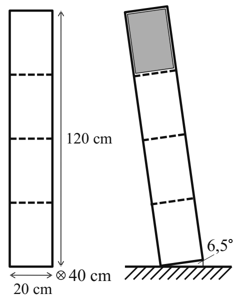
Tekmovanja

Naloge z regijskega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2008/09

Skupina I

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Omara brez sprednje in zadnje stene je z vodoravnimi policami po višini enakomerno predeljena na štiri predele. Omaro nagnemo za kot 6,5° in na vrhnjo polico začnemo pokonci nalagati enake knjige, visoke 30 cm, široke 20 cm in debele 3,0 cm. Platnice so vzporedne s stranskima stenama omare in se natanko prilegajo predelu omare, kot je prikazano na osenčenem delu slike.
   Koliko knjig smemo naložiti na polico, da se omara ne prevrne, če je masa posamezne knjige:

   a) 2,6 kg?

   b) 2,3 kg?

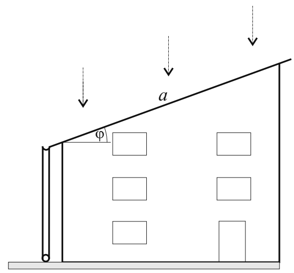
   Dimenzije omare so $(20 \times 120 \times 40)$ cm^3, masa omare s policami je 20 kg. Lepenje med posamezno knjigo in polico je dovolj veliko, da knjiga s police ne zdrsne.

2. Oče in sin se odločita, da se bosta pomerila v hitrostnem drsanju. Oče tehta 65 kg, sin 40 kg, vsak pa ima v roki še štafetno palico z maso 1 kg. Tekmovati nameravata na progi dolžine 60 m. Drsati začneta hkrati brez začetne hitrosti, najprej enakomerno pospešujeta (vsak s svojim pospeškom), dokler ne dosežeta vsak svoje končne hitrosti, nato pa drsata s takšnima hitrostma do ciljne črte. Oče pospešuje s pospeškom 0,5 m/s^2, njegova končna hitrost je 5 m/s. Sin pospešuje s pospeškom 0,8 m/s^2, njegova končna hitrost pa je 4 m/s.

   a) Kdo je zmagovalec in koliko prej je na cilju kot poraženec?

   b) Poraženec izzove zmagovalca še enkrat. Zmagovalec drsa enako kot v prvem dvoboju, poraženec pa v nekem trenutku, ko že drsa enakomerno, odvrže štafetno palico v nasprotni smeri drsanja s hitrostjo 4 m/s glede na led in z novo hitrostjo enakomerno drsa do cilja. V kateri razdalji od cilja je odvrgel palico, če sta prispela na cilj istočasno?

3. Ob močnem nalivu pade v eni uri 60 mm dežja na kvadratni meter površine vodoravnih tal. Dež pada navpično na enokapno streho večstanovanjske stavbe, se zliva v žleb, nato pa po cevi pada neposredno na turbino, ki je nameščena pri tleh in poganja generator. Izgube pri pretakanju vode in pri izmenjavi dela med vodo, turbino in generatorjem zanemarimo. Privzamemo, da je hitrost vodnih kapljic, takoj ko padejo na streho, enaka 0. Žleb je na višini 8 m od tal, streha ima stranici $a = 12$ m in $b = 15$ m; stranica a je tista, ki je na sliki narisana nagnjeno. Gostota vode je $1\,\mathrm{kg/dm^3}$.



   a) S kolikšno močjo generator oddaja električno energijo porabniku v primeru, ko je naklon strehe zelo majhen (ko je streha praktično vodoravna)?

   b) Kolikšna pa je moč generatorja v primeru, da je streha nagnjena pod kotom $\varphi = 30°$?

   c) V Sloveniji pade povprečno 700 mm/m^2 padavin na leto. Koliko kilovatnih ur električne energije bi oddal generator v enem letu v primeru b)?

Skupina II

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Mobilni telefon ima baterijo z napetostjo 3,7 V, ki ima napolnjena 1200 mAh naboja. Na zaslonu telefona je linearni indikator napolnjenosti baterije, ki ob napolnjeni bateriji kaže 7 črtic (ko kaže eno črtico, je v bateriji med 0 in 1/7 največjega naboja). Ko indikator ravno pade s 4 na 3 črtice, mobilni telefon priključimo na polnilec baterije.

   a) Po kolikšnem času bo baterija mobilnega telefona polna?

   b) Kolikšen bo ta čas, če med polnjenjem na mobilnem telefonu gledamo film?

   c) Kolikšen pa bo ta čas, če med polnjenjem na mobilnem telefonu gledamo film, obenem pa imamo vklopljen sprejemnik za brezžično spletno povezavo?

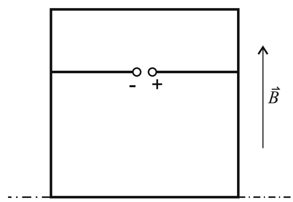
   Med gledanjem filma mobilni telefon troši moč 1,5 W, sprejemnik za brezžično spletno povezavo pa troši moč 1,9 W. Polnilec baterije je izvir, ki daje konstantni tok 890 mA.

2. Gozdarji so si visoko v gorah, kjer ni vodovoda in elektrike, pripravili preprost sistem za ogrevanje vode za tuširanje po napornem delu v gozdu. Sistem je sestavljen iz dveh rezervoarjev in mešalnega ventila. V enem rezervoarju je hladna voda s temperaturo 5 °C, v drugem s prostornino 80 litrov pa segreta voda s temperaturo 90 °C. Rezervoarja sta povezana s cevmi v mešalno pipo, od koder priteka mešanica mrzle in tople vode, s katero se gozdarji prhajo. Temperatura vode, primerna za prhanje, je 45 °C.

   Koliko gozdarjev se lahko oprha, če en gozdar povprečno porabi 50 litrov vode?

   Temperatura vode v rezervoarjih se ne spreminja.

3. Iz kovinske žice s prečnim presekom 1 mm^2 naredimo kvadraten okvir s stranico $a = 10$ cm, na katerega privarimo prečno žico, na oddaljenosti $2a/3$ od spodnje stranice (glej sliko). Specifični upor kovine je 10 Ωmm^2/m. V prečno žico vežemo izvir z napetostjo $U = 1$ V. Okvir postavimo v homogeno magnetno polje z gostoto $B = 1$ T, tako da vektor $\vec{B}$ leži v ravnini okvira; njegovo smer kaže slika.



   a) Kolikšna je vsota magnetnih sil, ki delujejo na okvir?

   b) Kolikšen je navor teh sil glede na os v spodnji stranici?

   c) Ali lahko dosežemo, da je navor magnetnih sil glede na os v spodnji stranici enak nič, tako da spremenimo presek žice v zgornji veji (zgornji stranici in zgornji tretjini leve in desne stranice)? Za koliko moramo presek spremeniti?

   Priključka na prečni žici sta zelo malo razmaknjena, tako da lahko predpostaviš, da je dolžina žice enaka kar a.

Skupina III

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Z digitalnim fotoaparatom slikamo kolesarja, ki se pelje mimo nas na razdalji 10 m pravokotno na zveznico med njim in fotoaparatom. Hitrost kolesarja je 30 km/h.

   a) Kako dolgo sled pusti kolesar na senzorju, če je čas osvetlitve, v katerem fotoaparat zajema sliko, 0,01 s, goriščna razdalja objektiva fotoaparata pa je 5 cm?

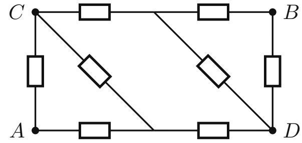
   b) Kolikšna je dolžina sledi v številu slikovnih točk na senzorju? Senzor fotoaparata ima 8 milijonov slikovnih točk, dimenzije senzorja pa so 22 mm v širino in 15 mm v višino. Vsaka slikovna točka ima obliko kvadrata.

2. Iz upornikov z uporom 100 Ω sestavimo vezje na sliki. Najprej med točki A in B priključimo baterijo z napetostjo 9 V tako, da je na priključku A pozitivni pol baterije, na priključku B pa negativni pol.

   a) Kolikšen tok teče skozi baterijo?

   b) Med točki C in D dodamo enako baterijo tako, da je na priključku C pozitivni pol baterije, na priključku D pa negativni pol. Kolikšen tok teče skozi posamezno baterijo?

   c) Kolikšno moč troši celotno vezje v primeru b)?



3. Igrača avtomobilček tehta brez koles 100 g. Na ogrodju so nameščena še štiri diskasta kolesa iz železa s širino 3 mm in polmerom 10 mm. Mehanizem v igrački je tak, da so kolesa povezana s polžasto vzmetjo s sučnim koeficientom $D = 9{,}7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Nm}$. Ko potisnemo avtomobilček nazaj za 5 cm, se vzmet zasuka za enak kót kot kolesa; pri tem opravljeno delo se naloži v energijo polžaste vzmeti.

   a) S kolikšno največjo silo moramo zadrževati voziček?

   b) Avtomobilček spustimo. Kolikšno največjo hitrost doseže?

   Predpostavi, da polžasta vzmet odda vso svojo energijo in ni izgub. Med kolesi in tlemi ni spodrsavanja. Gostota železa je $7800\,\mathrm{kg/m^3}$.

   Pojasnilo: Sučni koeficient D ima v zvezi med navorom in zasukom polžaste vzmeti enako vlogo kot prožnostni koeficient k v zvezi med silo in raztezkom pri vijačni vzmeti.

Ciril Dominko

---

53. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije — državno tekmovanje

1. letnik

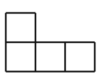
1. Poišči vsa realna števila x, y in z, ki rešijo sistem enačb

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0, \\ xy - z^2 &= 0, \\ y^2 + 5z + 6 &= 0. \end{aligned}$$

2. Poišči najmanjše naravno število n, deljivo z 20, za katerega je n^2 popoln kub, n^3 pa popoln kvadrat.

3. Naj bosta E in F taki točki na stranicah AB in AD konveksnega štirikotnika $ABCD$, da je $EF \parallel BD$. Daljica CE seka diagonalo BD v točki G, daljica CF pa seka diagonalo BD v točki H. Dokaži: če je $AGCH$ paralelogram, je tudi $ABCD$ paralelogram.

4. V vsako polje kvadratne tabele vpišemo naravno število. Tabela je *zanimiva*, če je vsota vseh števil v tabeli liha in vsota števil v vsakem liku oblike



(lik lahko zrcalimo ali zasukamo)

liha.

(a) Ali obstaja *zanimiva* tabela razsežnosti 3×3?

(b) Ali obstaja *zanimiva* tabela razsežnosti 5×5?

(c) Ali obstaja *zanimiva* tabela razsežnosti 4×4?

2. letnik

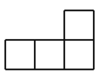
1. Poišči vsa soda naravna števila n, za katera velja

$$-53 < \frac{2009}{53-n} < 53-n.$$

2. Poišči vsa praštevila p, za katera je $p^2 + 7^3$ popoln kub.

3. Dan je ostrokotni trikotnik ABC, v katerem je $|AB| > |BC| > |AC|$. Naj bo D od C različna točka na daljici BC, da je $|AC| = |AD|$. Označimo s H višinsko točko trikotnika ABC, z A_1 in B_1 pa nožišči višin iz točk A in B. Premici A_1B_1 in DH se sekata v točki E. Dokaži, da so točke B, D, B_1 in E konciklične.

4. Tabela velikosti 3×3 je razdeljena na 9 kvadratkov. Določi največje število barv, s katerimi lahko pobarvamo kvadratke tabele, da bodo vsaki štirje kvadratki, ki tvorijo lik oblike

 (lik lahko zrcalimo ali zasukamo),

pobarvani s kvečjemu tremi različnimi barvami.

3. letnik

1. Naj bo p praštevilo, a, b in c pa taka cela števila, deljiva s p, da ima polinom

$$q(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

vsaj dve različni celi ničli. Dokaži, da p^2 deli b in p^3 deli c.

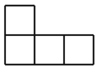
2. Dokaži neenakost

$$\frac{9}{4} < \log_2 \pi + \log_4 \pi < \frac{5}{2}.$$

3. Dan je ostrokotni trikotnik ABC, v katerem je $|AB| > |BC| > |AC|$. Naj bo D od C različna točka na daljici BC, da je $|AC| = |AD|$. Označimo s H

višinsko točko trikotnika ABC, z A_1 in B_1 pa nožišči višin iz točk A in B. Premica DH seka premico AC v točki E, premico A_1B_1 pa v točki F. Naj bo G presečišče premic AF in BH. Dokaži, da sta si trikotnika HBD in HGE podobna.

4. Tabela velikosti 5×7 ima eno polje rdeče, ostala polja pa bela. Na to tabelo postavljamo ploščice oblike



(ploščico lahko zrcalimo ali zasukamo),

tako da cele ležijo na tabeli. Pri tem se ploščice na rdečem polju lahko prekrivajo, na belih pa ne. Določi vse možne položaje rdečega polja, pri katerih lahko tabelo v celoti prekrijemo.

4. letnik

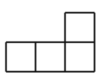
1. Dokaži enakost

$$1005^{\ln 121} = 11^{\ln(1+3+5+\ldots+2009)}.$$

2. Poišči vsa naravna števila n, za katera obstaja praštevilo p, da je število p^2+7^n popoln kvadrat.

3. Dan je ostrokotni trikotnik ABC, v katerem je $|AB| > |AC|$. Naj bo D od C različna točka na daljici BC, da je $|AC| = |AD|$. Označimo s H višinsko točko trikotnika ABC, z A_1 in B_1 pa nožišči višin iz točk A in B. Premica DH seka premico AC v točki E, premico A_1B_1 pa v točki F. Naj bo G presečišče premic AF in BH. Dokaži, da se premice EG, CH in AD sekajo v eni točki.

4. Tabela velikosti 8×8 je razdeljena na 64 kvadratkov. Določi najmanjše število barv, s katerimi moramo pobarvati kvadratke tabele, da bodo vsaki štirje kvadratki, ki tvorijo lik oblike



(lik lahko zrcalimo ali zasukamo),

pobarvani z različnimi barvami.

Naloge z državnega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2008/09

Skupina I

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Na dnu morja je potopljena ladja z maso ena tona. Na površje bi jo lahko dvignili tako, da bi jo napolnili z žogicami za namizni tenis. Polmer žogice je 20 mm, masa pa 2,7 g. Kolikšno prostornino znotraj ladje moramo zapolniti z žogicami, če zlagamo žogice v najgostejši sklad, kjer zavzamejo $\frac{\pi}{\sqrt{18}} = 74\%$ prostornine, ostalo pa je voda? Gostota vode je $1\,\mathrm{kg/dm^3}$.

2. Po deževju se pešec sprehaja po pločniku ob cesti, na kateri je majhna luža. Ko je vzporedno z lužo, pripelje po cesti osebni avto. Izpod koles pljuskne voda na pločnik. Pešec se pljusku ne more umakniti, zato se ustavi, pravočasno navpično skoči in se na ta način izogne pljusku. Pešec ima takoj po odskoku iztegnjene noge.

   Voda pljuskne izpod koles avtomobila s hitrostjo 4 m/s pod kotom 30° glede na tla in v prečni smeri glede na smer vožnje avtomobila. Razdalja med lužo in pešcem je 70 cm. Razdalja med sprednjimi in zadnjimi kolesi je 4 m, avto vozi s hitrostjo 10 m/s.

   a) Najmanj kako visoko mora skočiti pešec, da ga ne zmoči pljusk izpod prednjega kolesa?

   b) Najmanj kako visoko pa mora skočiti pešec, da se izogne prvemu in drugemu pljusku?

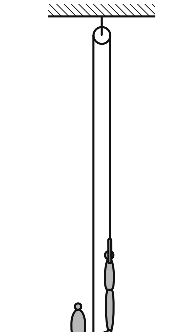
3. Pri preskusu trkov zaletijo avtomobil pri hitrosti 60 km/h z enakim pritrjenim avtomobilom tako, da po trku obmirujeta. Kolikšna naj bo *relativna* hitrost avtomobilov, da dobimo enak učinek (enako deformacijsko energijo), v primeru:

   a) ko mirujoči avtomobil ni pritrjen;

   b) ko se avtomobila gibljeta v isti smeri in ima avtomobil, ki vozi za drugim, dvakrat večjo hitrost od drugega.

   V vseh treh primerih je trk centralen in avtomobila ostaneta po trku sprijeta (se ne odbijeta).

4. Tarzan si je za dostop do svoje drevesne hiške domislil dvigalo. Na vrh drevesa je obesil lahek škripec in prek njega napeljal lahko neraztegljivo vrv. Na enem krajišču je pritrdil ploščad z maso 60 kg, drugo krajišče pa je prosto, tako da si z njim lahko pomaga pri vlečenju dvigala navzgor (glej sliko). Vrv je dovolj dolga, da sega do ploščadi na obeh krajiščih, ploščad pa je nad tlemi. Na ploščadi sedi opica z maso 40 kg. Tarzanova masa je 80 kg.



   Tarzan se odloči, da bo splezal po prostem krajišču vrvi navzgor. Opica ga posnema in začne istočasno plezati po drugem krajišču vrvi s pospeškom 1 m/s^2 glede na dvigalo. Kolikšna je po 2 s razlika višin med opico in Tarzanom, če Tarzan pleza navzgor s pospeškom 0,5 m/s^2 za opazovalca na tleh?

Skupina II

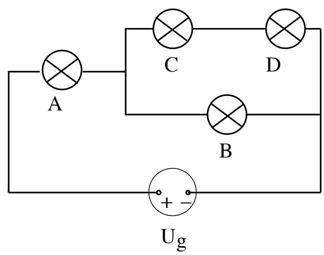
Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Štiri žarnice priključimo na napetost 9 V, kot kaže slika. Če žarnico A priključimo na napetost 6 V, sveti z močjo 6 W, vsaka od žarnic B, C in D, priključena na napetost 6 V, pa z močjo 4 W. Privzamemo, da je upor žarnice neodvisen od toka, ki teče skoznjo.

   a) Katera žarnica sveti najmočneje?

   b) Žarnico D odvijemo iz njenega ležišča. Za koliko se spremeni moč žarnice A?

   c) Bo v primeru b) še vedno najbolj svetila ista žarnica kot pri a)?



2. Stanovanjski „trojček“ je sestavljen iz treh pritličnih stanovanj v obliki kvadra z višino 6 m, širino 6 m in dolžino (globino) 9 m. Krajnji stanovanji ogrevamo tako, da je temperatura v levem 24 °C in v desnem 20 °C. Zunanja temperatura je 0 °C.

   a) S kolikšno močjo moramo segrevati srednje stanovanje, da je v njem temperatura 22 °C?

   b) Lastnik srednjega stanovanja se odloči, da stanovanja ne bo več ogreval. Kolišna je temperatura v tem primeru, če ostaneta temperaturi v drugih dveh stanovanjih nespremenjeni?

   Debelina betonskih sten med stanovanji je 20 cm, debelina betonskih zunanjih sten 30 cm, toplotna prevodnost betona pa 0,6 W/mK. Toplotni tok skozi streho in tla je zanemarljiv. Toplotni tok, ki teče skozi okna in vrata, je enak toplotnemu toku, ki bi tekel skozi enako velik izsek betonske stene. (Lahko torej računamo, kot da je hiša brez oken in vrat.)

3. V verigi otokov so štirje sosednji majhni otočki, na katerih prebiva po en prebivalec, ki ima kovinsko kroglo na dolgi neprevodni palici. Na prvem otočku ima prebivalec kroglo s polmerom 1 m, nabito z nabojem +1 mAs. Na vsakem naslednjem zaporednem otočku ima prebivalec nenabito kroglo, ki pa ima za 20 % večji polmer kot krogla na predhodnem otočku.

   a) Koliko naboja bo na krogli na zadnjem otočku, če ga prebivalci prenesejo s prvega otočka na ta način, da prebivalca sosednjih otočkov stakneta krogli?

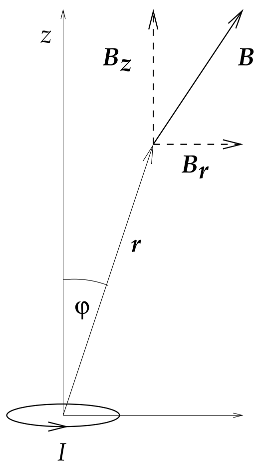
   b) V kolikšnem času se napetost na krogli na zadnjem otočku zmanjša za 1000 V, če prebivalec poveže kroglo z zemljo preko upornika za 1 MΩ?

   Pojasnilo: Napetost krogle z radijem r ter nabojem e proti neskončnosti je $U = e/4\pi\varepsilon_0 r$. Influenčna konstanta je $\varepsilon_0 = 8{,}9 \cdot 10^{-12}$ As/Vm.

4. Magnetno polje zanke, po kateri teče tok I, je osno simetrično in je odvisno od koordinate z in razdalje do osi. Pri dovolj dovolj velikih razdaljah od središča zanke r ga lahko zapišemo s komponentama (glej sliko)

$$B_z = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi}\left(\frac{3\cos^2\varphi - 1}{r^3}\right), \qquad B_r = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi}\left(\frac{3\cos\varphi\sin\varphi}{r^3}\right),$$

pri čemer je B_z komponenta v smeri osi z in B_r komponenta v radialni smeri; φ je kot med osjo z in vektorjem $\vec{r}$. Tu je $p_m = IS$ magnetni moment zanke in S ploščina zanke; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am.



Enako zanko, po kateri teče tok v isti smeri kot v prvotni zanki, postavimo tako, da je njeno središče na osi z in sta središči zank na oddaljenosti l.

a) Določi smer in velikost sile na drugo zanko, če je radij zanke $r_0 = 10$ mm, $l = 10$ cm, $I = 10$ A.

b) Kako je sila odvisna od razdalje l ob predpostavki $r_0 \ll l$? (Za majhne kote je $\cos\varphi \approx 1$ in $\sin\varphi \approx \tan\varphi$.)

Skupina III

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Dva enako težka drsalca se približujeta drug drugemu po vzporednih premicah s hitrostma v_1 in v_2. Razdaljo med premicama je d. Ko sta drsalca na najmanjši razdalji drug od drugega, se primeta za roki in začneta vrteti okrog skupnega težišča. Med vrtenjem se razdalja med njima ne spreminja. V kateri smeri (glede na prvotno smer) potujeta in kolikšni sta njuni hitrosti potem, ko se spustita, če se spustita potem, ko naredita

   a) en cel obrat (360°)? b) pol obrata (180°)? c) četrt obrata (90°)?

2. Na podstrešju smo našli starinsko stensko uro. V njej je kot nihalo uporabljena lahka, točno 1 m dolga palica. Palica je vrtljivo obešena na zgornjem krajišču, na spodnjem

krajišču palice pa je kilogramska utež. Žal pa ura ni dovolj natančna, saj vsak dan zaostane za 6 min. Uro popravimo tako, da na palico pritrdimo točkasto telo z maso 50 g. Kako daleč od osi moramo pritrditi to telo, da bo ura natančna?

3. Dve podmornici se pod vodo gibljeta po isti premici premo enakomerno. Prva podmornica se giblje s hitrostjo 8,0 m/s glede na vodo. Posadka prve želi določiti hitrost druge, zato istočasno pošlje dva zvočna signala s frekvencama $\nu_1 = 1000$ Hz in $\nu_2 = 1001$ Hz. Oba signala se od drugega plovila odbijeta in posadka na prvem to zazna kot utripanje. Čas utripa je 977 ms. S kolikšno hitrostjo glede na vodo in v kakšni smeri (proti ali stran od prve podmornice) se giblje druga podmornica? Hitrost zvoka v vodi je 1500 m/s.

4. V magnetnem polju se nabiti delci odklanjajo zaradi magnetne sile. V nalogi nas zanima gibanje protona v magnetnem polju za nekaj različnih primerov. V vseh primerih ima magnetno polje smer navpično navzgor. Naboj protona je $1,6022 \cdot 10^{-19}$ As, masa protona je $1,6726 \cdot 10^{-27}$ kg.

   a) Izračunaj polmer in obhodni čas kroženja protona, ki prileti v vodoravni ravnini s hitrostjo 300 km/s v homogeno magnetno polje z gostoto $B_z = B_0 = 10$ mT, ki je usmerjeno navpično navzgor.

   b) V tem delu opazujemo gibanje istega protona v nekoliko drugačnem magnetnem polju. Prostor je z navpično ravnino yz razdeljen na dva polprostora. Navpično magnetno polje v polprostoru, ki vsebuje pozitivno os x, je $B_z = B_0 + \Delta B$, v polprostoru, ki vsebuje negativno os x, pa $B_z = B_0 - \Delta B$, kjer je ΔB veliko manjši od B_0. Končne rezultate izračunaj za $\Delta B = 0,01$ mT.

      Ko je proton v ravnini yz, ima hitrost 300 km/s v smeri osi x. Ugotovi, v katero smer in za koliko se premakne proton v enem obhodu.

   c) Protoni, ki priletijo s Sonca, se v magnetnem polju Zemlje gibljejo podobno, kot proton v *b*) delu te naloge. Razlika je predvsem v tem, da se magnetno polje Zemlje spreminja zvezno in ne skokoma, kot smo zapisali v delu *b*) naloge. Tir protona v nehomogenem magnetnem polju je približno krožnica, katere središče pa ne miruje, temveč se premika.

      Pri enaki postavitvi in hitrosti protona kot v *b*) delu naloge sedaj predpostavi, da se magnetno polje vzdolž osi x spreminja kot $B_z = B_0 + ax$, kjer je konstanta a dovolj majhna, da je največja sprememba magnetnega polja $\Delta B_{\max} = ax_{\max}$ veliko manjša od B_0. Končne rezultate izračunaj za $a = 1 \cdot 10^{-5}$ T/m.

      Na podlagi rezultata pri *b*) ugotovi, v kateri smeri se giblje in oceni povprečno hitrost protona v tej smeri.

Ciril Dominko

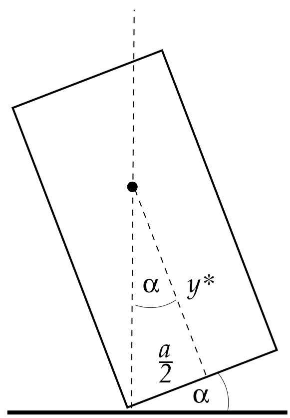
Rešitve nalog z regijskega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2008/09

Skupina I

1. *Podatki:* $a = 20$ cm, $b = 40$ cm, $h = 120$ cm, $d = 3$ cm, $m_o = 20$ kg, $m_1 = 2{,}6$ kg, $m_1' = 2{,}3$ kg, $\alpha = 6{,}5°$.

   a) Z y^* označimo razdaljo do težišča omare in knjig, merjeno od sredine spodnje stranice. Kot je razvidno iz slike, se omara ravno še ne prevrne, če velja

$$\tan\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{y^*}\,, \qquad y^* = \frac{a}{2\tan\alpha}\,,$$



   Za težišče velja

$$y^* = \frac{m_o\,\frac{1}{2}h + m_k\,\frac{7}{8}\,h}{m_o + m_k}\,,$$

   pri čemer smo z m_k označili skupno maso knjig na zgornji polici. Dobimo:

$$m_k = \frac{m_o\left(\frac{1}{2}\,a - \frac{1}{2}\,h\tan\alpha\right)}{\frac{7}{8}\,h\tan\alpha - \frac{1}{2}\,a} = 32{,}2\ \text{kg}\,.$$

   Kritična masa knjig ustreza $m_k/m_1 = 12{,}4$, torej 12 knjigam. Vseh 12 knjig lahko zložimo na zgornjo polico, saj je njihova skupna širina $d' = Nd = 36$ cm manjša od širine police. Omara se prevrne pri 13 knjigi.

   b) V tem primeru dobimo $m_k/m_1' = 14{,}01$, vendar je njihova skupna širina večja od širine omare. Na zgornjo polico smemo položiti maksimalno število 13 knjig, ki ravno še gredo na zgornjo polico.

2. *Podatki:* $m_1 = 65$ kg, $m_2 = 40$ kg, $a_1 = 0{,}5$ m/s^2, $a_2 = 0{,}8$ m/s^2, $v_1 = 5$ m/s, $v_1 = 4$ m/s, $m_p = 1$ kg, $v_p = 4$ m/s, $s_0 = 60$ m.

   a) Oče za pospeševanje porabi $t_1 = v_1/a_1 = 10$ s in v tem času opravi pot $s_1 = v_1^2/2a_1 = a_1 t_1^2/2 = 25$ m. Za preostanek poti porabi $t_1' = (s_0 - s_1)/v_1 = 7$ s. Na cilj pride v času $t_1 + t_1' = 17$ s. Za sina dobimo $t_2 = 5$ s, $s_2 = 10$ m in $t_2' = 12{,}5$ s, kar pomeni, da pride na cilj v času 17,5 s. Zmaga oče za 0,5 s.

b) Ko sin odvrže palico, se ohrani vsota njegove in paličine gibalne količine:

$$(m_2 + m_p)v_2 = m_2 v_2' - m_p v_p \,,$$

od koder dobimo za hitrost sina po metu palice

$$v_2' = \frac{(m_2 + m_p)v_2 + m_p v_p}{m_2} = 4{,}2 \text{ m/s} \,.$$

Da sin ujame očeta, mora za zadnji del poti $s_0 - s_2$ porabiti $t_0 = 12$ s. Če s t označimo čas, ko drsa s povečano hitrostjo v_2', porabi za prvi del poti, ko drsa še s hitrostjo v_2, čas $t_0 - t$. Velja

$$v_2(t_0 - t) + v_2' t = s_0 - s_2 \,, \qquad t = \frac{s_0 - s_2 - v_2 t_0}{v_2' - v_2} = 10 \text{ s} \,.$$

V tem času naredi pot $\Delta s = v_2' t = 42$ m. Palico mora odvreči 42 m pred ciljem.

3. *Podatki:* $v = 60$ mm/h, $h = 8$ m, $a = 12$ m, $b = 15$ m, $\rho = 1$ kg/dm^3, $\varphi = 30°$, $v_p = 700$ mm/leto.

a) Potencialna energija dežja se spremeni v mehansko in nato v električno delo. Z Δs označimo višino plasti dežja, ki pade na streho v času Δt. Moč lahko potem zapišemo kot

$$P = \frac{mgh}{\Delta t} = \frac{ab\Delta s\rho\, gh}{\Delta t} = abhv\rho g = 235 \text{ W} \,.$$

b) Če je streha nagnjena pod kotom φ, je presek, na katerega pada dež, enak ploščini tlorisa hiše: $S = a'b$, $a' = a\cos\varphi$. Dež se na strehi nabira na različnih višinah; pri zapisu potencialne energije vzamemo višino *težišča*, $h^* = h + \frac{1}{2}a\sin\varphi$. Za moč sedaj velja:

$$P = \frac{mgh^*}{\Delta t} = \frac{ab\cos\varphi\, \Delta s\, \rho g(h + \frac{1}{2}\, a\, \sin\varphi)}{\Delta t} = ab\,\frac{\sqrt{3}}{2}\, v\rho\, g(h + \tfrac{1}{4}\, a) = 280 \text{ W} \,.$$

c) V tem primeru vzamemo $\Delta s = 700$ mm in

$$A = mgh^* = ab\frac{\sqrt{3}}{2}\, \Delta s\, \rho g(h + \tfrac{1}{4}\, a) = 11{,}8 \text{ MJ} = 3{,}3 \text{ kWh} \,.$$

Skupina II

1. *Podatki:* $U = 3{,}7$ V, $e_0 = 1200$ mAh, $I_0 = 890$ mA, $P_f = 1{,}5$ W, $P_s = 1{,}9$ W.

a) Ko indikator preskoči s 4 na 3, je v bateriji še 3/7 začetnega naboja e_0. Da se baterija napolni, moramo torej dovesti $e = 4e_0/7$ naboja, za kar je potreben čas

$$t = \frac{e}{I_0} = \frac{4e_0}{7I_0} = 0{,}77 \text{ h} = 46 \text{ min} = 2770 \text{ s} \,.$$

b) Za gledanje filma je potreben tok $I_f = P_f/U = 405$ mA, torej ga za polnenje ostane $I = I_0 - I_f$ in čas polnenja se podaljša na

$$t = \frac{4e_0}{7(I_0 - I_f)} = 1{,}41 \text{ h} = 85 \text{ min} = 5090 \text{ s}\,.$$

c) V tem primeru bi sprejemnik potreboval $I_s = P_s/U = 513$ mA toka, skupaj s predvajalnikom za film pa $I = I_f + I_p = 918$ mA, kar je več od toka polnilca. Baterija se ne bi polnila.

2. *Podatki:* $V_1 = 80$ l, $T_1 = 90$ °C, $T_2 = 5$ °C, $T_z = 45$ °C, $V_0 = 50$ l.

   Pri mešanju se topla voda ohladi od T_1 do T_z in pri tem odda vso toploto hladni vodi, ki se segreje od T_2 do T_z:

$$\rho V_1 c_p (T_1 - T_z) = \rho V_2 c_p (T_z - T_2)\,, \qquad V_2 = \frac{V_1(T_1 - T_z)}{(T_z - T_2)} = 90 \text{ l}\,.$$

   Skupaj imajo gozdarji $V_1 + V_2 = 170$ l vode, kar zadošča za prhanje treh gozdarjev.

3. *Podatki:* $S = 1 \text{ mm}^2$, $\zeta = 10\ \Omega\text{mm}^2/\text{m}$, $U = 1$ V, $B = 1$ T, $a = 10$ cm, $a_2 = 2a/3$.

   a) Magnetna sila deluje le na stranici kvadrata, ki sta pravokotni na magnetno polje, in na prečno žico. Vsota tokov po zgornji in spodnji stranici je enaka toku v prečni žici. Ker pa tokova tečeta v nasprotno smer kot tok v prečni žici, je vsota sil enaka 0.

   b) K navoru sprispevata le sila na zgornjo stranico $F_1 = I_1 aB$ in sila na prečno žico $F_0 = I_0 aB$:

$$M = aF_1 - \frac{2a}{3}\,F_0 = a\,I_1 aB - \frac{2a}{3}\,I_0 aB = a^2 B\left(I_1 - \frac{2}{3}\,I_0\right).$$

   Za izračun tokov najprej izračunajmo upore posameznih vej. Upor žice z dolžino a je $R = \zeta a/S = 1\ \Omega$; dolžina zgornje veje je $5a/3$ in upor $R_1 = 5R/3$; upor spodnje veje je $R_2 = 7R/3$. Nadomestni upor vezja je

$$R_0 = R + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} = \frac{71}{36}\,R = 1{,}97\ \Omega\,.$$

   Tok skozi prečno žico je

$$I_0 = \frac{U}{R_0} = \frac{36}{71}\,\frac{U}{R} = 0{,}507 \text{ A}\,.$$

   Tok I_0 se razveji v tokova I_1 in I_2 v obratnem razmerju uporov obeh vej. Iz $I_0 = I_1 + I_2$ in $I_1/I_2 = R_2/R_1$ dobimo

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\,I_0 = \frac{21}{71}\,\frac{U}{R} = 0{,}296 \text{ A}\,.$$

   Končno iz prve enačbe sledi

$$M = -a^2\, B\, \frac{3}{71}\, \frac{U}{R} = -4{,}2 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{Nm}\,.$$

Okvir se zavrti proti nam (iz lista).

c) Do rešitve pridemo najhitreje z naslednjim razmislekom: da bo navor 0, mora po zgornji veji teči 2/3 toka (glej primer b)), ki teče po prečnem vodniku; torej mora teči po spodnji veji 1/3 tega toka. Upora zgornje in spodnje veje morata zato biti v razmerju 1:2, torej

$$\frac{R_1'}{R_2'} = \frac{\frac{5a\zeta}{3S'}}{\frac{7a\zeta}{3S}} = \frac{5S}{7S'} = \frac{1}{2}$$

in od tod

$$\frac{S'}{S} = \frac{10}{7} = 1{,}43\,.$$

Torej moramo v zgornji veji vzeti za 0,43 mm^2 (43 %) večji presek žice.

Skupina III

1. *Podatki:* $a = 10$ m, $v = 30$ km/h, $t = 0{,}01$ s, $f = 5$ cm, $N_0 = 8 \cdot 10^6$, $l = 22$ mm, $h = 15$ mm.

   a) Kolesar v tem času opravi pot $s = vt = 8{,}3$ cm. Slika kolesarja nastane na razdalji $b = af/(a - f) \approx f$. Velikost slike (dolžina sledi) je enaka

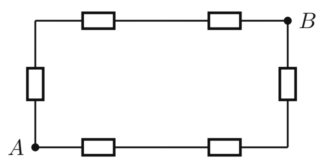
   $$s' = s\,\frac{b}{a} = 0{,}42\ \mathrm{mm}\,.$$

   b) Ploščina ene slikovne točke je $S = lh/N_0$, stranica pripadajočega kvadratka meri $d = \sqrt{S} = \sqrt{lh/N_0} = 6\ \mu$m. Dolžina sledi v številu slikovnih točk je

   $$N = \frac{s'}{d} = \frac{s'}{\sqrt{lh/N_0}} = 65\,.$$

2. *Podatki:* $R = 100\ \Omega$, $U = 9$ V.

   a) Priključni točki upornikov, ki sta na sliki pri besedilu nalog narisana poševno, sta na enakem potencialu, zato skozi ta dva upornika ne teče električni tok in ju lahko odstranimo iz vezja. Skupni upor vezja med točkama A in B je enak skupnemu uporu vzporednih vej treh zaporedno vezanih upornikov:



   $$R_S = \frac{1}{2}\,3R\,, \qquad I = \frac{2U}{3R} = 60\ \mathrm{mA}\,.$$

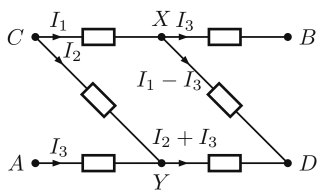
b) Ker je priključena napetost med A in B enaka priključeni napetosti med C in D, in ker je vezje simetrično na zamenjavo A in B ter C in D, sta točki A in C na enakem potencialu in prav tako točki B in D. (Če bi bila D na višjem potencialu kot B, bi morala biti zaradi simetrije C na nižjem potencialu kot A, a potem napetosti AB in CD ne bi bili enaki.) Upornika, vezana med A in C ter B in D, lahko odstranimo, saj skozi njiju tok ne teče. Tokove v vezju kaže skica:

Skozi prvo vezano baterijo AB teče tok I_3, skozi CD pa $I_1 + I_2$. Iz drugega Kirchhoffovega izreka za sklenjena kroga CYA in BXD dobimo enačbi

$$\begin{aligned} 0 &= RI_2 - RI_3\,, \\ 0 &= -RI_3 + R(I_1 - I_3)\,, \end{aligned}$$

saj med A in C ni napetosti in prav tako ne med B in D. Za sklenjena kroga CXD in CXB pa se izrek glasi

$$\begin{aligned} U &= 2RI_1 - RI_3\,, \\ U &= RI_1 + RI_3\,. \end{aligned}$$



Iz prvih dveh enačb izluščimo $I_1 = 2I_2 = 2I_3$, iz drugih dveh pa $I_3 = U/3R$. Tokova skozi bateriji sta

$$\begin{aligned} I_{AB} &= I_3 = \frac{U}{3R} = 30\ \mathrm{mA}\,, \\ I_{CD} &= I_1 + I_2 = 3I_3 = \frac{U}{R} = 90\ \mathrm{mA}\,. \end{aligned}$$

c) Ker je $I_2 + I_3 = I_1$ in $I_1 - I_3 = I_2$, lahko celotno moč zapišemo kot vsoto moči, ki se trošijo na posameznih upornikih:

$$P = 2I_3^2R + 2I_2^2R + 2I_1^2R\,.$$

Vstavimo $I_1 = 2I_3$ in $I_2 = I_3$ in upoštevamo $I_3 = U/3R$. Dobimo

$$P = 4UI_3 = \frac{4U^2}{3R} = 1{,}08\ \mathrm{W}\,.$$

3. *Podatki:* $m_v = 100$ g, $h = 3$ mm, $r = 10$ mm, $l = 5$ cm, $D = 9{,}7 \cdot 10^{-3}$ Nm, $\rho = 7800\ \mathrm{kg/m^3}$.

a) Kot, za katerega se zavrti polžasta vzmet, je enak kotu, za katerega se zavrtijo kolesa, ko avtomobilček napnemo. Ta kot lahko izrazimo kot kvocient dolžine loka (toliko kot smo ga premaknili nazaj) in radija kolesa: $\varphi = l/r$.

Ko voziček potisnemo nazaj, sta v ravnovesju sila roke in sila lepenja med kolesi in podlago. Navor sile lepenja na kolesa pa je uravnovešen z navorom polžaste vzmeti:

$$F_l r = D\varphi \,, \qquad F = F_l = \frac{D\varphi}{r} = \frac{Dl}{r^2} = 4{,}85 \text{ N} \,.$$

1

b) Najprej izračunamo maso posameznega kolesa. Z r označimo radij kolesa, s h pa njegovo debelino.

$$m_k = \rho V_k = \rho \pi r^2 h = 7{,}35 \text{ g} \,.$$

Vsa energija, naložena v polžasti vzmeti, se pretvori v kinetično. Energijo vzmeti zapišemo po analogiji z energijo vijačne vzmeti ($\frac{1}{2}kx^2$) kot $W_{\text{pr}} = \frac{1}{2}D\varphi^2$. Do enakega rezultata pridemo, če izračunamo delo sile, s katero voziček potiskamo nazaj, na poti l. Ker sila narašča linearno od vrednosti 0 do največje vrednosti, izračunane pri a), dobimo

$$A = \tfrac{1}{2}F\,l = \frac{Dl}{2r^2}\,l = \tfrac{1}{2}D\varphi^2 \,.$$

Kinetična energija je vsota translacijske kinetične energije vozička in rotacijske kinetične energije koles. Energijo vozička, ko doseže končno hitrost, zapišemo kot

$$\tfrac{1}{2}(m_v + 4m_k)v^2 + 4\,\tfrac{1}{2}\,J\omega^2 \,.$$

Vztrajnostni moment kolesa je $J = \frac{1}{2}m_k r^2$. Ker ni spodrsavanja med kolesi in podlago, mora biti obodna hitrost koles enaka hitrosti avtomobilčka, torej $\omega = v/r$.

Dobimo enačbo

$$\tfrac{1}{2}(m_v + 4m_k)v^2 + m_k v^2 = \tfrac{1}{2}\frac{Dl^2}{r^2}$$

z rešitvijo

$$v = \frac{l}{r}\sqrt{\frac{D}{m + 6m_k}} = 1{,}3 \text{ m/s} \,.$$

Bojan Golli

Rešitve nalog 53. matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije – državno tekmovanje

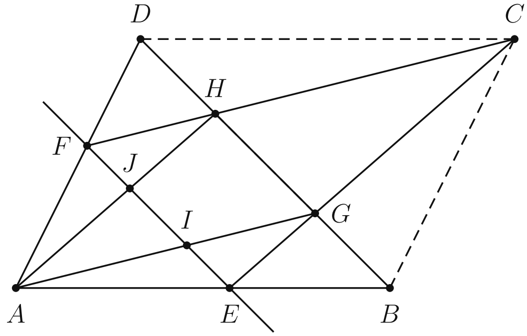
I/1. Iz prve enačbe izrazimo $x = -2z - y$ in vstavimo v drugo. Dobimo $(-2z-y)y - z^2 = 0$ oziroma $-(z+y)^2 = 0$. Od tod sledi $z = -y$. Vstavimo v tretjo enačbo. Dobimo $y^2 - 5y + 6 = 0$ oziroma $(y-2)(y-3) = 0$. Torej je $y = 2$ ali $y = 3$.

Sistem enačb rešijo $x = 2$, $y = 2$, $z = -2$ in $x = 3$, $y = 3$, $z = -3$.

I/2. Ker je število n deljivo z 20, je oblike $n = 2^{2+a} \cdot 5^{1+b} \cdot k$, kjer je k naravno število, ki ni deljivo niti z 2 niti s 5, a in b pa sta nenegativni celi števili. Če je $n^2 = 2^{2(2+a)} \cdot 5^{2(1+b)} \cdot k^2$ popoln kub, $3 \mid 2(2+a)$ in $3 \mid 2(1+b)$. Če je $n^3 = 2^{3(2+a)} \cdot 5^{3(1+b)} \cdot k^3$ popoln kvadrat, $2 \mid 3(2+a)$ in $2 \mid 3(1+b)$. Od tod sledi, da $6 \mid 2+a$ in $6 \mid 1+b$, zato je a najmanj 4 in b najmanj 5. Najmanjše možno naravno število k je $k = 1$. Pri teh vrednostih dobimo

$n = 2^6 \cdot 5^6 = 1\,000\,000$. Ker je n^2 popoln kub in n^3 popoln kvadrat, je to najmanjše tako naravno število.

I/3. Presečišče premic EF in AG označimo z I, presečišče premic EF in AH pa z J. Ker je $EF \parallel BD$ in $AH \parallel CE$, je štirikotnik $EGHJ$ paralelogram. Zaradi vzporednosti AG in CF pa je tudi $FIGH$ paralelogram. Zato je $|FH| = |IG|$ in $|HJ| = |GE|$ ter velja $\angle FHJ = \angle IGE$, kar pomeni, da sta trikotnika FHJ in IGE skladna. Tako je $|FJ| = |IE|$.



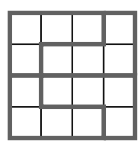
Ker je $EF \parallel BD$, imamo tri pare podobnih trikotnikov: EAF in BAD, EAI in BAG ter JAF in HAD. Iz prve sledi $\frac{|EA|}{|BA|} = \frac{|FA|}{|DA|}$, iz druge $\frac{|EA|}{|BA|} = \frac{|EI|}{|BG|}$ in iz tretje $\frac{|FA|}{|DA|} = \frac{|JF|}{|DH|}$. Dobimo $\frac{|EI|}{|BG|} = \frac{|JF|}{|DH|}$ in zaradi $|FJ| = |IE|$ sledi $|BG| = |DH|$.
Naj bo S razpolovišče daljice AC. Ker je $AGCH$ paralelogram, je S hkrati razpolovišče daljice GH. Zaradi $|BG| = |DH|$ pa sledi, da je S tudi razpolovišče daljice BD. Daljici AC in BD se razpolavljata, zato je $ABCD$ paralelogram.

2. način Kot v prvi rešitvi pokažemo, da je $|BG| = |DH|$. Ker je $AG \parallel FC$, velja $\angle AGB = \angle FHB = \angle CHD$, zato se trikotnika AGB in CHD ujemata v kotu in dolžinah priležnih stranic ($|BG| = |DH|$ in $|AG| = |CH|$), torej sta skladna in velja še $|AB| = |CD|$ in $\angle ABG = \angle CDH$. Torej sta AB in CD enako dolgi vzporedni stranici štirikotnika $ABCD$, kar pomeni, da je ta štirikotnik paralelogram.

I/4. Zanimivi tabeli razsežnosti 3×3 in 5×5 obstajata (glej prvo in drugo sliko). Z L smo označili liha števila in s S soda. Vseeno je katera liha števila in katera soda smo vpisali (lahko so vsa liha števila enaka 1, vsa soda pa 2). Vsota števil v prvi in drugi tabeli je liho število. V vsakem liku predpisane oblike so tri liha števila in eno sodo ali pa tri soda števila in eno liho, zato je vedno vsota števil v liku liho število.

S	S	S
L	L	L
S	S	S

L	L	L	L	L
S	S	S	S	S
L	L	L	L	L
S	S	S	S	S
L	L	L	L	L



Če je vsota števil v vsakem predpisanem liku liho število, tabelo razsežnosti 4×4 pokrijmo s štirimi liki kot na tretji sliki. Vsota števil v tabeli je tedaj sodo število, zato zanimiva tabela razsežnosti 4×4 ne obstaja.

II/1. Če je $n < 53$, je $\frac{2009}{53-n} > 0 > -53$. Neenakost $\frac{2009}{53-n} < 53 - n$ je enakovredna $2009 < (53-n)^2$ oziroma $\sqrt{2009} < 53 - n$. Ker je $\sqrt{2009} > 44$, sledi $53 - n > 44$ oziroma $9 > n$. Možne vrednosti n so 2, 4, 6 in 8, pri vseh pa je $53 - n \geq 45 > \sqrt{2009}$, zato je prvotna neenakost izpolnjena.

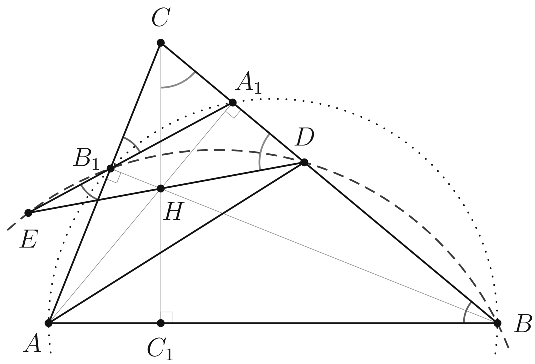
Naj bo še $n > 53$. Neenakost je enakovredna

$$-53(53-n) > 2009 > (53-n)^2.$$

Iz $-53^2 + 53n > 2009$ sledi $n > \frac{2009+53^2}{53} = 90 + \frac{48}{53}$. Po drugi strani je $45 > \sqrt{2009} > n - 53$, zato je $n < 98$. Dobimo še tri možnosti in sicer 92, 94 in 96. Pri vseh treh velja $n - 53 \leq 96 - 53 = 43 < \sqrt{2009}$ in s tem tudi prvotna neenakost.

II/2. Naj bo $p^2 + 7^3 = n^3$. Tedaj velja $p^2 = n^3 - 7^3 = (n-7)(n^2 + 7n + 49)$. Očitno je $n > 7$ in $n - 7 < n^2 + 7n + 49$, zato je možno le, da je $n - 7 = 1$ in $n^2 + 7n + 49 = p^2$. Tedaj je $n = 8$ in $p^2 = 169$, zato je $p = 13$. Edino tako praštevilo je $p = 13$.

II/3. Naj bo C_1 nožišče višine na stranico AB. Trikotnik CAD je zaradi $|AC| = |AD|$ enakokrak. Premica AA_1 je višina tudi v tem enakokrakem trikotniku, zato je $\angle CDH = \angle HCD = C_1CB = \frac{\pi}{2} - \angle CBA$. Od tod sledi



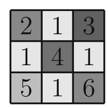
$$\begin{aligned} \angle EDB &= \pi - \angle CDE = \pi - \angle CDH \\ &= \frac{\pi}{2} + \angle CBA. \end{aligned}$$

V štirikotniku ABA_1B_1 velja $\angle AA_1B = \frac{\pi}{2} = \angle AB_1B$, zato je tetiven in je $\angle AB_1A_1 = \pi - \angle A_1BA = \pi - \angle CBA$. Dobimo $\angle A_1B_1C = \pi - \angle AB_1A_1 = \angle CBA$ in

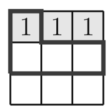
$$\angle EB_1B = \angle EB_1A + \angle AB_1B = \angle A_1B_1C + \frac{\pi}{2} = \angle CBA + \frac{\pi}{2}.$$

Pokazali smo $\angle EDB = \frac{\pi}{2} + \angle CBA = \angle EB_1B$, kar pomeni, da so točke B, D, B_1 in E konciklične.

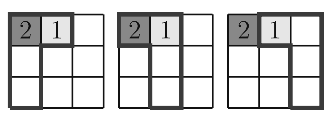
II/4. Tabelo lahko pobarvamo s šestimi različnimi barvami kot prikazuje slika. Med vsakimi štirimi kvadratki v obliki predpisanega lika sta dve polji barve 1, zato so kvadratki največ treh različnih barv.



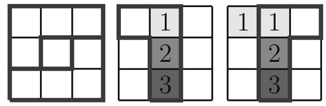
Pokažimo, da ustreznega barvanja z več kot 6 barvami ni. Ločimo dva primera. Denimo, da so vsi kvadratki v prvi vrstici enake barve. V poljih označenega lika so največ tri različne barve, torej barva 1 in še največ dve barvi. Spodnja tri polja so pobarvana z največ tremi različnimi barvami, zato je v taki tabeli največ 6 različnih barv.



Če v prvi vrstici niso vsi kvadratki enake barve, je eden izmed robnih kvadratkov drugačne barve kot srednji. Brez škode lahko privzamemo, da je to kvadratek na levi. Polja v označenem liku na prvi sliki so največ treh različnih barv, zato je na praznih dveh poljih kvečjemu ena nova barva. Enako velja za prazni polji na drugi sliki. V poljih zadnjega stolpca sta lahko še največ dve novi barvi, saj bi sicer lik na zadnji sliki vseboval polja štirih različnih barv. Tabela je tudi v tem primeru pobarvana z največ $2 + 1 + 1 + 2 = 6$ barvami.



2. način Kot v prvi rešitvi zapišemo primer s šestimi barvami. Denimo, da lahko tabelo na tak način pobarvamo z vsaj sedmimi barvami. V poljih obeh likov prve slike so največ po 3 različne barve, zato je v tabeli največ 7 različnih barv. Torej je točno 7 različnih barv, kar pomeni, da so v poljih vsakega ozačenega lika po točno 3 različne barve, ki so različne od barve sredinskega polja. Zato so vsa polja v srednjem stolpcu različnih barv in vse barve polj v zgornjem liku so različne barvam polj v preostanku tabele. Ker lik na drugi sliki vsebuje največ 3 različne barve, morata biti polji prve vrstice enake barve. Enako velja za lik na tretji sliki, zato so vsa polja prve vrstice enake barve, kar pomeni, da je različnih barv le 6. Protislovje.



III/1. Naj bosta y in z različni celi ničli polinoma q. Tedaj velja $y^3+ay^2+by+c=0$ in $z^3+az^2+bz+c=0$. Ker $p \mid a$, $p \mid b$ in $p \mid c$ ter je $y^3=-c-by-ay^2$, p deli y^3. Podobno sledi, da $p \mid z^3$. Ker je p praštevilo, je zato delitelj tako y kot z.

Če zgornji enačbi odštejemo, dobimo $y^3-z^3+a(y^2-z^2)+b(y-z)=0$ oziroma

$$(y-z)(y^2+yz+z^2+a(y+z)+b)=0.$$

Ker je $z \neq y$, tako velja $y^2+yz+z^2+a(y+z)+b=0$. Praštevilo p je delitelj y, z in a, zato p^2 deli $y^2+yz+z^2+a(y+z)=-b$, torej $p^2 \mid b$.

Izrazimo lahko $c=-y^3-ay^2-by$. Ker $p \mid y$, je p^2 delitelj y^2 in p^3 delitelj y^3. Zaradi deljivosti a z p in b z p^2 pa od tod sledi, da $p^3 \mid c$.

2. način Naj bodo x_1, x_2 in x_3 ničle polinoma q in privzemimo, da sta x_1 in x_2 celi števili. Tedaj je $q(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, od koder sledijo Viétove formule $a=-(x_1+x_2+x_3)$, $b=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$ in $c=-x_1x_2x_3$. Iz prve enakosti sledi, da je tudi x_3 celo število. Ker je p praštevilo in deli $x_1x_2x_3$, deli vsaj enega izmed števil x_1, x_2 in x_3. Predpostavimo lahko, da p deli x_1. Od tod sledi, da p deli $x_2x_3=b-x_1x_2-x_3x_1$. Spet lahko sklepamo, da p deli eno izmed števil x_2 oziroma x_3 ter predpostavimo, da deli x_2. Zaradi $x_3=a+x_1+x_2$ pa tedaj sledi, da $p \mid x_3$.

Vsako izmed števil x_1, x_2, x_3 je deljivo s p, zato je njihov produkt deljiv s p^3, torej $p^3 \mid -x_1x_2x_3=c$. Podobno je produkt po dveh izmed števil x_1, x_2, x_3 deljiv s p^2, zato $p^2 \mid x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b$.

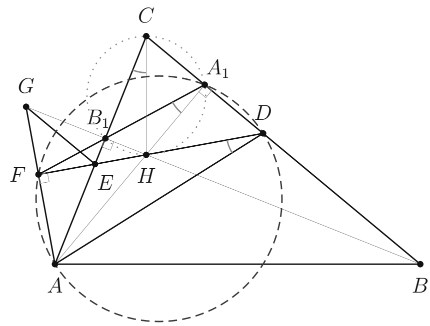
III/2. Ker velja

$$\log_2 \pi+\log_4 \pi=\frac{1}{\log_\pi 2}+\frac{1}{\log_\pi 4}=\frac{3}{2\cdot\log_\pi 2}=\frac{3}{2}\log_2 \pi,$$

je potrebno videti, da je $\frac{9}{2}<3\log_2\pi<5$.

Neenakost $\frac{9}{2}<3\log_2\pi$ je enakovredna $3<\log_2\pi^2$ oziroma $2^3<\pi^2$. Slednje drži, saj je $\pi^2>3^2=9>8=2^3$. Dokažimo še drugo neenakost, to je $3\log_2\pi<5$. Ta je enakovredna $\pi^3<2^5$. Spet lahko ocenimo $\pi^3<3.15^2\cdot 3.2<10\cdot 3.2=32=2^5$, kar je bilo treba dokazati.

III/3. Trikotnik CAD je zaradi $|AC|=|AD|$ enakokrak. Premica AA_1 je višina tudi v tem enakokrakem trikotniku, zato je $\angle HDA=\angle ACH$. V štirikotniku HA_1CB_1 velja $\angle CA_1H=\frac{\pi}{2}=\angle CB_1H$, zato je tetiven in je $\angle B_1A_1H = \angle B_1CH$. Dobili smo



$$
\begin{aligned}
\angle FA_1A &= \angle B_1A_1H = \angle B_1CH \\
&= \angle ACH = \angle HDA \\
&= \angle FDA,
\end{aligned}
$$

torej so tudi točke A, D, A_1 in F konciklične. To pomeni, da je $\angle AFD = \angle AA_1D = \frac{\pi}{2}$. Daljici AB_1 in HF sta višini v trikotniku AHG in se sekata v točki E. Zato je E višinska točka tega trikotnika in je EG pravokotna na AH. Ker pa je AH pravokotna na BC, od tod sledi, da je EG vzporedna z BC. Zato je $\angle EGH = \angle HBD$ in zaradi $\angle GHE = \angle BHD$ sledi, da sta si trikotnika HBD in HGE podobna.

III/4. Denimo, da smo v celoti uspeli prekriti tabelo. Vsaka ploščica, ki prekriva rdeče polje, prekriva vsaj še eno belo polje, ki leži levo, desno, nad ali pod rdečim poljem. V primeru, da bi rdeče polje prekrivalo 5 ali več ploščic, bi se vsaj dve izmed njih prekrivali na belem polju. Torej se na rdečem polju prekrivajo kvečjemu 4 ploščice. Vse ploščice skupaj morajo torej imeti med 35 in 38 polj. Ker pa ima vsaka ploščica 4 polja, morajo vse ploščice skupaj imeti 36 polj. Torej je vseh ploščic 9, na rdečem polju pa se prekrivata dve ploščici.

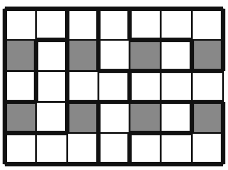


Tabela 1

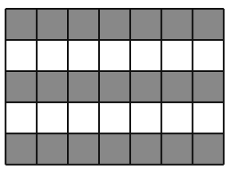


Tabela 2

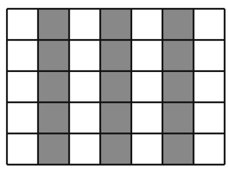
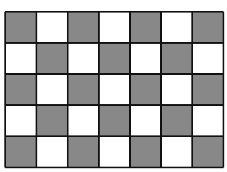


Tabela 3

Iz tabele 1 je zaradi simetrije razvidno, da rdeče polje lahko leži na enem izmed osenčenih polj. Ne glede na to, kako postavimo ploščico na tabelo 2 ali 3, bo vedno prekrivala liho osenčenih polj. Ker je ploščic liho, bodo skupaj prekrivale liho osenčenih polj. Osenčenih polj je na obeh tabelah 2 in 3 liho. Če bi torej rdeče polje ležalo na osenčenem polju tabele 2 ali 3, bi morale vse domine skupaj prekrivati sodo osenčenih polj. To pa ni mogoče. Torej so osenčena polja iz tabele 1 edini možni položaji rdečega polja.



IV/1. Ker je

$$
\begin{aligned}
&1 + 3 + 5 + \ldots + 2009 = \\
&\quad = (1 + 2009) + (3 + 2007) + \ldots + (1003 + 1007) + 1005 \\
&\quad = 502 \cdot 2010 + 1005 = 1005^2,
\end{aligned}
$$

je dovolj pokazati $1005^{\ln(121)} = 11^{\ln(1005^2)}$. Če dobljeno enakost logaritmiramo, dobimo

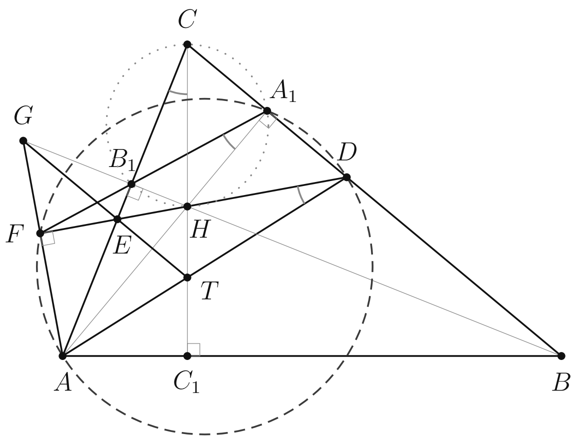
$$\ln(121)\ln(1005) = \ln(1005^2)\ln(11),$$

ki je enakovredna $\ln(11^2)\ln(1005) = 2\ln(1005)\ln(11)$. Slednja velja, saj je $\ln(11^2) = 2\ln(11)$, torej velja tudi prvotna enakost.

IV/2. Naj bo $p^2 + 7^n = m^2$. Potem velja $7^n = m^2 - p^2 = (m-p)(m+p)$. Ločimo dve možnosti. Če je $m - p = 1$ in $m + p = 7^n$, sledi $2p = 7^n - 1$. Denimo, da je $n \geq 2$. Tedaj je $2p = 7^n - 1 = (7-1)(7^{n-1} + 7^{n-2} + \ldots + 7 + 1)$, zato dobimo $p = 3(7^{n-1} + 7^{n-2} + \ldots + 7 + 1)$, kar pa ni možno, saj je izraz v oklepajih večji od 1. Če je $n = 1$, dobimo $p = 3$.

Druga možnost je, da je $m - p = 7^k$ in $m + p = 7^{n-k}$, kjer je k neko naravno število. Očitno velja $n - k > k$. Tedaj je $2p = 7^{n-k} - 7^k = 7^k(7^{n-2k} - 1)$. Izraz v oklepajih je sodo število, večje od 2, zato smo $2p$ zapisali kot produkt vsaj treh praštevil, kar ni možno.

Torej je $n = 1$ edino naravno število, pri katerem obstaja praštevilo p, da je $p^2 + 7^n$ popolni kvadrat. Tako praštevilo je kar $p = 3$, popolni kvadrat pa $3^2 + 7 = 16 = 4^2$.



IV/3. Trikotnik CAD je zaradi $|AC| = |AD|$ enakokrak. Premica AA_1 je višina tudi v tem enakokrakem trikotniku, zato je $\angle HDA = \angle ACH$. V štirikotniku HA_1CB_1 velja $\angle CA_1H = \frac{\pi}{2} = \angle CB_1H$, zato je tetiven in je $\angle B_1A_1H = \angle B_1CH$. Dobili smo

$$\begin{aligned} \angle FA_1A &= \angle B_1A_1H = \angle B_1CH \\ &= \angle ACH = \angle HDA \\ &= \angle FDA, \end{aligned}$$

torej so tudi točke A, D, A_1 in F konciklične. To pomeni, da je $\angle AFD = \angle AA_1D = \frac{\pi}{2}$. Daljici AB_1 in HF sta višini v trikotniku AHG in se sekata v točki E. Zato je E višinska točka tega trikotnika in je EG pravokotna na AH. Ker pa je AH pravokotna na BC, od tod sledi, da je EG vzporedna z BC.

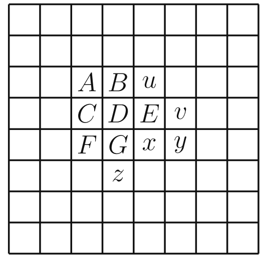
Označimo s T presečišče premic EG in AD ter naj bo C_1 nožišče višine na stranico AB v trikotniku ABC. Ker je ET vzporedna z CD, je štirikotnik $TDCE$ trapez. Toda $\angle TDC = \angle ECD$, zato je ta trapez enakokrak. Od tod sledi $\angle TCE = \angle TDE = \angle ADH = \angle ABH = \angle C_1BH = \angle HCE$, zato so točke C, H in T kolinearne, kar je bilo še potrebno pokazati.

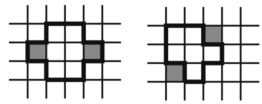
IV/4. Zadostuje 8 barv. Označimo barve s številkami od 1 do 8 in tabelo pobarvajmo kot prikazuje prva slika. Vsak lik predpisane oblike je pobarvan z različnimi barvami, saj najbližja kvadratka enake barve ležita diagonalno z enim vmesnim kvadratkom in obeh hkrati ne moremo pokriti z enim samim likom.

1	2	3	4	1	2	3	4
5	6	7	8	5	6	7	8
3	4	1	2	3	4	1	2
7	8	5	6	7	8	5	6
1	2	3	4	1	2	3	4
5	6	7	8	5	6	7	8
3	4	1	2	3	4	1	2
7	8	5	6	7	8	5	6

Denimo, da zadostuje že 7 barv. Imenujmo dva kvadratka *povezana*, če sta oba vsebovana v nekem liku predpisane oblike. Označimo nekatere kvadratke v tabeli, kot prikazuje druga slika. Ker sta vsaka dva izmed kvadratkov A, B, C, D, E, F, G povezana, morajo biti ti kvadratki pobarvani z različnimi barvami (skupaj jih je ravno 7).

Kvadratek u je povezan s kvadratki A, B, C, D, E, G, torej mora biti iste barve kot kvadratek F. Kvadratek x je povezan s kvadratki B, C, D, E, F, G, torej mora biti iste barve kot A. Kvadratek v je povezan s kvadratki B, u, D, E, G, x. Ker je u take barve kot F, x pa kot A, mora barva kvadratka v enaka barvi kvadratka C. Kvadratek z je povezan s kvadratki C, D, E, F, G, x, torej mora biti iste barve kot B. Kvadratek y je povezan s kvadratki u, D, E, v, G, x, ki so enakih barv kot F, D, E, C, G, A, torej mora biti y enake barve kot B. Vendar kvadratki G, x, y, z tvorijo lik predpisane oblike, ki ni pobarvan s štirimi različnimi barvami, saj sta kvadratka y in z pobarvana z isto barvo (s tako kot B). Zato 7 barv ne zadostuje.





Rešitve nalog z državnega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2008/09

Skupina I

1. *Podatki:* $m_l = 1$ tona, $r = 20$ mm, $m_1 = 2{,}7$ g, $\eta = \frac{\pi}{\sqrt{18}} = 74\%$, $\rho = 1$ kg/dm^3.

   Prostornina žogice je
   $$V_1 = \frac{4\pi r_0^3}{3} = 3{,}35 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^3\,.$$
   Iz ravnovesja vzgona in teže ladje z žogicami sledi
   $$NV_1\rho g = (m_l + Nm_1)g\,,$$
   od koder dobimo število žogic:
   $$N = \frac{m_l}{V_1 g - m_1} = 32\,460\,.$$
   Prostornina, ki jo zavzemajo pa je
   $$V = \frac{NV_1}{\eta} = 1{,}47\ \mathrm{m}^3\,.$$

2. *Podatki:* $v_0 = 4$ m/s, $\alpha = 30°$, $s = 70$ cm, $l = 4$ m, $v_a = 10$ m/s.

   a) Gibanje pljuska obravnavamo kot gibanje telesa pri poševnem metu z začetno hitrostjo v_0 in dvižnim kotom α. Pljusk za razdajo s v vodoravni smeri porabi
   $$t = \frac{s}{v_0 \cos\alpha} = 0,202\ \mathrm{s}$$
   in se v tem času dvigne za
   $$h = v_0 \sin\alpha\ t - \tfrac{1}{2}gt^2 = 20\ \mathrm{cm}\,.$$
   Pešec mora skočiti najmanj 20 cm visoko.

b) Pljuska si sledita v intervalu

$$\Delta t = \frac{l}{v_a} = 0{,}4 \text{ s}.$$

V optimalnem primeru mora pešec doseči največjo višino h' po času $\frac{1}{2}\Delta t$ od trenutka, ko se je dvignil nad prvi pljusk. Ko doseže najvišjo točko h' nad tlemi, je njegova hitrost 0. Nato prosto pada in po $\frac{1}{2}\Delta t$ od trenutka, ko je dosegel višino h', je na višini h, tako da se ravno še izogne drugemu pljusku. Za prosti pad za višinsko razliko $h' - h$ velja

$$h' - h = \tfrac{1}{2}g(\tfrac{1}{2}\Delta t)^2, \qquad h' = h + \frac{gl^2}{8v_a^2} = 40 \text{ cm}.$$

Skočiti mora vsaj 40 cm visoko.

3. *Podatki:* $v_0 = 60$ km/h

Pri preskusu gre vsa kinetična energija v deformacijsko:

$$W_d = W_k = \tfrac{1}{2}mv_0^2.$$

a) Relativna hitrost je kar hitrost gibajočega se avtomobila. Označimo jo z v. Po trku se ohrani gibalna količina in hitrost sprimka je

$$v' = \frac{mv}{2m} = \tfrac{1}{2}v.$$

V tem primeru je deformacijska energija razlika kinetičnih energij:

$$W_d = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}(2m)v'^2 = \tfrac{1}{4}mv^2.$$

Iz zahteve

$$\tfrac{1}{4}mv^2 = \tfrac{1}{2}mv_0^2, \quad \text{sledi} \quad v = \sqrt{2}v_0 = 85 \text{ km/h}.$$

b) Če z v ponovno označimo relativno hitrost avtomobilov, je hitrost prvega $v_1 = v$ in drugega $v_2 = 2v$. Velja:

$$v' = \frac{mv_1 + mv_2}{2m} = \frac{3v}{2}$$

in

$$W_d = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}m(2v)^2 - \tfrac{1}{2}(2m)v'^2 = \tfrac{1}{4}mv^2,$$

enako kot v primeru a). Torej je

$$v = \sqrt{2}v_0 = 85 \text{ km/h}.$$

4. *Podatki:* $m_p = 60$ kg, $m_o = 40$ kg, $m_T = 80$ kg, $a_o = 1$ m/s^2, $a_T = 0{,}5$ m/s^2, $t = 2$ s.

Iz ravnovesja navorov na škripec sledi, da sta sili v obeh delih vrvi enaki.

Silo vrvi na Tarzana dobimo iz Newtonovega zakona. Če silo v vrvici označimo z F, velja

$$m_T a_T = F - m_T g, \qquad F = m_T(a_T + g) = 824 \text{ N}.$$

Enaka sila deluje na opico in ploščad. Če z a_p označimo pospešek ploščadi, je pospešek opice za zunanjega opazovalca $a_o + a_p$ in Newtonov zakon za opico in ploščad zapišemo v obliki:

$$m_p a_p + m_o(a_o + a_p) = F - (m_p + m_o)g.$$

Od tod dobimo pospešek ploščadi:

$$a_p = \frac{F - (m_p + m_o)g - m_o a_o}{m_p + m_o} = -1{,}96 \text{ m/s}^2 \approx -2{,}0 \text{ m/s}^2$$

in pospešek opice za zunanjega opazovalca

$$a_o' = a_o + a_p = -1{,}0 \text{ m/s}^2 .$$

Včasu t se opica spusti za

$$\Delta h_o = \tfrac{1}{2}|a_o'|t^2 = 2{,}0 \text{ m} .$$

Tarzan pa dvigne za

$$\Delta h_T = \tfrac{1}{2}a_T t^2 = 1{,}0 \text{ m} .$$

Razlika višin je torej 3,0 m.

Skupina II

1. *Podatki:* $U_g = 9$ V, $U_n = 6$ V, $P_A = 6$ W, $P_B = 4$ W.

a) Upor žarnice A je

$$R_A = U_n^2/P_A = 6\ \Omega ,$$

upor drugih pa

$$R_B = R_C = R_D \equiv R = U_n^2/P_B = 9\ \Omega .$$

Nadomestni upor žarnic BCD je

$$\frac{1}{R_{BCD}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R} , \qquad R_{BCD} = \frac{2R}{3} = 6\ \Omega .$$

Ker je upor nadomestnega vezja enak uporu žarnice A, je na žarnici A ravno pol gonilne napetosti, na žarnici B ravno toliko, na C in D pa četrtinka. Moči so

$$P_A = \frac{(\frac{1}{2}U_g)^2}{R_A} = 3{,}37 \text{ W} , \qquad P_B = \frac{(\frac{1}{2}U_g)^2}{R_B} = 2{,}25 \text{ W} ,$$

$$P_C = P_D = \frac{(\frac{1}{4}U_g)^2}{R_B} = 0{,}56 \text{ W} .$$

Najmočneje sveti žarnica A.

b) V tem primeru je $R_D \to \infty$ in tok skozi žarnici C in D sploh ne teče; zgornjo vejo lahko odmislimo. V tem primeru je na žarnici A napetost

$$U_A = \frac{R_A}{R_A + R_B} U_g = 3{,}6 \text{ V}$$

in ustrezna moč

$$P_A = \frac{U_A^2}{R_A} = 2{,}16 \text{ W} .$$

Moč se zmanjša za 1,21 W.

c) Poleg žarnice A sveti le še žarnica B:

$$U_B = \frac{R_B}{R_A + R_B} U_g = 5{,}4 \text{ V}$$

z močjo

$$P_B = \frac{U_B^2}{R_B} = 3{,}24 \text{ W}\,.$$

V primeru b) najmočneje sveti žarnica B.

2. *Podatki:* $a = 6$ m, $h = 6$ m, $l = 9$ m, $T_l = 24$ °C, $T_d = 20$ °C, $T_0 = 0$ °C, $T_s = 22$ °C, $d_n = 20$ cm, $d_z = 30$ *cm*, $\lambda = 0{,}6$ W/mK.

   a) Ker je razlika temperatur med levim in srednjim stanovanjem enaka razliki temperatur med srednjim in desnim stanovanjem, priteče iz levega v srednje stanovanje ravno toliko toplotnega toka, kolikor ga iz srednjega odteče v desno stanovanje. Peč v srednjem stanovanju mora zato nadoknaditi le tok, ki uhaja skozi dve zunanji steni:

$$P = \frac{2ah\,\lambda(T_s - T_0)}{d_z} = 3{,}2 \text{ kW}\,.$$

   b) V tem primeru je vsota tokov iz levega in desnega stanovanja skozi notranji steni enaka toku, ki gre iz srednjega stanovanja skozi zunanji sten ven. Če s T označimo temperaturo srednjega stanovanja, lahko zapišemo:

$$\frac{lh\,\lambda\left[(T_l - T) + (T_d - T)\right]}{d_n} = \frac{2ah\,\lambda(T - T_0)}{d_z}$$

   in od tod

$$T = \frac{\frac{l}{d_n}(T_l + T_d) + \frac{2a}{d_z}T}{2\left(\frac{l}{d_n} + \frac{a}{d_z}\right)} = 15{,}2 \text{ °C}\,.$$

3. *Podatki:* $r = 1$ m, $e_1 = +1$ mAs, $\Delta r/r = 20$ %, $\Delta U = 1000$ V, $R = 1$ MΩ

   a) Ko se z i-to kroglo z nabojem e_i dotaknemo sosednje krogle, se naboj porazdeli med i-to in sosednjo kroglo, tako da se napetosti na kroglah izenačita:

$$\frac{e_i'}{4\pi\varepsilon_0 r_i} = \frac{e_{i+1}}{4\pi\varepsilon_0 r_{i+1}}\,, \qquad e_i = e_i' + e_{i+1}\,.$$

   Od tod dobimo

$$e_{i+1} = \frac{r_{i+1}}{r_{i+1} + r_i}\,e_i = \frac{1 + \Delta r/r}{2 + \Delta r/r}\,e_i\,.$$

   Naboj na četrti krogli je tako

$$e_4 = \left(\frac{1 + \Delta r/r}{2 + \Delta r/r}\right)^3 e_1 = 0{,}16 \text{ mAs}\,.$$

   b) Napetost na zadnji je

$$U_4 = \frac{e_4}{4\pi\varepsilon_0 r_4} = \frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0 r}\,\frac{1}{(2 + \Delta r/r)^3} = 8{,}4 \cdot 10^5 \text{ V}\,.$$

   V času, ko ta napetost pade za 1000 V, je tok skozi upornik približno konstanten in lahko zapišemo

$$I = \frac{U_4}{R}\,.$$

   V tem času se naboj zmanjša za $\Delta e = It$, napetost pa za $\Delta U = \dfrac{\Delta e}{4\pi\varepsilon_0 r_4} = \dfrac{It}{4\pi\varepsilon_0 r_4}\,.$

Od tod dobimo iskani čas

$$t = \frac{\Delta U R \, 4\pi\varepsilon_0 r_4}{U_4} = \frac{\Delta U R \, (4\pi\varepsilon_0 r)^2}{e_1} \left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)^3 \left(2 + \frac{\Delta r}{r}\right)^3 = 0{,}23~\mu\mathrm{s}\,.$$

4. *Podatki:* $r_0 = 10$ mm, $l = 10$ cm, $I = 10$ A.

a) K sili na drugo zanko prispeva le radialna komponenta magnetnega polja; sila je privlačna

$$F = I l_z B_r = I \, 2\pi r_0 \, \frac{3\mu_0 p_m \cos\varphi \sin\varphi}{4\pi r^3}\,.$$

Pri tem je $l_z = 2\pi r_0$ obseg druge zanke, l razdalja med središčema zank, $r = \sqrt{l^2 + r_0^2}$ razdalja med središčem prve zanke in drugo zanko, $\cos\varphi = l/r$ in $\sin\varphi = r_0/r$. Vstavimo še $p_m = \pi r_0^2 I$ in dobimo

$$F = \frac{3\pi\mu_0 l r_0^4 I^2}{2\sqrt{(l^2 + r_0^2)^5}} = 5{,}8 \cdot 10^{-8}~\mathrm{N}\,.$$

b) Za $r_0 \ll l$ velja $\cos\varphi \approx 1$, $\sin\varphi \approx r_0/l$ in $r \approx l$ in

$$F = \frac{3\pi\mu_0 r_0^4 I^2}{2l^4} = \frac{3\mu_0}{2\pi}\,\frac{p_m^2}{l^4}\,.$$

Sila torej pojema s četrto potenco razdalje med središčema zank.

Skupina III

1. *Podatki:* v_1, v_2, d, (360°), (180°), (90°)

Prvi drsalec se giblje s komponento hitrosti v_1; drugi z $-v_2$. Hitrost težišča drsalcev dobimo iz ohranitve skupne gibalne količine:

$$v^* = \frac{m v_1 - m v_2}{2m} = \frac{v_1 - v_2}{2}\,,$$

obodno hitrost drsalcev pri vrtenju okrog skupnega težišča pa iz ohranitve vrtilne količine za os v težišču:

$$2 m r v_o = m r v_1 + m r v_2\,, \qquad v_o = \frac{v_1 + v_2}{2}\,.$$

a) Ko se zavrtita za poln kot, kaže obodna hitrost prvega drsalca v smeri, v kateri se je prvotno gibal. Da dobimo celotno hitrost, moramo prišteti še hitrost tešišča:

$$v_1' = v_o + v^* = v_1\,.$$

Podobno velja za drugega drsalca:

$$v_2' = -v_o + v^* = -v_2\,.$$

Drsalca nadaljujeta pot vsak s svojo prvotno hitrostjo.

b) Ko se zavrtita za 180°, ima obodna hitrost nasproten znak kot v primeru a), torej

$$v_1'' = -v_o + v^* = -v_2$$

in

$$v_2'' = v_o + v^* = v_1\,.$$

Drsalca torej zamenjata hitrosti.

c) V tem primeru kaže obodna hitrost v smeri pravokotno na prvotno smer gibanja. Če prvotno smer prvega drsalca v smeri osi x, velja (zadošča ena od obeh možnosti za komponento y):

$$v_{1x}''' = v^* = \frac{v_1 - v_2}{2}, \qquad v_{1y}''' = \pm v_o = \pm\frac{v_1 + v_2}{2},$$

$$v_{2x}''' = v^* = \frac{v_1 - v_2}{2}, \qquad v_{2y}''' = \mp v_o = \mp\frac{v_1 + v_2}{2}.$$

2. *Podatki:* $t = 1$ dan, $l = 1$ m, $M = 1$ kg, $\Delta t = 6$ min, $m = 50$ g

Preden dodamo maso m, je krožna frekvenca enaka

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Mgl}{Ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Z dodano maso spremenimo tako lego težišča nihala, kot tudi vztrajnostni moment nihala $J = Ml^2 + md^2$:

$$\omega = \sqrt{\frac{(M+m)gd^*}{Ml^2 + md^2}}.$$

Iz definicije težišča sledi $(M+m)d^* = Ml + md$. Torej

$$\omega = \sqrt{\frac{g(Ml+md)}{Ml^2+md^2}} = \sqrt{\frac{gMl(1+md/Ml)}{Ml^2(1+md^2/Ml^2)}} = \omega_0\sqrt{\frac{1+\frac{m}{M}\,x}{1+\frac{m}{M}\,x^2}},$$

pri tem smo vpeljali $x = d/l$. Vpeljimo še

$$k = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{t}{t+\Delta t}\right)^2$$

in dobimo kvadratno enačbo $x^2 - kx + (1-k)\,\dfrac{M}{m} = 0$

z rešitvama

$$x_{1,2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4(1-k)\frac{M}{m}}}{2}.$$

Obe rešitvi sta smiselni: $d_1 = x_1 l = 78$ cm in $d_2 = x_2 l = 22$ cm.

3. *Podatki:* $v_1 = 8{,}0$ m/s, $\nu_1 = 1000$ Hz, $\nu_2 = 1001$ Hz, $\tau = 977$ ms, $c = 1500$ m/s

Naj se gibljeta podmornici druga proti drugi in naj bo v_1 hitrost prve in v_2 druge podmornice ter ν frekvenca signala, ki ga odda prva podmornica. V tem primeru se giblje zvočilo in je frekvenca, kot bi jo zaznal opazovalec, ki miruje glede na sredstvo, večja za faktor $1/(1-v_1/c)$. Opazovalec v drugi podmornici se giblje glede na sredstvo s hitrostjo v_2, kar prinese nadaljni faktor $1 + v_2/c$. Zvok se od druge podmornice odbije z enako frekvenco, kot jo ima vpadlo valovanje. Odbito valovanje ima glede na sredstvo za faktor $1/(1-v_2/c)$ večjo hitrost, opazovalec na prvi podmornici pa zazna še za faktor $1 + v_1/c$ večjo hitrost; skupaj torej

$$\nu' = \nu\left(\frac{1}{1-\frac{v_1}{c}}\right)\left(1+\frac{v_2}{c}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{v_2}{c}}\right)\left(1+\frac{v_1}{c}\right) = \nu\,\frac{(1+v_1/c)(1+v_2/c)}{(1-v_1/c)(1-v_2/c)}.$$

V našem primeru sta bila oddana dva signala s frekvencama ν_1 in ν_2. Če označimo čas med dvema zaznanima utripoma s τ, velja $\nu_2' - \nu_1' = 1/\tau$. Dobimo:

$$\frac{1}{\tau} = \nu_2' - \nu_1' = (\nu_2 - \nu_1)\frac{(1 + v_1/c)(1 + v_2/c)}{(1 - v_1/c)(1 - v_2/c)} .$$

Od tod sledi
$$\frac{1 + v_2/c}{1 - v_2/c} = K , \qquad K = \frac{1 - v_1/c}{1 + v_1/c}\,\frac{1}{(\nu_2 - \nu_1)\tau} .$$

Izrazimo v_2:
$$v_2 = c\,\frac{K - 1}{K + 1} = 9{,}5 \text{ m/s}.$$

Druga podmornica se giblje proti prvi podmornici.

Možna je tudi rešitev, ko se obe podmornici gibljeta v isti smeri in vzamemo $v_1 = -8{,}0$ m/s, a v tem primeru dobimo rezultat, ki ni realističen ($v_2 = 25{,}4$ m/s).

4. *Podatki:* $e_0 = 1,6022 \cdot 10^{-19}$ As, $m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27}$ kg, $B_z = B_0 = 10$ mT, $\Delta B = 0,01$ mT, $a = 1 \cdot 10^{-5}$ T/m, $v_0 = 300$ km/s.

   a) Magnetna sila $F_m = e_0 v_0 B$ je centripetalna sila in iz Newtonovega zakona za kroženje $m_p r_0 \omega^2 = e_0 v_0 B = e_0 \omega r_0 B$ sledi

$$\omega = \frac{e_0 B_0}{m_p} , \qquad t_0 = \frac{2\pi m}{e_0 B_0} = 6{,}56\ \mu\text{s} , \qquad r_0 = \frac{v_0 m_p}{e_0 B_0} = 31{,}3 \text{ cm} .$$

   b) Proton ima zaradi dveh različnih magnetnih polj dva polmera kroženja, v vsakem polprostoru drugega. V močnejšem polju kroži s polmerom

$$r_1 = \frac{v_0 m_p}{e_0(B_0 + \Delta B)} \approx \frac{v_0 m_p}{e_0 B_0}\left(1 - \frac{\Delta B}{B_0}\right) = r_0\left(1 - \frac{\Delta B}{B_0}\right)$$

   in v šibkejšem polju s polmerom

$$r_2 = \frac{v_0 m_p}{e_0(B_0 - \Delta B)} \approx \frac{v_0 m_p}{e_0 B_0}\left(1 + \frac{\Delta B}{B_0}\right) = r_0\left(1 + \frac{\Delta B}{B_0}\right) .$$

   Pri tem smo upoštevali $1/(1 - x) \approx 1 + x$ za $x \equiv \Delta B/B_0 \ll 1$. V enem obhodu se zato proton premakne vzdolž osi y za

$$\Delta y = 2(r_2 - r_1) = 4r_0\frac{\Delta B}{B_0} = \frac{4 v_0 m_p \Delta B}{e_0 B_0^2} = 1{,}25 \text{ mm} .$$

   c) Oceno dobimo tako, da prostor podobno kot v delu (b) razdelimo na dva polprostora in v vsakem računamo s homogenim magnetnim poljem, ki ustreza povprečnemu magnetnemu polju, ki deluje na proton v enem in drugem polprostoru. Smer povprečnega gibanja protona ostaja pozitivna os y.

   Za oceno lahko vzamemo $\Delta B = a r_0/2$ ali $\Delta B = a r_0$, kar da

$$\Delta y = 2(r_2 - r_1) = 2\frac{a r_0^2}{B_0} = 0{,}20 \text{ mm} \quad \text{oz.} \quad \Delta y = 4\frac{a r_0^2}{B_0} = 0{,}40 \text{ mm}$$

   in hitrost $v_y = \frac{1}{\pi}\left(\frac{a m v_0^2}{e_0 B_0^2}\right) = 30$ m/s oz. $v_y = \frac{2}{\pi}\left(\frac{a m v_0^2}{e_0 B_0^2}\right) = 60$ m/s.

   Za pravilno štejemo vsak rezultat med 30 m/s in 60 m/s.

   Točen račun, ki pa presega srednješolsko znanje, da $v_y = \frac{1}{2}\left(\frac{a m v_0^2}{e_0 B_0^2}\right) = 47$ m/s .

Bojan Golli