Tekmovanja

10. tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol – državno tekmovanje

1. letnik

1. Če med števki dvomestnega števila vrinemo ničlo, dobimo devetkrat večje število. Zapiši vsa takšna dvomestna števila.

2. Prijatelja Miha in Blaž za nedeljsko potepanje najameta vsak svoje motorno kolo pri različnih ponudnikih. Miha mora plačati na začetku 100 evrov, ko pa motorno kolo vrne, še 4 evre za vsak prevoženi kilometer. Blaž na začetku plača 200 evrov, potem pa 3 evre za vsak prevoženi kilometer. Najmanj koliko kilometrov morata prijatelja prevoziti, da bo Miha plačal več kot Blaž?

3. Poenostavi izraz
$$(x-1)\left((x^{-3}+x^{-2}+x^{-1})(x^{-1}-1)-(x^{-2}-1)(x^{-2}+1)\right)^{-1}.$$

4. Miro, Aleš in Lovro so trikrat igrali poker. Prvič je izgubil Miro in je zato moral plačati Alešu in Lovru, vsakemu posebej toliko denarja, kot sta ga imela na začetku igre. Drugič je izgubil Aleš, zato je prav tako moral plačati Miru in Lovru, vsakemu posebej toliko, kot sta ga trenutno imela. Tretjič je izgubil Lovro in tudi on je na enak način plačal Miru in Alešu. Po odigranih treh igrah je imel vsak 24 evrov. Kdo od njih je izgubil največ in koliko?

5. V dveh sadovnjakih so prvo leto nabrali skupaj 315 ton sadja. Naslednje leto se je skupni pridelek povečal za 40%. V prvem sadovnjaku se je pridelek povečal za 25%, v drugem pa za 50%. Koliko ton sadja so v vsakem sadovnjaku nabrali prvo leto?

2. letnik

1. Tone je rezervoar za gorivo napolnil do vrha in se z avtom podal na dolgo pot. Podatki, ki jih je Tone razbral na elektronskem števcu avtomobila, so prikazani v tabeli.

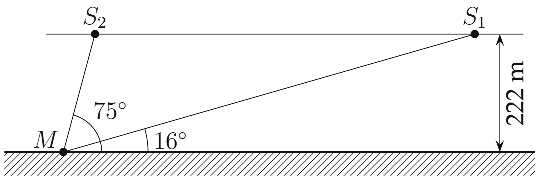
število km	35824	36149	36449
podatki o gorivu	poraba $17{,}2\ \ell$	poraba $39{,}3\ \ell$	ostalo $5{,}3\ \ell$

Koliko litrov je prostornina rezervoarja tega avtomobila?
OPOMBA: Upoštevajmo, da ima avtomobil konstantno porabo goriva na kilometer.

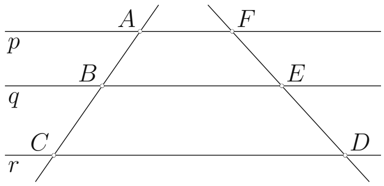
2. Ničla linearne funkcije je 2, začetna vrednost pa $\frac{5}{2}$. Zapiši enačbo premice, ki je vzporedna grafu dane funkcije in seka os x pri $\frac{4}{3}$, v implicitni obliki.

© 2010 DMFA Slovenije, Komisija za tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

3. Sokol leti nad travnikom s konstantno hitrostjo naravnost in na stalni višini 222 m. Mirujoča miška je zagledala sokola, ko je bil kot med zemljo in sokolom 16°. Minuto kasneje je bil kot med zemljo in sokolom 75°. Podatki so prikazani na skici. Izračunaj dolžino poti, ki jo je sokol preletel v eni minuti.



4. Premice p, q in r so vzporedne. Izračunaj $|AC|$, če je $|AB| = 3$, $|ED| = 4\frac{1}{4}$, $|EF| = 3\frac{1}{3}$. Postopek utemelji.



5. Poenostavi

$$\frac{1}{\sqrt{3} - \frac{2}{2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}}}.$$

Rezultat naj bo oblike $\frac{a\sqrt{3}+b}{c}$, kjer so a, b in c cela števila.

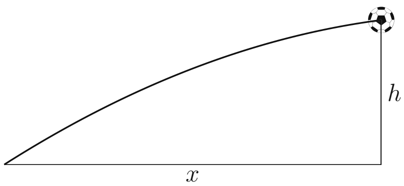
3. letnik

1. Ploščina romba meri $120\ \text{cm}^2$. Razlika dolžin njegovih diagonal je 14 cm. Kolikšna je dolžina stranice romba?

2. Na nogometni tekmi vratar brcne žogo. Pot žoge je opisana s funkcijo

$$h(x) = -0{,}0126x^2 + 0{,}635x,$$

kjer je h višina žoge nad zemljo in x vodoravna oddaljenost od mesta udarca (količini sta izraženi v merskih številih).



a) Na kolikšni višini je žoga, ko je njena vodoravna oddaljenost od mesta udarca 15 m?

b) Koliko metrov od mesta udarca pade na zemljo?

c) Kolikšna je največja višina, ki jo doseže žoga?

3. Reši enačbo $\log_4 (1 + \log_4 (3^x - \sqrt{(5^0 + 4^2)^2})) = e^0$

4. Prezračevalne naprave v lokalu čistijo zrak. Pretok zraka v odvisnosti od časa se za prvo napravo spreminja po formuli $f(t) = 2^t$, za drugo pa $f(t) = 2^{t+3}$. V lokalu imajo štiri naprave prvega tipa in eno drugega tipa. S koliko napravami za prezračevanje s pretokom $f(t) = 2^{t+2}$ bi lahko zamenjali obstoječe?

5. Kovinsko kocko s površino $72\ \text{cm}^2$ pretopimo v pravilno štiristrano piramido enake prostornine, katere dolžina osnovnega roba je enak tretjini dolžine telesne diagonale kocke. Kolikšna je višina piramide?

Presek_38_2_priloga.indd 2 10/4/10 3:07:39 PM

4. letnik

1. Izkopali so jamo v obliki kvadra. Njena globina je 12 krat večja od dolžine. Dolžina jame je $\frac{3}{2}$ njene širine. Vsota merskega števila prostornine jame in ploščine njenega dna je $\frac{7}{6}$. Izračunaj globino jame.

2. Zapiši definicijsko območje funkcije $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{x+2} - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}$.

3. Družina je naredila sneženega moža iz treh delov, ki so imeli obliko krogle. Polmeri teh krogel so tvorili geometrijsko zaporedje. Polmer najmajše krogle na vrhu snežaka je bil 8 dm, polmer največje krogle pa 18 dm. Koliko kubičnih metrov snega je bilo v tem sneženem možu?

4. Izračunaj $\cos(\pi + 2x)$, če je $\cos x = \frac{1}{4}$.

5. Oskrbnik planinske koče je več let spremljal, koliko časa porabijo planinci za pot od vznožja v dolini do planinske koče tik pod vrhom gore. Pohodniki so sami zapisovali porabljen čas, oskrbnik pa je podatke zbral in uredil frekvenčno tabelo, kjer je zapisal relativne frekvence.

porabljen čas v minutah	**relativna frekvenca (v %)**
$90 - 105$	7,9
$105 - 120$	19,4
$120 - 135$	37,2
$135 - 150$	16,3
$150 - 165$	12,7
$165 - 180$	?

Določi neznano relativno frekvenco in izračunaj povprečni čas.

54. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje

1. Za cela števila a, b, c in d velja $a > b > c > d$ in

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) = 10.$$

Katere vrednosti lahko zavzame izraz $a + b - c - d$?

2. Za neničelna realna števila x, y in z velja $3x + 2y = z$ in $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$. Dokaži, da je vrednost izraza $5x^2 - 4y^2 - z^2$ vedno celo število.

3. Simetrala diagonale AC pravokotnika $ABCD$, v katerem je $|AB| > |BC|$, seka stranico CD v točki E. Krožnica s središčem E in polmerom AE seka stranico AB še v točki F. Naj bo G pravokotna projekcija točke C na premico EF. Pokaži, da točka G leži na diagonali BD.

© 2010 DMFA Slovenije, Komisija za popularizacijo matematike v srednji šoli

Presek_38_2_priloga.indd 3 10/4/10 3:07:40 PM

4. Učiteljica je Mateju izročila štiri liste papirja, na vsakem je bila zapisana neničelna števka. Matej je liste postavil v vrsto in tako oblikoval štirimestno število. Ko je dva lista med sabo zamenjal, ne da bi ju pri tem obrnil ali zavrtel, je oblikoval še eno štirimestno število. Ali je lahko oblikoval števili, ki si nista bili tuji, ne glede na to, katere števke so bile zapisane na listih?

2. letnik

1. Določi vsa cela števila n, za katera ima enačba $x^2 + nx + n + 5 = 0$ le celoštevilske rešitve.

2. Za katera naravna števila n obstaja večkratnik števila 7, ki ima vsoto števk enako n?

3. Naj bo O središče ostrokotnemu trikotniku ABC očrtane krožnice $\mathcal{K}$. Simetrala notranjega kota pri A seka krožnico $\mathcal{K}$ še v točki D, simetrala notranjega kota pri B pa seka krožnico $\mathcal{K}$ še v točki E. Označimo z I središče trikotniku ABC včrtane krožnice. Kolikšna je velikost kota $\angle ACB$, če točke D, E, O in I ležijo na isti krožnici?

4. Vsaka točka daljice $\mathcal{D}$ je rdeče ali modre barve. Dokaži, da obstajajo enako obarvane različne točke A, B in C daljice $\mathcal{D}$, da je $|AB| = |BC|$.

3. letnik

1. Naj bosta p in q polinoma stopnje 3 s celoštevilskimi koeficienti, katerih vodilna koeficienta sta si tuja. Naj bo a tako racionalno število, da sta $p(a)$ in $q(a)$ celi števili. Dokaži, da je tedaj tudi a celo število.

2. Za katera naravna števila n obstaja večkratnik števila 13, ki ima vsoto števk enako n?

3. Naj bo H višinska točka ostrokotnega trikotnika ABC in D točka v notranjosti trikotnika ABH. Vzporednica k premici AH skozi točko D seka stranici BC in AB v točkah K in L. Vzporednica k premici BH skozi točko D seka daljici AC in AB v točkah M in N.

   Dokaži, da točke C, D in H ležijo na isti premici, če točke K, L, M in N ležijo na isti krožnici.

Presek_38_2_priloga.indd 4 10/4/10 3:07:41 PM

4. Vsaka točka na stranicah trikotnika $\mathcal{T}$ je rdeče ali modre barve. Dokaži, da na stranicah trikotnika $\mathcal{T}$ obstajajo take enako obarvane točke A, B, C in D, da je štirikotnik $ABCD$ trapez.

4. letnik

1. Poišči vsa realna števila x z intervala $[0, 2\pi)$, za katera so vsi členi zaporedja s splošnim členom
$$a_n = \frac{1}{\cos(nx)}$$
cela števila.

2. Za katera naravna števila n obstaja večkratnik števila 11, ki ima vsoto števk enako n?

3. Diagonala AC konveksnega štirikotnika $ABCD$ je simetrala kota $\angle DCB$. Naj bo E presečišče stranice AB in trikotniku ACD očrtane krožnice in naj bo F presečišče stranice AD in trikotniku ABC očrtane krožnice. Dokaži, da se daljice AC, DE in BF sekajo v eni točki.

4. Dano je naravno število n. V ravnini leži $2n + 2$ točk, izmed katerih nobene tri ne ležijo na isti premici. Premica v ravnini je *ločnica*, če na njej ležita dve izmed danih točk, na vsakem bregu te premice pa je natanko n točk. Določi največje število m, za katerega velja, da je v ravnini vedno vsaj m ločnic.

10. tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol — državno tekmovanje

A1 Katera prostornina je med 8 cm^3 in 700 mm^3?

(**A**) $0{,}3$ cm^3 (**B**) $0{,}0009$ dm^3 (**C**) 10 cm^3 (**D**) 12 ml (**E**) $0{,}8$ dm^3

A2 V teku na 100 m je Meta vedno najhitrejša. Na športnem dnevu so jo poskušale prehiteti Sonja, Vida in Mojca, a jim ni uspelo. Vida je prišla skozi cilj pred Mojco. Sonja je bila predzadnja. V kakšnem vrstnem redu so prihitele skozi cilj?

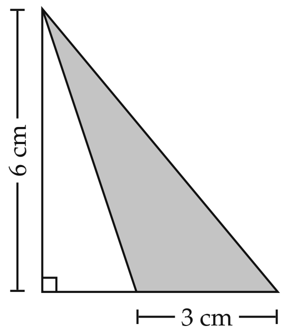
(**A**) Vida, Mojca, Sonja, Meta (**B**) Meta, Sonja, Vida, Mojca
(**C**) Vida, Meta, Mojca, Sonja (**D**) Meta, Sonja, Mojca, Vida
(**E**) Meta, Vida, Sonja, Mojca

Presek_38_2_priloga.indd 5 10/4/10 3:07:42 PM

A3 Kako visok je steber, če je tretjina stebra v tleh, polovica v vodi, nad vodo pa štrli 1,5 metra?

(**A**) 7,5 m (**B**) 8 m (**C**) 9 m (**D**) 9,5 m (**E**) 10 m

A4 Kolikšna je ploščina osenčenega trikotnika?

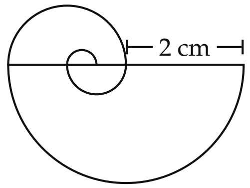


(**A**) 6 cm^2 (**B**) 9 cm^2 (**C**) 15 cm^2
(**D**) 18 cm^2 (**E**) 30 cm^2

A5 V katerega izmed danih izrazov lahko preoblikuješ izraz $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$?

(**A**) $\frac{3}{a+b+c}$ (**B**) $\frac{a+b+c}{abc}$ (**C**) $\frac{3(a+b+c)}{abc}$
(**D**) $\frac{ab+ac+bc}{abc}$ (**E**) $\frac{3}{abc}$

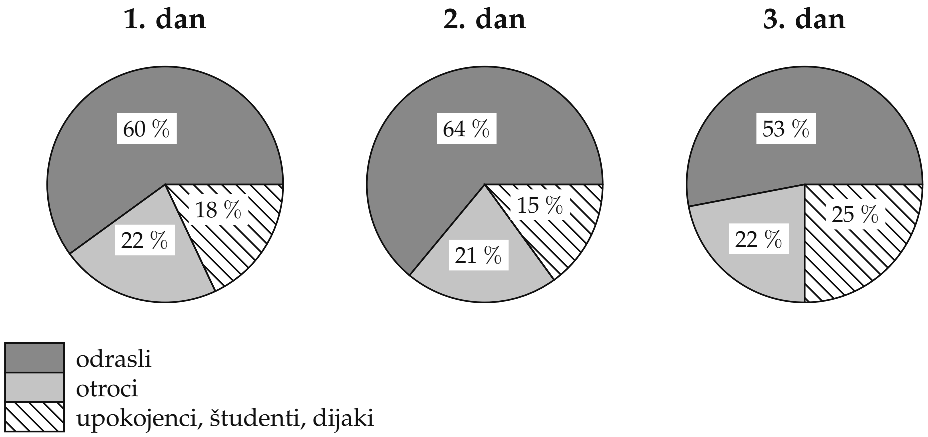
A6 Polžasta vzmet se zavija tako, da je premer zavoja enak prejšnjemu polmeru (glej sliko). Koliko centimetrov je dolga polžasta vzmet?



(**A**) $3{,}25\ \pi$ (**B**) $3{,}5\ \pi$ (**C**) $3{,}75\ \pi$
(**D**) $4\ \pi$ (**E**) $4{,}25\ \pi$

B1 Turistično društvo Hrastov vršiček je v novoletnem času pripravilo Žive jaslice in namenilo del izkupička v dobrodelne namene. Spodnja tabela in grafikoni prikazujejo, koliko obiskovalcev si je ogledalo Žive jaslice.

	Št. obiskovalcev
1. dan	440
2. dan	536
3. dan	544



Presek_38_2_priloga.indd 6 10/4/10 3:07:42 PM

A Izpolnite spodnjo tabelo (zaokrožite na cela števila):

	Število obiskovalcev		
	1. dan	2. dan	3. dan
Odrasli			
Otroci			
Upokojenci, študenti, dijaki			

B Vstopnina za odraslega je znašala 7 EUR, za otroka polovico manj, za upokojenca, študenta ali dijaka pa za 2 EUR manj. Kolikšen je bil izkupiček od prodaje vstopnic v vseh treh dneh?

C Turistično društvo je 35 $\%$ izkupička od prodaje vstopnic namenilo v dobrodelne namene. Koliko EUR je bilo to?

B2 Štirje delavci so si razdelili 1880 EUR honorarja. Prvi delavec je dobil četrtino, drugi pa 5 $\%$ celotnega zneska. Ostanek sta si razdelila tretji in četrti delavec v razmerju $1 : 3$. Koliko je dobil vsak delavec?

B3 Alpinistična odprava ima 420 kg prtljage.

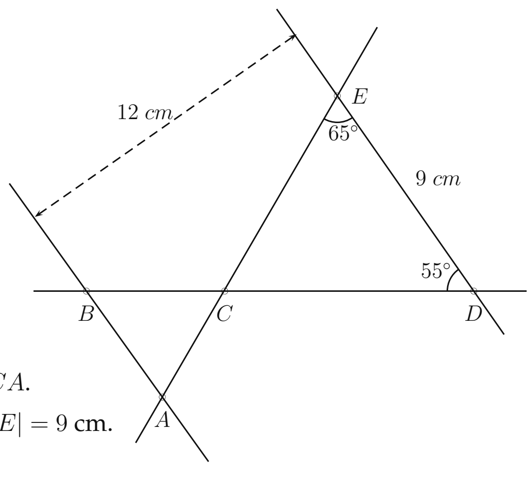
A Najmanj koliko nosačev morajo najeti, če lahko vsak nosač nosi največ 35-kilogramski tovor?

B Povprečno kolikšno breme bi moral nositi vsak nosač, če bi jih bilo 15?

C Na koliko načinov lahko izberejo prvi trije nosači svoj tovor, če izbirajo med desetimi različnimi tovori?

D Eden od tovorov je v obliki kvadra, drugi pa v obliki valja s premerom 1 m in višino $0{,}8$ m. Kvader je $1{,}57$ m dolg in 4 dm širok. Koliko je visok, če imata oba tovora enako prostornino?

B4 Vzporedni premici AB in DE, oddaljeni 12 cm, sekata premici s presečiščem v točki C tako, da velja $|BC| : |CD| = 2 : 3$.



A Zapiši velikosti kotov $\angle CAB$, $\angle ABC$ in $\angle BCA$.

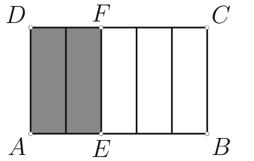
B Izračunaj razdaljo $|AB|$, če meri razdalja $|DE| = 9$ cm.

C Izračunaj ploščino trikotnika ABC.

Presek_38_2_priloga.indd 7 10/4/10 3:07:43 PM

10. tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol – področno tekmovanje

A1. Kateremu decimalnemu številu je enako razmerje ploščin pravokotnikov $AEFD$ in $ABCD$ (glej sliko)?



(**A**) $0{,}2$ (**B**) $0{,}3$ (**C**) $0{,}4$ (**D**) $0{,}5$ (**E**) $0{,}6$

A2. Katero izmed navedenih števil je enajst milijonov enajst tisoč enajst?

(**A**) 11001111 (**B**) 11011011 (**C**) 11011111 (**D**) 11111111 (**E**) 101101011

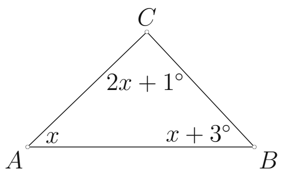
A3. Manca je zapisala vsa trimestna števila, v katerih so nastopale števke 1, 4 in 7, vsaka enkrat. Koliko izmed teh števil je bilo deljivih z 2?

(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

A4. V tovarni so $6{,}5$ t sladkorja zapakirali v vrečke po 2 kg. Koliko vrečk so napolnili?

(**A**) 3000 (**B**) 3200 (**C**) 3250 (**D**) 3500 (**E**) 3600

A5. Koliko je velik največji notranji kot trikotnika ABC (glej sliko)?



(**A**) $44°$ (**B**) $89°$ (**C**) $90°$ (**D**) $176°$

(**E**) Nemogoče je določiti.

A6. Na zemljevidu je razdalja med dvema krajema enaka 8 cm. V kakšnem merilu je narisan zemljevid, če je razdalja med tema krajema enaka 4 km?

(**A**) $1 : 2$ (**B**) $1 : 5$ (**C**) $1 : 4000$ (**D**) $1 : 5000$ (**E**) $1 : 50000$

A7. Za naravno število n je $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$, npr. $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$ in $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$. Katero število je enako vrednosti ulomka $\frac{8!}{6!}$?

(**A**) $\frac{4}{3}$ (**B**) 4 (**C**) 8 (**D**) 28 (**E**) 56

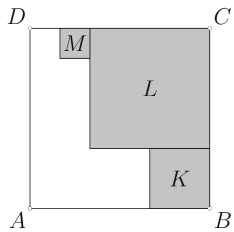
A8. Gašper je na list papirja narisal kvadrat, krog in enakostranični trikotnik. Obseg vsakega izmed teh likov je $7{,}2$ cm. V katerem primeru so ti liki razvrščeni od lika z najmanjšo ploščino do lika z največjo ploščino?

(**A**) trikotnik, kvadrat, krog (**B**) krog, kvadrat, trikotnik

(**C**) trikotnik, krog, kvadrat (**D**) krog, trikotnik, kvadrat

(**E**) kvadrat, trikotnik, krog

A9. V kvadratu $ABCD$ so narisani kvadrati K, L in M (glej sliko). Ploščina kvadrata K je 4 cm^2, ploščina kvadrata L je 16 cm^2 in ploščina kvadrata M je 1 cm^2. Koliko kvadratnih centimetrov je ploščina kvadrata $ABCD$?



(**A**) 30 (**B**) 36 (**C**) 55 (**D**) 64

(**E**) Nemogoče je določiti.

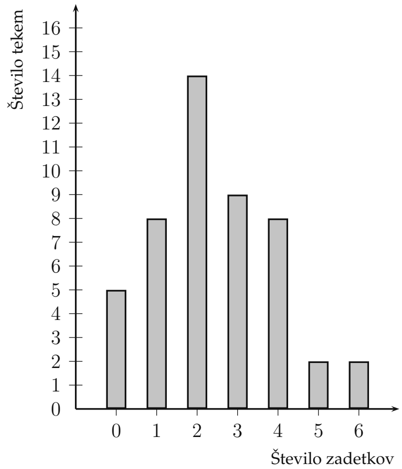
© 2010 DMFA Slovenije, Komisija za tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol

Presek_38_2_priloga.indd 8 10/4/10 3:07:44 PM

A10. Na koliko načinov lahko blagajnik izplača 30 EUR, če ima na voljo le bankovce za 5 EUR, 10 EUR in 20 EUR?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) 7

B1. Prikaz s stolpci ponazarja število zadetkov na tekmah predtekmovanja na zadnjem svetovnem prvenstvu.



A Koliko tekem je bilo odigranih?

B Koliko zadetkov je bilo v povprečju doseženih na tekmo? Rezultat zapiši na dve decimalni mesti natančno.

C Kolikšen je odstotek tekem, na katerih so moštva dosegla manj zadetkov od povprečja?

B2. Za označevanje trgovskega blaga je danes najpogosteje v rabi črtna koda EAN13. Črtna koda je sestavljena iz slikovnega dela in 13 števk, po vrsti označenih z $a_1, \ldots, a_{13}$. Za te števke mora veljati, da je vrednost izraza

$$a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + \ldots + a_{11} + 3a_{12} + a_{13}$$

deljiva z 10.

0 123456 789777 >

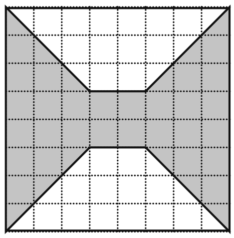
A Z računom preverite, da je koda EAN13 na desni sliki veljavna.

1 345870 6215 >

a_8 a_{13}

B Določite taki števki a_8 in a_{13}, da bo koda EAN13 na desni sliki veljavna. Zapišite vsaj tri rešitve.

B3. Šivilja je imela blago v obliki kvadrata z 8 cm dolgo stranico. Iz njega je izrezala dva enakokraka trapeza in dobila pentljo (glej sliko, pentljo predstavlja osenčeni lik). Dolžini osnovnic izrezanih trapezov sta 8 cm in 2 cm, višini pa 3 cm.



A Koliko kvadratnih centimetrov je ploščina enega izrezanega trapeza?

B Koliko kvadratnih centimetrov je ploščina pentlje?

C Kolikšen del ploščine kvadrata predstavlja ploščina pentlje? Rezultat izrazite z decimalnim številom na 2 decimalni mesti natančno.

B4. V vsakem kubičnem metru vode, ki teče v Hladno jamo, je raztopljenega 75 g apnenca.

A Koliko gramov apnenca je v 350 ℓ vode, ki priteče v Hladno jamo? Rezultat zapišite na dve decimalni mesti natančno.

Presek_38_2_priloga.indd 9 10/4/10 3:07:45 PM

B V zbiralniku, polnem vode iz Hladne jame, je raztopljeno 35 g apnenca. Kolikšna je prostornina zbiralnika? Rezultat zapišite na liter natančno.

C Hladno jamo krasi mogočen, 1000-kilogramski kapnik, v celoti sestavljen iz apnenca. Najmanj koliko kubičnih metrov vode je priteklo v Hladno jamo, da se je iz vode lahko izločilo toliko apnenca?

Rešitve nalog 10. tekmovanja v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol – državno tekmovanje

1. letnik

1. Naj bosta a in b števki iskanega dvomestnega števila. Nastavimo enačbo $100a + b = 9(10a + b)$. Odpravimo oklepaj in dobimo zvezo $4b = 5a$.Upoševamo, da sta a in b števki, kar pomeni, da je edina možna rešitev $a = 4$ in $b = 5$. Iskano število je 45.

2. Naj bo x število prevoženih kilometrov in $m(x)$ ter $b(x)$ zneska, ki sta odvisna od x. Znesek za Mihovo kolo je $m(x) = 4x + 100$, znesek za Blaževo kolo pa $b(x) = 3x + 200$. Miha bo plačal več kot Blaž, ko bo veljlo $4x + 100 > 3x + 200$. Rešimo neenačbo in dobimo rešitev $x > 100$. Prevoziti morata najmanj 101 kilometer.

3. Potence z negativnim eksponentom v oklepajih zapišemo z ulomki $(x-1)\left((\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x})(\frac{1}{x}-1)-(\frac{1}{x^2}-1)(\frac{1}{x^2}+1)\right)^{-1}$. Vsote oziroma razlike razširimo na skupni imenovalec $(x-1)\left((\frac{1+x+x^2}{x^3})(\frac{1-x}{x})-(\frac{1-x^2}{x^2})(\frac{1+x^2}{x^2})\right)^{-1}$, opravimo množenje $(x-1)\left(\frac{1+x+x^2-x-x^2-x^3}{x^4}-\frac{1-x^4}{x^4}\right)^{-1}$. Dobljena ulomka v oklepaju odštejemo $(x-1)(\frac{x^4-x^3}{x^4})^{-1}$. Zapišemo obratno vrednost $(x-1)(\frac{x^4}{x^3(x-1)})$, okrajšamo in dobimo rezultat x.

4. Naj bo x začetni znesek Aleša, y začetni znesek Lovra in z začetni znesek Mira. Tabeliramo časovni potek spreminjanja količine denarja pri posameznikih:

Igra	**Miro**	**Aleš**	**Lovro**
pred igro	x	y	z
po 1. igri	$x-y-z$	$2y$	$2z$
po 2. igri	$2x-2y-2z$	$2y-(x-y-z)-2z=$ $=-x+3y-z$	$4z$
po 3. igri	$4x-4y-4z$	$-2x+6y-2z$	$4x-(2x-2y-2z)-(-x+3y-z)=$ $=-x-y+7z$

Zapišemo sistem enačb:
$$4x-4y-4z=24$$
$$-2x+6y-2z=24$$
$$-x-y+7z=24,$$
ki ga rešimo. Rešitev je $x=39, y=21$ in $z=12$. Ugotovimo, da je največ izgubil Miro in sicer 15 evrov.

5. Zapišemo zvezo $315+40\%$ od 315 in izračunamo, da je to 441. Upoštevamo pridelek v 1. sadovnjaku $x+\frac{25}{100}x = x+\frac{x}{4} = \frac{5x}{4}$, ter pridelek v drugem sadovnjaku $(315-x)+\frac{50}{100}(315-x) = 472,5-1,5x$. Seštejemo pridelek v obeh sadovnajkih $\frac{5x}{4}+472,5-1,5x = 441$. Rešimo enačbo in dobimo rešitev $x = 126$. V prvem sadovnjaku je zraslo 126 ton sadja, v drugem pa 189 ton.

© 2010 DMFA Slovenije, Komisija za tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Presek_38_2_priloga.indd 10 10/4/10 3:07:48 PM

2. letnik

1. I. način:

   Ugotovimo, da poraba goriva predstavlja linearno funkcijo odvisno od prevoženih kilometrov $f(x) = k \cdot x$. Izračunamo $k = \frac{39{,}3-17{,}2}{36149-35824} = \frac{22{,}1}{325} = 6,8$ litrov na 100 kilometrov. Za nadaljnih 300 kilometrov potrebuje $f(300) = 0{,}068 \cdot 300 = 20{,}4\ \ell$. Seštejemo $39,3 + 20,4 + 5,3 = 65\ \ell$.

   II. način:

   Upoštevamo premo sorazmerje.

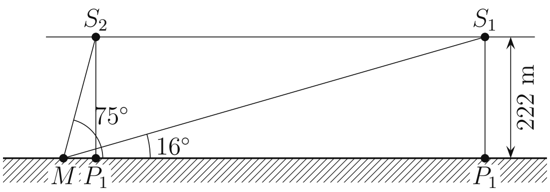
začetna količina x	$x - 17,2$	$x - 39,3$	$5,3$
stanje km	35824	36149	36449

   Zapišemo sklepni račun $\begin{array}{l} 22,1 \cdots\cdots\cdots 325 \\ x - 44,6 \cdots\cdots 300 \end{array}$

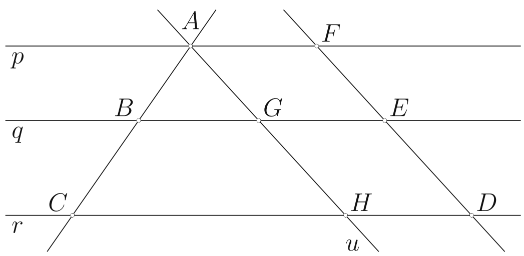
   Izračunamo $x = 65\ \ell$.

2. Upoštevamo, da je $n = \frac{5}{2}$ in $f(2) = 0$, kar vstavimo v predpis za linearno funkcijo $f(x) = k \cdot x + n$. Dobimo $k \cdot 2 + \frac{5}{2} = 0$ n izračunamo $k = -\frac{5}{4}$. Upoštevamo lastnost vzporednih premic, torej da imata enak smerni koeficint. Enačba premice je $y = -\frac{5}{4}x + n_1$. Upoštevamo, da leži na tej premici točka $M(\frac{4}{3}, 0)$ in izračunamo $n_1 = \frac{5}{3}$. Enačbo premice $y = -\frac{5}{4}x + \frac{5}{3}$ zapišemo še v implicitni obliki $15x + 12y - 20 = 0$ ali njej ekvivalentni.

3. Skico dopolnimo tako, da vrišemo navpičnico, da dobimo pravokotni trikotnik.



   Uporabimo kotne funkcije za ostra kota 16° in 75° in sicer $\tan 16° = \frac{|P_1S_1|}{|MP_1|}$ ter $\tan 75° = \frac{|P_1S_2|}{|MP_2|}$. Iz prve zveze izračunamo $|MP_1| = \frac{222}{\tan 6°} \doteq 774{,}2$ m, iz druge pa $|MP_2| = \frac{222}{\tan 75°} \doteq 59{,}5$ m. Glede na oznake na skici, upoštevamo da je $|S_1S_2| = |P_1P_2| = |MP_2| - |MP_1| \doteq 714{,}7$ m.



4. Ugotovimo, da sta trikotnika ABG in ACH podobna in velja $|AG| = |FE|$ ter $|GH| = |ED|$. Upoštevamo, da je razmerje istoležnih stranic konstantno $|AG| : |AB| = |AH| : |AC|$. Iz tega izračunamo $|AC| = \frac{|AB| \cdot |AH|}{|AG|} = \frac{3 \cdot \frac{91}{12}}{\frac{10}{3}} = 6\frac{33}{40}$.

Presek_38_2_priloga.indd 11 10/4/10 3:07:52 PM

5. Računati začnemo od spodaj navzdor. Poenostavimo $2-\sqrt{3}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{8-4\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{4(2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=4$. Nadaljujemo $\frac{2}{2-\sqrt{3}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Nato uredimo $\sqrt{3}-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$. Izračunamo $\frac{1}{\frac{2\sqrt{3}-1}{2}}=\frac{2}{2\sqrt{3}-1}$. Racionaliziramo še imenovalec ulomka $\frac{2}{2\sqrt{3}-1}\cdot\frac{2\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}+1}=\frac{4\sqrt{3}+2}{11}$.

3. letnik

1. Upoštevamo smiselno zvezo med diagonalama $e-f=14$ ali $e=14+f$. Uporabimo obrazec za ploščino romba $\frac{e\cdot f}{2}=120$. Vstavimo e in dobimo kvadratno enačbo $f^2+14f-240=0$. Enačbo rešimo. Dobimo rešitvi $f_1=10$ in $f_2=-24$, ki pa ni ustrezna. Dolžino stranice a izračunamo z uporabo Pitagorovega izreka $a^2=(\frac{e}{2})^2+(\frac{f}{2})^2$. Izračunamo $a=13$.

2. **a)** Vstavimo vrednost $x=15$ in izračunamo $h(15)=-0,0126\cdot 15^2+0,635\cdot 15\doteq 6,69$ m.
   b) Nastavimo enačbo $h(x)=0$. Izračunamo rešitvi $x=0$ in $x=50,4$ m ter izločimo $x=0$.
   c) Ugotovimo, da je najvišja višina žoge enaka ordinati temena parabole. Izračunamo $p=-\frac{b}{2a}=2,52$ ter nato izračunamo še $q=h(p)=-0,0126\cdot 25,2^2+0,635\cdot 25,2=8$.

3. Ugotovimo, da je $e^0=1$. Poenostavimo tudi korenjenec $\sqrt{(5^0+4^2)^2}=\sqrt{(17)^2}=17$. Uporabimo zvezo $1=\log_4 4$ in dobimo $1+\log_4(3^x-17)=4$. Uredimo $\log_4(3^x-17)=3$. Uporabimo definicijo logaritma $64=3^x-17$. Poenostavimo $3^x=81$. Rešimo in izračunamo $x=4$.

4. Nastavimo enačbe $4\cdot 2^t+2^{t+3}=a\cdot 2^{t+2}$. Enačbo uredimo, tako da izpostavimo skupni faktor $2^t(4+8-4a)=0$. Ugotovimo, da je $2^t\neq 0$. Tako je $4+8-4a=0$. Izračunamo $a=3$.

5. Uporabimo obrazec za površino kocke $P=6a^2$in iz nje izračunamo dolžino roba $a=2\sqrt{3}$ cm. Nato izračunamo dolžino telesne diagonale kocke $D=a\sqrt{3}=6$ cm ter prostornino kocke $V=a^3=(2\sqrt{3})^2=24\sqrt{3}$ cm^3. Upoštevamo, da sta prostornini kocke in piramide enaki $24\sqrt{3}=\frac{2^2\cdot v}{3}$. Izračunamo višino piramide $v=18\sqrt{3}$ cm.

4. letnik

1. Izberemo spremenljivke a je dolžina, b je širina in c je globina. Nastavimo sistem enačb $12a=c, a=\frac{3b}{2}$ in $abc+ab=\frac{7}{6}$. Sistem uredimo in dobimo $48a^3+4a^2-7=0$. Rešimo enačbo tretje stopnje z uporabo Hornerjevega algoritma. Zapišemo rešitve $a=\frac{1}{2}$ $b=\frac{1}{3}$ in $c=6$.

2. Ugotovimo, da mora biti logaritmand $\frac{x}{x+2}-\frac{1}{x}$ večji od 0. Zapišemo neneačbo $\frac{x}{x+2}-\frac{1}{x}>0$. Neenačbo uredimo $\frac{x^2-x-2}{x(x+2)}>0$. Določimo ničle $x_1=2$ in $x_2=-1$ in pole $x_1=0$ in $x_2=-2$. Na številski premici določimo predznake in odčitamo rešitev $x\in(-\infty,-2)\cup(-1,0)\cup(2,\infty)$.

Presek_38_2_priloga.indd 12 10/4/10 3:07:55 PM

3. Upoštevamo lastnosti geometrijskega zaporedja $8 \cdot q = x$ in $x \cdot q = 18$. Zapišemo zvezo $8q^2 = 18$ in izračunamo količnik $q = \frac{3}{2}$. Nato izračunamo polmer srednje krogle $r_2 = 12$ dm. Izračunamo prostornino snežaka $V = (\frac{4}{3}\pi(8^3 + 12^3 + 18^3)$, ki je $33,8119$ m^3.

4. Uporabimo zvezo za prehod na oster kot $\cos(\pi + 2x) = -\cos 2x$, nato še zvezo za dvojne kote $-\cos 2x = -\cos^2 x + \sin^2 x$. Uporabimo zvezo za $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Izraz uredimo, vstavimo $\cos x = \frac{1}{4}$. Dobimo $1 - 2\cos^2 x = 1 - 2 \cdot (\frac{1}{4})^2$. Izračunamo vrednost izraza $\frac{7}{8}$.

5. Vsota reletivnih frekvenc mora 100%. Tako izračunamo $f_6 = 6,5$. Za grupirane podatke se aritmetična sredina izračuna z obrazcem $\bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3 \ldots f_f \cdot x_k}{N}$. Vrednosti x so sredine razredov in jih dobimo kot povprečje zgornje in spodnje meje razreda $x_i = \frac{s_i + z_i}{2}$. Ker za relativne frekvence velja $f_i^0 = \frac{f_i}{N} \cdot 100$, lahko aritmetično sredino izračunamo kot $\bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1}{N} + \frac{f_2 \cdot x_2}{N} + \ldots = \frac{f_1 \cdot x_1}{100} + \frac{f_2 \cdot x_2}{100} + \ldots$. Vstavimo naše podatke in dobimo $\bar{x} = 131,4$ minute.

Rešitve nalog 54. matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje

I/1. Ker so števila a, b, c in d različna, so različna tudi števila $1-a$, $1-b$, $1-c$ in $1-d$. Ker je 10 produkt le dveh praštevil, lahko 10 zapišemo kot produkt štirih celih števil le, če sta dve izmed teh števil 1 in -1. Preostali števili sta tedaj -2 in 5 ali pa 2 in -5.

Zaradi $a > b > c > d$ sledi $1-a < 1-b < 1-c < 1-d$. Zato je $1-b = -1$ in $1-c = 1$, od koder sledi $b = 2$ in $c = 0$. Če je $1-a = -2$ in $1-d = 5$, dobimo $a = 3$ in $d = -4$. V primeru $1-a = -5$, $1-d = 2$ pa je $a = 6$ in $d = -1$.

Vrednost izraza $a+b-c-d$ je v prvem primeru $3+2-0-(-4) = 9$, v drugem pa $6+2-0-(-1) = 9$, torej je edina možnost $a+b-c-d = 9$.

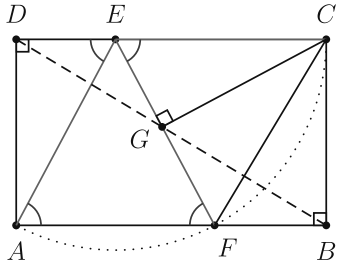
I/2. 1. način V drugo enačbo vstavimo $z = 3x + 2y$ in odpravimo ulomke. Dobimo $x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$ oziroma $(x+y)(x+2y) = 0$. Od tod sledi $x = -y$ ali $x = -2y$.

V prvem primeru je $x = -y$ in $z = -y$, zato je $5x^2 - 4y^2 - z^2 = 5y^2 - 4y^2 - y^2 = 0$.

V drugem primeru je $x = -2y$ in $z = -4y$, zato je $5x^2 - 4y^2 - z^2 = 20y^2 - 4y^2 - 16y^2 = 0$.

2. način Iz druge enačbe sledi $2xy = 3yz + xz$. Če prvo enačbo pomnožimo z z, x in y, lahko izrazimo $z^2 = 3xz + 2zy$, $3x^2 = zx - 2xy$ in $2y^2 = zy - 3xy$. Zato je

$$5x^2 - 4y^2 - z^2 = \frac{5}{3}(zx - 2xy) - 2(zy - 3xy) - (3xz + 2zy) = \frac{4}{3}(2xy - 3zy - xz) = 0.$$



I/3. Označimo $\angle FAE = \alpha$. Ker točka E leži na simetrali daljice AC, je enako oddaljena od A in C, zato je središče krožnice, na kateri ležijo točke A, C in F. Tako velja $|AE| = |CE| = |FE|$. Zato je $\angle EFA = \angle FAE = \alpha$. Zaradi vzporednosti AB in CD sledi še $\angle DEA = \angle EAF = \alpha$ in $\angle CEF = \angle EFA = \alpha$.
Pravokotna trikotnika AED in CEG se ujemata v kotih in imata enako dolgi hipotenuzi, zato sta skladna. Tako je $|ED| = |EG|$ in $|CG| = |AD| = |BC|$. Od tod sledi, da je trikotnik DEG enakokrak in je

Presek_38_2_priloga.indd 13 10/4/10 3:07:58 PM

$$\angle EGD = \frac{\pi - \angle DEG}{2} = \frac{\angle GEC}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Po Pitagorovem izreku velja $|FB|^2 = |FC|^2 - |BC|^2 = |FC|^2 - |GC|^2 = |FG|^2$, torej je $|FB| = |FG|$. Trikotnik GFB je zato enakokrak in tako velja

$$\angle FGB = \frac{\pi - \angle GFB}{2} = \frac{\angle GFA}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Torej je $\angle FGB = \angle EGD$, zato točke B, G in D ležijo na isti premici.

Opomba. Da je trikotnik FBG enakokrak, lahko utemeljimo tudi drugače. Iz $|CG| = |CB|$ sledi, da je enakokrak trikotnik BCG, torej je $\angle CBG = \angle BGC$ in zato

$$\angle FGB = \frac{\pi}{2} - \angle BGC = \frac{\pi}{2} - \angle GBC = \angle FBG.$$

I/4. Odgovor je da. Če je katera izmed števk soda, lahko Matej oblikuje dve sodi števili, saj sodo števko postavi na mesto enic, med sabo pa zamenja dva izmed ostalih listov. Če je med štirimi števkami število 5, Matej postopa podobno. Petico postavi na mesto enic, med sabo pa nato zamenja dva izmed ostalih listov. Števili si nista tuji, saj sta obe deljivi s 5. V kolikor sta dve zapisani števki enaki, Matej sestavi neko število, nato zamenja lista papirja z isto števko in dobi število, enako prejšnjemu.

Ostane še en primer in sicer, ko so na listih zapisane števke 1, 3, 7 in 9. S temi števkami Matej lahko oblikuje števili 1397 in 1793 ali števili 1397 in 9317 ali števili 9317 in 9713, saj so vsa ta števila deljiva z 11. Lahko pa oblikuje tudi števili 1739 in 9731, ki sta obe deljivi s 37.

Opomba. Primer dveh štirimestnih števil, ki si nista tuji in katerih števke so 1, 3, 7 in 9, dobimo z obravnavo razlik oblike $\overline{a_1a_2a_3a_4} - \overline{a_2a_1a_3a_4}$, $\overline{a_1a_2a_3a_4} - \overline{a_3a_2a_1a_4}$ in tako dalje (drugo štirimestno število ima glede na prvo zamenjani dve števki). Primer najdemo že s pomočjo druge izmed zapisanih razlik. Ker je

$$\overline{a_1a_2a_3a_4} - \overline{a_3a_2a_1a_4} = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11(a_1 - a_3)$$

in nobeno število s števkami 1, 3, 7, 9 ni deljivo z 2, 3 ali 5, je smiselno poiskati število, deljivo z 11. Če Matej sestavi število $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, deljivo z 11, je z 11 deljivo tudi $\overline{a_3a_2a_1a_4}$. Računamo lahko po vrsti. Število 1379 ni deljivo z 11, 1397 pa je. Matej lahko sestavi števili 1397 in 9317.

II/1. Kvadratna enačba ima lahko celoštevilske rešitve le, če je diskriminanta popoln kvadrat. Izračunamo lahko $D = n^2 - 4(n+5) = (n-2)^2 - 24$. Torej za neko nenegativno celo število m velja $m^2 = (n-2)^2 - 24$, oziroma

$$24 = (n-2)^2 - m^2 = (n+m-2)(n-m-2).$$

Ker sta števili $n+m-2$ in $n-m-2$ iste parnosti in je $m \geq 0$, imamo 4 možnosti.

Če je $n-m-2 = -12$ in $n+m-2 = -2$, je $n = -5$ (in $m = 5$), kvadratna enačba pa ima rešitvi $x_1 = 0$ in $x_2 = 5$. V primeru $n-m-2 = -6$ in $n+m-2 = -4$ je $n = -3$ (in $m = 1$), rešitvi kvadratne enačbe pa sta $x_1 = 1$ in $x_2 = 2$.

Če je $n-m-2 = 2$ in $n+m-2 = 12$, je $n = 9$ ter $m = 5$, kvadratna enačba pa ima

Presek_38_2_priloga.indd 14 10/4/10 3:08:04 PM

rešitvi $x_1 = -7$ in $x_2 = -2$. V primeru $n - m - 2 = 4$ in $n + m - 2 = 6$ je $n = 7$ in $m = 1$, rešitvi kvadratne enačbe pa sta $x_1 = -4$ in $x_2 = -3$.

Vse možne vrednosti števila n so torej -5, -3, 7 in 9.

2. način Naj bosta x_1 in x_2 celoštevilski rešitvi te kvadratne enačbe. Predpostavimo lahko še $x_1 \leq x_2$. Po Vietovih pravilih velja $x_1 + x_2 = -n$ in $x_1 x_2 = n + 5$. Če enačbi seštejemo, dobimo $x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 5$ in zato

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 6.$$

Ker je $6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 = (-3) \cdot (-2) = (-6) \cdot (-1)$, dobimo štiri možnosti. V prvem primeru je $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, v drugem $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, v tretjem $x_1 = -4$, $x_2 = -3$ in v zadnjem $x_1 = -7$, $x_2 = -2$. S pomočjo $x_1 + x_2 = -n$ izračunamo, da je število n enako -5, -3, 7 ali 9.

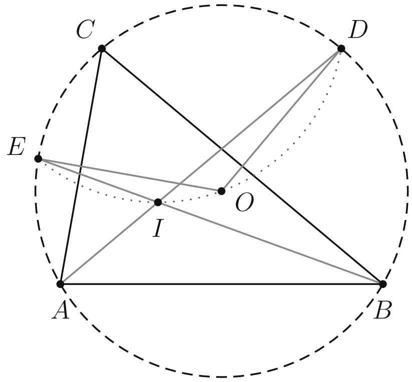
II/2. Število, katerega vsota števk je 1, je potenca števila 10 in ni večkratnik 7. Zato ne obstaja tak večkratnik števila 7, da bi bila vsota števk enaka 1. Poskusimo najti tak večkratnik, da bo vsota števk enaka 2. To število mora imeti dve števki enaki 1. Preverimo po vrsti nekaj takih naravnih števil. Števila 11, 101 in 110 niso deljiva s 7, 1001 pa je.

Naravno število oblike $10011001\ldots1001$, v katerem smo k-krat zapored zapisali število 1001, ima vsoto števk enako $2k$ in je očitno večkratnik 1001, torej je večkratnik števila 7. Zato za vsa soda naravna števil n obstaja število m, ki je večkratnik 7, da je vsota števk števila m enaka n.

Vsoto števk enako 3 ima število 21, število oblike $2110011001\ldots1001$, kjer smo za 21 zapisali k-krat zapored število 1001, ima vsoto števk enako $3 + 2k$ in je večkratnik števila 7. Zato za vsa liha naravna števila n večja od 1 obstaja število m, ki je večkratnik 7, da je vsota števk števila m enaka n.

Pokazali smo, da za natanko vsa naravna števila n razen 1 obstaja večkratnik števila 7, katerega vsota števk je n.

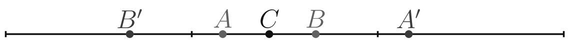
II/3. Ker je trikotnik ABC ostrokotni, ležita točki I in O na istem bregu premice ED. Iz pogoja, da ležijo točke D, E, I in O na isti krožnici, zato sledi $\angle DOE = \angle DIE$. Označimo kote v trikotniku z α, β in γ in z njimi izrazimo kota $\angle DOE$ in $\angle DIE$.



Velja $\angle DOE = \angle EOC + \angle COD$. Ker je središčni kot dvakrat večji od obodnega, je $\angle COE = 2\angle CBE$. Premica EB simetrala kota CBA, zato je $\angle CBE = \frac{\angle CBA}{2} = \frac{\beta}{2}$. Torej je $\angle COE = 2\angle CBE = \beta$. Podobno je $\angle DOC = 2\angle DAC = 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = \alpha$ in tako $\angle DOE = \alpha + \beta$.

Velja $\angle DIE = \angle AIB = \pi - \angle BAI - \angle IBA = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$. Iz enakosti $\angle DOE = \angle DIE$ sledi $\pi = \frac{3}{2}(\alpha + \beta)$ oziroma $\alpha + \beta = \frac{2\pi}{3}$. Torej je $\gamma = \pi - \alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$.

II/4. Daljico razdelimo na tri enako dolge dele. Na srednjem delu



Presek_38_2_priloga.indd 15 10/4/10 3:08:05 PM

gotovo obstajata dve točki enake barve. Denimo, da sta ti točki rdeči in ju označimo z A in B. Naj bo A' slika točke A pri zrcaljenju čez točko B in B' slika točke B pri zrcaljenju čez točko A. Če je ena izmed točk A' in B' rdeča, smo željene tri točke našli. Predpostavimo torej, da sta obe točki A' in B' modri. Naj bo C razpolovišče daljice AB. Torej je C tudi razpolovišče daljice $A'B'$. Če je C rdeča, so A, B in C iskane točke, sicer pa so A', B' in C iskane točke.

III/1. Naj bo $p(x) = b_1x^3 + c_1x^2 + d_1x + e_1$ in $q(x) = b_2x^3 + c_2x^2 + d_2x + e_2$. Zapišimo $a = \frac{r}{s}$ kot okrajšan ulomek, kjer sta r in s celi števili in je $s > 0$. Označimo $p(a) = m$ in $q(a) = n$. Tedaj velja

$$b_1 \cdot \frac{r^3}{s^3} + c_1 \cdot \frac{r^2}{s^2} + d_1 \cdot \frac{r}{s} + e_1 = m, \quad b_2 \cdot \frac{r^3}{s^3} + c_2 \cdot \frac{r^2}{s^2} + d_2 \cdot \frac{r}{s} + e_2 = n.$$

Če obe enačbi pomnožimo s s^3, dobimo

$$b_1r^3 + c_1r^2s + d_1rs^2 + e_1s^3 = ms^3, \quad b_2r^3 + c_2r^2s + d_2rs^2 + e_2s^3 = ns^3.$$

Od tod sledi, da s deli b_1r^3 in b_2r^3. Ker je število s tuje r, mora s deliti b_1 in b_2. Ker pa sta po predpostavki b_1 in b_2 tuji števili, je zato $s = 1$. Torej je $a = r$, kar je celo število.

III/2. Ker so vsa števila, katerih vsota števk je 1, potence števila 10, ki niso deljiva z 13, ne obstaja večkratnik števila 13, ki bi imel vsoto števk enako 1.

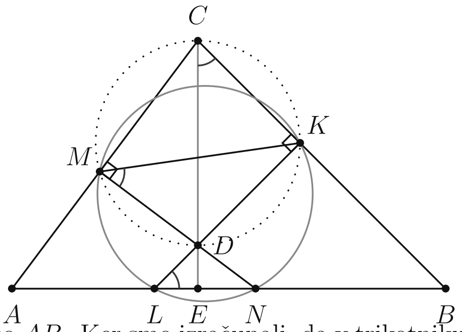
Poskusimo najti število m, deljivo s 13, katerega vsota števk je 2. Očitno bo imelo število m dve števki enaki 1, ostale pa 0. Preverimo po vrsti prvih nekaj takih naravnih števil. Očitno 11, 101 in 110 niso večkratniki 13, 1001 pa je.

Podobno poskusimo najti število m z vsoto števk 3. Naj bo $m = 10^a + 10^b + 10^c$, kjer je $a \geq b \geq c$. Ostanek števila 10^2 pri deljenju s 13 je 9 in ostanek 10^3 pri deljenju s 13 je 12, ostanek 10^4 je 3, ostanek 10^5 je 4 in ostanek 10^6 je 1. Vidimo, da je vsota ostankov, ki jih dajo števila 10^2, 10^4 in 10^6, enaka 13, torej 13 deli 101010.

Število oblike $10011001\ldots1001$, kjer smo k-krat zapisali 1001, je večkratnik 1001 in zato tudi 13, ter ima vsoto števk $2k$. Število oblike $10101010011001\ldots1001$, kjer smo najprej zapisali 101010 in nato k-krat 1001, je prav tako večkratnik 13 in ima vsoto števk enako $3 + 2k$.

Pokazali smo, da za natanko vsa naravna števila n razen 1 obstaja večkratnik števila 13, katerega vsota števk je enaka n.

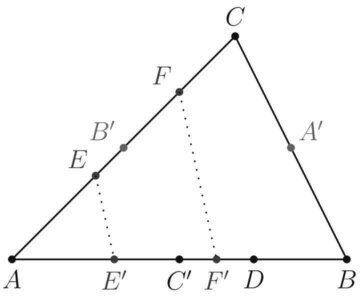
III/3. Označimo kot $\angle ABC$ z β. Ker je premica KL vzporedna z višino na stranico BC, je torej pravokotna na BC. Zato je trikotnik KLB pravokotni in velja $\angle KLB = \frac{\pi}{2} - \beta$. Torej je $\angle KLN = \frac{\pi}{2} - \beta$. Ker je štirikotnik $KLMN$ tetiven, velja $\angle KMN = \angle KLN = \frac{\pi}{2} - \beta$.
V štirikotniku $KDMC$ velja $\angle DKC + \angle DMC = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, zato je tetiven tudi štirikotnik $KDMC$. Torej je $\angle DCK = \angle DMK = \angle NMK = \frac{\pi}{2} - \beta$.



Označimo z E točko, kjer premica CD seka stranico AB. Ker smo izračunali, da v trikotniku CEB velja $\angle ECB = \frac{\pi}{2} - \beta$ ter je $\angle EBC = \beta$, velja $\angle BEC = \frac{\pi}{2}$. Torej je premica skozi točki C in D pravokotna na stranico AB, zato na njej leži tudi točka H. Točke C, D in H zato ležijo na isti premici.

Presek_38_2_priloga.indd 16 10/4/10 3:08:06 PM

III/4. Naj bodo A, B in C oglišča danega trikotnika ter A', B' in C' razpolovišča stranic BC, CA in AB. Vsaj dve izmed točk A', B' in C' sta iste barve. Predpostavimo lahko, da sta to točki A' in B' ter da sta rdeče barve. Daljica $A'B'$ je vzporedna stranici AB. Če na stranici AB obstajata dve rdeči točki, smo našli iskani trapez. Sicer obstaja največ ena rdeča točka. Če taka točka obstaja in je različna od A in B, jo označimo z D. V nasprotnem primeru naj bo D neka od A in B različna točka na stranici AB. Torej so vse točke na daljici AB, razen morda točke A, B in D, modre barve.



Denimo, da na stranici AC obstajata dve med seboj in od A različni točki modre barve. Označimo ju E in F tako, da je E bliže A. Naj bo F' od A različna točka modre barve na daljici AD. Naj bo E' presečišče daljice AD in vzporednice k premici FF' skozi točko E. Tedaj je $EE'F'F$ iskani trapez.

Na enak način sklepamo, da obstaja iskani trapez ali pa na stranici BC obstaja največ ena od B različna točka modre barve. V tem primeru sta obe stranici AC in BC skoraj celi rdeče barve in tako zlahka najdemo iskani trapez, ki ima za oglišča presečišča dveh vzporednih premic s stranicama AC in BC. Tako smo pokazali, da iskani trapez vedno obstaja.

IV/1. Števili a_1 in a_2 sta celi. Ker je $a_1 = \frac{1}{\cos x}$, $a_2 = \frac{1}{\cos(2x)}$ in velja $\cos(2x) = 2(\cos x)^2 - 1$, sledi $a_2 = \frac{1}{2\cos^2 x - 1} = \frac{a_1^2}{2 - a_1^2}$. Ker je a_2 celo število, je $2 - a_1^2$ delitelj a_1^2. Zato $2 - a_1^2$ deli $2 - a_1^2$ in a_1^2, torej deli tudi njuno vsoto, ki je 2. Tako je $2 - a_1^2$ eno izmed števil -2, -1, 1 oziroma 2.

V prvem primeru dobimo $a_1^2 = 4$, v drugem $a_1^2 = 3$, v tretjem $a_1^2 = 1$ in v zadnjem $a_1^2 = 0$. Ker je a_1 celo in neničelno število, so možnosti le $a_1 = -2$, $a_1 = 2$, $a_1 = -1$ in $a_1 = 1$. Od tod sledi, da je število x lahko enako le 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$ ali $\frac{5\pi}{3}$.

Če je $x = 0$, je $a_n = 1$ za vsak n. Če je $x = \pi$, dobimo zaporedje $-1, 1, -1, 1, \ldots$. V ostalih štirih primerih opazimo, da je $a_{n+6} = a_n$, kajti za vsako celo število a velja

$$\cos\left(\frac{(n+6)\cdot a\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{n\cdot a\pi}{3} + 2a\pi\right) = \cos\left(\frac{n\cdot a\pi}{3}\right).$$

Zato je dovolj preveriti, da so prvih šest členov zaporedja cela števila. V primerih $x = \frac{\pi}{3}$ in $\frac{5\pi}{3}$ dobimo $a_1 = 2$, $a_2 = -2$, $a_3 = -1$, $a_4 = -2$, $a_5 = 2$, $a_6 = 1$. Če je $x = \frac{2\pi}{3}$ ali $x = \frac{4\pi}{3}$, pa je prvih šest členov zaporedja enakih $-2, -2, 1, -2, -2, 1$.

Rešitve naloge so realna števila 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$ in $\frac{5\pi}{3}$.

IV/2. Označimo vsoto števk naravnega števila m z $S(m)$. Velja $S(11) = 2$. Opazimo, da ima prvih nekaj večkratnikov sodo vsoto števk. Prvi večkratnik, ki ima liho vsoto števk je $209 = 19 \cdot 11$, vsota števk je 11. S pomočjo teh dveh primerov lahko konstruiramo večkratnike z vsoto števk n za skoraj vsa naravna števila n. Število oblike $11\ldots11$, kjer smo 11 zapisali k-krat zapored, je deljivo z 11 in ima vsoto števk enako $2k$. Torej za vsako sodo število n obstaja večkratnik 11, ki ima vsoto števk enako n.

Vsoto števk 11 ima število 209. Število oblike $20911\ldots11$, kjer 209 sledi k-krat zapisano 11, je deljivo z 11 in ima vsoto števk enako $11 + 2k$. Zato za vsako liho število n, ki je večje

Presek_38_2_priloga.indd 17 10/4/10 3:08:08 PM

ali enako 11, obstaja večkratnik 11 z vsoto števk n.

Konstruirali smo večkratnike za vsa naravna števila, razen 1, 3, 5, 7 in 9. Pokažimo, da večkratniki z vsoto števk 1, 3, 5, 7 ali 9 ne obstajajo.

Naj bo m večkratnik števila 11. Denimo, da je $S(m) \leq 9$. Označimo z L vsoto števk števila m na lihih mestih, z D pa vsoto števk na sodih mestih. Ker je $S(m) = L + D$, sledi $L, D \leq 9$. Po kriteriju za deljivost z 11 sledi, da je $L - D$ deljivo z 11. Hkrati pa je $-9 \leq -D \leq L - D \leq L \leq 9$, torej mora biti $L - D = 0$ oziroma $L = D$. Tedaj je $S(m) = L + D = 2D$, torej sodo število, s čimer smo pokazali, da večkratnik števila 11 ne more imeti vsote števk enake 1, 3, 5, 7 in 9.

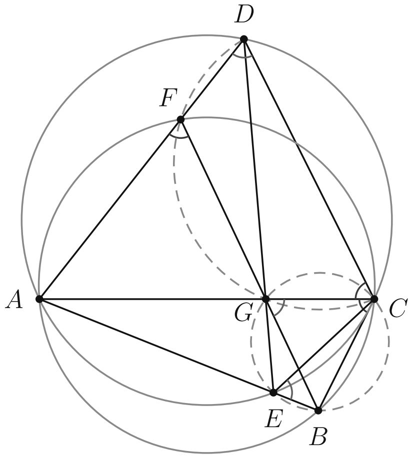
Večkratnik števila 11, ki ima vsoto števk enako n, obstaja za vsa vsa naravna števila n razen 1, 3, 5, 7 in 9.

Opomba Navedimo kriterij za deljivost z 11. Naravno število $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ je deljivo z 11 natanko tedaj, kadar je število $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n$ deljivo z 11. Res, razlika teh dveh števil je

$$a_n \cdot (10^n - (-1)^n) + \ldots + a_2 \cdot (10^2 - 1) + a_1 \cdot (10 + 1) + a_0(1 - 1)$$

in to število je deljivo z 11, saj so z 11 deljiva števila oblike $10^{2k+1} + 1$ in $10^{2k} - 1$.

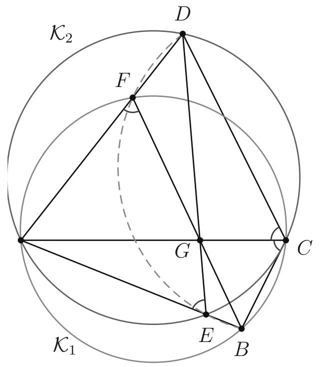
IV/3. Naj bo G presečišče daljic AC in BF. Točke A, B, C in F ležijo na isti krožnici, zato je $\angle AFB = \angle ACB$. Diagonala AC razpolavlja kot $\angle DCB$, zato je $\angle ACB = \angle DCA$. Torej velja $\angle AFG = \angle DCA$, od koder sledi $\angle GFD + \angle DCG = \pi$. Zato točke C, D, F in G ležijo na isti krožnici.



Točke A, E, C in D ležijo na isti krožnici, zato je $\angle AEC = \pi - \angle ADC$. Od tod sledi $\angle CEB = \pi - \angle AEC = \angle ADC$. Ker je štirikotnik $CDFG$ tetiven, velja $\angle FGC = \pi - \angle FDC$ in zato $\angle FGA = \angle FDC$. Torej velja $\angle BGC = \angle FGA = \angle FDC$.

Pokazali smo $\angle CEB = \angle ADC$ in $\angle BGC = \angle ADC$, torej $\angle CEB = \angle BGC$. Od tod sledi, da je štirikotnik $BCGE$ tetiven. Zato je $\angle BEG = \pi - \angle ACB$ oziroma $\angle GEA = \angle ACB$. Hkrati je $\angle ACB = \angle ACD$, saj je AC simetrala kota $\angle DCB$, iz tetivnosti štirikotnika $AECD$ pa sledi $\angle ACD = \angle AED$. Dobili smo torej $\angle GEA = \angle DEA$, od koder sledi, da so točke E, G in D kolinearne. To ravno pomeni, da se daljice AC, BF in DE sekajo v eni točki.

Opomba. Nalogo je možno rešiti s pomočjo potenčnega središča treh krožnic. Označimo s $\mathcal{K}_1$ trikotniku ABC očrtano krožnico, trikotniku ACD očrtano krožnico pa s $\mathcal{K}_2$. Ker so točke A, B, C in F konciklične, velja $\angle AFB = \angle ACB$. Diagonala AC je simetrala kota $\angle DCB$, zato je $\angle ACB = \angle DCA$. Ker točke A, E, C in D ležijo na isti krožnici, je $\angle DCA = \angle DEA$. Dobili smo $\angle AFB = \angle DEA$, od koder sledi

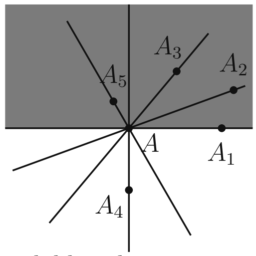


$$\angle BFD = \pi - \angle AFB = \pi - \angle DEA = \angle BED.$$

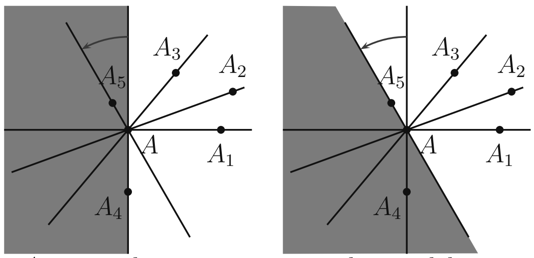
Presek_38_2_priloga.indd 18 10/4/10 3:08:09 PM

To pomeni, da so točke D, F, E in B koncikliène.
Krožnico skozi te točke označimo s $\mathcal{K}_3$.
Krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ se sekata v točkah A in C, krožnici
$\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_3$ se sekata v točkah B in F, krožnici $\mathcal{K}_2$ in $\mathcal{K}_3$ pa se sekata v točkah D in E. Torej je AC potenčna premica krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$, BF potenčna premica krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_3$ ter DE je potenčna premica krožnic $\mathcal{K}_2$ in $\mathcal{K}_3$. Ker se potenčne premice treh krožnic sekajo v eni točki (potenčnem središču), sledi, da se premice AC, BF in DE sekajo v isti točki.

IV/4. Pokazali bomo, da je najmanj $n+1$ premic, ki potekajo skozi dve izmed danih točk, ločnic. Najprej podajmo primer, v katerem je ločnic točno $n+1$. Naj bodo točke oglišča pravilnega $(2n+2)$-kotnika. Označimo jih z $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+2}$. Za vsak $1 \leq i \leq n+1$ je očitno premica A_iA_{i+n+1} ločnica. Nobena druga premica ni ločnica, zato je ločnic natanko $n+1$.



Pokažimo še, da vedno obstaja vsaj $n+1$ ločnic ne glede na položaj točk. Pokazali bomo, da poteka skozi vsako izmed danih točk vsaj ena ločnica. Naj bo A ena izmed točk in $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ preostale točke. Opazujmo premice $AA_1, AA_2, \ldots, AA_{2n+1}$. Obarvajmo del ravnine, ki leži na enem bregu premice AA_1, rdeče. Naj bo r_1 število točk v rdečem delu (premica AA_1 ni v rdečem delu). Rdeči del ravnine bomo vrteli okoli točke A v pozitivni smeri. V vsakem koraku zavrtimo tako, da slika rdečega dela meji na naslednjo možno premico izmed $AA_1, AA_2, \ldots, AA_{2n+1}$. Predpostavimo lahko, da si premice sledijo po vrsti $AA_1, AA_2, \ldots, AA_{2n+1}$ in nato ponovno AA_1. Naj bo r_{i+1} število točk v rdečem delu ravnine po tem, ko smo rdeči del zavrteli i-krat.



Denimo, da smo v nekem koraku imeli premico AA_i in pripadajoči rdeči del ravnine ter smo nato rdeči del zavrteli tako, da je mejil na premico AA_{i+1}. Ločimo štiri primere glede na položaj točk A_i in A_{i+1}. Če je točka A_{i+1} ležala v prvotnem rdečem delu in A_i leži v zavrtenem rdečem delu, velja $r_i = r_{i+1}$. Če je točka A_{i+1} ležala v prvotnem rdečem delu, točka A_i pa ne leži v zavrtenem rdečem delu, se je število točk v rdečem delu zmanjšalo za 1, torej $r_{i+1} = r_i - 1$. Denimo, da A_{i+1} ni ležala v prvotnem rdečem delu. Če A_i ne leži v novem rdečem delu, ponovno velja $r_{i+1} = r_i$, sicer pa je $r_{i+1} = r_i + 1$.

V vsakem koraku se število rdečih točk spremeni največ za 1. Vsa števila so cela. Na začetku je bilo r_1 točk v rdečem delu, po $2n+1$ vrtenjih pa pridemo do situacije, ko rdeči del ponovno meji na premico AA_1, vendar je na nasprotnem delu premice AA_1 kot je bil na začetku. Zato je število točk v rdečem delu na koncu enako $2n - r_1$. Če je $r_1 = n$, je premica AA_1 ločnica. Sicer je eno izmed števil r_1 oziroma $2n - r_1$ večje od n, drugo pa manjše. Pri vrtenju rdečega dela se števila r_i spreminjajo za 1, kar pomeni, da obstaja korak, v katerem je $r_i = n$. Pripadajoča premica AA_i je tedaj ločnica.

Pokazali smo, da skozi vsako točko poteka ločnica. Ker je točk $2n+2$, tako dobimo $2n+2$ premic, pri čemer smo vsako premico šteli dvakrat (po enkrat za vsako točko, ki leži na njej). Tako je ločnic vedno vsaj $\frac{2n+2}{2} = n+1$.

Presek_38_2_priloga.indd 19 10/4/10 3:08:10 PM

Rešitve nalog 10. tekmovanja v znanju matematike za dijake poklicnih šol – državno tekmovanje

1	2	3	4	5	6
B	E	C	B	D	C

1. $0,0009\ dm^3 = 900\ mm^3$ je več kot $700\ mm^3$ in manj kot $8\ cm^3 = 8000\ mm^3$.
2. Ker je Meta prva, Sonja pa predzadnja, je od vseh ponujenih edini možni odgovor E.
3. Če je x višina celega stebra, meri njegova polovica $\frac{x}{2}$, tretjina pa $\frac{x}{3}$. Iz enačbe $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}+1,5\ m = x$ dobimo, da je višina stebra $x = 9\ m$.
4. Ploščino trikotnika izračunamo tako, da produkt stranice trikotnika in višine na to stranico delimo z 2. Ploščina osenčenega trikotnika na sliki je enaka $\frac{3\ cm \cdot 6\ cm}{2} = 9\ cm^2$.
5. Vrednost izraza $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc}{abc} + \frac{ac}{abc} + \frac{ab}{abc} = \frac{ab+ac+bc}{abc}$.
6. Dolžina vzmeti je vsota dolžin štirih različnih krožnih lokov, pri čemer vsak krožni lok predstavlja polovico obsega izbranega kroga s polmerom 2, 1, $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{4}$ cm. Ker se polovica obsega kroga s polmerom r izračuna kot πr, je dolžina polžaste vzmeti $2\pi + 1\pi + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4}\pi = 3,75\pi$.

Daljše naloge

B1. Iz tabele in grafikona odčitamo podatke za reševanje naloge in izračunamo število odraslih, otrok in upokojencev/študentov/dijakov, ki so v posameznih dneh obiskali Žive jaslice.

	Število obiskovalcev		
	1. dan	2. dan	3. dan
Odrasli	60 % od 440 = 264	64 % od 536 = 343	53 % od 544 = 288
Otroci	22 % od 440 = 97	21 % od 536 = 113	22 % od 544 = 120
Upokojenci, študenti, dijaki	18 % od 440 = 79	15 % od 536 = 80	25 % od 544 = 136

Izkupiček od prodaje je bil:

- 1. dan: $264 \cdot 7\ EUR + 97 \cdot 3{,}5\ EUR + 79 \cdot 5\ EUR = 2582{,}5\ EUR$
- 2. dan: $343 \cdot 7\ EUR + 113 \cdot 3{,}5\ EUR + 80 \cdot 5\ EUR = 3196{,}5\ EUR$
- 3. dan: $288 \cdot 7\ EUR + 120 \cdot 3{,}5\ EUR + 136 \cdot 5\ EUR = 3116\ EUR$

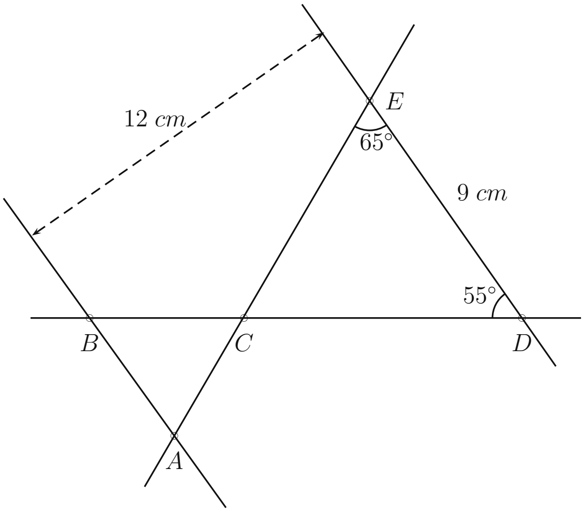
Izkupiček od prodaje v vseh treh dneh je bil 8895 EUR.
V dobrodelne namene je bilo namenjenih $0,35 \cdot 8895\ EUR = 3113{,}25\ EUR$.

B2. Prvi delavec je dobil $\frac{1}{4}$ od $1880\ EUR = 470\ EUR$, drugi delavec 5 % od $1880\ EUR = 94\ EUR$. Ostanek $1880\ EUR - (470\ EUR + 94\ EUR) = 1316\ EUR$ si tretji in četrti delavec razdelita v razmerju $1:3$. Tretji delavec dobi tako $\frac{1}{4}$ od $1316\ EUR = 329\ EUR$, četrti delavec pa $\frac{3}{4}$ od $1316 = 987\ EUR$.

Presek_38_2_priloga.indd 20 10/4/10 3:08:11 PM

B3. Najeti morajo najmanj $\frac{420\ kg}{35\ kg} = 12$ nosačev.
Če bi jih bilo 15, bi vsak nosač v povprečju moral nositi breme $\frac{420\ kg}{15} = 28\ kg$.
Nosači lahko izberejo svoj tovor na $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ načinov.
Prostornino valja izračunamo po formuli $V = \pi r^2 v$, pri čemer je $r = 0,5\ m$ in $v = 0,8\ m$.
Prostornina valja je $0,628\ m^3$.
Višina kvadra z dano dolžino in širino ob znani prostornini izračunamo iz enačbe $v = \frac{V}{ab} = \frac{0{,}628\ m^3}{1{,}57\ m \cdot 0{,}4\ m} = 1\ m$.

B4. S slike razberemo, da je $\angle CAB = \angle CED$ in $\angle ABC = \angle EDC$, saj gre za izmenične kote ob prečnici. Tako je $\angle BAC = 65°$ in $\angle CBA = 55°$. Ker je vsota notranjih kotov v trikotniku $180°$, je $\angle ACB = 180° - (65° + 55°) = 60°$. Trikotnika ΔABC in ΔDEC sta podobna, zato velja: $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|CD|}$. Iz enačbe $\frac{|AB|}{9\ cm} = \frac{2}{3}$ dobimo, da je $|AB| = 6\ cm$. Ploščina trikotnika ΔABC je $S = \frac{|AB| \cdot v_{AB}}{2} = \frac{6\ cm \cdot 4{,}8\ cm}{2} = 14{,}4\ cm^2$. Višino $v_{AB} = 4{,}8\ cm$ dobimo upoštevajoč $v_{AB} + v_{DE} = 12\ cm$ in $\frac{v_{AB}}{v_{DE}} = 2 : 3$.



Presek_38_2_priloga.indd 21
10/4/10 3:08:12 PM

Rešitve nalog 10. tekmovanja v znanju matematike za dijake poklicnih šol — področno tekmovanje

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	C	C	B	E	E	A	B	D

1. Razmerje ploščin p_{AEFD} in p_{ABCD} je enako $\frac{2}{5} = 0{,}4$.

2. Število enajst milijonov enajst tisoč enajst zapišemo kot 11011011.

3. Število je deljivo z dve, če je njegova zadnja števka soda. Iz števk 1, 4 in 7 lahko sestavimo 2 števili, deljivi z 2: 174 in 714.

4. Napolnili so $6{,}5 \cdot 10^3$ kg : 2 kg $= 3{,}25 \cdot 10^3 = 3250$ vrečk sladkorja.

5. Ker je vsota notranjih kotov v trikotniku enaka $180°$, lahko zapišemo enačbo $x + (x + 3°) + (2x + 1°) = 180°$. Rešitev enačbe je $x = 44°$. Največji kot je $2x + 1° = 89°$.

6. Razmerje 8 cm : 4 km $= 8$ cm : 400000 cm $= 1 : 50000$.

7. Če upoštevamo, da je $8! = 8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ in $6! = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$, je $\frac{8!}{6!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 8\cdot7 = 56$.

8. Iz podatka za obseg $o = 7{,}2$ cm izračunamo stranico enakostraničnega trikotnika $a_{tr} = \frac{7{,}2 \text{ cm}}{4} = 1,8$ cm, stranico kvadrata $a_{kv} = \frac{7{,}2 \text{ cm}}{4} = 1,8$ cm in polmer kroga $r_{kr} = \frac{7{,}2 \text{ cm}}{2\pi} = 1,15$ cm. Ploščina enakostraničnega trikotnika je $S_{tr} = \frac{a_{tr}^2\sqrt{3}}{4} = 2,49$ cm^2, ploščina kvadrata je $S_{kv} = a_{kv}^2 = 3,24$ cm^2 in ploščina kroga $S_{kr} = \pi r^2 = 4,15$ cm^2. Razvrstitev ploščin od najmanjše do največje je: trikotnik, kvadrat, krog.

9. Blagajnik lahko izplača 30 EUR z bankovci za 5 EUR, 10 EUR in 20 EUR na šest načinov:
   - 1 bankovec za 20 EUR in 1 bankovec za 10 EUR,
   - 1 bankovec za 20 EUR in 2 bankovca za 5 EUR,
   - 3 bankovci za 10 EUR,
   - 2 bankovca za 10 EUR in 2 bankovca za 5 EUR,
   - 1 bankovec za 10 EUR in 4 bankovci za 5 EUR,

B1. Iz prikaza s stolpci razberemo. Odigranih je bilo $5 + 8 + 14 + 9 + 8 + 2 + 2 = 48$ tekem. V povprečju je bilo doseženih $\frac{5\cdot0+8\cdot1+14\cdot2+9\cdot3+8\cdot4+2\cdot5+2\cdot6}{48} = 2,4375$ zadetkov na tekmo. Na 27 tekmah so moštva dosegla manj zadetkov od povprečja, kar predstavlja $\frac{27}{48} = 56,25\,\%$.

B2. Koda pod (A) je veljavna, saj je

$$0 + 3\cdot1 + 2 + 3\cdot3 + 4 + 3\cdot5 + 6 + 3\cdot7 + 8 + 3\cdot9 + 7 + 3\cdot7 + 7 = 130,$$

število 130 pa je deljivo z 10. Pri vprašanju (B) je rešitev več. Da je koda veljavna, mora biti vsota

$$1 + 3\cdot3 + 4 + 3\cdot5 + 8 + 3\cdot7 + 0 + 3\cdot a_8 + 6 + 3\cdot2 + 1 + 3\cdot5 + a_{13} = 86 + 3a_8 + a_{13}$$

deljiva z 10. Za (a_8, a_{13}) dobimo naslednje možne rešitve: $(0,4)$, $(1,1)$, $(2,8)$, $(3,5)$, $(4,2)$, $(5,9)$, $(6,6)$, $(7,3)$, $(8,0)$, $(9,7)$.

© 2010 DMFA Slovenije, Komisija za tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Presek_38_2_priloga.indd 22 10/4/10 3:08:13 PM

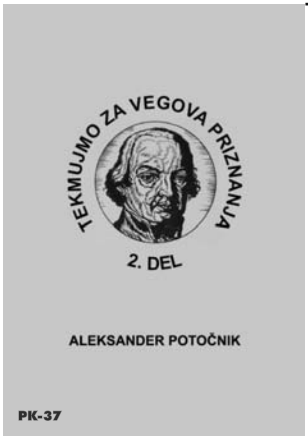
B3. Ploščino izrezanega trapeza izračunamo po formuli $S = \frac{(a+c)v}{2}$, pri čemer je $a = 8$ cm, $c = 2$ cm in $v = 3$ cm. Ploščina je $S = 15$ cm^2. Ploščino pentlje predstavlja preostanek ploščine kvadrata s stranico 8 cm, potem ko je šivilja izrezala dva enakokraka trapeza: $S_{pentlje} = S_{kvadrata} - 2 \cdot S_{trapeza} = 64$ cm$^2 - 2 \cdot 15$ cm$^2 = 34$ cm^2. Ploščina pentlje predstavlja $\frac{34 \text{ cm}^2}{64 \text{ cm}^2} = 0,5313 \approx 0,53$ del oz. 53% ploščine kvadrata.

B4. Pri izračunih si pomagamo s sklepnim računom. V 350 litrih vode je $\frac{350\ \ell \cdot 75 \text{ g}}{1000\ \ell} = 26,25$ g apnenca. Apnenec z maso 35 g je v $\frac{35 \text{ g} \cdot 1000\ \ell}{75 \text{ g}} = 466{,}67\ \ell \approx 467\ \ell$ vode. Da je nastal 1000 kilogramski kapnik, je priteklo vsaj $\frac{1000000 \text{ g} \cdot 1000\ \ell}{75 \text{ g}} = 13333333{,}33\ \ell \approx 13333$ m^3 vode.

Presek_38_2_priloga.indd 23 10/4/10 3:08:14 PM

Zbirke nalog s tekmovanj

Vsako šolsko leto na šolah potekajo različna tekmovanja v znanju. Za lažjo pripravo vam ponujamo več zbirk tekmovalnih nalog z rešitvami.



TEKMUJMO ZA VEGOVA PRIZNANJA – 2. del

Zbirka rešenih nalog s področnih in državnih tekmovanj od 1992 do 1998

80 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

6,99 EUR

MEDNARODNI MATEMATIČNI KENGURU

2005–2008

več kot 500 nalog s tekmovanja

+ dodanih še 120 novih nalog

296 strani
barvni tisk
format 16,5 × 23,5 cm
mehka vezava

18,74 EUR

Poleg omenjenih lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog različnih zahtevnosti za osnovnošolce, srednješolce in študente s tekmovanj v znanju matematike, fizike, logike, astronomije in računalništva. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite s popustom:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/tekmovanja/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.

Presek_38_2_priloga.indd 24 10/4/10 3:08:15 PM