Tekmovanja

30. mednarodno matematično tekmovanje mest – pomladanski krog 2008/09

I. skupina (prvi del)

1. Dana sta konveksni 2009-kotnik P in premica p, ki se seka z mnogokotnikom P, ne vsebuje pa nobenega njegovega oglišča. Dokaži, da se premica p seka s sodo mnogo diagonalami mnogokotnika P.

2. Označimo z $a\hat{}b = a^b$. Če želimo izračunati izraz $7\hat{}7\hat{}7\hat{}7\hat{}7\hat{}7\hat{}7$, moramo vanj vstaviti pet parov oklepajev. Ali obstajata dve različni postavitvi oklepajev, ki nam definirata enaki vrednosti?

3. Vlado je izdelal nekaj kock enake velikosti in na vsako njihovo mejno ploskev zapisal po eno števko. Najmanj koliko kock mora izdelati, če želi, da se da iz njegovih kock sestaviti poljubno 30-mestno naravno število? (Števk 6 in 9 ne moremo dobiti s obračanjem ene oz. druge.)

4. Neko naravno število n smo povečali za 10% in dobili neko drugo naravno število m. Ali je možno, da je vsota števk števila m za 10% manjša od vsote števk števila n.

5. V rombu $ABCD$ je kot pri oglišču A enak $120°$. Na stranicah BC in CD ležita zapored taki točki M in N, da velja $\angle NAM = 30°$. Dokaži, da središče trikotniku NAM očrtane krožnice leži na eni od diagonal romba $ABCD$.

II. skupina (prvi del)

1. Označimo z $a\hat{}b = a^b$. Če želimo izračunati izraz $7\hat{}7\hat{}7\hat{}7\hat{}7\hat{}7\hat{}7$, moramo vanj vstaviti pet parov oklepajev. Ali obstajata dve različni postavitvi oklepajev, ki nam definirata enaki vrednosti?

2. V ravnini je dano nekaj točk, med katerimi nobene tri ne ležijo na skupni premici. Nekateri pari teh točk so povezani z daljicami. Denimo, da vsaka premica, ki ne vsebuje nobene izmed danih točk, seka sodo mnogo daljic, ki povezujejo točke. Dokaži, da tedaj iz poljubne izmed danih točk izhaja sodo mnogo daljic.

3. Za naravno število n naj $O(n)$ označuje njegov največji lihi delitelj. Za dani naravni števili $x_1 = a$ in $x_2 = b$ konstruiramo zaporedje z rekurzivnim predpisom $x_n = O(x_{n-1} + x_{n-2})$ za $n > 2$.

   a) Dokaži, da so od nekega indeksa dalje vsi členi zaporedja enaki nekemu naravnemu številu c.

   b) Kako lahko iz števil a in b določimo število c?

4. V vrsto zapišemo nekaj števil 1 in 0 in nato opazujemo take pare mest, da je levo število v paru enako 1, desno pa enako 0. Naj bo M število tistih parov, ki jih ločuje sodo mnogo vmesnih mest (lahko tudi 0 mest), N pa naj bo število tistih parov, ki jih ločuje liho mnogo vmesnih mest. Dokaži, da velja $M \geq N$.

5. Naj bo X neka točka v notranjosti tetraedra $\mathcal{T}$. Za poljubno oglišče V tetraedra $\mathcal{T}$ s T_V označimo težišče ploskve nasproti V. Skozi vsako oglišče V tetraedra $\mathcal{T}$ nato potegnemo premico, ki je vzporedna premici XT_V. Dokaži, da se dobljene štiri premice sekajo v skupni točki.

I. skupina (drugi del)

1. Vasja in Peter sta na papir zapisala števili $\frac{1}{2009}$ in $\frac{1}{2008}$ ter začela z naslednjo igro. Vasja v vsaki potezi izbere neko realno število x, Peter pa nato eno izmed števil na papirju poveča za x. Vasja zmaga, če se na papirju pojavi število 1. Ali lahko Vasja izbira števila tako, da zmaga ne glede na Petrove poteze.

2. a) Dokaži, da obstaja tak mnogokotnik, da ga lahko z neko premico p razdelimo na dva skladna dela tako, da premica p eno od stranic mnogokotnika razpolavlja, neko drugo stranico pa deli v razmerju $1:2$.

   b) Ali obstaja konveksen mnogokotnik, ki ustreza pogojem iz točke a)?

3. V sredinskem polju kvadratne mreže velikosti 101×101 stoji hišica, na preostalih poljih pa je ena od oznak 'zavij' ali 'naprej'. Avtomobilček začne svojo pot po dani mreži v poljubnem robnem polju mreže, v katerega vstopi pravokotno na rob mreže. Če se v nadaljevanju avtomobilček znadje na polju z oznako 'naprej', se premakne na sosednje polje, tako da ohrani svojo smer, če pa je na polju oznaka 'zavij', se avtomobilček obrne pravokotno (levo ali desno po lastni izbiri) na prejšnjo smer in se premakne na sosednje polje. Ali obstaja taka razporeditev oznak na poljih, da avtomobilček ne more priti do hišice?

4. Dano je tako neskončno zaporedje različnih naravnih števil, da je vsak člen tega zaporedja (razen prvega) bodisi aritmetična, bodisi geometrična sredina sosednjih dveh členov. Ali je tedaj nujno, da so od nekega člena dalje vsi členi le aritmetična sredina sosednjih dveh členov ali pa le geometrična sredina sosednjih dveh členov?

5. Grad je obdan z okroglim obrambnim zidom z devetimi stolpi, ki jih stražijo vitezi. Vsako uro se vsak izmed stražarjev premakne na sosednji stolp v smeri urinega kazalca ali v njej nasprotni smeri, pri čemer se vsak posamezni stražar vedno premika v isti smeri. Ponoči je vsak izmed stražarjev stražil vsakega izmed stolpov. Ob neki uri sta bila na enem izmed stolpov vsaj dva stražarja, ob neki drugi uri pa je le pet izmed stolpov stražil samo en stražar. Dokaži, da je ponoči obstajal stolp, ki ga ni stražil nihče.

6. Dan je enakokrak trikotnik ABC, ki ima pri vrhu A kot $\gamma = 120°$. Iz točke A izhajata po notranjosti kota γ žarka, ki oklepata kot $60°$. Žarka se v točkah D in E po odbojnem zakonu odbijeta od osnovnice BC in nato presekata stranici AB in AC zapored v točkah F in G. Dokaži, da je ploščina trikotnika ADE enaka vsoti ploščin trikotnikov FBD in GCE.

7. Za celo števili $0 \leq k \leq n$ definirajmo *binomski simbol* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Vemo, da je število $\binom{n}{k}$ enako številu podmnožic s k elementi iz množice z n elementi. Dokaži, da imata za naravni števili k in l, kjer je $k, l < n$, števili $\binom{n}{k}$ in $\binom{n}{l}$ skupni delitelj, ki je večji od 1.

II. skupina (drugi del)

1. Pravokotnik je razdeljen na nekaj manjših pravokotnikov. Ali je možno, da zveznica središč poljubnih dveh izmed teh pravokotnikov seka nek tretji pravokotnik?

2. Dano je tako neskončno zaporedje različnih naravnih števil, da je vsak člen tega zaporedja (razen prvega) bodisi aritmetična, bodisi geometrična sredina sosednjih dveh členov. Ali je tedaj nujno, da so od nekega člena dalje vsi členi le aritmetična sredina sosednjih dveh členov ali pa le geometrična sredina sosednjih dveh členov?

3. Na začetku v vsakem polju table velikosti 10×10 leži kroglica. V nadaljevanju si lahko izberemo tako diagonalno vrsto v tabeli, ki vsebuje sodo mnogo kroglic, in iz nje odstranimo poljubno kroglico. Največ koliko kroglic lahko na tak način odstranimo s table?

4. S tremi ravninami razdelimo paralelepiped na osem heksaedrov (za vsak par vzporednih ploskev S_1 in S_2 paralelepipeda obstaja ena od teh ravnin, tako da ploskev S_1 leži na enem, ploskev S_2 pa na drugem bregu te ravnine). Eden od teh heksaedrov premore včrtano kroglo. Dokaži, da tedaj tudi vsak izmed preostalih heksaedrov premore včrtano kroglo.

   Opomba: Z izrazom heksaeder ne mislimo nujno kocke, temveč poljuben poligon z osmimi oglišči!

5. Za celi števili $0 \leq k \leq n$ definirajmo *binomski simbol* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Vemo, da je število $\binom{n}{k}$ enako številu podmnožic s k elementi iz množice z n elementi. Dokaži, da imata za naravni števili k in l, kjer je $k, l < n$, števili $\binom{n}{k}$ in $\binom{n}{l}$ skupni delitelj, ki je večji od 1.

6. Dano je naravano število $n > 1$. Dva igralca izmenično označujeta točke na krožnici. Prvi označuje točke z rdečo barvo, drugi pa z modro barvo. Ko oba označita po n točk, vsak izmed njiju poišče najdaljši lok, ki se začne in konča s točko njegove barve in ne vsebuje nobene druge označene točke. Zmaga tisti, katerega lok je daljši (če sta dolžini lokov enaki, ali pa nobeden izmed njiju ne najde takega loka, je rezultat izenačen). Kateri izmed igralcev lahko zmaga ne glede na poteze nasprotnika?

7. V neki spominski celici računalnika je zapisano število 6. Zatem računalnik naredi milijon korakov. V n-tem koraku število m v spominski celici poveča za največji skupni delitelj števil m in n. Dokaži, da računalnik na vsakem koraku število poveča bodisi za neko praštevilo, bodisi za 1.

Naloge z regijskega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2009/10 – regijsko tekmovanje

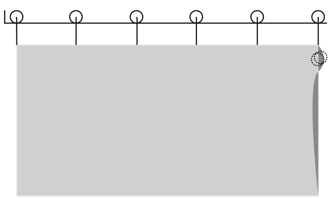
I. skupina

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Zaveso z maso 15 kg obesimo na stropno karniso z 10 kolesci. Vsako kolesce je prišito na zaveso z nitjo. Kolesca so prišita enakomerno po dolžini zavese, prvo na enem koncu zavese, zadnje na drugem koncu, in gladko drsijo v karnisi. Največja obremenitev, ki jo prenese posamezna nit, je 70 N.

   a) S kolikšno silo je napeta nit pod zadnjim kolescem?

   b) Zaveso na eni strani počasi potegnemo iz karnise. Koliko kolesc smemo še iztakniti, da zavesa ne bo padla na tla? Zavesa je dovolj gibka, da prosto viseči konec zavese visi le pod zadnjim kolescem, ki je še ostalo v karnisi.



2. Terenski avtomobil pospešuje na vodoravni cesti s pospeškom 4 m/s^2. Med pospeševanjem pade na sprednje navpično vetrobransko steklo majhen vlažen košček zemlje z maso 3 g.

   a) S kolikšno silo deluje vetrobransko steklo na košček zemlje v smeri pospeševanja?

   b) Koeficient trenja med steklom in koščkom zemlje je 0,6. V kolikšnem času po tem, ko pade na steklo, zdrsne košček zemlje po steklu za 50 cm?

   c) Kolikšen bi moral biti pospešek, da košček zemlje ne bi drsel?

   Pri računanju zanemarimo silo zračnega upora.

3. Kaskader z maso 80 kg skače *bungee jumping* (kaskader je privezan na eno krajišče prožne vrvi in se spušča z mostu, drugo krajišče vrvi pa je pripeto na most). Dolžina neraztegnjene bungee vrvi je 12 m, prožnostni koeficient vrvi pa je 400 N/m.

   a) Kolikšna je oddaljenost od mostu do najnižje točke, ki jo doseže pri spustu?

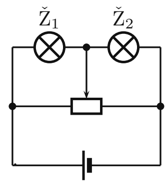
   b) Kaskader se ponovno spusti v paru z drugim kaskaderjem. Drugi kaskader z maso 70 kg se z rokami drži prvega in ni privezan na vrv. Na globini, ki jo je dosegel prvi kaskader pri samostojnem spustu, prvi kaskader odrine drugega. Kolikšno hitrost padanja mora imeti drugi kaskader takoj po tem odrivu, da se bo prvi ob povratku na višini mostu ravno ustavil?

Ves čas, ko je vrv raztegnjena, velja Hookov zakon.

II. skupina

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Žarnici, narejeni za napetost 12 V, prva troši pri tej napetosti (nazivno) moč 24 W in druga 18 W, sta priključeni preko linearnega potenciometra na baterijo z gonilno napetostjo 24 V in zanemarljivim notranjim uporom. Priključitev kaže skica. Določi delilno razmerje potenciometra tako, da bo vsaka od žarnic svetila s svojo nazivno močjo. Upor potenciometra je 20 Ω.



2. Iz valjaste plastenke s premerom 5 cm in višino 15 cm izčrpamo zrak in nalijemo 15 g tekočega dušika s temperaturo vrelišča. Temperatura vrelišča se s tlakom spreminja; zaradi enostavnosti vzamemo, da je konstantna in enaka 87 K. Plastenko neprodušno zapremo. Debelina plastenkinih sten je 1 mm, koeficient toplotne prevodnosti snovi, iz katere je narejena plastenka, pa 0,04 W/m·K. V okolici plastenke je zrak s temperaturo 300 K in tlakom 101 kPa. Plastenka prenese tlačno razliko 10,0 bara.

   a) Po kolikšnem času od nalitja plastenko raznese?

   b) Po kolikšnem času pa, če namesto 15 g nalijemo v plastenko 100 g tekočega dušika?

   Gostota tekočega dušika je pri vrelišču 808,6 kg/m^3 in je mnogo večja od gostote v plinastem stanju, specifična izparilna toplota pa 200 kJ/kg.

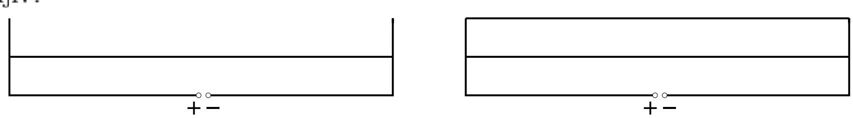
3. Iz bakrenih žic s presekom 1 mm^2 sestavimo okvir na sliki. Prečni stranici sta vodoravni in merita po 1 m. Zgornja žica se lahko brez trenja giblje po dveh navpičnih; pri tem ostaja ves čas vzporedna s spodnjo stranico. V spodnjo stranico vežemo izvir.

   Gostota bakra je $8{,}9 \cdot 10^3$ kg/m^3. Indukcijska konstanta je $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am.

   a) Pri kolikšnem toku bo zgornja žica mirovala na višini 1 cm nad spodnjo žico?

   b) V okvir pričvrstimo vzporedno s prečnima stranicama še tretjo bakreno žico z enakim presekom na višini 2 cm nad spodnjo stranico. Pri kolikšnem toku izvira se ravnovesna lega premične žice ne spremeni?

   c) Če po žicah teče velik tok dalj časa, se prično segrevati in se lahko stalijo. Kolikšna je ravnovesna višina v primerih a) in b) na sliki, če pazimo, da gostota toka v žicah ne preseže predpisane vrednosti za neizolirano žico, 6 A/mm^2? Je poskus pri tem pogoju še izvedljiv?



a) b)

III. skupina

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 $\mathrm{m/s^2}$.

1. Kaskaderja sta se odločila, da demonstrirata nevarnost skakanja v dvoje pri športu *bungee jumping* (kaskader je privezan na eno krajišče prožne vrvi in se spušča z mostu, drugo krajišče je pripeto na most). Vrv je privezana na kaskaderja z maso 80 kg, drugi kaskader z maso 70 kg pa se drži prvega in na vrv ni privezan. Dolžina neraztegnjene bungee vrvi je 12 m, prožnostni koeficient vrvi pa je 400 N/m. Ves čas, ko je vrv raztegnjena, velja Hookov zakon.

   a) Kaskaderja se spustita z dovolj visokega mostu. Kolikšna je oddaljenost od mostu do najnižje točke, ki jo dosežeta pri spustu?

   b) V najnižji točki, ki jo dosežeta, se drugi kaskader spusti in pristane v vodi, tako da se k mostu vrne le še prvi. Kolikšno hitrost ima prvi kaskader na višini mostu?

2. Obravnavajmo preprost model potresnih valov. Zemeljsko skorjo sestavljajo tri vodoravne plasti, ki se razlikujejo po hitrosti potresnih valov. Žarišče potresa (točkast izvir) je v vrhnji plasti z debelino 30 km na globini 10 km. Hitrost valovanja v vrhnji plasti je 1,2 km/s, v drugi plasti 1,5 km/s, v tretji pa 1,7 km/s. Opazovalnica je od epicentra (točke na površju nad žariščem) oddaljena 100 km.

   V opazovalnici zaznajo direktni potresni val iz žarišča potresa (val 1), val, ki se je enkrat odbil na meji med vrhnjo plastjo in drugo plastjo (val 2), ter val, ki se je enkrat odbil na meji med drugo in tretjo plastjo (val 3).

   a) V kolikšnem času po potresu dospe do opazovalnice direktni val in v kolikšnem času odbiti val 2?

   b) Kolikšna naj bo največ debelina druge plasti, da se bo val 3 ravno še totalno odbil na meji med drugo in tretjo plastjo?

   c) V kolikšnem času po potresu dospe do opazovalnice val 3 v primeru b)?

3. Fizik najde v laboratoriju jeklenko z neznanim plinom. Da bi ugotovil, kateri plin je našel, izvede naslednji eksperiment. 1,28 g plina zapre v dolgo vodoravno valjasto posodo dolžine 10 m, ki je s pomičnim batom z maso 0,5 kg razdeljena na dva enaka dela tako, da je v vsakem delu 0,64 g plina. Nato bat izmakne za zelo majhno razdaljo iz ravnovesne lege in izmeri, da niha z nihajnim časom 2,5 s. Predpostavi, da je temperatura plina ves čas 25 °C. Splošna plinska konstanta je 8314 J/kmol K. Trenje med batom in posodo lahko zanemariš. Upoštevaj, da je za majhne x, torej $|x| \ll 1$, $\frac{1}{1\pm x} \approx 1 \mp x$.

   a) Kolikšna je kilomolska masa neznanega plina?

   Sedaj pa si zamislimo, da med batom in steno posode deluje sila trenja 0,15 N. Bat izmaknemo iz ravnovesne lege za 10 cm.

   b) V kateri oddaljenosti od ravnovesne lege je hitrost bata največja?

   c) Kolikšna je ta hitrost?

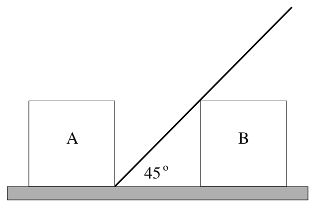
Ciril Dominko

Naloge z državnega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2009/10 – državno tekmovanje

I. skupina

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

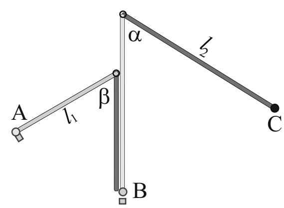
1. Na vodoravni podlagi stojita dva enaka kockasta zaboja s stranico a. Med njiju postavimo tanko togo letev z dolžino $3a$, ki je proti vodoravnici nagnjena za kot 45° (glej sliko). Desni rob zaboja A želimo privzdigniti tako, da potiskamo zgornje krajišče letve v smeri pravokotno na letev. Pri tem naj nobeden od zabojev ne zdrsne. Najmanj kolikšen mora biti koeficient lepenja med zabojema in podlago, da bo to mogoče? Sila letve na zaboj A in na zaboj B je pravokotna na letev.



2. Med vožnjo z avtobusom mladi fizik opazuje podolgovat zaslon iz svetlečih diod. Zaslon je pravokotna mreža svetlečih diod. V navpični smeri ima 7 diod, torej 7 vrstic, v vodoravni smeri pa je v eni vrstici 233 diod. Razdalja med sosednjima diodama v vodoravni smeri in med sosednjima diodama v navpični smeri je enaka. Slika na zaslonu se osvežuje po vrsticah svetlečih diod, in sicer tako, da v vsakem trenutku gorijo le svetleče diode v eni vrstici zaslona. Vrstice se osvežujejo enakomerno od spodaj navzgor. Osvežitvi vrhnje vrstice sledi spet vrstica na dnu zaslona. Znaki, s katerimi je zapisano besedilo, so pokonÄŊni (npr. črka "I" je navpična). Efekt premikanja dosežemo tako, da je po vsaki osvežitvi celotnega zaslona besedilo premaknjeno za določeno število stolpcev proti levi.

   Zaslon prikazuje besedilo, ki zavzema celotno višino zaslona in se enakomerno premika z desne proti levi. Zaradi premikanja se besedilo zdi nagnjeno za 8°. Mladi fizik bi rad izračunal frekvenco osveževanja slike (to je vseh vrstic) na zaslonu. S štoparico izmeri čas, ki ga porabi določen znak besedila, da preide zaslon. Izmerjeni čas je 6,0 s. Kolikšna je frekvenca osveževanja slike na zaslonu?

3. Tarzan z maso 60 kg, ki drži skalo, se s prvo vrvjo z dolžino $l_1 = 8$ m spusti iz točke A v točko B. V točki B spusti prvo vrv, hkrati odvrže skalo tako, da prosto pada (navpično navzdol), in se oprime druge vrvi z dolžino $l_2 = 12$ m. Koliko mora biti masa skale, da bo Tarzan ravno še prispel v točko C (glej sliko)? Vrvi sta lahki, neraztegljivi, ves čas napeti ter pravokotni na smer gibanja Tarzana. Kot $\alpha = \beta = 60°$. Tarzana in skalo obravnavaj kot točkasti telesi.



4. Premer košarkarske žoge je 24 cm, notranji premer obroča koša meri 45 cm, obroč je na višini 3,05 m.

   a) Pod kolikšnim najmanjšim kotom proti vodoravnici lahko še prileteti žoga v koš, da se pri tem ne dodakne obroča?

   b) Pod kolikšnim najmanjšim kotom mora vreči košarkar žogo na koš, da doseže koš, ne da bi se pri tem žoga dotaknila obroča? Ko žoga zapusti košarkarjeve roke je na višini 2,35 m, njena hitrost je 10 m/s.

   c) Kako daleč od koša je košarkar v primeru b)? (Meče seveda tako, da gre žoga skozi koš z zgornje strani obroča.)

   Koristiti ti utegne zveza $1/\cos^2\alpha = \tan^2\alpha + 1$.

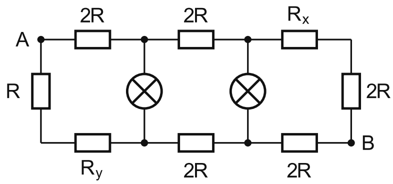
II. skupina

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 $\mathrm{m/s^2}$.

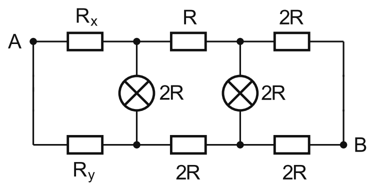
1. Z uporniki in dvema žarnicama sestavimo vezji. Upor R je $3\,\Omega$, R_x in R_y pa sta neznana. Med točki A in B priključimo baterijo z gonilno napetostjo 36 V in zanemarljivim notranjim uporom.

   a) Določi vrednosti uporov R_x in R_y v vezju na sliki a) tako, da skozi žarnici ne teče tok. (Nalogo lahko rešiš tudi s premislekom, brez računanja.)

   b) Določi vrednosti uporov R_x in R_y v vezju na sliki b) tako, da bo na levi Å¿arnici napetost 6 V, skozi desno pa ne bo tekel tok. Upor posamezne žarnice je $2R$.



a)



b)

2. Zamislimo si tehtnico kot ploščati kondenzator s ploščino plošč po 1 $\mathrm{m^2}$ in razmikom med ploščama 5 cm, ki je nabit z nabojem 0,74 μAs. Plošči sta postavljeni vodoravno, prostor med ploščama je zapolnjen s snovjo z dielektričnostjo $\varepsilon = 500$ in Youngovim prožnostnim modulom 1200 $\mathrm{N/m^2}$.

   Tehtnica deluje tako, da fizik položi breme na zgornjo ploščo in izmeri spremembo napetosti na kondenzatorju. Za koliko se spremeni napetost na kondenzatorju, če položi na zgornjo ploščo breme z maso 1 kg?

   Če je v kondenzatorju snov z dielektričnostjo ε, se kapaciteta kondenzatorja poveča za faktor ε v primerjavi s praznim kondenzatorjem. Influenčna konstanta je $\varepsilon_0 = 8{,}9 \cdot 10^{-12}$ As/Vm.

3. Gospodinja je na kuhinjski pult nenavadno previdno položila pokrovko in pri tem nehote ujela 0,1 g vodne pare in nekaj zraka pri vrelišču vode 100 °C. Prostornina med pokrovko in pultom je 1 $\mathrm{dm^3}$, vodoraven presek pokrovke je 3 $\mathrm{dm^2}$. Kilomolska masa vode je 18 kg/kmol. Tlak v prostoru je 1 bar.

   a) Kolikšen je delni tlak zraka?

   Zmes se ohlaja do sobne temperature. Privzamemo, da se bo vsa vodna para kondenzirala.

   b) S kolikšno večjo silo od *teže* same pokrovke bi morala gospodinja dvigniti pokrovko potem, ko se temperatura zraka in vode izenačita s sobno temperaturo 25 °C, če bi pokrovka popolnoma tesnila s pultom?

4. Iz izolirane žice naredimo dva obroča s polmerom $R = 50$ cm. Izolirana žica je sestavljena iz tanke prevodne žičke, ki je obdana z neprevodno plastično izolacijo z debelino $r = 0{,}5$ mm, tako da je premer izolirane žice 1 mm. Obroča sta postavljena vodoravno, tako da njuni osi ležita na isti navpični premici. Zgornji obroč visi na vzmeti s prožnostnim koeficientom $k = 0{,}04$ N/m, spodnji obroč je pritrjen, da se ne more premikati. Ko skozi žički obročev ne teče električni tok, je razdalja med žičkama obeh obročev $h_0 = 1$ cm. Žički obročev sta priključeni na vir napetosti, tako da lahko skozi oba obroča teče v isti smeri enak električni tok I. Kadar teče po obročih električni tok, deluje med njima magnetna sila, ki jo zaradi

majhne razdalje med obročema ($h_0 \ll R$) lahko zapišemo v enaki obliki kot silo med dvema ravnima vzporednima vodnikoma.
Najprej je tok enak nič, potem tok skozi žički obročev počasi povečujemo.

a) Zapiši izraz za magnetno silo spodnjega obroča na zgornji obroč, ko je razdalja med žičkama obročev enaka h in po vsaki žički teče tok I.
b) V istem grafu skiciraj odvisnost velikosti magnetne sile F_m in velikosti sile vzmeti F_v od razdalje h. Orientacijsko privzemi $I = 1$ A.
c) Za tok $I = 1$ A poišči ravnovesne lege zgornjega obroča. Za vsako od ravnovesnih leg ugotovi, ali je stabilna ali labilna in pojasni, zakaj je takšna.
d) Ko tok preseže neko kritično vrednost I_c, magnetna sila potegne zgornji obroč povsem do spodnjega, da se obroča dotikata. Izračunaj kritični tok I_c.

Indukcijska konstanta je $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am.

III. skupina

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Fizik sedi 1,8 m od prvega in 2,5 m od drugega zvočnika. Zvočnika sta med seboj oddaljena 3 m in priključena na isti tonski generator.

   a) Kolikšen je največji red ojačitve, ki jo bo fizik še slišal, če zvočnikoma povečujemo frekvenco oddajanja od neke $\nu_0 \ll \nu_{\max}$ do $\nu_{\max} = 20$ kHz, ki je najvišja frekvenca, ki jo človeško uho še zazna?
   b) Kolikšno frekvenco zvoka bi slišal fizik na mestu, kjer je prej sedel, če bi se peljal vzdolž pravokotnice na zveznico med zvočnikoma s hitrostjo 20 m/s proti zveznici in bi prvi zvočnik oddajal zvok s frekvenco 500 Hz, drugi pa bi bil ugasnjen? Pravokotnica poteka skozi točko, kjer je fizik prej sedel.

   Hitrost zvoka v zraku je 340 m/s. Koristiti ti utegne kosinusni izrek $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

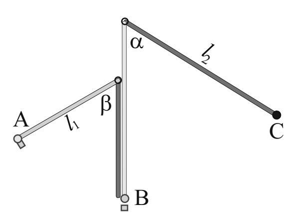
2. Gospodinja je na kuhinjski pult nenavadno previdno položila pokrovko in pri tem nehote ujela 0,1 g vodne pare in nekaj zraka pri vrelišču vode 100 °C. Prostornina med pokrovko in pultom je 1 dm^3, vodoraven presek pokrovke je 3 dm^2. Kilomolska masa vode je 18 kg/kmol. Tlak v prostoru je 1 bar.

   a) Kolikšen je delni tlak zraka?

   Zmes se ohlaja do sobne temperature. Privzamemo, da se bo vsa vodna para kondenzirala.

   b) S kolikšno večjo silo od *teže* same pokrovke bi morala gospodinja dvigniti pokrovko potem, ko se temperatura zraka in vode izenačita s sobno temperaturo 25 °C, če bi pokrovka popolnoma tesnila s pultom?

3. Tarzan z maso 60 kg, ki drži skalo, se s prvo lijano z dolžino l_1 spusti iz točke A v točko B. V točki B spusti prvo lijano, hkrati odvrže skalo tako, da prosto pada (navpično navzdol), in se oprime druge lijane z dolžino l_2. Koliko mora biti masa skale, da bo Tarzan ravno še prispel v točko C (glej sliko)? Masa prve lijane je zanemarljivo majhna, dolžina $l_1 = 8$ m, masa druge lijane je 24 kg, dolžina pa $l_2 = 12$ m. Lijani sta neraztegljivi, ves čas napeti (lahko ju obravnavamo kot togi telesi) ter pra-



vokotni na smer gibanja Tarzana. Kot $\alpha = \beta = 60°$. Tarzana in skalo obravnavaj kot točkasti telesi. Vztrajnostni moment palice okrog težišča je $\frac{1}{12}ml^2$.

4. Iz izolirane žice naredimo dva obroča s polmerom $R = 50$ cm. Izolirana žica je sestavljena iz tanke prevodne žičke, ki je obdana z neprevodno plastično izolacijo z debelino $r = 0{,}5$ mm, tako da je premer izolirane žice 1 mm. Obroča sta postavljena vodoravno, tako da njuni osi ležita na isti navpični premici. Zgornji obroč visi na vzmeti s prožnostnim koeficientom $k = 0{,}04$ N/m, spodnji obroč je pritrjen, da se ne more premikati. Ko skozi žički obročev ne teče električni tok, je razdalja med žičkama obeh obročev $h_0 = 1$ cm. Žički obročev sta priključeni na vir napetosti, tako da lahko skozi oba obroča teče v isti smeri enak električni tok I. Kadar teče po obročih električni tok, deluje med njima magnetna sila, ki jo zaradi majhne razdalje med obročema ($h_0 \ll R$) lahko zapišemo v enaki obliki kot silo med dvema ravnima vzporednima vodnikoma.
Najprej je tok enak nič, potem tok skozi žički obročev počasi povečujemo.

   a) Zapiši izraz za magnetno silo spodnjega obroča na zgornji obroč, ko je razdalja med žičkama obročev enaka h in po vsaki žički teče tok I.
   b) V istem grafu skiciraj odvisnost velikosti magnetne sile F_m in velikosti sile vzmeti F_v od razdalje h. Orientacijsko privzemi $I = 1$ A.
   c) Za tok $I = 1$ A poišči ravnovesne lege zgornjega obroča. Za vsako od ravnovesnih leg ugotovi, ali je stabilna ali labilna in pojasni, zakaj je takšna.
   d) Ko tok preseže neko kritično vrednost I_c, magnetna sila potegne zgornji obroč povsem do spodnjega, da se obroča dotikata. Izračunaj kritični tok I_c.
   e) Recimo, da smo presegli kritično vrednost toka $I > I_c$. Zdaj začnemo tok počasi zmanjševati. Pri kolikšnem toku I_1 se zgornji obroč ne dotika več spodnjega?

   Indukcijska konstanta je $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am.

Ciril Dominko

Rešitve nalog 30. mednarodnega matematičnega tekmovanja mest – pomladanski krog 2008/09

I. skupina (prvi del)

1. Denimo, da na enem bregu premice p leži m oglišč, na drugem bregu pa n oglišč danega 2009-kotnika P. Ker je $m+n=2009$ je eno od števil m in n liho, drugo pa sodo, zato je njun zmnožek mn sodo število. Premica p seka seka mn daljic, ki povezujejo oglišča na enem bregu z oglišči na drugem bregu. Natanko dve izmed teh daljic sta stranici lika P, ostale pa so diagonale lika P. Torej premica p seka $mn-2$ diagonal lika P. Ker je število mn sodo, je tudi $mn-2$ sodo število in je s tem dokaz končan.

2. Za poljubno naravno število n velja

$$(n^\wedge(n^\wedge n))^\wedge n = (n^{n^\wedge n})^n = (n^n)^{n^\wedge n} = (n^\wedge n)^\wedge(n^\wedge n).$$

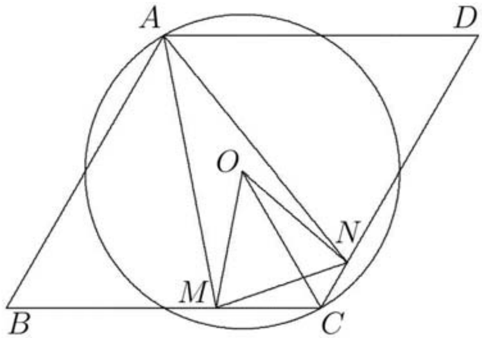
Če na obeh straneh te enakosti na isti način dodamo še tri faktorje n, dobimo isto vrednost za dve različni postavitvi oklepajev.

3. Za vsako neničelno števko potrebujemo vsaj 30 kopij te števke, da lahko tvorimo 30-mestno število, ki vsebuje le to števko. Prav tako potrebujemo najmanj 29 kock s števko 0, da lahko tvorimo število, katerega zadnjih 29 števk je enakih 0. Vlado tako potrebuje najmanj $30 \times 9 + 29 = 50 \times 6 - 1$ stranskih ploskev na svojih kockah, torej skupno najmanj 50 kock. Denimo, da Vlado na prvih pet kockic zapiše šesterice $(0,1,2,3,4,5)$, $(6,7,8,9,0,1,)$, $(2,3,4,5,6,7)$, $(8,9,0,1,2,3)$ in $(4,5,6,7,8,9)$. Vsaka števka se pojavi na treh izmed teh petih kock, pri čemer se nobena ne pojavi na dveh ploskvah iste kocke. Od tod sledi, da lahko Vlado iz teh petih kock tvori vsako zaporedje treh števk. Če Vlado za vsako izmed teh petic kock izdela še devet enakih kock, dobi 50 kock iz katerih lahko šestavi poljubno 30 mestno število.

4. Da, to je možno! Naj bo prvih k števk števila n enakih 9, naslednjih l števk enakih 5 in zadnja števka enaka 0. Če število n povečamo za 10%, to ustreza množenju z $\frac{11}{10}$, število m pa je se tedaj začne s števkama 1 in 0, naslednjih $k-1$ števk je enakih 9, sledi jim števka 5, za katero je $l-2$ števk enakih 1, zadnji dve števki pa sta enaki 0 in 5. Vsota števk števila n je enaka $9k+5l$, vsota števk števila m pa

je enaka $9k + l$. Pogoj, da je vsota števk števila m za 10% manjša od vsote števk števila n, ustreza enačbi $9(9k + 5l) = 10(9k + l)$, oz. $35l = 9k$. Najmanjši vrednosti, ki tej enačbi ustrezata sta tako $k = 35$ in $l = 9$.

5. Naj bo O središče trikotniku NAM očrtane krožnice. Tedaj velja $\angle NOM = 2\angle NAM = 60°$, zato je NOM enakostranični trikotnik. Iz enakosti $\angle MON + \angle MCN = 180°$ sledi, da je $CNOM$ tetivni štirikotnik, torej je $\angle OCM = \angle ONM = 60° = \angle OMN = \angle OCN$. Točka O zato leži na simetrali kota $\angle BCD$, ki je nosilka diagonale romba.



II. skupina (prvi del)

1. Glej rešitev 2. naloge za prvo skupino.

2. Denimo nasprotno, da je neka točka A povezana z liho mnogo ostalimi točkami. Ker vsaka daljica povezuje dve točki, obstaja vsaj še ena taka točka $B \neq A$, ki je povezana z liho mnogo ostalimi točkami. Vzporedno daljici AB izberimo premico p, ki je zelo blizu daljice AB in ne poteka skozi nobeno izmed izbranih točk v ravnini. Denimo, da premica p seka a daljic, ki potekajo iz točke A, b daljic, ki potekajo iz točke B in c daljic, ki ne vsebujejo točk A in B. Po predpostavki je število $a + b + c$ sodo. Premico p sedaj malo zasukamo, tako da točka A ostane na istem bregu, točka B pa se preseli na drugi breg premice. Razen morebitne daljice AB, premica sedaj seka a daljic, ki potekajo iz točke A, d daljic, ki potekajo iz točke B in c daljic, ki ne vsebujejo točk A in B. Če sta točki A in B povezani, je število $d - b$ sodo, zato premica seka skupno $1 + a + d + c = 1 + a + b + c + (d - b)$ daljic, torej liho mnogo daljic. Če točki A in B nista povezani, pa je razlika $d - b$ liha in premica seka skupno $a + d + c = a + b + c + (d - b)$ daljic, torej

ponovno liho mnogo daljic. V obeh primerih smo prišli do protislovja, s čimer je dokaz končan.

3. a) Za $k \geq 3$ je x_k liho število in zato $x_{k+2} = \frac{x_{k+1}+x_k}{2^t}$, za neko naravno število t. Če je $x_k = x_{k+1}$, je $t = 1$ in je zaporedje od indeksa k naprej konstantno. Denimo, da za noben k ne velja $x_k = x_{k+1}$. Tedaj je $x_{k+2} < \max\{x_{k+1}, x_k\}$ in $x_{k+3} < \max\{x_{k+2}, x_{k+1}\}$. Če je $x_k < x_{k+1}$, tako velja $x_{k+2}, x_{k+3} < x_{k+1}$. Če je $x_k > x_{k+1}$, pa velja $x_{k+2}, x_{k+3} < x_k$. Sledi $\max\{x_{k+3}, x_{k+2}\} < \max\{x_{k+1}, x_k\}$, kar pomeni, da sta podzaporedji $x_3, x_5, x_7, \ldots$ in $x_4, x_6, x_8, \ldots$ strogo padajoči. Ker strogo padajoče zaporedje neravnih števil ne more biti neskončno, smo prišli do protislovja.

   b) Naj bo g največji lihi skupni delitelj števil a in b. Tedaj je g tudi delitelj vseh števil x_k za $k \geq 3$ in hkrati največji lihi skupni delitelj členov x_k in x_{k+1}. Ker je tedaj g tudi največji lihi skupni delitelj členov, ko zaporedje postane konstantno in so ti členi liha števila, velja $c = g$.

4. Par števil 1 in 0, ki ju ločuje sodo (liho) vmesnih mest imenujmo *sodi (lihi) par*. Prepričajmo se, da lahko iz vrste odstranimo poljubni zaporedni mesti $\ldots, 0, 0, \ldots$ in dobimo enakovreden problem. Denimo, da iz vrste izbrišemo en tak par. Če prvo izbrisano mesto '0' nastopa v nekem lihem (sodem) paru, nastopa drugo izbrisano mesto v nekem sodem (lihem) paru. Od tod sledi, da se števili sodih in lihih parov pri opisanem brisanju zmanjšata za isto število, zato lahko obravnavamo primer po 'brisanju'. Na enak način se prepričamo, da lahko iz vrste odstranimo tudi par $\ldots, 1, 1, \ldots$. Ko vrsto na opisani način do konca 'oklestimo', dobimo zaporedje Z, kjer se števili 1 in 0 pojavljata izmenično. Če je zaporedje Z prazno ali dolžine 1, je $M = N = 0$. Če je zaporedje $Z = 0, 1, 0, 1, \ldots$, mu lahko odstranimo prvi člen, ker to ne spremeni števil M in N. Prav tako lahko zaporedju Z odstranimo zadnji člen, če je ta enak 1. V preostalem primeru je zaporedje Z oblike $Z = 1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0$, ki ga sestavljajo sami sodi pari, torej je $M > N = 0$.

5. Naj bo O težišče tetraedra $\mathcal{T}$ in $G = T_A$ težišče ploskve BCD. Točka O leži na daljici AG in velja $|AO| = 3|OG|$. Daljico XO podaljšamo preko O do točke P, tako da velja $|PO| = 3|OX|$. Tedaj sta trikotnika

GOX in AOP podobna, zato sta premici XG in AP vzporedni. Točka P tako leži v preseku opisanih štirih premic.

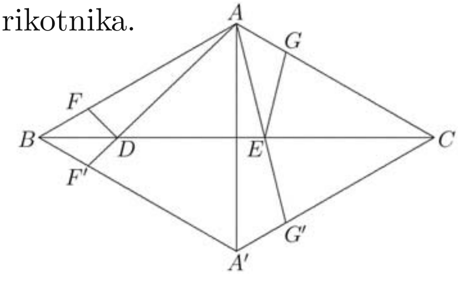
I. skupina (drugi del)

5. Skupino vitezov, ki se ob neki uri skupaj premaknejo iz enega na drug stolp imenujmo *skupek*. Ob uri, ko obstaja pet stolpov, ki jih straži natanko en vitez, vsak izmed teh petih vitezov sam tvori svoj skupek. Ker sta na vsakem od preostalih štirih stolpov kvečjemu dva skupka, je skupkov največ trinajst. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da je skupkov, ki se premikajo v smeri urinega kazalca vsaj toliko kot tistih, ki se premikajo v nasprotno smer. Denimo, da se prvi sploh ne premikajo, drugi pa se namesto za en stolp, premaknjeo za dva stolpa. V tej nadomestni situaciji dobimo enakovredno razporeditev vitezov po stolpih obzidja. Privzemimo, da imamo torej opraviti z nekaj *negibnimi skupki* in kvečjemu toliko *premični skupki*, ki se premikajo po dva stolpa v nasprotni smeri urinega kazalca. Recimo, da obstaja na vsakem stolpu negibni skupek. Ob uri, ko je pet stoplov stražil po en stražar, je bil na vsakem izmed teh petih stolpov negibni skupek, ki ga je tvoril ustrezni stražar. Tedaj obstajajo kvečjemu štirje premični skupki, kar pomeni, da bo ob vsaki uri vsaj enega izmed teh petih stolpov stražil le en vitez, kar je v nasprotju s predpostavko, da je ob neki uri vsak stolp stražil vsaj par vitezov. Sklepamo torej, da obstaja vsaj en stolp brez negibnega skupka. Vsak premični skupek lahko ta stolp obišče enkrat na vsakih 9 ur. Ker je premičnih skupkov kvečjemu šest, obstaja ura, ko je ta stolp nezastražen.

6. Označujmo s $[P]$ ploščino lika P. Trikotnik ABC prezrcalimo preko osnovnice BC in zrcalne slike točke F, A in G zapored označimo z A', F' in G' (glej sliko). Tedaj točka D leži na daljici AF', točka E leži na daljici AG', trikotnika ABA' in ACA' pa sta enakostranična. Dobimo

$$\angle A'AG' = 60^\circ - \angle DAE = \angle BAF',$$

zato sta BAF' in $A'AG'$ skladna trikotnika.



Velja

$$[ADE] + [DEG'A'F'] = [AFA'] + [AA'G] = [AF'A'] + [BAF'] =$$

$$= [BAA'] = \frac{1}{2}[BACA'].$$

Opazimo še, da sta tudi trikotnika BDF in CEG zapored skladna s trikotnikoma BDF' in CEG', od koder dobimo

$$[BDF] + [CEG] + [DEG'A'F'] = [BDF'] + [CEG'] + [DEG'A'F'] =$$

$$= [BCA'] = \frac{1}{2}[BACA'].$$

Sledi $[ADE] = [BDF] + [CEG]$.

7. Naj bo $0 < k < l < n$. Potem je $\binom{l}{k} < \binom{n}{k}$. Zlahka se prepričamo, da velja enakost

$$\binom{n}{l}\binom{l}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{n-l},$$

od koder sledi, da $\binom{n}{k}$ deli $\binom{n}{l}\binom{l}{k}$. Če bi bilo število $\binom{n}{k}$ tuje številu $\binom{n}{l}$, bi to pomenilo, da mora deliti število $\binom{l}{k}$, kar očitno ni res, saj velja $\binom{l}{k} < \binom{n}{k}$.

II. skupina (drugi del)

5. Glej rešitev 7. naloge za prvo skupino.

6. Dokažimo, da lahko vedno zmaga drugi igralec. Ko prvi igralec označi prvo rdečo točko R, določi drugi igralec *glavne točke* na krožnici tako, da skupaj s točko R tvorijo množico oglišč pravilnega n-kotnika. Zatem drugi igralec označuje z modro le glavne točke, dokler je to mogoče. Ker je neoznačenih glavnih točk na začetku le $n-1$, so vse označene še pred zadnjo potezo drugega igralca. Ko so označene vse glavne točke, drugi igralec poišče vse pare sosednjih rdečih točk. Za vsak tak par rdečih točk označi drugi igralec neko modro točko med njima. Če je prvi igralec v prejšnjem delu igre označil k glavnih točk, je pri tem nastalo kvečjemu $k-1$ takih parov, zato lahko drugi igralec, ki je v prvem delu označil $n-k$ glavnih točk, loči vse pare sosednjih rdečih glavnih točk, še pred svojo zadnjo potezo. Preden drugi igralec naredi

svojo zadnjo potezo, je poleg vseh glavnih točk označeno še $n - 1$ dodatnih točk, torej obstaja par glavnih točk A in B, med katerima ni nobene označene točke. Ker je drugi igralec ločil vse pare sosednjih rdečih glavnih točk, je vsaj ena od točk A in B označena modro. Denimo, da je modro označena točka A. Drugi igralec lahko označi svojo zadnjo točko na loku med A in B poljubno blizu točke B in si s tem zagotovi zmago.

7. Označimo z $A(n)$ število, ki je v računalniški celici v n-tem koraku in z $I(n) = A(n) - A(n-1)$ ustrezni prirastek. Naslednja tabela prikazuje dogajanje v nekaj začetnih korakih.

n		1	2	3	4	**5**	**6**	7	8	9	10	**11**	**12**	$\cdots$
$A(n)$	6	7	8	9	10	**15**	**18**	19	20	21	22	**33**	**36**	$\cdots$
$I(n)$		1	1	1	1	**5**	**3**	1	1	1	1	**11**	**3**	$\cdots$

Tabela 1

V tabeli opazimo pravilo (glej stolpce s poudarjenimi številkami): Če za nek n velja $I(n) \neq 1$, je $A(n) = 3n$. Denimo, da za neko število n velja $A(n) = 3n$. Tedaj je naslednji prirastek enak $I(n+1) = d(n+1, 3n) = d(n+1, 3)$, saj sta n in $n+1$ tuji števili, zato je $I(n+1) \in \{1, 3\}$. Če je $I(n+1) = 3$, je število $n+1$ deljivo s 3, kar pomeni, da je $I(n+2) = d(n+2, A(n)+3) = d(n+2, 3(n+1)) = 1$. Dokažimo sedaj naslednjo trditev.

Trditev. *Naj bo $A(n) = 3n$ in $I(n+1) = 1$ za neko število n in k najmanše tako naravno število, da je $I(n+k) \neq 1$. Tedaj je $I(n+k)$ praštevilo in $A(n+k) = 3(n+k)$.*

Dokažimo našo trditev s pomočjo indukcije. Z nekaj začetnimi vrednostmi n, kjer domneva velja, nam postreže Tabela 1. Privzemimo, da je $A(n) = 3n$ in $I(n+1) = 1$ za neko število n in k najmanše tako naravno število, da je $I(n+k) \neq 1$ in opazujmo nadaljne korake v naslednji tabeli.

m	n	$n+1$	$n+2$	$\cdots$	$n+k-1$	$n+k$
$A(m)$	$3n$	$3n+1$	$3n+2$	$\cdots$	$3n+k-1$	?

Tabela 2

Ker za naravni števili a, b in poljubni celi števili u in $v \neq 0$ velja $d(a,b) = d(a, ua + vb)$, dobimo

$$I(n+k) = d(n+k, 3n+k-1) =$$

$$= d(n+k, 3(n+k) - 3n + k - 1) = d(n+k, 2k+1),$$

kar pomeni, da je $I(n+k)$ delitelj števila $2k+1$. Denimo, da $2k+1$ ni praštevilo in naj bo p neko praštevilo, ki deli $d(n+k, 2k+1)$. Ker je $2k+1$ liho število, je $p \leq \frac{2k+1}{3}$, zato je $p < k$. Tedaj velja

$$I(n+k-p) = d(n+k-p, 3n+k-p-1) =$$

$$= d(n+k-p, 3(n+k-p) - (3n+k-p-1)) = d(n+k-p, 2k+1-2p).$$

Ker sta števili $n+k-p$ in $2k+1-p$ deljivi s p, bi to pomenilo, da je $I(n+k-p) > 1$, kar je v nasprotju s predpostavkami. To pomeni, da je $2k+1$ praštevilo, $I(n+k) = 2k+1$ in

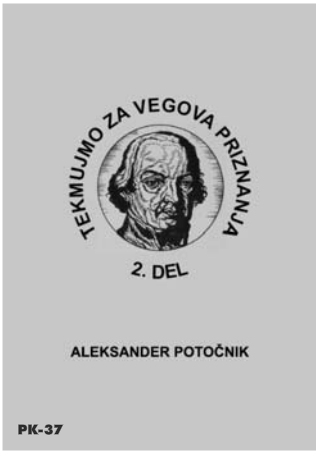
$$A(n+k) = A(n+k-1) + I(n+k) = (3n+k-1) + (2k+1) = 3(n+k),$$

s čimer je trditev dokazana in naloga rešena.

Gregor Cigler

Zbirke nalog s tekmovanj

Vsako šolsko leto na šolah potekajo različna tekmovanja v znanju. Za lažjo pripravo vam ponujamo več zbirk tekmovalnih nalog z rešitvami.



TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA – 2. del

Zbirka rešenih nalog s področnih in državnih tekmovanj od 1992 do 1998

80 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

6,99 EUR

MEDNARODNI MATEMATIČNI KENGURU

2005–2008

več kot 500 nalog s tekmovanja

+ dodanih še 120 novih nalog

296 strani
barvni tisk
format 16,5 × 23,5 cm
mehka vezava

18,74 EUR

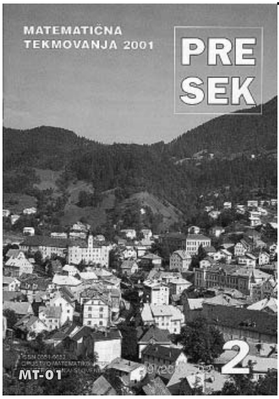
Poleg omenjenih lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog različnih zahtevnosti za osnovnošolce, srednješolce in študente s tekmovanj v znanju matematike, fizike, logike, astronomije in računalništva. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite s popustom:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/tekmovanja/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.

Tekmovanja v reviji Presek

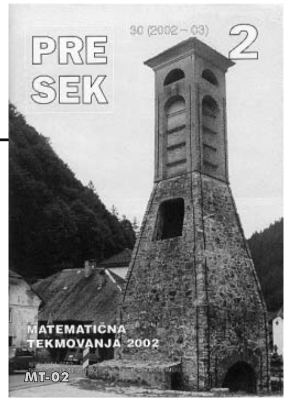
Za lažjo pripravo na matematična tekmovanja so pred leti izšle rešene tekmovalne naloge tudi v tematskih številkah revije Presek.



MATEMATIČNA TEKMOVANJA 2001

64 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

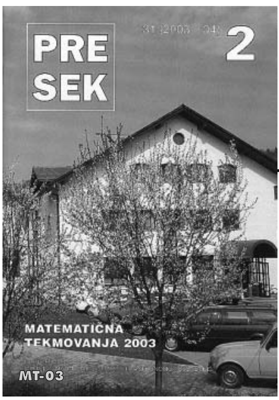
6,26 EUR



MATEMATIČNA TEKMOVANJA 2002

64 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

6,26 EUR



MATEMATIČNA TEKMOVANJA 2003

72 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

6,26 EUR

Poleg omenjenih lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog različnih zahtevnosti za osnovnošolce, srednješolce in študente s tekmovanj v znanju matematike, fizike, logike, astronomije in računalništva. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite s popustom:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/tekmovanja/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.