Tekmovanja

1. tekmovanje iz znanja astronomije, osnovna šola (7., 8. in 9. razred) – šolsko tekmovanje

Sklop A

A1 V kateri smeri se vrti Zemlja?

A Od vzhoda proti zahodu.

B Od severa proti jugu.

C Od zahoda proti vzhodu.

D Od juga proti severu.

A2 Kdaj je Sonce v naših krajih najdlje nad obzorjem?

A Ob poletnem Sončevem obratu (solsticiju).

B Ob zimskem Sončevem obratu (solsticiju).

C Ob jesenskem enakonočju (ekvinokciju).

D Ob spomladanskem enakonočju (ekvinokciju).

A3 Najsvetlejša zvezda na nočnem nebu je:

A Severnica **B** Sirij **C** Jupiter **D** Vega

A4 V katerem ozvezdju je Severnica?

A Veliki medved **B** Andromeda **C** Mali medved **D** Orion

A5 Reflektorski teleskop ima za objektiv:

A zrcalo **B** leče **C** sijalko **D** žarnico

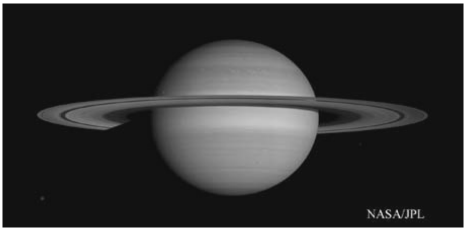
A6 Kateri planet je na sliki desno?

A Uran

B Saturn

C Neptun

D Jupiter



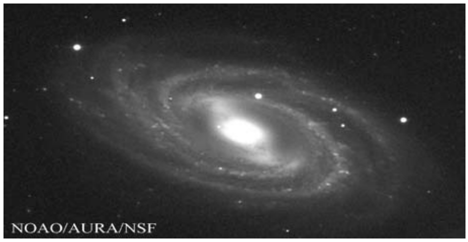
A7 Kaj je na sliki desno?

A meglica

B kroglasta kopica

C galaksija

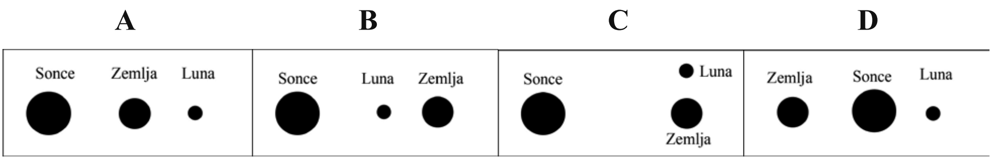
D Saturn



A8 Kateri od naštetih planetov je najmanjši?

A Venera **B** Mars **C** Neptun **D** Merkur

A9 Na Zemlji je viden Lunin mrk. Katera razporeditev Sonca, Zemlje in Lune je v tem primeru prava? Velikosti in razdalje na slikah niso v pravem merilu.



A10 Katero od naštetih ozvezdij je bližje severnemu nebesnemu polu? Pomagaj si s priloženo zvezdno karto.

A Kasiopeja **B** Oven **C** Vodnar **D** Orion

Sklop B

B1 S priloženo zvezdno karto ugotovi, kdaj vzide zvezda Sirij 1. decembra. Čas vzida določi z natančnostjo 5 minut.

………………………………………………………………………..

B2 Točki na nebesni krogli, ki je navpično nad opazovalcem, pravimo nadglavišče ali:

………………………………………………………………..

B3 Astronomi oddaljenost Lune merijo s pulzom laserske svetlobe, ki ga proti njej pošljejo skozi teleskop. Svetloba se odbije od posebnih zrcal, ki so jih astronavti postavili na Luni, in se vrne v teleskop. Astronomi izmerijo čas med trenutkom, ko laserski pulz zapusti teleskop in trenutkom, ko s teleskopom zaznajo vrnjeni pulz. Kolikšna je razdalja med teleskopom in zrcali na Luni, če so astronomi ugotovili, da je bil čas med oddajo pulza in sprejetjem odboja 2,5 sekunde? Za hitrost svetlobe vzemi vrednost 300 000 km/s.

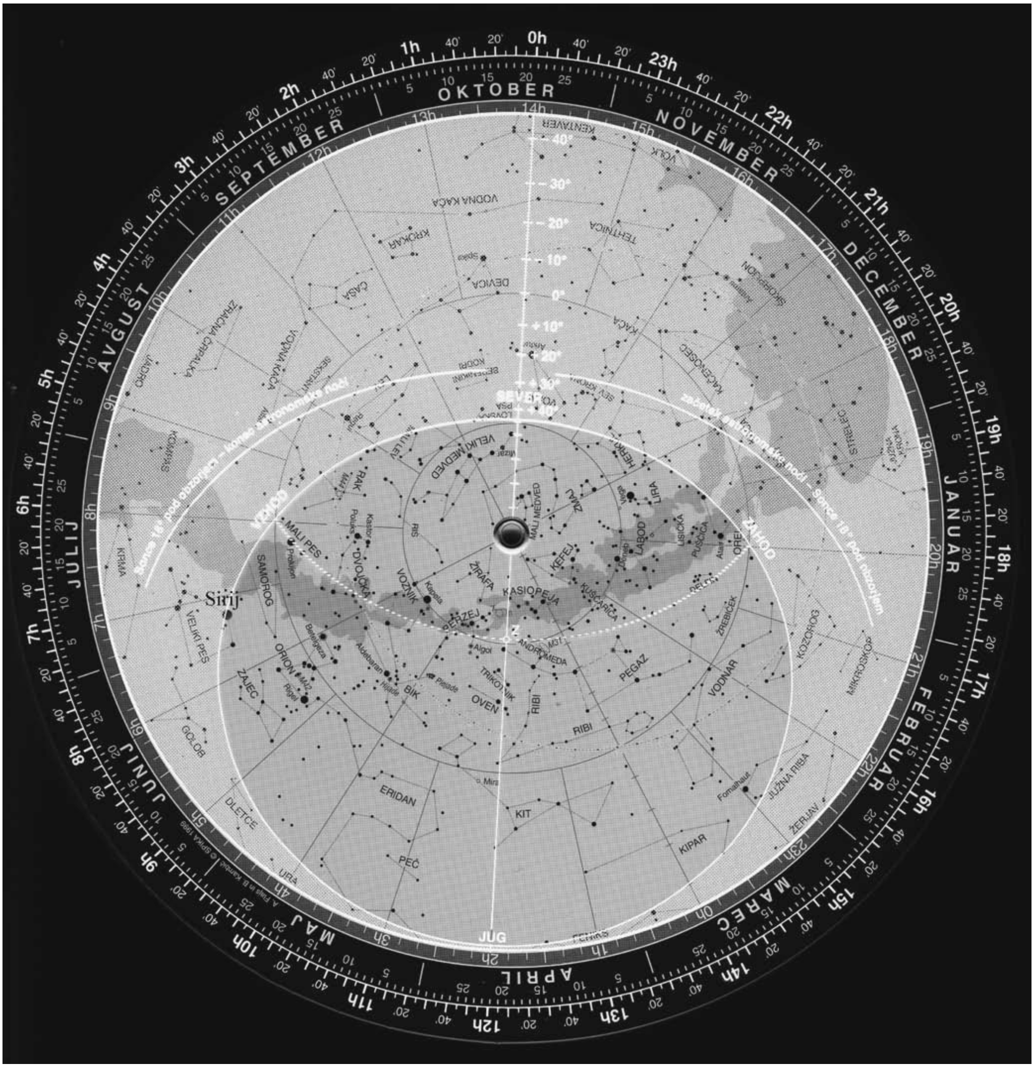
B4 Kolikšno pot naredi Zemlja, ko v enem letu enkrat obkroži Sonce?

Kolikšna je pri tem gibanju povprečna hitrost Zemlje, izražena v enotah km/s?

Privzemi, da se Zemlja okoli Sonca giblje po krožnici s polmerom 150 milijonov kilometrov.

B5 Mornar izmeri, da je Severnica 20° nad obzorjem. Na kateri zemljepisni širini se nahaja ladja z mornarjem, če predpostaviš, da je Severnica zelo blizu severnega nebesnega pola? Nariši tudi skico Zemlje, označi ekvator, zemljepisno širino ladje in višino Severnice nad obzorjem.

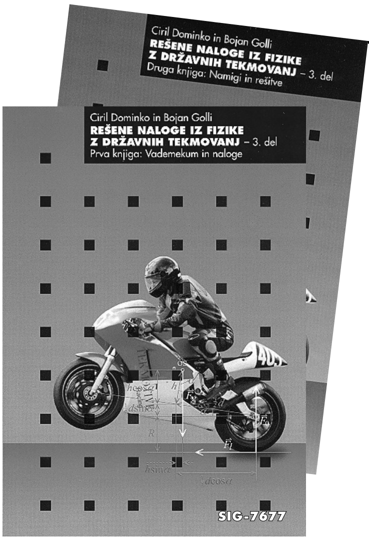
Priloga – Zvezdna karta



Lastnik avtorskih pravic vrtljive zvezdne karte (Bojan Kambič) dovoljuje DMFA ponatis karte za potrebe tekmovanja iz znanja astronomije.

Zbirke nalog s tekmovanj

Tudi v Knjižnici Sigma je izšlo že veliko zbirk tekmovalnih nalog za srednješolce. Naj tu omenimo samo dve novejši izdaji fizikalnih in matematičnih nalog.



Ciril Dominko in Bojan Golli:

REŠENE NALOGE IZ FIZIKE Z DRŽAVNIH TEKMOVANJ – 3. del

Prva knjiga: **Vademekum in naloge**
Druga knjiga: **Namigi in rešitve**

skupaj 424 strani
format 16,5 × 23,5 cm
mehka vezava

29,99 EUR

Matjaž Željko:

REŠENE NALOGE IZ MATEMATIKE S SREDNJEŠOLSKIH TEKMOVANJ

5. del: Izbirna in državna tekmovanja 1997–2006

172 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava 14,99 EUR

Poleg omenjenih lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog različnih zahtevnosti za osnovnošolce, srednješolce in študente s tekmovanj v znanju matematike, fizike, logike, astronomije in računalništva. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite s popustom:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/tekmovanja/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.

1. tekmovanje iz znanja astronomije, srednja šola (vsi letniki) – šolsko tekmovanje

Sklop A

A1 Kaj je Veliki voz?

A galaksija **B** asterizem **C** ozvezdje **D** meglica

A2 Zakaj ni ob vsaki polni Luni tudi Lunin mrk?

A Ker ob polni Luni Lunin mrk sploh ni mogoč.

B Ker je tir Lune okoli Zemlje nagnjen glede na ekliptiko.

C Ker je Lunin mrk mogoč le ob mlaju.

D Ker je Luna tedaj predaleč od Zemlje.

A3 Zamisli si, da stojiš na Zemljinem severnem polu. Katero svetlo zvezdo bi videl blizu zenita?

A Sirij **B** Betelgezo **C** Severnico **D** Deneb

A4 Katero vesoljsko telo ne sodi zraven?

A Evropa

B Ganimed

C Io

D Titan

A5 Kaj je na sliki desno?

A planetarna meglica

B kroglasta kopica

C galaksija

D Saturn

A6 Kje v Osončju je glavni pas asteroidov?

A Med Zemljino in Marsovo orbito.

B Med Jupitrovo in Saturnovo orbito.

C Med Marsovo in Jupitrovo orbito.

D Med Merkurjevo in Venerino orbito.

Sklop B

B1 S priloženo zvezdno karto ugotovi, kdaj vzide zvezda Sirij 1. decembra. Čas vzida določi z natančnostjo 5 minut.

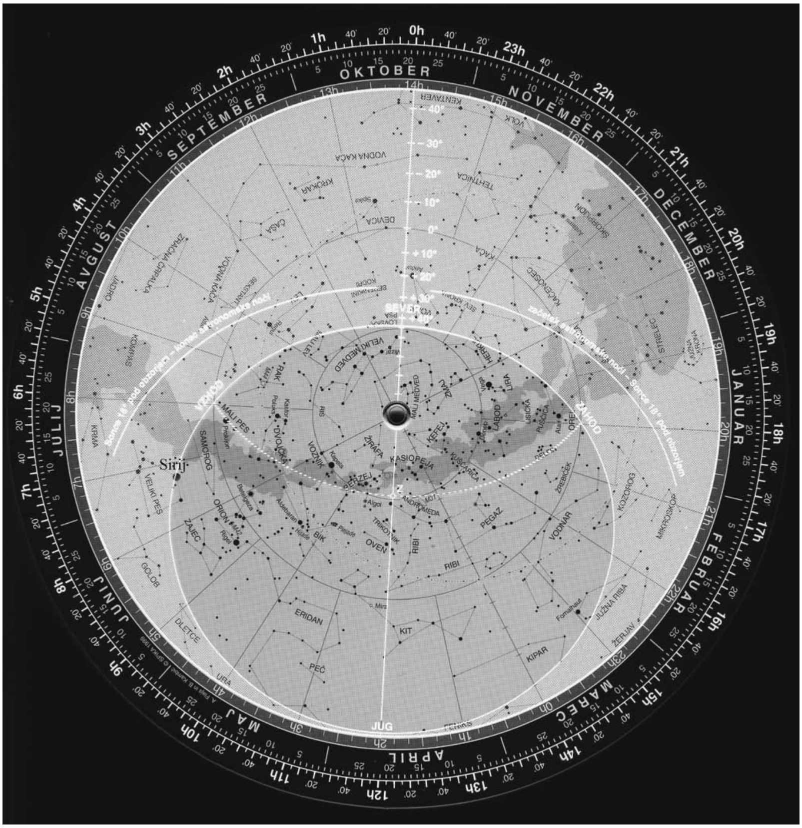
B2 Izračunaj oddaljenost Merkurja od Sonca v astronomskih enotah, če veš, da je njegova največja navidezna kotna oddaljenost od Sonca gledano z Zemlje (največja elongacija) 21°. Zemlja je od Sonca oddaljena eno astronomsko enoto. Nariši skico!

B3 Kolikšna bi bila masa Sonca v primerjavi z njegovo dejansko maso, če bi Zemlja okoli njega krožila z enako tirno hitrostjo, kot jo ima na obstoječi orbiti, le da bi bila od njega dvakrat dlje, kot je trenutno? Predpostavi, da se Zemlja giblje po krožnici.

B4 Izračunaj gostoto Venerine atmosfere blizu površja tega planeta, če ima tam atmosfera temperaturo 462 °C in tlak 93 barov. Predpostavi, da je atmosfera sestavljena le iz ogljikovega dioksida (CO_2).

B5 Kolikšna mora biti goriščna razdalja objektiva teleskopa, da bo v njegovem gorišču premer slike polne Lune 24 mm? Navidezni premer Lunine ploskvice na nebu je 0,5°. Skiciraj!

Priloga – Zvezdna karta



Lastnik avtorskih pravic vrtljive zvezdne karte (Bojan Kambič) dovoljuje DMFA ponatis karte za potrebe tekmovanja iz znanja astronomije.

1. tekmovanje iz znanja astronomije, osnovna šola (7., 8. in 9. razred) – državno tekmovanje

Sklop A

A1. Kaj ne sodi zraven?

(**A**) Vega (**B**) Antares (**C**) Andromeda (**D**) Poluks

A2. Kolikokrat v enem letu vzide Sonce na Zemljinem severnem polu?

(**A**) vsak dan (**B**) enkrat (**C**) dvakrat (**D**) nikoli

A3. Kje bo videl Severnico opazovalec, ki se nahaja na ekvatorju?

(**A**) Na obzorju.

(**B**) V zenitu.

(**C**) Tam je Severnica vedno pod obzorjem.

(**D**) 23,5° nad obzorjem.

A4. Katero od naštetih teles se okrog Sonca giblje z največjo hitrostjo?

(**A**) Mars (**B**) Zemlja (**C**) Jupiter (**D**) Venera

A5. Kaj je Kuiperjev pas?

(**A**) Območje v disku Galaksije.

(**B**) Roj manjših teles v Osončju, ki se začne za Neptunovo orbito.

(**C**) To je drugo ime za glavni asteroidni pas.

(**D**) To je eden od temnejših pasov v Jupitrovi atmosferi.

A6. Katera izjava je napačna?

(**A**) Med vsemi telesi v Osončju ima samo Zemlja delujoče ognjenike.

(**B**) Uran ima prstane (kolobarje).

(**C**) Saturnova luna Titan ima najgostejšo atmosfero med vsemi lunami v Osončju.

(**D**) Jupiter ima več kot 60 lun.

A7. Venera je na nebu vzhodno od Sonca. Kdaj je v naših krajih vidna?

(**A**) Zvečer kot Večernica nad zahodnim obzorjem.

(**B**) Načeloma ni vidna.

(**C**) Zjutraj kot Danica nad vzhodnim obzorjem.

(**D**) Ob polnoči.

A8. Katera od naštetih zvezd ima najvišjo efektivno (površinsko) temperaturo – je najbolj »vroča«?

(**A**) rdeča orjakinja (**B**) Sonce (**C**) rjava pritlikavka (**D**) rdeča pritlikavka

A9. Kakšne vrste je naša Galaksija?

(**A**) eliptična (**B**) nepravilna (**C**) spiralna s prečko (**D**) spiralna brez prečke

A10. Kakšne vrste teleskop je refraktor?

(**A**) Za okular ima zrcalo. (**B**) Za objektiv ima zrcalo, za okular ima lečo.
(**C**) Za objektiv ima zrcalo, a nima okularja. (**D**) Za objektiv ima lečo.

Sklop B

B1. Z vrtljivo zvezdno karto z natančnostjo 5 minut določi, kdaj v naših krajih vzide Sonce 1. decembra in kdaj se ta dan začne astronomska noč.

B2. Ali je lahko planet Mars kdaj v ozvezdju Labod? Pojasni! Pomagaj si z vrtljivo karto.

B3. Kdaj je v naših krajih zvezda Prokijon 1. januarja na nebesnem poldnevniku? Pomagaj si z vrtljivo karto in čas določi z natančnostjo 5 minut.

B4. V opazovališču na severni zemljepisni širini 45° je v vodoravna tla poševno zapičena palica dolžine 1 meter, tako da je usmerjena natanko proti severnemu nebesnemu polu. Kolikšna je dolžina sence, ki jo na tla meče palica ob lokalnem poldnevu na dan spomladanskega enakonočja (ekvinokcij)?

B5. Popotnik se najprej nahaja na Zemljinem ekvatorju, nato pa gre naravnost (po poldnevniku) proti severnemu polu. Ko pride na pol, se zasuka za 90° in gre naravnost proti ekvatorju. Ko pride na ekvator, se po njem po najkrajši poti vrne v začetno točko. Kolikšno pot pri tem opravi? Predpostavi, da je Zemlja pravilna krogla s polmerom 6400 km.

B6. Opazujemo neko galaksijo, katere svetloba je do nas potovala 50 milijonov let. Kako daleč je ta galaksija sedaj, če se giblje stran od nas s hitrostjo 1100 km/s? Vzemi, da je eno leto 365 dni in rezultat izrazi v svetlobnih letih. Hitrost svetlobe je 300 000 km/s.

1. tekmovanje iz znanja astronomije, srednja šola (vsi letniki) – državno tekmovanje

Sklop A

A1. Kaj ne sodi zraven?

(**A**) Orion (**B**) Ribi (**C**) Volar (**D**) Plejade

A2. Na katerem od naštetih vesoljskih teles je težni pospešek največji?

(**A**) Luna (**B**) Zemlja (**C**) Merkur (**D**) Mars

A3. Koliko zvezdnih dni je v enem letu, ki ni prestopno?

(**A**) 365 (**B**) 366 (**C**) 364 (**D**) 367

A4. Zvezdam, ki v danem opazovališču nikoli ne zaidejo, pravimo:

(**A**) cirkumpolarne (**B**) nespremenljive (**C**) severne (**D**) polarne

A5. Kje bo videl Severnico opazovalec, ki se nahaja na ekvatorju?

(**A**) Na obzorju. (**B**) V zenitu.

(**C**) 23,5° nad obzorjem. (**D**) Tam je Severnica vedno pod obzorjem.

A6. Uro na nihalo odnesemo na Luno. Kaj bi morali narediti z nihalom, da bi ura tekla enako kot na Zemlji?

(**A**) Nihalo bi morali podaljšati

(**B**) Nihalo bi morali skrajšati

(**C**) Na nihalo bi morali dodati utež z večjo maso.

(**D**) Nič ne bi spremenili, ker bi ura kazala enako kot na Zemlji.

A7. Kaj je fotosfera?

(**A**) Zgornja plast Zemljinega ozračja. (**B**) Emisijska meglica kroglaste oblike.

(**C**) Vidna plast Sončeve atmosfere. (**D**) Pojav v ozračju.

A8. Aktivnost Sonca lahko merimo s štetjem peg in skupin peg. Skupnemu številu peg in številu skupin peg (x10) pravimo:

(**A**) Hubblovo število (**B**) Galilejevo število

(**C**) Arhimedovo število (**D**) Wolfovo število

A9. Katera od naštetih zvezd ima najvišjo efektivno (površinsko) temperaturo – je najbolj »vroča«?

(**A**) rdeča orjakinja (**B**) Sonce (**C**) rjava pritlikavka (**D**) rdeča pritlikavka

A10. Katera od naštetih izjav ne drži?

(**A**) Kroglasto kopico sestavljajo zelo mlade zvezde.

(**B**) Kroglaste zvezdne kopice se nahajajo v haloju Galaksije.

(**C**) V kroglasti kopici so stare zvezde.

(**D**) Nekatere kroglaste zvezdne kopice je mogoče videti že z manjšim daljnogledom.

Nekatere fizikalne konstante, enačbe in drugi podatki

hitrost svetlobe v vakuumu	$c = 3 \cdot 10^8$ m/s
svetlobno leto	1 sv. l. $= 9,46 \cdot 10^{15}$ m
astronomska enota	1 a. e. $= 1,5 \cdot 10^{11}$ m
gravitacijska konstanta	$G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m^3/kg s^2
gravitacijski zakon	$F_g = \dfrac{Gm_1m_2}{r^2}$

centripetalni pospešek	$a_c = \omega^2 r$
enačba tanke leče	$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
povečava daljnogleda	$P = \frac{f_{ob}}{f_{ok}}$

Sklop B

B1. Z vrtljivo zvezdno karto z natančnostjo 5 minut določi, kdaj v naših krajih vzide Sonce 1. januarja in kdaj se ta dan začne astronomska noč.

B2. V opazovališču na severni zemljepisni širini 60° je v vodoravna tla poševno zapičena palica dolžine 1 meter, tako da je usmerjena natanko proti severnemu nebesnemu polu. Kolikšna je dolžina sence, ki jo na tla meče palica ob lokalnem poldnevu na dan spomladanskega enakonočja (ekvinokcij)?

B3. Koliko časa mine med spodnjo in zgornjo konjunkcijo Venere (gledano z Zemlje)? Predpostavi, da se Zemlja in Venera gibljeta enakomerno in po krožnih orbitah. Obhodni čas Zemlje okoli Sonca je 365,25 dneva, Venere pa 224,70 dneva.

B4. Neko vesoljsko telo najprej miruje na zelo veliki oddaljenosti od Sonca (v neskončnosti), nato pa začne padati naravnost proti Soncu. Kolikšno hitrost ima, ko je od Sonca enako oddaljeno kot Zemlja? Pomagaj si s podatki za orbito Zemlje: oddaljenost od Sonca je $1,5 \cdot 10^8$ km, obhodna doba je 365,25 dneva.

B5. Opazovalec opazuje Venero s teleskopom, katerega objektiv ima goriščno razdaljo 1,5 metra. Ta najprej izmeri kotni premer Venerine ploskvice, ki znaša $26''$. Kolikšna mora biti goriščna razdalja okularja, da bo opazovalec s svojim teleskopom videl Venero tako veliko kot Luno s prostim očesom? Zorni kot Lunine ploskvice na nebu je $32'$.

30. mednarodno matematično tekmovanje mest – jesenski krog 2008/09

I. skupina (prvi del)

1. V desetih škatlicah so spravljene barvice tako, da so vse barvice v skupni škatlici različnih barv in nobeni dve škatlici ne vsebujeta enakega števila barvic. Dokaži, da lahko iz vsake škatlice izberemo po eno barvico tako, da je vseh deset izbranih barvic različne barve.

2. Danih je takih petdeset različnih naravnih števil, da jih petindvajset ne presega števila 50, ostalih petindvajset pa je večjih od 50 vendar ne presegajo števila 100. Določi vsoto danih naravnih števil, če veš, da je razlika poljubnih dveh števil različna od 50.

3. V krožnico polmera 2 je včrtan ostrokotni trikotnik $A_1A_2A_3$. Dokaži, da lahko na lokih A_1A_2, A_2A_3 in A_3A_1 zapored izberemo take točke B_1, B_2 in B_3, da je ploščina šestkotnika $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ številsko enaka obsegu trikotnika $A_1A_2A_3$.

4. Dana so taka tri različna naravna števila, da je eno aritmetična sredina preostalih dveh. Ali je lahko produkt takih treh števil enak n^{2008} za kako naravno število n?

5. Nekaj tekačev naenkrat štarta z začetka ravne proge in začne z različnimi enakomernimi hitrostmi teči po progi. Ko tekač pride na konec, se obrne in se začne z enako hitrostjo vračati na začetek proge, kjer se znova obrne in teče v drugo smer, itd. Vsi tekači se v nekem trenutku znajdejo na skupni točki proge. Dokaži, da se pri opisanem načinu teka srečanja tekačev na skupni točki proge pojavljajo znova in znova.

II. skupina (prvi del)

1. Na mizi je nekaj škatel s piškoti, ki jih Aljoša odpre in si zapiše število piškotov v vsaki od njih. Zatem Sergej iz vsake neprazne škatle vzame po en piškot in jih zloži na prvi pladenj. Nato Sergej iz vsake neprazne škatle znova vzame po en piškot in jih zloži na drugi pladenj. Sergej na opisani način polni nove pladnje, dokler ne izprazni vseh škatel. Tedaj si zabeleži števila piškotov na vseh pladnjih. Dokaži, da je število različnih števil med Aljoševimi števili enako številu različnih števil med Sergejevimi števili.

2. Za $n > 2$ rešite sistem enačb

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2 + \cdots + x_n} = \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3 + \cdots + x_n + x_1} = \cdots =$$

$$= \sqrt{x_n} + \sqrt{x_1 + \cdots + x_{n-1}}\,, \quad x_1 - x_2 = 1.$$

3. V krožnico polmera 2 je včrtan tridesetkotnik $A_1A_2 \ldots A_{30}$. Dokaži, da lahko na lokih $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{30}A_1$ zapored izberemo take točke $B_1, B_2, \ldots, B_{30}$, da je ploščina šestdesetkotnika $A_1B_1A_2B_2 \ldots A_{30}B_{30}$ številsko enaka obsegu tridesetkotnika $A_1A_2 \ldots A_{30}$.

4. Dano je aritmetično zaporedje različnih petih naravnih števil. Ali je lahko produkt takih petih števil enak n^{2008} za kako naravno število n?

5. Na karirastem listu so narisani pravokotniki, katerih stranice potekajo po črtah mreže. Vsak pravokotnik sestavlja liho mnogo polj mreže in nima nobenega skupnega polja s kakim drugim pravokotnikom. Dokaži, da lahko pravokotnike pobarvamo s štirimi barvami tako, da nobena dva pravokotnika enake barve nimata skupnih mejnih točk.

I. skupina (drugi del)

1. Na šahovnici velikosti 100×100 stoji 100 kraljic, ki se med seboj ne napadajo. Dokaži, da vsak vogal šahovnice, ki je velik 50×50, vsebuje vsaj eno kraljico.

2. Mase štirih danih kamnov so cela števila, če jih izrazimo v gramih. Na razpolago imamo tehtnico, ki pokaže razliko mas, ki ju položimo na desno oz. levo stran tehtnice. Ali lahko določimo mase vseh štirih kamnov v samo štirih tehtanjih, če vemo, da se pri tehtanju največ enkrat lahko pojavi napaka velikosti enega grama?

3. Sergej je narisal trikotnik ABC in njegovo težiščnico AD ter Alešu povedal dolžini težiščnice AD in stranice AC. Aleš je iz teh dveh podatkov ugotovil, da je kot $\angle CAB$ topi kot, kot $\angle DAB$ pa ostri kot. Določi razmerje $AD : AC$ in pri tako določenem razmerju dokaži Aleševo trditev.

4. Baron Münchhausen trdi, da ima zemljevid dežele Oz, na katerem je 5 mest, vsaki dve mesti pa povezuje cesta, ki ne poteka skozi nobeno od preostalih treh mest. Poleg tega nobena izmed cest na zemljevidu ne križa več kot ene druge ceste, če pa se cesti križata, se križata le enkrat. Ceste na zemljevidu so pobarvane rdeče in rumeno. Če neka cesta poteka naokrog nekega mesta, se barve cest, ki jih seka ta cesta, izmenjujejo. Ali tak zemljevid lahko obstaja?

5. Dana so pozitivna števila $a_1, \ldots, a_n$, za katera velja $a_1+a_2+\ldots+a_n \leq 1/2$. Dokaži, da tedaj velja $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) < 2$.

6. Dan je trikotnik ABC, ki ni enakokrak. Nad stranicama AB in AC sta konstruirana enakokraka trikotnika AFB in AEC z vrhoma F in E. Trikotnika AFB in AEC ležita izven trikotnika ABC, vsi štirje koti ob njunih osnovnicah pa so enaki θ. Skozi točko A poteka premica, ki je pravokotna na daljico EF in seka simetralo stranice BC v točki A'. Določi kot $\angle BA'C$.

7. Dano je neskončno zaporedje $a_1, a_2, a_3, \ldots$, z začetnim členom $a_1 = 1$. Za $n > 1$ dobimo člen a_n po naslednjem pravilu: Naj bo $l(n)$ največji lihi delitelj števila n. Če da število $l(n)$ pri deljenju s 4 ostanek 1, definiramo $a_n = a_{n-1}+1$, če pa da pri deljenju s 4 ostanek 3, definiramo $a_n = a_{n-1}-1$. Dokaži, da se v danem zaporedju

   a) število 1 pojavi neskončnokrat.

   b) vsako naravno število pojavi neskončnokrat.

   (Nekaj začetnih členov danega zaporedja: $1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, \ldots$)

1. Kvadratno ploščo razdelimo s sedmimi navpičnimi in sedmimi vodoravnimi črtami na 64 pravokotnikov, ki jih pobarvamo kot šahovnico s črno in belo barvo. Razdalje med črtami so lahko različne, zato so lahko tudi dobljena pravokotna polje različnih velikosti. Opazimo, da razmerje med ploščino poljubnega belega polja in poljubnega črnega polja ne presega števila 2. Določi največje možno razmerje med skupno ploščino belih polj in skupno ploščino črnih polj.

2. Prostor razdelimo na skladne kocke tako, da se nobeni dve ne sekata v svoji notranjosti. Ali je nujno, da ima vsaka kocka skupno stransko ploskev s kako drugo?

3. Na mizi je $N > 2$ vrečk in v vsaki je en lešnik. Dva igralca začneta igro, pri kateri izmenično igrata na naslednji način. Igralec, ki je na vrsti, si izbere taki dve vrečki, da je število lešnikov v prvi tuje proti številu lešnikov v drugi in nato pretrese vsebino ene vrečke v drugo ter prazno vrečko odstrani z mize. Zmaga tisti igralec, ki naredi zadnjo potezo. Za vsako število N določi tistega igralca, ki zmaga ne glede na poteze svojega nasprotnika.

4. Dan je trapez $ABCD$, ki ni enakokrak. Krožnica, očrtana trikotniku BCD, seka premico AC poleg točke C še v točki A_1. Analogno točki A_1 definiramo še točke B_1, C_1 in D_1. Dokaži, da je tudi $A_1B_1C_1D_1$ trapez.

5. Dano je neskončno zaporedje $a_1, a_2, a_3, \ldots$, z začetnim členom $a_1 = 1$. Za $n > 1$ dobimo člen a_n po naslednjem pravilu: Naj bo $l(n)$ največji lihi delitelj števila n. Če da število $l(n)$ pri deljenju s 4 ostanek 1, definiramo $a_n = a_{n-1} + 1$, če pa da pri deljenju s 4 ostanek 3, definiramo $a_n = a_{n-1} - 1$. Dokaži, da se v danem zaporedju vsako naravno število pojavi neskončnokrat.

   (Nekaj začetnih členov danega zaporedja: $1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, \ldots$)

6. Za polinom $p(x)$ z realnimi koeficienti obstaja neskončno takih parov celih števil (m, n), da je $p(m) + p(n) = 0$. Dokaži, da obstaja taka točka T v ravnini, da je graf $y = p(x)$ simetričen preko točke T.

7. Preizkus znanja sestavlja 30 vprašanj z možnima odgovoroma 'pravilno' ali 'nepravilno'. Viktor, ki se loti reševanja tega preizkusa, na začetku ne pozna nobenega odgovora. Nato začne ponavljati reševanje preizkusa. Vsakič odgovori na vsa vprašanja in izve število pravilnih odgovorov. Ali lahko Viktor v zaporednih poskusih reševanja preizkusa znanja odgovore izbira

tako, da bo zagotovo pravilno odgovoril na vsa vprašanja v

a) tridesetem poskusu?

b) petindvajsetem poskusu?

Rešitve nalog s 1. tekmovanja iz znanja astronomije, osnovna šola (7., 8. in 9. razred) – šolsko tekmovanje

naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
odgovor	C	A	B	C	A	B	C	D	A	A

Sklop A

A1 Zemlja se vrti od zahoda proti vzhodu.

A2 V naših krajih je Sonce najdlje nad obzorjem ob poletnem solsticiju.

A3 Najsvetlejša zvezda na nočnem nebu je Sirij.

A4 Severnica je v ozvezdju Mali medved.

A5 Reflektor je teleskop, ki ima za objektiv zrcalo.

A6 Na sliki je planet Saturn.

A7 Na sliki je galaksija.

A8 Med naštetimi planeti je najmanjši Merkur.

A9 Pravilno razporeditev prikazuje slika A, saj mora biti ob Luninem mrku Zemlja med Soncem in Luno.

A10 Med naštetimi ozvezdji je severnemu nebesnemu polu najbližje Kasiopeja.

Sklop B

B1 Pravilen odgovor je 21 ur in 20 minut. Ker je zahtevana natančnost ±5 minut, sta pravilna odgovora tudi 21 ur in 25 minut ter 21 ur in 15 minut.

B2 Pravilen odgovor je **ZENIT**.

B3 Laserski pulz potuje od teleskopa do Lune in nazaj, zato je razdalja med teleskopom in zrcali na Luni l enaka polovici poti pulza. Pulz potuje s svetlobno hitrostjo c in čas t ter naredi pot

$$2l = c \cdot t.$$

Iz tega sledi:

$$l = c \cdot \frac{t}{2} = 300\,000\ \mathrm{km/s}\ \cdot 1{,}25\ \mathrm{s} = 375\,000\ \mathrm{km}.$$

Razdalja med teleskopom in zrcali na Luni je torej 375 000 km.

B4 Če privzamemo, da se Zemlja okoli Sonca giblje po krožnici s polmerom $r = 150\,000\,000$ km, potem je njena pot s v enem letu kar obseg kroga:

$s = 2\pi r = 942\,500\,000$ km $\approx 9{,}4 \cdot 10^8$ km.

Povprečno hitrost Zemlje $\bar{v}$ pri kroženju okoli Sonca dobimo, če izračunano pot s delimo s časom enega obhoda Zemlje t:

$t = 365{,}25$ dneva $= 31\,557\,600$ s.

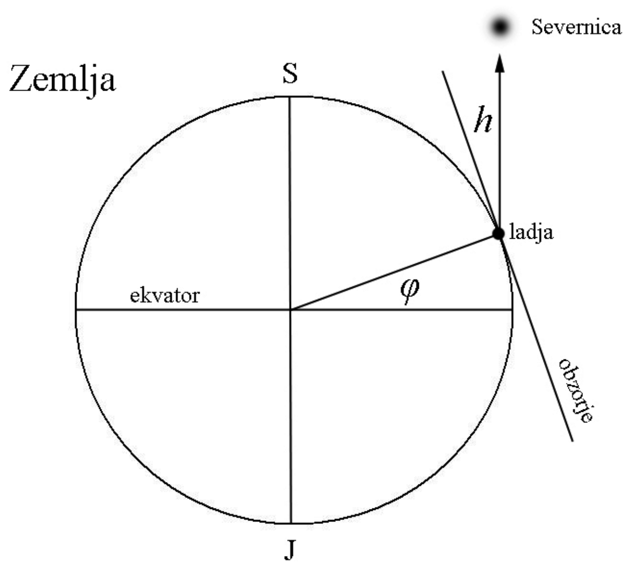
Dobimo:

$$\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{t} = \frac{942\,500\,000 \text{ km}}{31\,557\,600 \text{ s}} = 29{,}9 \text{ km/s}.$$

B5 Zemljepisna širina φ kakega kraja je po definiciji enaka višini nebesnega pola. Ker naloga predpostavlja, da je odmik Severnice od severnega nebesnega pola zanemarljivo majhen, je zemljepisna širina ladje enaka višini Severnice nad obzorjem, torej:

$\varphi = 20°$.

To izhaja tudi iz slike spodaj. Obzorje je tangentno na površje Zemlje in pravokotno na polmer Zemlje. Zemljepisna širina je enaka kotu φ med središčem Zemlje in izbrano točko na površju. Zemljina os leži v smeri sever-jug, v isti smeri pa je tudi zveznica ladja-Severnica. Zaradi tega je kot *h* med obzorjem in Severnico (t. i. višina nebesnega telesa) enak zemljepisni širini φ.



Rešitve nalog s 1. tekmovanja iz znanja astronomije, srednja šola (vsi letniki) – šolsko tekmovanje

naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6
odgovor	B	B	C	D	A	C

Sklop A

A1 Veliki voz je asterizem, kar pomeni, da ni pravo ozvezdje, temveč le del ozvezdja Veliki medved.

A2 Ob vsaki polni Luni ni Luninega mrka, ker je tir Lune okoli Zemlje nagnjen glede na ekliptiko, zato ob vsaki polni Luni ta ne pride v Zemljino senco.

A3 Na severnem polu bi v bližini zenita videli Severnico, ker se ta nahaja v bližini severnega nebesnega pola, nebesni pol pa je tam v zenitu.

A4 Naštete so tri velike Jupitrove lune, med katere ne sodi Titan, ki je največja Saturnova luna.

A5 Na sliki je planetarna meglica.

A6 Glavni pas asteroidov je med Marsovo in Jupitrovo orbito.

Sklop B

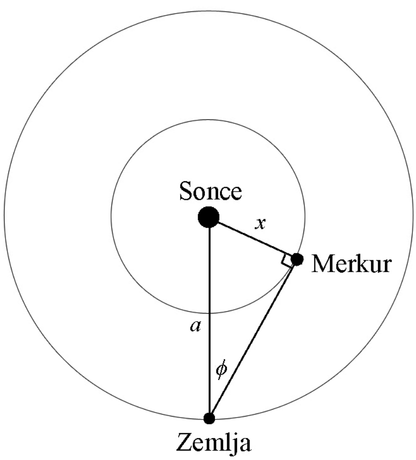
B1 Pravilen odgovor je 21 ur in 20 minut. Ker je zahtevana natančnost ±5 minut, sta pravilna odgovora tudi 21 ur in 25 minut ter 21 ur in 15 minut.

B2 Ko je Merkur v največji elongaciji, so Zemlja, Sonce in Merkur v ogliščih pravokotnega trikotnika, pri čemer sta pravokotni zveznici Sonce-Merkur in Zemlja-Merkur (glej sliko). Velja:

$\sin\phi = x/a$,

kjer je x razdalja med Soncem in Merkurjem, a pa oddaljenost Zemlje od Sonca.

$x = a\sin\phi = 1\ \text{a.e.} \cdot \sin 21° = 0{,}36\ \text{a.e.} = 53{,}8 \cdot 10^6\ \text{km}.$



B3 Tirno hitrost v vesoljskega telesa z zanemarljivo majhno maso m (planet), ki kroži okoli masivnega telesa z maso M (zvezda), izrazimo iz gravitacijskega zakona in centripetalne sile:

$$\frac{GmM}{r^2} = \frac{mv^2}{r},$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}},$$

kjer je G gravitacijska konstanta in r oddaljenost med telesi. V obeh primerih iz naloge je hitrost Zemlje v enaka, le da je v prvem primeru oddaljenost med Zemljo in Soncem r_z in masa zvezde M dejanska masa Sonca m_S. V drugem primeru pa je oddaljenost Zemlje $2r_Z$ in m_x iskana masa namišljenega Sonca. Zapišemo:

$$v = \sqrt{\frac{Gm_S}{r_Z}},$$

$$v = \sqrt{\frac{Gm_x}{2r_Z}}.$$

Enačbi izenačimo

$$\sqrt{\frac{Gm_S}{r_Z}} = \sqrt{\frac{Gm_x}{2r_Z}}$$

in dobimo $m_x = 2m_S$.

Masa namišljenega Sonca, okoli katerega Zemlja kroži z enako tirno hitrostjo, a na dvakrat večji oddaljenosti, je dvakrat večja kot masa pravega Sonca.

G4 Za Venerino atmosfero velja plinska enačba

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

kjer je p tlak, V prostornina, m masa, R splošna plinska enačba, T temperatura in M molska masa plina.

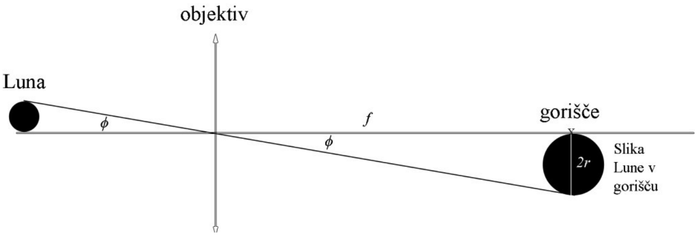
Gostoto ρ dobimo tako, da plinsko enačbo delimo z V, saj je $\rho = m/V$. Za gostoto dobimo:

$$\rho = \frac{pM}{RT}.$$

Količine moramo izraziti v osnovnih enotah, torej tlak v pascalih in temperaturo v kelvinih. Molekulska masa CO_2: M = 44 kg/kmol. Za gostoto Venerine atmosfere dobimo:

$$\rho = \frac{9{,}3 \cdot 10^6\ \mathrm{Pa} \cdot 44\ \mathrm{kg/kmol}}{8314\ \mathrm{J/kmol\ K} \cdot 735\ \mathrm{K}} = 67\ \mathrm{kg}/m^3.$$

G5 Narišemo skico objektiva daljnogleda. Luno narišemo na optični osi in potegnemo žarek od vrha Lune skozi središče objektiva. Slika Lune nastane v gorišču objektiva, ker je Luna v neskončnosti. Vidimo, da je zorni kot ϕ, pod katerim je vidna Luna na nebu, enak kotu med optično osjo in žarkom skozi središče objektiva.



Središče leče, gorišče in vrh slike Lune so oglišča pravokotnega trikotnika, za katerega velja:

$$\tan\phi = \frac{2r}{f},$$

kjer je $2r$ premer slike Lune, f pa goriščna razdalja objektiva. Za goriščno razdaljo dobimo:

$f = 2r/\tan\phi = 2{,}75$ m.

Rešitve nalog s 1. tekmovanja iz znanja astronomije, osnovna šola (7., 8. in 9. razred) – državno tekmovanje

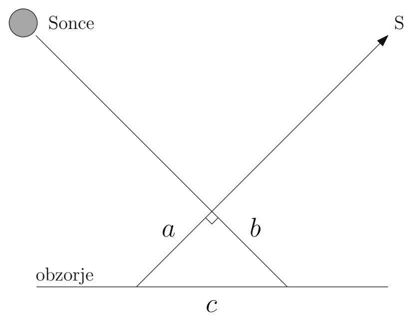
Sklop A

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	A	D	B	A	A	B	C	D

1. Zraven ne sodi Andromeda, edino ozvezdje med tremi zvezdami.
2. Na severnem polu vzide Sonce enkrat na leto – ob pomladanskem enakonočju.
3. Na ekvatorju je Severnica vidna na obzorju.
4. Venera se med naštetimi telesi giblje najhitreje, ker je Soncu najbližje – Keplerjev zakon.
5. Kuiperjev pas je roj manjših teles v Osončju, ki se začne za Neptunovo orbito.
6. Napačna izjava je, da ima samo Zemlja aktivne ognjenike. Ti so denimo aktivni na Jupitrovi luni Io.
7. Če je Venera vzhodno od Sonca, potem je vidna zvečer kot Večernica nad zahodnim obzorjem.
8. Med naštetimi zvezdami ima najvišjo efektivno temperaturo Sonce.
9. Naša Galaksija je spiralna s prečko.
10. Refraktor je teleskop, ki ima za objektiv lečo.

Sklop B

1. Naloga B1:
   - 1. decembra vzide Sonce ob $7:30 \pm 10$ minut.
   - Astronomska noč se na ta dan začne ob $18:10 \pm 10$ minut.
2. Naloga B2:
   - Mars ne more biti viden v ozvezdju Labod, ker se vedno nahaja v bližini ekliptike, ta pa ne poteka čez ozvezdje Labod.
3. Naloga B3:
   - Prokijon je 1. januarja na nebesnem poldnevniku ob $1:00 \pm 10$ minut.
4. Naloga B4:



   - Palica kaže natanko proti severu, zato je vzporedna z Zemljino vrtilno osjo. Kot med palico in vodoravnico $45°$. Ob enakonočju je Sonce na nebesnem ekvatorju, zato je opoldan kot med smerjo proti Soncu in palico pravi kot. Palica a, svetlobni žarek Sonca ob vrhu palice b in senca c zato tvorijo enakostranični in pravokotni trikotnik, v katerem je senca hipotenuza. Sledi, da je dolžina sence $c = \sqrt{2}\,a = 1,41$ m.
5. Naloga B5:
   - Popotnik hodi po treh velikih krogih s polmerom $r = 6400$ km. Pot s, ki jo opravi, je enaka $3 \cdot 1/4$ obsega Zemlje: $s = 3 \cdot 2\pi r/4 = 30160$ km.
6. Naloga B6:
   - Svetloba je od galaksije do nas potovala $t = 50$ milijonov let, v tem času pa se je od nas oddaljila $x = vt = 1,7 \cdot 10^{18}$ km $= 183000$ svetlobnih let. Trenutna oddaljenost galaksije s je torej $s = 5 \cdot 10^7$ sv.let $+ x = 5,0183 \cdot 10^7$ sv.let.

Rešitve nalog s 1. tekmovanja iz znanja astronomije, srednja šola (vsi letniki) — državno tekmovanje

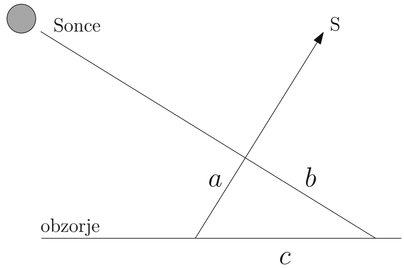
Sklop A

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	B	B	A	A	B	C	D	B	A

1. Zraven ne sodijo Plejade, ki so kopica in ne ozvezdje.
2. Med naštetimi telesi je največji težni pospešek na Zemlji.
3. Zvezdni dan je približno 4 minute krajši od srednjega Sončevega, zato je v enem letu 366 zvezdnih dni.
4. Zvezdam, ki v danem opazovališču nikoli ne zaidejo, pravimo cirkumpolarne.
5. Na ekvatorju je Severnica vidna na obzorju.
6. Če hočemo, da bo ura na nihalo kazala enako na Luni kot na Zemlji, moramo nihalo skrajšati, ker je na luni težni pospešek manjši kot na Zemlji. Nihajni čas je sorazmeren s $\sqrt{l/g}$.
7. Fotosfera je vidna plast Sončeve atmosfere.
8. Aktivnost Sonca merimo z Wolfovim številom.
9. Med naštetimi zvezdami ima najvišjo efektivno temperaturo Sonce.
10. Ne drži izjava, da kroglasto kopico sestavljajo zelo mlade zvezde.

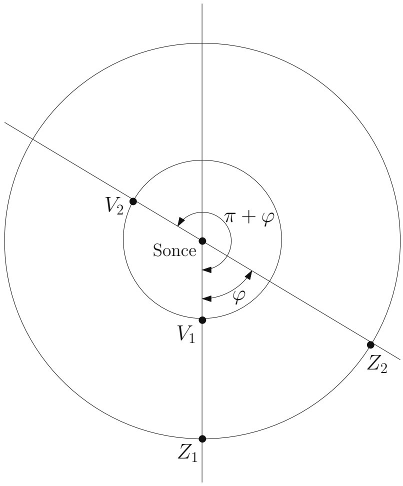
Sklop B

1. Naloga B1:
   - 1. januarja vzide Sonce ob $7:50 \pm 10$ minut.
   - Astronomska noč se na ta dan začne ob $18:15 \pm 10$ minut.
2. Naloga B2:



   - Palica kaže natanko proti severu, zato je vzporedna z Zemljino vrtilno osjo. Kot med palico in vodoravnico je $60°$. Ob enakonočju je Sonce na nebesnem ekvatorju, zato je opoldan kot med smerjo proti Soncu in palico pravi kot. Palica a, svetlobni žarek Sonca ob vrhu palice b in senca c zato tvorijo enakostranični in pravokotni trikotnik, v katerem je senca hipotenuza. Sledi, da je dolžina sence $c = a/\cos 60^\circ = 2\ \mathrm{m}$. . . (6 točk)

3. Naloga B3:



- Legi Venere ob spodnji (V_1) in zgornji (V_2) konjunkciji glede na Zemljo so označene na sliki. V času t med spodnjo in zgornjo konjunkcijo, se Venera premakne za kot $\varphi + \pi$, Zemlja pa za φ. Velja

$$\varphi = \omega_\mathrm{z} t \qquad \pi + \varphi = \omega_\mathrm{v} t$$

kjer je ω_z kotna hitrost Zemlje, ω_v pa kotna hitrost Venere. Ker smo predpostavili enakomerno kroženje, lahko izrazimo

$$\omega_\mathrm{z} = \frac{2\pi}{365,25\ \mathrm{dni}} \qquad \omega_\mathrm{v} = \frac{2\pi}{224,7\ \mathrm{dni}}$$

Dobimo

$$\pi + \omega_\mathrm{z} t = \omega_\mathrm{v} t$$
$$t = \frac{\pi}{\omega_\mathrm{v} - \omega_\mathrm{z}} \approx 292\ \mathrm{dni}$$

4. Naloga B4:

- Pri padanju telesa proti Soncu velja:

$$\Delta W_\mathrm{k} = \Delta W_\mathrm{pot}$$
$$\frac{mv^2}{2} = G\frac{m_\mathrm{s}\, m}{r}$$
$$v = \sqrt{\frac{2Gm_\mathrm{s}}{r}}$$

Ker nimamo podane mase Sonca m_s in konstante G, si pomagamo s podatki za Zemljo:

$$m_\mathrm{z}\, \omega_\mathrm{z}^2 r = \frac{Gm_\mathrm{s} m_\mathrm{z}}{r^2}$$

$$\omega_z = \frac{2\pi}{t_0} \qquad t_0 = 365,25 \text{ dni}$$

Sledi

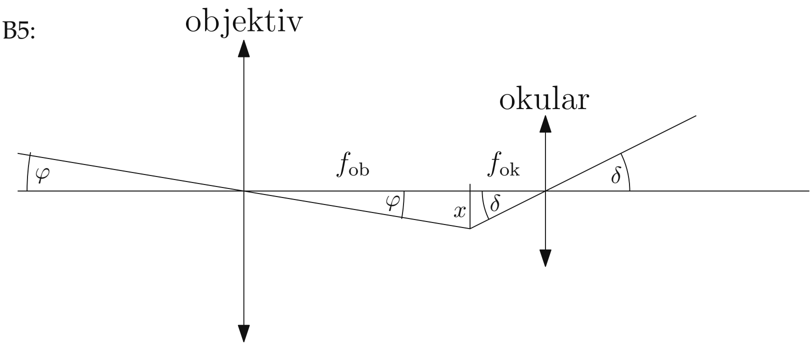
$$\frac{4\pi^2}{t_0^2} = \frac{Gm_s}{r^3}$$

$$2Gm_s = \frac{8\pi^2 r^3}{t_0^2}$$

in

$$v = \sqrt{\frac{8\pi^2 r^2}{t_0^2}} = \frac{r\pi\sqrt{8}}{t_0} = 42,2 \text{ km/s}$$

5. Naloga B5:



- Objektiv teleskopa ustvari sliko Venere v gorišču. Gorišče okularja sovpada z goriščem objektiva, zato velja (glej sliko):

$$x = f_{ob} \tan\varphi$$

$$x = f_{ok} \tan\delta$$

kjer je φ zorni kot Venere, δ pa zorni kot, pod katerim z okularjem vidimo sliko Venere. Ker zahtevamo, da je δ enak zornemu kotu Lune na nebu, sledi:

$$f_{ok} = f_{ob}\frac{\tan\varphi}{\tan\delta} = 0,0195 \text{ m} = 19,5 \text{ mm}$$

Rešitve nalog s 30. mednarodnega matematičnega tekmovanje mest – jesenski krog 2008/09

I. skupina (prvi del)

1. Razvrstimo škatlice z barvicami v vrsto tako, da se število barvic v škatlicah veča od leve proti desni. Tedaj je v prvi škatlici vsaj ena barvica, v drugi vsaj dve barvici in tako dalje do desete škatlice, ki vsebuje vsaj deset barvic. Prvo barvico izberimo iz prve škatlice. Tedaj v drugi škatlici najdemo barvico, ki je drugačne barve kot prva izbrana barvica, saj druga škatlica vsebuje barvice vsaj dveh različnih barv. Tretja škatlica vsebuje barvice vsaj treh različnih barv, zato lahko iz nje izberemo tretjo barvico, ki bo

različne barve od prvih dveh izbranih barvic. Tako nadaljujemo do desete škatlice in dobimo deset različnih barvic, kar je bilo potrebno dokazati.

2. Naj bodo $m_1, m_2, \ldots, m_{25} \leq 50$ in $50 < n_1, n_2, \ldots, n_{25} \leq 100$ dana naravna števila. Od vseh števil $n_1, n_2, \ldots, n_{25}$, ki so večja od 50 odštejmo 50. Ker se nobeni dve števili ne razlikujeta za 50, dobimo na ta način 25 števil, ki so vsa različna od preostalih števil $m_1, m_2, \ldots, m_{25}$, ki ne presegajo 50. Vsota S' števil $m_1, m_2, \ldots, m_{25}$ in $n_1 - 50, n_2 - 50, \ldots, n_{25} - 50$ je zato enaka vsoti števil $1, 2, \ldots, 50$, torej $S' = 51 \cdot 25$, od koder sledi

$$S = m_1 + m_2 + \cdots + m_{25} + n_1 + n_2 + \cdots + n_{25} = 51 \cdot 25 + 50 \cdot 25 = 2525.$$

3. Označimo z O središče krožnice, in rešimo splošnejšo nalogo z n-kotnikom $A_1A_2 \cdots A_n$. Točke $B_1, B_2, \ldots B_n$ naj bodo zapored razpolovišča lokov $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$.

   Tedaj je ploščina $2n$-kotnika $A_1B_1A_2B_2 \cdots A_nB_n$ enaka vsoti ploščin deltoidov $OA_1B_1A_2, OA_2B_2A_3, \ldots, OA_{n-1}B_{n-1}A_n, OA_nB_nA_1$. Ker sta diagonali deltoida pravokotni, je njegova ploščina enaka polovičnemu produktu dolžin diagonal. Od tod sledi, da je ploščina $2n$-kotnika $A_1B_1A_2B_2 \cdots A_nB_n$ enaka

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2}|OB_1||A_1A_2| + \frac{1}{2}|OB_2||A_2A_3| + \cdots + \frac{1}{2}|OB_n||A_nA_1| = \\ = |A_1A_2| + |A_2A_3| + \cdots + |A_nA_1|, \end{aligned}$$

   saj velja $|OB_1| = |OB_2| = \cdots = |OB_n| = 2$. S tem je dokaz končan.

4. Da, to je možno! Najprej izberimo taka tri naravna števila, da je eno aritmetična sredina drugih dveh, na primer števila $1, 2$ in 3. Njihov produkt je enak 6 in ni oblike m^{2008} za nobeno naravno število m. Pomnožimo sedaj izbrana tri naravna števila s 6^n. Tako dobimo števila $6^n, 2 \cdot 6^n$ in $3 \cdot 6^n$, ki prav tako ustrezajo pogoju naloge, njihov produkt pa je enak 6^{3n+1}. Ker je $2008 = 3 \cdot 669 + 1$, smo s tem utemeljili pritrdilni odgovor.

5. Predstavimo tekaško progo kot levo polovico krožnice, tekači pa namesto tega, da se na koncu proge obrnejo, nadaljujejo tek po desni polovici krožnice. Če s p označimo premico, ki ločuje desno in levo polovico krožnice, pogoj, da se tekača srečata, ustreza pogoju, da sta v nekem trenutku na skupni daljici, ki je pravokotna na premico p. Denimo sedaj, da se vsi tekači v trenutku $t > 0$ po štartu srečajo v skupni točki. Tedaj so od začetne točke na krožnici oddaljeni za x tako tisti, ki so v tem trenutku na levi polovici krožnice, kot tisti, ki so na desni polovici krožnice. Zato je v trenutku t vsak tekač na levi polovici pretekel nekaj krogov in razdaljo x, vsakemu

tekaču na desni polovici pa manjka razdalja x, da dopolni trenutni krog. Ker vsi tekači tečejo z enakomernini hitrostmi, bo v času $2t$ vsak tekač na levi polovici pretekel nekaj krogov in razdaljo $2x$, vsakemu tekaču na desni polovici pa bo do konca trenutnega kroga manjkala razdalja $2x$. Vidimo, da bodo tudi v trenutku $2t$ vsi tekači na neki daljici, pravokotni na premico p, torej v skupni točki tekaške proge. Enak premislek velja v časih $3t, 4t, \ldots$, torej se tekači na progi vedno znova srečujejo.

II. skupina (prvi del)

1. Razvrstimo škatle s piškoti v vrsto tako, da število piškotov v škatlah pada od leve proti desni. V kvadratni mreži ponazorimo števila piškotov v posamičnih škatlah s sosednjimi stolpci. Dobimo 'stopničast' lik L, v katerem je število kvadratkov i-tega stolpca enako številu piškotov v i-ti škatli. Zaporedni stolpci iste višine tvorijo neko 'stopnico'. Število različnih števil med Aljoševimi števili je tako enako številu stopnic dobljenega lika. Če iz vsake neprazne škatle vzamemo po en piškot, novi razporeditvi ustreza lik L', ki ga dobimo iz lika L tako, da mu odrežemo spodnjo vrstico. Ko bo Sergej polnil pladnje z največjim številom piškotov, vsakič prečrtamo po eno vrstico v liku L, dokler ne izgine najnižja stopnica. Ko Sergej napolni pladnje z naslednjim največjim številom piškotov v liku L 'izgine' naslednja stopnica in tako dalje. Od tod vidimo, da je tudi število različnih števil, ki jih zapiše Sergej enako številu stopnic lika L, s čimer je dokaz končan.

2. Kvadrirajmo $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2 + \cdots + x_n} = \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3 + \cdots + x_n + x_1}$, od dobljene enačbe odštejmo vsoto $x_1 + \cdots + x_n$ in znova kvadrirajmo. Dobimo $x_1(x_2 + \cdots + x_n) = x_2(x_3 + \cdots + x_n + x_1)$, od koder sledi $(x_1 - x_2)(x_3 + \cdots + x_n) = 0$. Ker je $x_1 - x_2 = 1$, dobimo $x_3 + \cdots + x_n = 0$ in zato $x_3 = \cdots = x_n = 0$, saj se števila $x_3, \ldots, x_n$ v danih enačbah pojavijo pod kvadratnim korenom, zato morajo biti nenegativna.

   Denimo sedaj, da je $x_2 \neq 0$ in zato tudi $x_2 - x_3 \neq 0$. Če iz enačb izberemo tisti dve, v katerih se pojavita $\sqrt{x_2}$ in $\sqrt{x_3}$, na enak način kot na začetku dobimo $x_1 = 0$ in od tod $x_2 = -1$, kar pomeni, da ne obstaja $\sqrt{x_2}$. Torej je $x_2 = 0$ in $x_1 = 1$.

3. Glej rešitev 3. naloge za prvo skupino.

4. Števila $1, 2, 3, 4$ in 5 tvorijo aritmetično zaporedje, njihov produkt pa je enak 120. Če pomnožimo vseh pet števil z neko potenco 120^n, znova dobimo aritmetično zaporedje števil $120^n, 120^n \cdot 2, 120^n \cdot 3, 120^n \cdot 4$ in $120^n \cdot 5$, katerih produkt je enak 120^{5n+1}. Če obstaja tako število n, da je $5n + 1$ deljivo

z 2008, je odgovor pritrdilen. Nastavimo enačbo $5n + 1 = 2008k$. Ker sta števili 5 in 2008 tuji, tak par naravnih števil obstaja. Najmanjši tak par je $k = 2$ in $n = 803$, zato je produkt števil $120^n, 120^n \cdot 2, 120^n \cdot 3, 120^n \cdot 4$ in $120^n \cdot 5$ enak $(120^2)^{2008}$.

5. Predpostavimo, da rišemo pravokotnike na neomejenem listu papirja. Razdelimo list na kvadrate velikosti 2×2 in v 4 polja vsakega takega kvadrata vpišimo števila $1, 2, 3$ in 4 zapored v smeri urinega kazalca, pri čemer število 1 vpišemo v zgornje levo polje. Ker so dolžine stranic vsakega narisanega pravokotnika liha števila, so vsa njegova vogalna polja označena enako. Številom $1, 2, 3$ in 4 priredimo štiri različne barve, nato pa vsak pravokotnik pobarvamo z barvo, ki jo določa oznaka v vseh njegovih vogalnih poljih. Ker vogalni polji dveh sosednjih pravokotnikov ne moreta imeti iste oznake, smo s tem pravokotnike pobarvali na zahtevani način.

I. skupina (drugi del)

5. Po neenakosti med geometrično in aritmetično sredino dobimo

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \leq$$

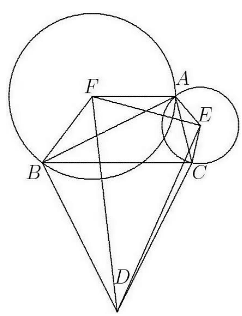
$$\leq \left(\frac{(1 + a_1) + (1 + a_2) + \cdots (1 + a_n)}{n} \right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n .$$

Iz binomskega izreka nato sledi

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^k n^k} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} < 2,$$

kar je bilo potrebno dokazati.

6. Naj bo D taka točka izven trikotnika ABC, da je $|DB| = |DC|$ in $\angle BDC = 2\theta$. Narišimo krožnici, ki potekata skozi točko A in imata središči E in F.



Tedaj sta potenci točke D glede na ti dve krožnici enaki $|DE|^2 - |CE|^2$ in $|DF|^2 - |BF|^2$. Dokažimo, da sta ti dve potenci enaki. Iz kosinusnega izreka dobimo

$$|DE|^2 - |CE|^2 = |DC|^2 - 2|DC||CE| \cos \angle DCE =$$
$$= |DC|^2 + 2|DC||CE| \sin \angle BCA,$$

saj je $\angle DCB + \angle ACE = (180° - 2\theta)/2 + \theta = 90°$ in zato $\angle DCE = 90° + \angle BCA$. Podobno dobimo še

$$|DF|^2 - |BF|^2 = |DF|^2 - 2|DB||BF| \cos \angle DBF =$$
$$= |DB|^2 + 2|DB||BF| \sin \angle ABC.$$

Ker sta ACE in ABF podobna trikotnika, velja $\frac{|CE|}{|BF|} = \frac{|AC|}{|AB|}$. Tedaj dobimo $|CE| \sin \angle BCA = |BF| \sin \angle ABC$, saj po sinusnem izreku velja $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\sin \angle BCA}{\sin \angle ABC}$. Ker je $|DC| = |DB|$, res velja $|DE|^2 - |CE|^2 = |DF|^2 - |BF|^2$, s čimer je trditev dokazana. Od tod sledi, da točka D leži na nosilki skupne tetive izbranih dveh krožnic, ki je zato pravokotna na zveznico središč EF. Torej je $A' = D$ in zato

$$\angle BA'C = 2\theta.$$

7. Zaporedje lahko analiziramo s pomočjo naslednje tabele.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
t	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	$\cdots$
$2t$	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	$\cdots$
2^2t	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	$\cdots$
2^3t	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
a_n	0	1	2	1	2	3	2	1	2	3	4	3	2	3	2	1	

V prvi vrstici tabele so vrednosti indeksa n, vrstica z oznako 't' predstavlja liha števila, vrstica z oznako '$2t$' dvakratnike lihih števil in tako dalje. Pri vsakem indeksu n lahko izračunamo a_n kot vsoto 'prispevkov' predhodnih indeksov. Za lažje računanje dodatno definirajmo $a_0 = 0$. Pri nekem n opazujemo najprej prispevke predhodnih lihih indeksov, ki jih prikazujemo v vrstici 't'. Liha števila so po modulu 4 zapored kongruentna številoma 1 in 3. Vrstica 't' tako pri $n = 1$ prispeva 1, isto prispeva pri $n = 2$, pri $n = 3$ pa prispeva -1, torej skupno 0, zato je naslednji element v tej vrsti enak 0. Tudi pri $n = 4$ je prispevek vstice 't' enak 0, nato pa se v tej vrstici ponavlja vzorec dveh enic in dveh ničel. Podobno ugotovimo, da se vrstica z oznako '$2t$' začne z dvema ničlama, ki jima sledijo štiri enice. Nato se ponavlja vzorec štirih ničel, ki jim sledijo štiri enice. V vrstici z oznako '$2^l t$' dobimo na začetku 2^l ničel nato pa se ponavlja vzorec 2^{l+1} enic, ki jim sledi 2^{l+1} ničel. Člen a_n tedaj izračunamo kot vsoto števil v n-tem stolpcu tabele.

a) Za $n = 2^k - 1$ tedaj dobimo 1 v vrstici z oznako 2^{k-1} v vseh ostalih vrsticah pa so ničle, torej se člen $a_n = 1$ pojavi neskončnokrat.

b) Za $n = 2+2^2+\cdots+2^{2k-1}$ v tabeli seštejemo ravno $2k$ enic, zato je $a_n = 2k$, torej je zaporedje a_n neomejeno. Ker se členi zaporedja spreminjajo le za 1 in se člen 1 ponovi neskončnokrat, se mora tudi vsako drugo naravno število pojaviti neskončnokrat.

II. skupina (drugi del)

5. Glej rešitev 7. naloge za prvo skupino.

6. Naj bo $p(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k$. Lahko predpostavimo, da je $a_0 = 1$, saj množenje s konstanto ohrani točko simetrije grafa. Denimo, da sta m in n enakega predznaka, na primer oba pozitivna. Obstaja neko število α, za katero velja, da je $p(x) > 0$, kakor hitro je $x > \alpha$. Če želimo, da velja $p(n) + p(m) = 0$, mora biti bodisi $p(m) \leq 0$, bodisi $p(n) \leq 0$. Predpostavimo, da velja $p(m) \leq 0$. Tedaj je $m \leq \alpha$, zato imamo na voljo le končno mnogo različnih vrednosti za m. Za vsako vrednost m obstaja končno mnogo različnih takih vrednosti za n, da je $p(n) = -p(m)$, kar pomeni, da imamo le končno mnogo parov (m, n) s pozitivnima komponentama. Torej imata m in n v neskončno mnogo parih različna predznaka. Če je stopnja k sodo število, obstaja tako število α, da je $p(x) > 0$ za $|x| \geq \alpha$. Kot prej dobimo od tod protislovje, zato je k liho število.

   V primeru, da je k liho število, velja $m^k + n^k = (m + n)Q_1(m, n)$, kjer je $Q_1(m, n) = m^{k-1} - m^{k-2}n + \cdots - mn^{k-2} + n^{k-1}$. Zapišimo $p(m) + p(n) = (m + n)Q_1(m, n) + Q_2(m, n)$, kjer je stopnja polinoma Q_2 kvečjemu $k - 1$. Za $mn < 0$ velja $Q_1(m, n) \geq m^{k-1} + n^{k-1}$, zato iz $0 = p(m) + p(n) = (m + n)Q_1(m, n) + Q_2(m, n)$ sledi da je vrednost $|m + n| = |Q_2(m, n)/Q_1(m, n)|$ omejena. Če je $mn \geq 0$, pa morata biti mejni vrednosti $|m|$ in $|n|$. Sledi, da ima lahko izraz $m+n$ kvečjemu končno mnogo vrednosti, kar pomeni, da se neka vrednost c pojavi za neskončno mnogo različnih parov m, n. Polinom $r(x) = p(x)+p(c-x)$ ima tako neskončno mnogo ničel, zato je ničeln. Sledi $p(x) = p(c-x)$, kar pomeni, da je graf polinoma p simetričen glede na točko $(\frac{c}{2}, 0)$.

7. a) Glej rešitev točke b).

   b) Označimo s črko P odgovor 'pravilno' in s črko N odgovor 'nepravilno'. Denimo, da v prvem poskusu Viktor na vsa vprašanja odgovori s 'pravilno', tj. z zaporedjem 'PPPP...' in doseže a pravilnih odgovorov. V drugem poskusu odgovori z zaporedjem 'NNPP...' in doseže bodisi a, bodisi $a \pm 2$ pravilnih odgovorov.

1. Če v drugem poskusu doseže $a \pm 2$ pravilnih odgovorov, Viktor spozna odgovora na prvi dve vprašanji. V tretjem poskusu odgovori z zaporedjem 'PPNNPP...'.

Če tokrat doseže $a \pm 2$ pravilnih odgovorov, Viktor spozna odgovora še na vprašanji 3 in 4, če pa doseže a pravilnih odgovorov, to pomeni, da ima eno od vprašanj 3 in 4 odgovor P, drugo pa odgovor N. Viktor zato v četrtem poskusu odgovori z zaporedjem 'PPNPP...'. Tedaj lahko doseže $a \pm 1$ pravilnih odgovorov, hkrati pa spozna pravilna odgovora na vprašanji 3 in 4.

Ugotovili smo, da Viktor poleg prvega poskusa potrebuje še največ tri dodatne poskuse, da spozna odgovore na prva štiri vprašanja.

2. Če v drugem poskusu doseže a pravilnih odgovorov, Viktor v tretjem poskusu odgovori z zaporedjem 'PNNNPP...', v četrtem poskusu pa z zaporedjem 'NPNPP...'. V tretjem poskusu tako doseže bodisi $a \pm 1$, bodisi $a \pm 3$ pravilnih odgovorov, v četrtem poskusu pa doseže bodisi a, bodisi $a \pm 2$ pravilnih odgovorov. Tabela prikazuje, kako lahko od tod spozna odgovore na vprašanja $1, 2, 3$ in 4. V prvih dveh stolpcih tabele sta števili pravilnih odgovorov v tretjem in četrtem poskusu, v zadnjih štirih stolpcih tabele pa so pravilni odgovori na vprašanja $1, 2, 3$ in 4.

3. poskus	4. poskus	1	2	3	4
$a-3$	a	N	P	P	P
	$a-2$	N	P	N	P
$a-1$	a	N	P	P	N
	$a+2$	P	N	P	P
	$a-2$	P	N	P	N
$a+1$	a	P	N	N	P
	$a+2$	N	P	N	N
$a+3$	a	P	N	N	N

Tudi v drugem primeru smo se prepričali, da Viktor poleg prvega poskusa potrebuje še največ tri dodatne poskuse, da spozna odgovore na prva štiri vprašanja.

Viktor nato ponovi enak postopek za vsako izmed naslednjih skupin štirih vprašanj in porabi še dodatnih 18 poskusov. Po skupno največ 22 poskusih tako ugotovi odgovore na vsa vprašanja razen morda zadnjih dveh. V naslednjem poskusu Viktor ugotovi odgovor na predzadnje vprašanje, tako da odgovori z zaporedjem 'PP...PNP', hkrati pa spozna tudi odgovor na zadnje vprašanje, saj pozna skupno število odgovorov 'pravilno'. Tako Viktor najkasneje v 24-tem poskusu pravilno odgovori na vseh 30 vprašanj.

Gregor Cigler