I/2$. Sila med zgornjima dvema prečkama je privlačna. Za ravnovesje sedaj velja:

$$\frac{\mu_0 I I_1 l}{2\pi s} + \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi(h-s)} = Sl\rho g\,. \tag{2}$$

Vstavimo izraza za oba tokova:

$$I^2\,\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{2(h-s)}\right) = S\rho g\,,$$

$$I = \sqrt{\frac{8\pi s(h-s)S\rho g}{\mu_0(2h-s)}} = \sqrt{\frac{4}{3}}\,I_a = 76 \text{ A}\,.$$

pri čemer je I_a tok pri a).

V primeru, da navpična odseka ne zanemarimo, moramo upoštevati

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{l + 2(h-s)}{l} \qquad \text{in} \qquad I_1 + I_2 = I\,,$$

od koder sledi:

$$I_1 = \frac{l + 2(h-s)}{2(l+h-s)} I\,, \qquad I_2 = \frac{l}{2(l+h-s)} I\,.$$

Dobljena izraza za I_1 in I_2 vstavimo v enačbo (2) in dobimo $I = 75{,}5$ A, kar se zanemarljivo malo razlikuje od zgornjega rezultata.

c) V tem primeru je tok, ki ga daje izvir, $I = Sj = 6$ A. To je za faktor 11 manj od toka pri a). Ker se v enačbi za ravnovesje tok pojavi v kvadratu, je razmik $11^2 = 121$ krat manjši kot v primeru a), torej $s' = 0{,}08$ mm. To pa je precej manj od premera žic, zato poskus ni smiseln.

V primeru b) ugotovimo, da je sila zgornje prečke na srednjo zanemarljiva v primerjavi s silo spodnje prečke. Ker po srednji teče le $I/2 = 3$ A, je razmik še za faktor dva manjši, torej $s' = 0{,}04$ mm, in poskus tudi v tem primeru ni smiseln.

Skupina III

1. *Podatki:* $m_1 = 80$ kg, $m_2 = 70$ kg, $k = 400$ N/m, $l = 12$ m.

   a) Z x označimo raztezek vrvi. S pomočjo energijskega zakona določimo najnižjo točko skoka v globini $x + l$, kjer se drugi skakalec spusti od prvega. Na tej točki imata oba skakalca hitrost nič, zato se vsa njuna potencialna energija pretvori v prožnostno energijo vrvi:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\,kx^2 &= (m_1 + m_2)g(l + x)\,,\\ x &= \frac{(m_1 + m_2)g}{k}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2kl}{(m_1 + m_2)g}}\right) = 13{,}8\ \mathrm{m}\,,\\ h &= l + x = 52{,}8\ \mathrm{m}\,.\end{aligned}$$

   Upoštevali smo, da je smiselna le rešitev s pozitivnim predznakom pred korenom, rešitev z negativnim predznakom, ko je $x_0 < 0$, pa ne pride v poštev. Ta bi veljala le v primeru vzmeti, ko sila deluje proti ravnovesni legi tudi pri skrčitvi.

   b) Zdaj, ko poznamo najnižjo točko, lahko ponovno uporabimo energijski izrek. Vsa prožnostna energija vrvi, ki je enaka začetni potencialni energiji obeh skakalcev, se pretvori v potencialno in kinetično energijo prvega skakalca na višini mostu:

$$m_1 g(l + x) + \tfrac{1}{2}\,m_1 v^2 = \tfrac{1}{2}\,kx^2 = (m_1 + m_2)g(l + x)\,,$$

   pri čemer je v hitrost prvega skakalca na višini mostu. Dobimo

$$v = \sqrt{\frac{2m_2 g(l + x)}{m_1}} = 21{,}0\ \mathrm{m/s}\,.$$

2. *Podatki:* $h_1 = 30$ km, $h_0 = 10$ km, $l_0 = 100$ km, $c_1 = 1{,}2$ km/s, $c_2 = 1{,}5$ km/s, $c_3 = 1{,}7$ km/s.

   a) Za direktni val velja $t_1 = \sqrt{l_0^2 + h_0^2}/c_1 = 83{,}7\ \mathrm{s}\,.$

   Pot za val 2 najhitreje izračunamo tako, da žarišče prezrcalimo okoli meje med zgornjo in srednjo plastjo (glej sliko):

$$t_1 = \frac{\sqrt{l_0^2 + (2h_1 - h_0)^2}}{c_1} = 93{,}2\ \mathrm{s}\,.$$

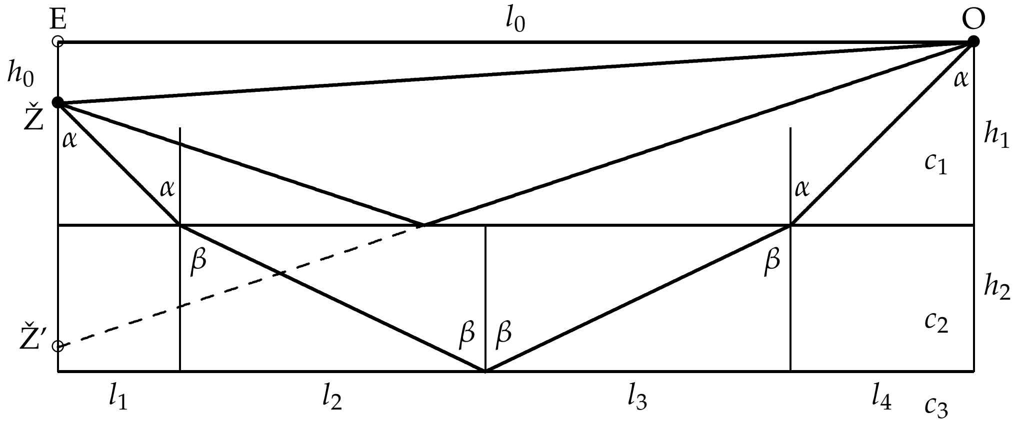
   b) Ker je na meji med prvo in drugo plastjo ravno prišlo do totalnega odboja, velja $\sin\beta = c_2/c_3$. Iz $\sin\alpha/\sin\beta = c_1/c_2$ sledi še $\sin\alpha = c_1/c_3$, $\alpha = 44{,}9°$, $\beta = 61{,}9°$.

   Debelino druge plasti dobimo iz pogoja, da je projekcija poti vala 3 na vodoravno os enaka l_0. Iz slike vidimo $l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = l_0$ in

$$(h_1 - h_0)\tan\alpha + h_2\tan\beta + h_2\tan\beta + h_1\tan\alpha = l_0\,,$$

   od koder izrazimo

$$h_2 = \frac{l_0 - (2h_1 - h_0)\tan\alpha}{2\tan\beta} = 13{,}4\ \mathrm{km}\,.$$



c) Iz slike hitro razberemo poti, ki jih žarek opravi na posameznih odsekih. Za čas potovanja vala 3 velja

$$t_3 = \frac{(h_1 - h_0)}{c_1 \cos\alpha} + \frac{2h_2}{c_2 \cos\beta} + \frac{h_1}{c_1 \cos\alpha} = 96{,}8 \text{ s}\,.$$

3. *Podatki:* $l = 10$ m, $m = 1{,}28$ g, $m_b = 0{,}5$ kg, $t_0 = 2{,}5$ s, $T = 25$ °C, $F_{\text{tr}} = 0{,}15$ N, $s_0 = 10$ cm.

a) Če se bat premakne v desno za x, v desni polovici tlak naraste, v levi pa pade. Iz splošne plinske enačbe za vsako polovico sledi:

$$p_1 = \frac{mRT}{2M} \frac{1}{S\left(\frac{1}{2}l - x\right)}\,, \qquad p_2 = \frac{mRT}{2M} \frac{1}{S\left(\frac{1}{2}l + x\right)}\,.$$

Na bat deluje sila

$$F = (p_1 - p_2)S = \frac{mRT}{Ml}\left(\frac{1}{1-\frac{2x}{l}} - \frac{1}{1+\frac{2x}{l}}\right) \approx \frac{4mRT}{Ml^2}\,x$$

in kaže proti mirovni legi, tako kot sila vzmeti pri nihanju, $F = kx$. Od tod odčitamo $k = 4mRT/Ml^2$.

Iz enačbe za nihajni čas $t_0 = 2\pi\sqrt{m_b/k}$ sledi

$$t_0^2 = 4\pi^2 \frac{m_b M l^2}{4mRT}\,, \qquad M = \frac{mRTt_0^2}{\pi^2 m_b l^2} = 40{,}0 \text{ kg/kmol}\,.$$

b) Na začetku ima bat le prožnostno energijo, ko se giblje, pa prožnostno in kinetično. Razlika energij je enaka delu trenja na poti $s_0 - x$. Če z x označimo odmik od mirovne lege, velja

$$\tfrac{1}{2}ks_0^2 - \tfrac{1}{2}kx^2 - \tfrac{1}{2}m_b v^2 = F_{\text{tr}}(s_0 - x)\,. \tag{3}$$

Hitrost je največja, ko je kinetična energija največja:

$$W_{\text{kin}} = \tfrac{1}{2}ks_0^2 - \tfrac{1}{2}kx^2 - F_{\text{tr}}(s_0 - x)\,.$$

Iz pogoja $\mathrm{d}W_{\text{kin}}/\mathrm{d}x = 0$ dobimo lego x_0, ko sta kinetična energija in hitrost največji:

$$-kx_0 + F_{\text{tr}} = 0\,, \qquad x_0 = \frac{F_{\text{tr}}}{k} = 4{,}7\ \text{cm}\,.$$

Do enakega rezultata pridemo tudi z razmislekom: na začetku rezultanta sil pospešuje bat, na koncu pa postane trenje večje od tlačne sile in hitrost se zmanjšuje; največja hitrost je tedaj, ko sta sili (nasprotno) enaki, $kx_0 = F_{\text{tr}}$.

c) Hitrost v legi x_0 izrazimo iz enačbe (3), tako da za trenje vzamemo $F_{\text{tr}} = kx_0$:

$$v_0 = \sqrt{\frac{k(s_0^2 - x_0^2) - 2F_{\text{tr}}(s_0 - x_0)}{m_b}} = \frac{2\pi}{t_0}\,(s_0 - x_0) = 0{,}13\ \text{m/s}\,.$$

Rešitve nalog z državnega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2009/10.

Skupina I

1. *Podatki:* $l = 3a$

Silo na zaboj A označimo z F_A, na zaboj B pa z F_B. Njuni projekciji na vodoravno in navpično os sta kar $F_A/\sqrt{2}$ in $F_B/\sqrt{2}$. Silo F_A, ki je potrebna, da se začne zaboj A ravno sukati okoli osi v levem robu, izrazimo iz ravnovesja navorov za os v levem robu:

$$F_g\,\tfrac{1}{2}a = F_A\,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,a\,, \qquad F_A = F_g\,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

pri čemer je F_g teža zaboja.

Pravokotno silo podlage dobimo iz ravnovesja sil v navpični smeri: $F_n = F_g - F_A\frac{1}{\sqrt{2}}$. Iz ravnovesja sil v vodoravni smeri pa sledi $F_l = F_A\frac{1}{\sqrt{2}}$, v mejnem primeru je $F_l = k_lF_n = k_l(F_g - F_A\frac{1}{\sqrt{2}})$, torej

$$k_l \geq \frac{F_l}{F_g - F_A\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{F_A\frac{1}{\sqrt{2}}}{F_g - F_A\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1}{2}F_g}{F_g - \frac{1}{2}F_g} = 1\,.$$

Preveriti moramo še, če pri teh pogojih ne zdrsne zaboj B. Silo F_B na zaboj B izrazimo iz ravnovesja navorov na letev; os postavimo v zgornje krajišče letve. Velja ($l = 3a$):

$$lF_A = (l - a\sqrt{2})F_B\,, \qquad F_B = F_A\,\frac{3}{3-\sqrt{2}} = F_g\,\frac{3}{(3-\sqrt{2})\sqrt{2}}\,.$$

Podobno kot v primeru zaboja A iz ravnovesja sil sledi

$$F_l = F_B \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \qquad F_l \le k_l (F_g + F_B \frac{1}{\sqrt{2}})\,,$$

$$k_l \ge \frac{F_B \frac{1}{\sqrt{2}}}{F_g + F_B \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{3}{3 + 2(3 - \sqrt{2})} = 0{,}49\,,$$

kar pa je že vsebovano v pogoju za ravnovesje zaboja A. Prej bi zdrsnil zaboj A.

2. *Podatki:* $N_x = 233$, $N_y = 7$, $t_0 = 6{,}0$ s, $\alpha = 8°$.

Po vsaki osvežitvi se znak premakne za en, dva, tri ... stolpce v levo. V času t_0 se premakne za N_x stolpcev, možne frekvence osveževanja so potem:

$$\nu = \frac{N_x}{N t_0}\,, \quad N = 1, 2, 3, \ldots$$

V eni osvežitvi je spodnja vrstica premaknjena glede na zgornjo za $\Delta x = Na$ in zato se zdi nagnjena za kot $\tan\beta = \Delta x/(N_y - 1)a = N/6$, pri čemer je $(N_y - 1)a$ razmik med spodnjo in zgornjo vrstico. Za $N = 1, 2, 3$ dobimo kote $\beta = 9°, 18°, 27°$, zato lahko sklepamo, da je N v enačbi za frekvenco enak kar 1. Frekvenca osveževanja je

$$\nu = \frac{N_x}{t_0} = 39 \text{ Hz}\,.$$

3. *Podatki:* $m_T = 60$ kg, $\alpha = \beta = 60°$, $l_1 = 8$ m, $l_2 = 12$ m.

V točki A je Tarzan za $h_1 = l_1(1 - \cos\beta) = \frac{1}{2} l_1$ nad točko B; podobno velja za višino točke C: $h_2 = \frac{1}{2} l_2$. Hitrost v točki B označimo z v_0. Ko se Tarzan s skalo spusti do točke B, se ohrani vsota kinetične in potencialne energije

$$(m_T + m_s) g\, h_1 = \tfrac{1}{2}(m_T + m_s) v_0^2\,, \qquad v_0^2 = 2gh_1 = gl_1\,.$$

V trenutku, ko odvrže skalo, se ohranja gibalna količina Tarzana in skale. Če z v_1 označimo hitrost Tarzana po metu, velja v vodoravni smeri

$$(m_T + m_s) v_0 = m_T v_1\,, \qquad v_1 = \frac{m_T + m_s}{m_T} v_0\,.$$

Pri gibanju Tarzana od B do C se ohranja vsota kinetične in potencialne energije, torej:

$$\tfrac{1}{2} m_T v_1^2 = m_T g h_2\,, \qquad v_1^2 = 2gh_2 = gl_2\,.$$

Enačbe združimo in dobimo

$$\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2 = \left(\frac{m_T + m_s}{m_T}\right)^2 = \frac{l_2}{l_1}\,, \qquad m_s = \left(\sqrt{\frac{l_2}{l_1}} - 1\right) m_T = 13{,}5 \text{ kg}\,.$$

4. *Podatki:* $2r = 24$ cm, $2R = 45$ cm, $h_2 = 305$ cm, $h_1 = 235$ cm, $v_0 = 10$ m/s.

   a) Za najmanjši kot, pri katerem gre žoga ravno še skozi obroč, velja

$$\sin\alpha_0 = r/R\,, \qquad \alpha_0 = 32{,}2^\circ\,.$$

   b) Iz enačb za poševni met izpeljemo izraz za pot žoge v navpični smeri od višine h_1 do h_2:

$$h_2 = h_1 + v_0 \sin\alpha\, t - \tfrac{1}{2}gt^2\,,$$

   od koder sledi za čas potovanja (smiselna je rešitev s + predznakom):

$$t = \frac{v_0\sin\alpha + \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha - 2g(h_2-h_1)}}{g}\,.$$

   Na višini h_2 sta komponenti hitrosti

$$v_x = v_0\cos\alpha\,, \qquad v_y = v_0\sin\alpha - gt = -\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha - 2g(h_2-h_1)}\,,$$

   pri čemer smo za t vstavili zgornjo rešitev. Za tangens kota, pod katerim pade v koš, velja $\tan\alpha' = -v_y/v_x$, in v mejnem primeru

$$\tan\alpha_0 = \frac{\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha - 2g(h_2-h_1)}}{v_0\cos\alpha}\,.$$

   Enačbo kvadriramo

$$\tan^2\alpha_0 = \tan^2\alpha - \frac{2g(h_2-h_1)}{v_0^2\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha - \frac{2g(h_2-h_1)}{v_0^2}\left(\tan^2\alpha + 1\right)\,.$$

   Od tod dobimo

$$\tan^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha_0 + \frac{2g(h_2-h_1)}{v_0^2}}{1 - \frac{2g(h_2-h_1)}{v_0^2}} = \frac{\frac{r^2}{R^2-r^2} + \frac{2g(h_2-h_1)}{v_0^2}}{1 - \frac{2g(h_2-h_1)}{v_0^2}}\,, \qquad \alpha = 38{,}2^\circ\,.$$

   c) Izračunani kot pri b) vstavimo v enačbo za čas potovanja in dobimo $t = 1{,}14$ s in za razdaljo od koša

$$l = v_0\cos\alpha\, t = 8{,}9\ \text{m}\,.$$

Skupina II

1. *Podatki:* $R = 3\ \Omega$, $U_0 = 36$ V, $U_1 = 6$ V.

   a) Vsota padcev napetosti v srednjem krogu (na sliki a)) mora biti 0, in ker skozi žarnici ne teče noben tok, mora skozi zgornji in spodnji upornik teči enak tok. Skozi vse upornike v vezju torej teče enak tok. Ker po levi žarnici tok ne teče, mora biti napetost med točko A in zgornjim priključkom žarnice enaka napetosti med točko A in spodnjim priključkom žarnice. Ker sta tudi tokova enaka, takoj ugotovimo $R_y = R$. S podobnim sklepom dobimo $R_x = 0$.

b) Na desni žarnici ni napetosti, zato sta napetosti na desnih dveh upornikih na vezju na sliki b) enaki, in skozi upornika tečeta enaka tokova; tok skozi en upornik označimo I. Ker skozi desno žarnico tok ne teče, teče skozi upornika na sredini (R in $2R$) enak tok, kot skozi desni par, torej I. Skozi levo žarnico teče tok $I_1 = U_1/2R = 1$ A in sicer navzgor, saj je napetost med zgornjim priključkom žarnice do B manjša kot med spodnjim priključkom in B. Napišimo enačbo za napetosti v srednjem krogu: $U_1 + IR - 2IR = 0$ od koder takoj sledi $I = U_1/R = 2I_1 = 2$ A. Skozi upornik R_x potem teče tok $I_x = I - I_1 = I_1 = 1$ A, skozi R_y pa $I_y = I + I_1 = 3I_1 = 3$ A.

Napišimo enačbo za napetosti v zgornji veji: $R_x I_x + RI + 2RI = U_0$, torej

$$R_x = \frac{U_0 - 3RI}{I_x} = \frac{U_0}{I_1} - 6R = 18\ \Omega = 6R$$

in podobno za spodnjo vejo

$$R_y = \frac{U_0 - 4RI}{I_y} = \frac{U_0}{3I_1} - \frac{8}{3}R = 4\ \Omega = \frac{4R}{3}\,.$$

2. *Podatki:* $S = 1$ m^2 $l = 5$ cm $e = 0{,}74$ μAs, $\varepsilon = 500$, $E = 1200$ N/m^2, $m = 1$ kg.

Na kondenzatorju je napetost

$$U = \frac{el}{\varepsilon\varepsilon_0 S}\,.$$

Ko na plošči položimo kilogramsko utež, se razmik zmanjša za Δl. Iz Hookovega zakona

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l} \qquad \text{sledi} \qquad \frac{\Delta l}{l} = -\frac{mg}{SE}\,,$$

od koder dobimo za spremembo napetosti

$$\Delta U = \frac{e\Delta l}{\varepsilon\varepsilon_0 S} = -\frac{elmg}{\varepsilon\varepsilon_0 S^2 E} = -0{,}068\ \mathrm{V}\,.$$

(Električna sila je zanemarljivo majhna.)

3. *Podatki:* $m = 0{,}1$ g, $V = 1$ dm^3, $S = 3$ dm^2, $T_0 = 100$ °C, $T_0 = 25$ °C, $p_0 = 1$ bar, $M = 18$ kg/kmol.

a) Za delni tlak (suhega) zraka velja $p_z = p_0 - p_v$, pri čemer je p_v delni tlak vodne pare, ki ga izrazimo iz splošne plinske enačbe za vodno paro: $p_v V = \frac{m}{M} RT_0$. Delni tlak suhega zraka je potem

$$p_z = p_0 - p_v = p_0 - \frac{mRT_0}{MV} = 0{,}83\ \mathrm{bar}\,.$$

b) Zrak se ohlaja pri stalni prostornini; pri temperaturi T je njegov tlak

$$p_z' = p_z\frac{T}{T_0} = 0{,}66\ \mathrm{bar}\,.$$

Pri nižji temperaturi se vsa vodna para kondenzira, in tlak zraka pod pokrovko je enaka kar tlaku suhega zraka. Sila na pokrovko je

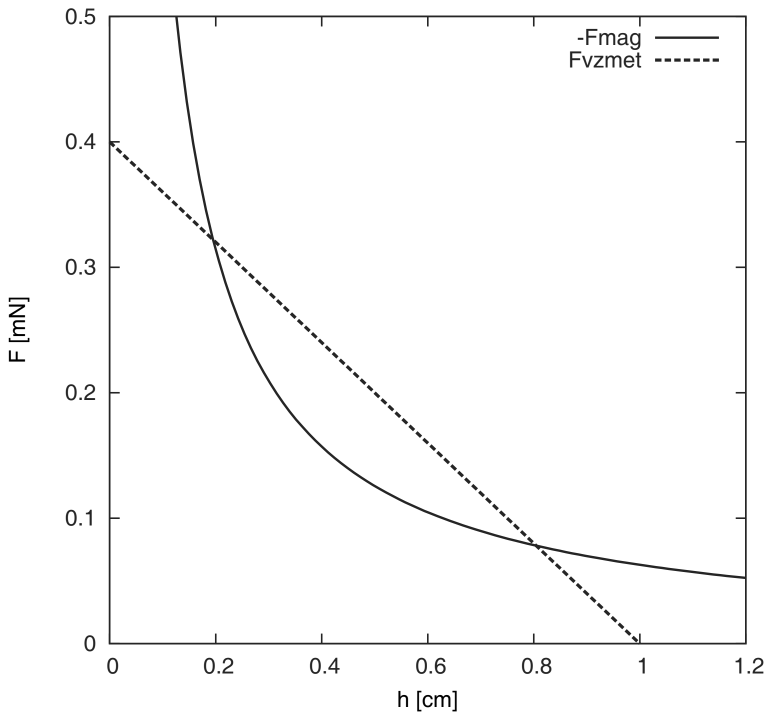
$$F = S(p_0 - p_z') = 1000\ \mathrm{N}\,.$$

4. *Podatki:* $R = 50$ cm, $r = 0{,}5$ mm, $k = 0{,}04$ N/m, $h_0 = 1$ cm, $I = 1$ A.

a) Sila je enaka sili med dvema ravnima vodnikoma z dolžino $l = 2\pi R$ v razmiku h:

$$F_m = \frac{\mu_0 I^2 2\pi R}{2\pi h} = \frac{\mu_0 I^2 R}{h}\,.$$

b) Slika kaže magnetno silo ($-F_{\mathrm{mag}}$) in silo vzmeti (F_{vzmet}):



c) V ravnovesju sila vzmeti uravnovesi magnetno silo; od tod sledi kvadratna enačba za razmik h:

$$k(h_0 - h) = \frac{\mu_0 I^2 R}{h}\,, \qquad h^2 - h_0 h + \frac{\mu_0 I^2 R}{k} = 0\,,$$

z rešitvama

$$h_{1,2} = \frac{h_0 \pm \sqrt{h_0^2 - 4\mu_0 I^2 R/k}}{2}\,, \qquad h_1 = 0{,}80 \text{ cm}\,, \quad h_2 = 0{,}20 \text{ cm}\,.$$

Prva rešitev predstavlja stabilno lego. Iz slike vidimo, da pri povečanju razmika postane magnetna sila večja od sile vzmeti. Obroč se v tem primeru pomakne proti ravnovesni legi. Če se razmik zmanjša, prevlada sila vzmeti, ki zopet pomakne obroč proti ravnovesni legi. Pri drugi rešitvi se dogaja ravno obratno; torej je druga lega labilna.

d) Rešitev več ne obstaja, ko je izraz pod korenom manjši ali enak 0. Kritično vrednost toka označimo z I_c in dobimo

$$h_0^2 - \frac{4\mu_0 I_c^2 R}{k} = 0\,, \qquad I_c = \sqrt{\frac{kh_0^2}{4\mu_0 R}} = 1{,}26\ \mathrm{A}\,.$$

Skupina III

1. *Podatki:* $a = 3$ m, $b = 1{,}8$ m, $c = 2{,}5$ m, $\nu_{\max} = 20$ kHz, $v = 20$ m/s, $\nu_0 = 500$ Hz.

   a) Zvok se ojača, če je razlika poti od prvega in drugega zvočnika enaka mnogokratniku valovne dolžine

   $$c - b = N\lambda = \frac{Nc_0}{\nu}\,, \qquad N_{\max} \leq \frac{(c-b)\nu_{\max}}{c_0} = 41{,}1\,.$$

   Največji red je $N = 41$.

   b) Zaradi Dopplerjevega pojava sliši fizik višjo frekvenco

   $$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{v_\parallel}{c_0}\right) = \nu_0 \left(1 + \frac{v\cos\varphi}{c_0}\right)\,,$$

   pri čemer je φ enak komplementarnemu kotu med stranico a in stranico b.

   Iz kosinusnega izreka sledi

   $$\cos(90^\circ - \varphi) = \sin\varphi = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\,, \qquad \varphi = \arcsin\left\{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right\}\,.$$

   Končno dobimo $\nu = 524$ Hz.

2. Glej rešitev 3. naloge v skupini II.

3. *Podatki:* $m_T = 60$ kg, $\alpha = \beta = 60^\circ$, $l_1 = 8$ m, $l_2 = 12$ m, $m_l = 24$ m.

   V točki A je Tarzan za $h_1 = l_1(1 - \cos\beta) = \frac{1}{2}l_1$ nad točko B; podobno velja za višino točke C: $h_2 = \frac{1}{2}l_2$. Hitrost v točki B označimo z v_0. Ko se Tarzan s skalo spusti do točke B, se ohrani vsota kinetične in potencialne energije

   $$(m_T + m_s)g\,h_1 = \tfrac{1}{2}(m_T + m_s)v_0^2\,, \qquad v_0^2 = 2gh_1 = gl_1\,.$$

   V trenutku, ko odvrže skalo, se ohranja gibalna količina Tarzana in skale. Če z v_1 označimo hitrost Tarzana po metu, velja v vodoravni smeri

   $$(m_T + m_s)v_0 = m_T v_1\,, \qquad v_1 = \frac{m_T + m_s}{m_T}\,v_0\,.$$

Ko preskoči na drugo liano, se ohranja vrtilna količina Tarzana in liane. Os izberemo v pritrdišču liane. Na začetku je vrtilna količina sistema le vrtilna količina Tarzana (tj. produkt med ročico l_2 in gibalno količino $m_T v_1$), na koncu pa vrtilna količina Tarzana in liane. Liano obravnavamo kot togo palico, ki se vrti okoli krajišča, z vztrajnostnim momentom $m_l l^2/12 + m_l(l_2/2)^2 = m_l l_2^2/3$, Tarzana pa kot točkasto telo z vztrajnostnim momentom $m_T l_2^2$. Iz ohranitve vrtilne količine sledi

$$m_T v_1 l_2 = \left(m_T l_2^2 + \tfrac{1}{3}\, m_l l_2^2\right) \omega\,.$$

Po preskoku velja ohranitev (rotacijske) kinetične ($\frac{1}{2}J\omega^2$) in potencialne energije. Pri tem moramo upoštevati, da se težišče liane dvigne le za $l_2/4$:

$$\tfrac{1}{2}\left(m_T l_2^2 + \tfrac{1}{3}\, m_l l_2^2\right)\omega^2 = m_T g\,\tfrac{1}{2} l_2 + m_l g\,\tfrac{1}{4} l_2\,.$$

Ko v enačbo vstavimo dobljene izraze za ω, v_1 in v_0, dobimo

$$\frac{(m_T + m_s)^2}{m_T + \frac{1}{3}m_l}\, g l_1 = (m_T + \tfrac{1}{2}m_l) g l_2$$

oziroma

$$\frac{(m_T + m_s)^2}{(m_T + \frac{1}{3}m_l)(m_T + \frac{1}{2}m_l)} = \frac{l_2}{l_1}$$

in končno

$$m_s = \sqrt{(m_T + \tfrac{1}{3}m_l)(m_T + \tfrac{1}{2}m_l)\,\frac{l_2}{l_1}} - m_T = 25{,}7\ \mathrm{kg}\,.$$

4. *Podatki:* $R = 50$ cm, $r = 0{,}5$ mm, $k = 0{,}04$ N/m, $h_0 = 1$ cm, $I = 1$ A.

Za primere a), b), c) in d) glej rešitev 4. naloge s skupini II.

e) V tem primeru mora biti sila vzmeti večja od magnetne sile pri $h = 2r$:

$$k(h_0 - 2r) = \frac{\mu_0 I_1^2 R}{2r}\,, \qquad I_1 = \sqrt{\frac{k\,2r(h_0 - 2r)}{\mu_0 R}} = 0{,}76\ \mathrm{A}\,.$$

Bojan Golli

Matematični kenguru

Vsako šolsko leto na šolah potekajo različna tekmovanja v znanju.
Za lažjo pripravo vam ponujamo več zbirk tekmovalnih nalog z rešitvami.

EVROPSKI MATEMATIČNI KENGURU

2002–2004

več kot 500 nalog s tekmovanj

\+ dodanih še 160 novih nalog

208 strani
format 16,5 × 23,5 cm
mehka vezava

10,99 EUR

MEDNARODNI MATEMATIČNI KENGURU

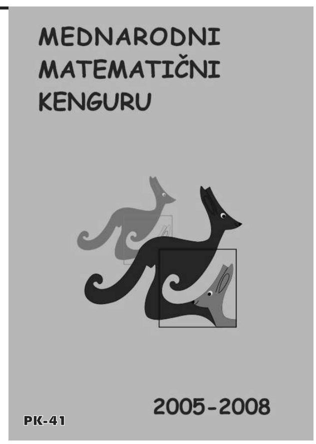
2005–2008

več kot 500 nalog s tekmovanj

\+ dodanih še 120 novih nalog

296 strani
barvni tisk
format 16,5 × 23,5 cm
mehka vezava

18,74 EUR



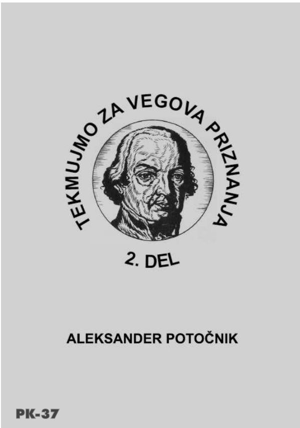
Poleg omenjenih lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog različnih zahtevnosti za osnovnošolce, srednješolce in študente s tekmovanj v znanju matematike, fizike, logike, astronomije in računalništva. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite s popustom:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/tekmovanja/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvu 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.

Zbirke nalog s tekmovanj

Vsako šolsko leto na šolah potekajo različna tekmovanja v znanju.
Za lažjo pripravo vam ponujamo več zbirk tekmovalnih nalog z rešitvami.



Aleksander Potočnik:

TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA – 2. del

Zbirka rešenih nalog s področnih in državnih tekmovanj od 1992 do 1998

80 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

6,99 EUR

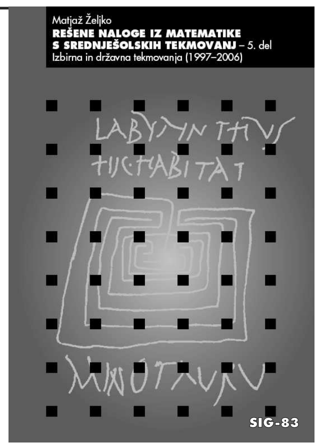
Matjaž Željko:

REŠENE NALOGE IZ MATEMATIKE S SREDNJEŠOLSKIH TEKMOVANJ

5. del: Izbirna in državna tekmovanja 1997–2006

172 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

21,24 EUR



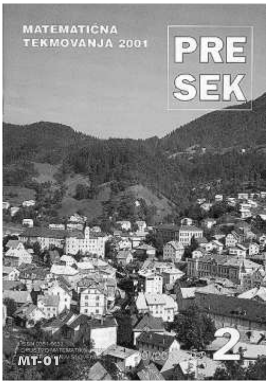
Poleg omenjenih lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog različnih zahtevnosti za osnovnošolce, srednješolce in študente s tekmovanj v znanju matematike, fizike, logike, astronomije in računalništva. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite s popustom:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/tekmovanja/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvu 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.

Tekmovanja v reviji Presek

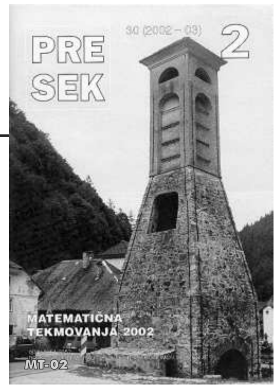
Za lažjo pripravo na matematična tekmovanja so pred leti izšle rešene tekmovalne naloge tudi v tematskih številkah revije Presek.



MATEMATIČNA TEKMOVANJA 2001

64 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

6,26 EUR



MATEMATIČNA TEKMOVANJA 2002

64 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

6,26 EUR

MATEMATIČNA TEKMOVANJA 2003

72 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

6,26 EUR

Poleg omenjenih lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog različnih zahtevnosti za osnovnošolce, srednješolce in študente s tekmovanj v znanju matematike, fizike, logike, astronomije in računalništva. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite s popustom:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/tekmovanja/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvu 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.