Tekmovanja

45. tekmovanje za Vegovo priznanje – državno tekmovanje

7. razred

1. Kolesar je v eni uri in 12 minutah prevozil dve sedmini poti od doma do centra mesta. V kolikšnem času bi z enako hitrostjo prevozil polovico poti od doma do centra mesta? Odgovor zapiši v urah in minutah.

2. V štirikotniku $ABCD$ sta stranici AB in BC enako dolgi, diagonala AC pa meri toliko kot stranica CD. Kot BAD meri $120°$, kot CBA pa $100°$. Izračunaj ostala kota štirikotnika.

3. Na izlet se odpravi 15 ljudi. Ker pričakujejo dež, jih 14 nosi dežnik, 10 jih ima gumijaste škornje, 11 jih nosi pokrivalo, 12 pa jih ima s sabo pelerino. Najmanj koliko ljudi ima s sabo vsa štiri varovala zoper dež?

4. Naj bo ABC enakostranični trikotnik. Iz poljubne točke D na stranici AC narišemo pravokotnico na stranico AB. Presečišče pravokotnice in stranice označimo s točko E. Iz točke E narišemo pravokotnico na stranico BC in presečišče označimo s F. Dokaži, da je trikotnik DEF enakostraničen, če je $|AE| = |BF|$.

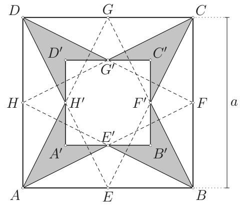
5. Poišči vsa naravna števila m in n, za katera je največji skupni delitelj naravnih števil m in 18 enak n, najmanjši skupni večkratnik števil n in 4 pa enak m. Utemelji, da so to vse rešitve.

8. razred

1. Posoda, ki drži 10 litrov, je do vrha napolnjena z napitkom, v katerem je 40 % soka. Iz posode iztočimo polovico vsebine in do vrha dolijemo napitek, v katerem je 20 % soka. Postopek ponavljamo, vsakokrat dolijemo napitek, v katerem je 20 % soka. Koliko odstotkov soka je v napitku, ki ga dobimo po treh dolivanjih?

2. V pravilnem večkotniku meri vsota notranjih kotov $1800°$. Zbrišemo tri zaporedne stranice v tem večkotniku, da dobimo lomljeno črto. Prosti krajišči lomljenke povežemo z daljico in nastane novi večkotnik. Koliko meri najmanjši notranji kot v novonastalem večkotniku?

3. Znotraj kvadrata $ABCD$ leži kvadrat $A'B'C'D'$, katerega stranice so paroma vzporedne stranicam kvadrata $ABCD$. Središči kvadratov $ABCD$ in $A'B'C'D'$ sovpadata. Točke E, F, G in H so razpolovišča stranic večjega kvadrata, točke E', F', G' in H' pa so razpolovišča stranic manjšega kvadrata. Izrazi ploščino osenčenega dela z dolžino stranice večjega kvadrata (glej sliko).



4. Pokaži, da je $\dfrac{10^n + 35}{45}$ naravno število za vsako naravno število n.

5. Za štiri cela števila velja $a < b < c < d$. Izračunamo vse možne vsote po dveh izmed števil a, b, c in d. Največje štiri vsote so: 8, 7, 5 in 4. Določi število a.

9. razred

1. Zapiši enačbo premice, ki seka abscisno os pri vrednosti -6, če je ploščina pravokotnega trikotnika, ki ga omejuje ta premica s koordinatnima osema, enaka 13.5 kvadratnih enot. Poišči vse rešitve.

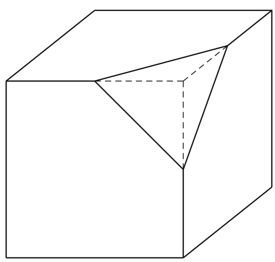
2. Kraji A, B in C ležijo v tem vrstnem redu ob ravni cesti. Razdalja med krajema A in B je za 10 km krajša, kot je razdalja med krajema B in C. Ko prvi motorist, ki vozi iz kraja A v kraj B, prevozi $\frac{2}{7}$ svoje poti, drugi motorist, ki vozi iz kraja C v kraj B, prevozi $\frac{4}{9}$ svoje poti. Tedaj sta oba enako oddaljena od kraja B. Koliko kilometrov sta oddaljena kraja A in C?

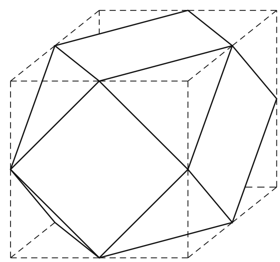
3. V trapezu $ABCD$ je osnovnica AB dolga 12 cm, osnovnica DC pa 3 cm. Notranji kot pri oglišču D je skladen s kotom, ki ga diagonala AC oklepa s krakom BC.

   a) Izračunaj dolžino diagonale AC.

   b) Koliko meri obseg trapeza, če je krak BC dolg 8 cm?

4. Mizar je leseni kocki odrezal vogal, tako da je raven rez potekal skozi razpolovišča treh pripadajočih robov (glej levo sliko). Na enak način je kocki odrezal še ostale vogale (glej desno sliko).





   Površino nastalega telesa je pobarval. Koliko barve je potreboval, če bi prvotno kocko lahko pobarval s šestimi litri barve?

5. Palindromno število je število, ki ga enako beremo z leve in z desne strani, npr. 13531.

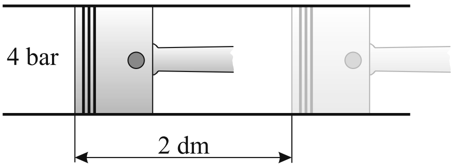
   a) Poišči najmanjši šestmestni palindrom, ki je deljiv z 18.

   b) Dokaži, da noben štirimestni palindrom ni praštevilo.

29. tekmovanje za Stefanovo priznanje – državno tekmovanje

8. razred (Sklop A)

A1 Plin pri stalnem tlaku $p = 4$ bar odriva bat s ploščino 0,25 m^2. Koliko dela opravi plin, ko odrine bat za 2 dm?



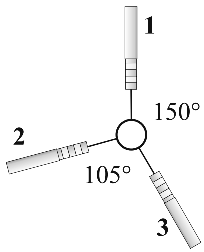
A 0,5 kJ

B 1,0 kJ

C 20 kJ

D 50 kJ

A2 Obroček vlečemo s tremi silomeri v smereh, kot kaže slika. Kateri silomer kaže najmanj, če obroček miruje?



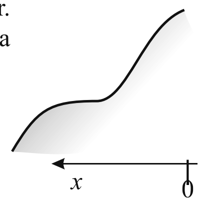
A samo silomer 1

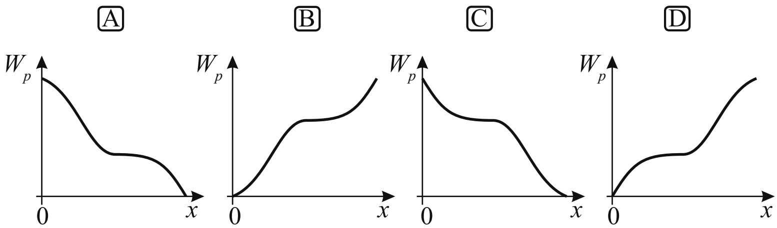
B samo silomer 2

C samo silomer 3

D silomera 1 in 3

A3 Na desni sliki je prikazan začetek proge, po kateri se spusti rolkar. Kateri graf pravilno prikazuje spreminjanje potencialne energije rolkarja vzdolž tega dela proge?





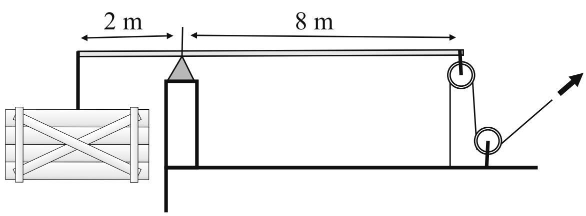
A4 Zaboj z maso 300 kg visi z vrha stolpnice, kot kaže slika. S kolikšno silo moramo vleči vrv v smeri puščice, da zaboj miruje?

A 187,5 N

B 375 N

C 750 N

D 1500 N



8. razred (Sklop B)

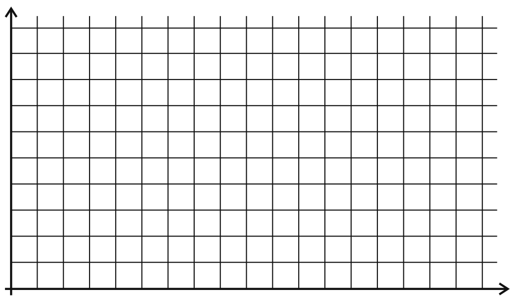
B1 Januarja je na reki Hudson v New Yorku uspešno zasilno pristalo letalo A320. Takoj po pristanku je bila 1/12 prostornine letala pod vodo.

a) Kolikšna je prostornina letala, če je njegova masa 70 ton?

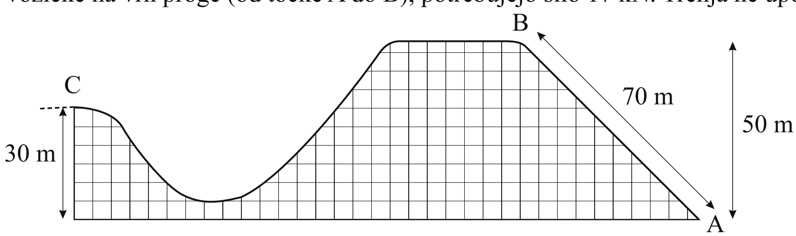
b) Po pristanku je v letalo skozi odprtine začela pritekati voda. Koliko m^3 vode je moralo priteči v letalo do trenutka, ko je to v celoti potonilo?

c) Letalo je v celoti potonilo v približno eni uri. Koliko litrov vode na sekundo je pritekalo v letalo, če je voda ves čas pritekala približno enakomerno?

d) Nariši graf sile vzgona v odvisnosti od časa za čas od 0 do 70 min, merjeno od trenutka pristanka.



B2 V zabaviščnem parku imajo "vlak smrti", steza je prikazana na sliki. Ko enakomerno vlečejo vozičke na vrh proge (od točke A do B), potrebujejo silo 17 kN. Trenja ne upoštevamo.



a) Koliko dela opravi motor, da pripelje vozičke z dna do vrha proge (od točke A do B)?

b) Za koliko se vozičkom pri dvigovanju spremeni potencialna energija?

c) Kolikšna je masa vozičkov?

d) Kolikšna je kinetična energija vozičkov v točki C, če so na vrhu mirovali?

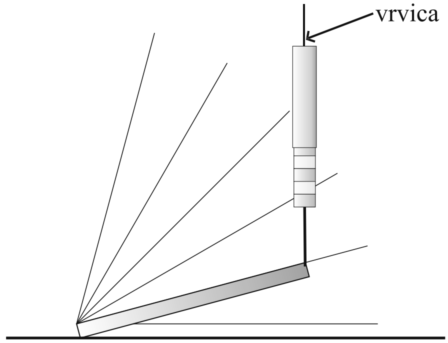
8. razred (Sklop C – eksperimentalna naloga)

C1 Razišči silo, ki deluje na en konec mirujoče klade navpično navzgor, kot kaže slika.

a) Izmeri silo pri kotih: 15°, 30°, 45°, 60°, 75°. Pri meritvi vleci silomer prek vrvice in se potrudi, da bo v navpični legi. Izpolni tabelo:

Pripomočki

- silomer
- klada
- zaslon z narisanimi koti
- vrvica z zanko



α [°]					
F [N]					

b) Kota 0° in 90° potrebujeta posebno obravnavo. Očitno je $F = 0$ ena možnost pri obeh kotih. Takrat klada miruje brez dodatne sile.

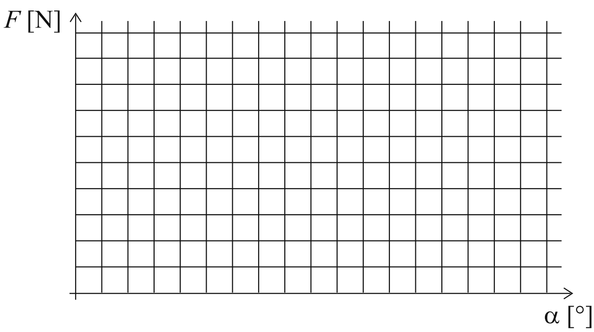
Dopolni poved: Ko klada miruje,

je pri kotu 0° sila F lahko od ________________ do ___________________,

je pri kotu 90° sila F lahko od ________________ do __________________.

Pomagaj si z meritvami in sklepanjem. Teža klade je napisana na kladi.

c) Nariši diagram sila *F* v odvisnosti od kota α: $F = F(\alpha)$. Razmisli, kako boš prikazal odgovore pri vprašanju b).

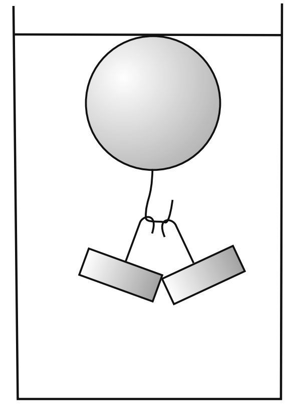


C2 Pri poskusu boš ugotavljal, kolikšne sile delujejo na plavajoče telo.

a) Na kavelj stiroporne krogle obesi uteži in toliko matic, da bo celotna krogla ravno potonila.

Pripomočki
- stiroporna krogla
- 100 g utež (ali 2 uteži po 50 g)
- 6 velikih matic
- 2 mali matici
- čaša z vodo
- tehtnica

Dopolni sliko na desni, vse dodane matice nariši kot eno telo. Skiciraj vse sile, ki delujejo na kroglo, uteži in matice, ko je krogla v celoti potopljena. Sile tudi imenuj. Aluminijasti kavelj na krogli je tako tanek, da ga v nalogi ni treba upoštevati.



b) Stehtaj telesa in izračunaj silo vzgona na potopljene železne dele (uteži in matice).

Gostota železa je 7,8 g/cm^3, specifična teža pa 0,078 N/cm^3. Gostota vode je 1,0 g/cm^3, specifična teža pa 0,010 N/cm^3.

c) Iz ravnovesja sil izračunaj, kolikšna je sila vzgona na potopljeno kroglo. (Prostornine krogle ne ugotavljaj s potapljanjem in dvigom vodne gladine, saj je taka meritev zelo nenatančna.)

d) Iz enačbe za silo vzgona na kroglo izračunaj prostornino krogle.

9. razred (Sklop A)

A1 Koliko dela moramo opraviti, če hočemo vozičku z maso 5 kg, ki se giblje brez trenja po vodoravni ploskvi, povečati hitrost s 6 m/s na 10 m/s?

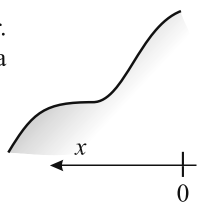
A 80 J

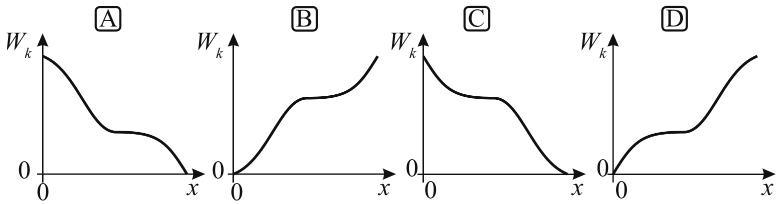
B 160 J

C 400 J

D 550 J

A2 Na desni sliki je prikazan začetek proge, po kateri se spusti rolkar. Kateri graf pravilno prikazuje spreminjanje kinetične energije rolkarja vzdolž tega dela proge, če je na začetku miroval in trenje zanemarimo?





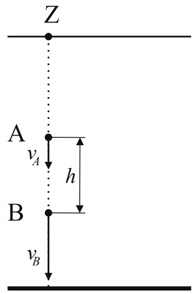
A3 Telo prosto pada iz točke Z. V točki A izmerimo hitrost 30 m/s in v točki B 50 m/s. Kolikšna je višinska razlika med točkama A in B?

A 20 m

B 40 m

C 80 m

D 160 m



A4

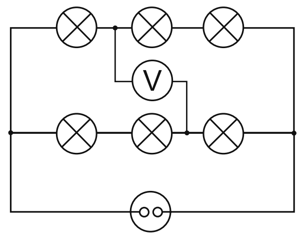
V vezje s šestimi enakimi žarnicami vežemo merilnik napetosti, kot kaže slika. Koliko kaže merilnik napetosti, če je napetost na viru 6 V?

A 1 V

B 2 V

C 3 V

D 4 V



9. razred (Sklop B)

B1

Pri bejzbolu metalec vrže žogico s hitrostjo 150 km/h v vodoravni smeri. V približku zračnega upora ne upoštevamo.

a) Koliko časa potrebuje žogica do odbijalca, če je odbijalec od metalca oddaljen 18,4 m?

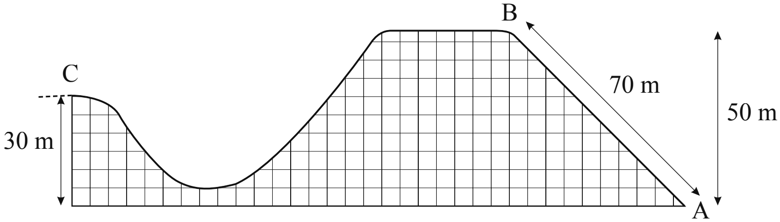
b) Žogico z maso 145 g nato odbijalec s kijem odbije s hitrostjo 150 km/h v nasprotni smeri. Izmerili so, da se pri udarcu žogica in kij dotikata približno 1/1000 s. Približno oceni, kolikšen je povprečni pojemek žogice pri ustavljanju ob kiju.

c) Kolikšno razdaljo prepotuje težišče žogice med ustavljanjem ob kiju?

d) Izračunaj, s kolikšno povprečno silo deluje kij na žogico med ustavljanjem ob kiju.

B2

V zabaviščnem parku imajo "vlak smrti", steza je prikazana na sliki. Ko enakomerno vlečejo vozičke na vrh proge (od točke A do B), potrebujejo silo 17 kN. Trenja ne upoštevamo.



a) Koliko dela opravi motor, da pripelje vozičke z dna do vrha proge (od točke A do B)?

b) Koliko časa traja gibanje vozičkov od točke A do B, če je nazivna moč motorja 80 kW? Motor za dvigovanje vozičkov porabi le 70 % svoje moči.

c) Kolikšno potencialno energijo imajo vozički na vrhu proge, če je bila njihova potencialna energija v točki A enaka nič?

d) Kolikšno kinetično energijo imajo vozički med gibanjem od točke A do B?

e) Kolikšen tok bi tekel skozi motor, če bi bil priključen na napetost 230 V?

9. razred (Sklop C – eksperimentalna naloga)

C1 Pri poskusu boš raziskoval, kako se spreminja sila upora zraka na padajoče telo v odvisnosti od hitrosti padanja.

Pripomočki
- dve papirnati skodelici
- digitalna štoparica
- kazalnik za označevanje višine

Masa 100 papirnatih skodelic je 33 g.

Če spustimo papirnato skodelico z višine približno 1,8 m, se najprej giblje pospešeno, zadnjih 100 cm pa pada enakomerno.

a) Postavi eno skodelico v drugo in ju spusti z višine približno 180 cm ter meri čas padanja za zadnjih 100 cm. Meritev napravi trikrat in izračunaj povprečni čas padanja. Ker se skodelici zadnjih 100 cm gibljeta premo enakomerno, lahko ugotovimo, kolikšna je sila upora.

2 skodelici: $v_2 =$ $F_{upora2} =$

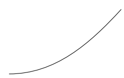
b) Nato poskus ponovi z eno skodelico, trikrat izmeri čas padanja ter izračunaj hitrost in silo upora.

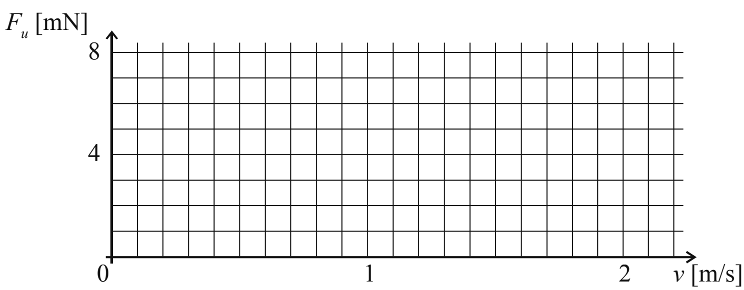
1 skodelica: $v_1 =$ $F_{upora1} =$

c) Rezultat tretje meritve ugotovimo z miselnim poskusom. Denimo, da bi bila skodelica iz tako tankega papirja, da bi imela npr. 1000-krat manjšo maso kot naša skodelica. Približno oceni, kolikšna bi bila hitrost padanja.

Zelo lahka skodelica: $v_0 \approx$ $F_{uporaO} \approx$

d) Nariši diagram: sila upora v odvisnosti od hitrosti gibanja $F_u = F_u(v)$. Silo nanašaj v milinewtnih (mN). Skozi vse tri točke nariši najbolje prilegajočo krivuljo (približna oblika krivulje je na desni sliki).





e) Iz grafa razberi, približno kolikokrat se poveča sila upora, če se hitrost poveča na dvakratno vrednost. Opiši, kako si sklepal.

C2 Kaj je v "črni škatli" s štirimi priključki?

a) Izmeri tokove, ki jih požene baterija skozi vse možne pare priključkov. Meritve vnesi v tabelo:

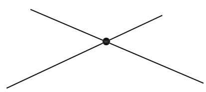
Pripomočki

- "črna škatla"
- baterija 4,5 V
- ampermeter
- 3 priključne žice
- 2 krokodilčka

priključka	AB	AC	AD	BC	BD	CD
I [mA]						

b) V "črni škatli" je povezanih manj kot 8 enakih porabnikov - upornikov. Možni sta dve različni vezji. Nariši obe.

Napotek: Če se na sliki vezja dve žici križata in dotikata, narišemo v križišču piko.

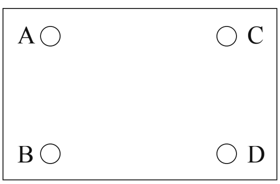


Opozorili

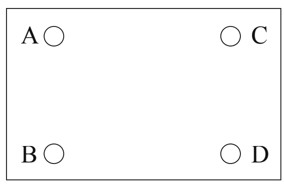
V merilniku je varovalka, ki lahko pri napačni vezavi pregori. Če se to zgodi, pokliči demonstratorja, da zamenja varovalko, pri tej nalogi pa boš izgubil eno točko.

Kadar ne meriš, pazi, da električni krog ni sklenjen in se baterija po nepotrebnem ne prazni.

1. rešitev



2. rešitev



53. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije — izbirno tekmovanje

1. letnik

1. Na tekmovanju je bilo 24 nalog izbirnega tipa. Če tekmovalec ni obkrožil nobenega odgovora ali je obkrožil več kot 1 odgovor, je prejel 0 točk. Za obkrožen pravilni odgovor je tekmovalec prejel 1 točko, za obkrožen napačni odgovor pa so mu odšteli $\frac{1}{4}$ točke. Pri največ koliko nalogah je obkrožil pravilni odgovor, če je zbral 13 točk?

2. Dan je trikotnik ABC, v katerem velja $|AB| = 2|AC|$. Na stranicah AB in BC ležita takšni točki D in E, da velja $\angle BAE = \angle ACD$. Daljici AE in CD se sekata v točki F, trikotnik CFE pa je enakostraničen. Določi velikosti kotov trikotnika ABC.

3. Dokaži, da velja neenakost

$$x^2 + y^2 + 1 \geq 2(xy - x + y)$$

za poljuben par realnih števil x in y. Kdaj velja enakost?

4. Poišči vsa racionalna števila r in vsa cela števila k, ki zadoščajo enačbi

$$r(5k - 7r) = 3.$$

5. Vsaka šola iz neke pokrajine je poslala 3 dijake na tekmovanje. Andrej, Blaž in Žan so predstavljali isto šolo. Ko so se vsi tekmovalci postavili v vrsto, da bi prevzeli svoje štartne številke, je Andrej ugotovil, da je tekmovalcev v vrsti pred njim prav toliko kot za njim. Za njim sta bila tudi oba sošolca: Blaž je bil 19. v vrsti, Žan pa 28. Koliko šol je sodelovalo na tekmovanju?

---

2. letnik

1. Poišči vsa naravna števila m in n, za katera velja $m^2 + n^5 = 252$.

2. Naj bo x tako realno število, da je $x + \frac{1}{x} + 1$ naravno število. Dokaži, da je tudi $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1$ naravno število, ki je deljivo z $x + \frac{1}{x} + 1$.

3. Diagonala BD štirikotnika $ABCD$ razdeli štirikotnik na ostrokotni trikotnik ABD in enakostranični trikotnik BCD. Naj bo O središče trikotniku ABD očrtane krožnice. Dokaži:

   (a) če sta trikotnika ABD in OCD skladna, je $AB \perp BC$;

   (b) če je $\angle CBA = 90°$, sta trikotnika ABD in OCD skladna.

4. Določi taki celi števili a in b, da bo $\sqrt{2010 + 2\sqrt{2009}}$ rešitev kvadratne enačbe

$$x^2 + ax + b = 0.$$

   Dokaži, da pri tako določenih a in b število $\sqrt{2010 - 2\sqrt{2009}}$ ni rešitev dane enačbe.

5. Na neki šoli imajo dijaki na voljo dva športa: nogomet in košarko. Petina nogometašev igra košarko, sedmina košarkašev pa igra nogomet. Z natanko enim športom se ukvarja 110 dijakov. Koliko dijakov se ukvarja z obema športoma?

3. letnik

1. Med vsemi polinomi z vodilnim koeficientom 1, ki pri deljenju z $x+1$ dajo ostanek 1, pri deljenju z x^2+1 pa ostanek 2, poišči tistega, ki ima najnižjo stopnjo.

2. Neko naravno število je zapisano samo s števkami 0, 3 in 7. Pokaži, da to število ne more biti popoln kvadrat.

3. V trikotniku ABC je točka D nožišče višine na stranico AB. Dani sta točki E na daljici AD ter F na stranici BC, da velja $\angle BAF = \angle ACE$. Daljici AF in CE se sekata v točki G, daljici AF in CD pa v točki T. Določi velikosti kotov trikotnika ABC, če je trikotnik CGF enakostraničen, trikotnik AET pa enakokrak z vrhom E.

4. Poišči vse celoštevilske rešitve enačbe
$$y = (x+y)(2x+3y).$$

5. Učiteljica je povabila skupino otrok, da se posedejo za okroglo mizo. Fantov je bilo trikrat toliko kot deklet. Sprehodila se je okrog mize in opazovala dvojice otrok, ki so sedeli eden poleg drugega. Ugotovila je, da je dvojic, v katerih sta oba otroka istega spola, dvakrat toliko kot dvojic, v katerih sta otroka različnega spola. Najmanj koliko otrok je sedelo za okroglo mizo?

---

4. letnik

1. Naj bo (a_n) nekonstantno aritmetično zaporedje s prvim členom $a_1 = 1$. Členi a_2, a_5, a_{11} tvorijo geometrijsko zaporedje. Izračunaj vsoto prvih 2009 členov zaporedja (a_n).

2. Poišči vsa naravna števila n, pri katerih je vrednost izraza $[\frac{n^2}{4}]$ kvadrat celega števila.

   OPOMBA. S $[x]$ označimo celi del števila x, to je največje celo število, ki je manjše ali enako x.

3. Tetivnemu štirikotniku $ABCD$ je očrtana krožnica, ki jo simetrali kotov $\angle CAD$ in $\angle ADB$ sekata zaporedoma v P in Q. Premici AP in DQ se sekata v R, premici CQ in BP pa v S. Dokaži, da sta premici PQ in RS pravokotni.

4. Naj bo x tako realno število, da je

$$\cos(2x) + \cos(3x) = 1.$$

Pokaži, da tedaj velja

$$2\sin(2x) + 2\sin(3x) = \sin(4x) + 2\sin(5x) + \sin(6x).$$

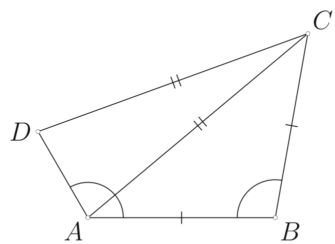
5. Jure je narisal pravilni 9-kotnik. Števila od 1 do 9 je želel razporediti v njegova oglišča tako, da vsota števil v poljubnih treh zaporednih ogliščih ne bi presegala nekega naravnega števila n. Za katero najmanjše število n bi mu to uspelo?

Rešitve nalog 45. tekmovanja za Vegovo priznanje – državno tekmovanje

7. razred

1. Kolesar je $\frac{2}{7}$ poti prevozil v 72 minutah ali $\frac{6}{5}$ ure, torej je za $\frac{1}{7}$ poti porabil 36 minut ali $\frac{6}{5} : 2 = \frac{3}{5}$ ure. Celo pot bi prevozil v $7 \cdot 36 = 252$ minutah ali $\frac{3}{5} \cdot 7 = \frac{21}{5}$ ure. Polovico poti bi prevozil v 126 minutah, to je v dveh urah in 6 minutah.

2. Trikotnik ABC je enakokrak, kota BAC in BCA sta zato skladna in merita vsak po $40°$, saj je $\sphericalangle CBA = 100°$. Tudi trikotnik ACD je enakokrak. Ker je $\sphericalangle CAD = \sphericalangle BAD - \sphericalangle BAC = 120° - 40° = 80°$, merita kota osnovnici $80°$. Kot ob vrhu trikotnika ACD potem meri $20°$. Kot BCD meri $60°$ in kot CDA meri $80°$.

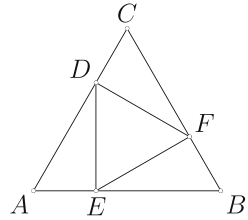


3. **1. način.** Ker ima 14 oseb dežnik, 1 oseba dežnika nima. Podobno jih 5 nima gumijastih škornjev, 4 nima pokrivala, 3 pa nimajo pelerine. Torej največ $1 + 5 + 4 + 3 = 13$ oseb nima vsaj enega varovala, zato imata vsaj $15 - 13 = 2$ osebi vsa 4 varovala zoper dež.

Ker ima 14 ljudi dežnik, 12 pelerino, skupaj pa jih je 15, jih mora vsaj $14 + 12 - 15 = 11$ imeti oboje. Ker jih ima 11 oboje, 11 pa tudi pokrivalo, ima tri varovala že $11+11-15 = 7$ ljudi od petnajstih. Če jih 7 nosi pelerino, pokrivalo in dežnik, še 10 pa jih ima gumijaste škornje, sta med njimi vsaj $7 + 10 - 15 = 2$, ki imata vse štiri stvari.

4. Trikotnik AED je polovica enakostraničnega trikotnika, ker merijo njegovi notranji koti $60°$, $90°$ in $30°$. Podobno je tudi trikotnik BFE polovica enakostraničnega trikotnika. Ker je

$|AE| = |BF|$, sta trikotnika AED in BFE skladna. Torej je trikotnik DEF enakokrak ($|DE| = |EF|$). Ker pa kot pri vrhu E trikotnika DEF meri $60°$, je trikotnik DEF enakostraničen.



5. **1. način.** Ker je največji skupni delitelj števil m in 18 enak n, je n delitelj števila 18, torej je $n \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$. Število m je najmanjši skupni večkratnik števil n in 4. Če je $n = 1$ ali $n = 2$, je $m = 4$. Če je $n = 3$ ali $n = 6$, je $m = 12$. Pri $n = 9$ ali $n = 18$ pa je $m = 36$.

   Največji skupni delitelj m in 18 mora biti n, zato so ustrezne rešitve le $m = 4$ in $n = 2$, $m = 16$ in $n = 6$ ter $m = 36$ in $n = 18$.

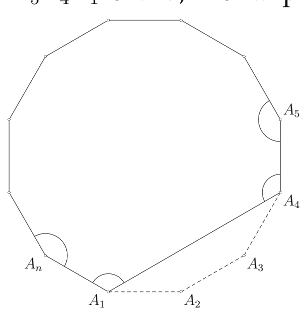
   2. način. Ker je m najmanjši skupni večkratnik n in 4, je m deljiv s 4. Največji skupni delitelj števil m in 18 je zato sodo število. Največji skupni delitelj števil m in 18 je n, zato je n sodi delitelj števila 18, torej je $n \in \{2, 6, 18\}$.
   Število m je najmanjši skupni večkratnik števil n in 4. Če je $n = 2$, je $m = 4$. Če je $n = 6$, je $m = 12$. Pri $n = 18$ pa je $m = 36$. Preverimo, da za ta števila velja $D(18, m) = n$.

8. razred

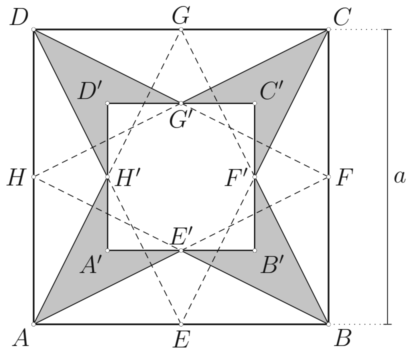
1. Ko izpraznimo polovico posode, ostane 5 litrov napitka, v katerem je 2 litra soka in 3 litre vode. Ko dolijemo 5 litrov napitka z 20% soka, dolijemo 1 liter soka in 4 litre vode. Dobimo napitek, v katerem so 3 litri soka in 7 litrov vode.

   Ko drugič izpraznimo polovico posode, ostane 1.5 litra soka in 3.5 litrov vode. Ko dolijemo 5 litrov napitka z 20% soka (1 liter soka in 4 litre vode), je v napitku 2.5 litra soka in 7.5 litrov vode. Po tretjem praznenju ostane v posodi 1.25 litra soka in 3.75 litrov vode, po ponovnem dolivanju pa je v posodi 2.25 litra soka in 7.75 litrov vode. V napitku je $22.5\ \%$ soka.

2. Vsota notranjih kotov večkotnika je $(n-2) \cdot 180°$, zato je $n = 12$. Ko zbrišemo tri sosednje stranice (recimo A_1A_2, A_2A_3 in A_3A_4), in povežemo oglišči A_1 in A_4 (glej sliko), dobimo desetkotnik. Vsota njegovih notranjih kotov je $8 \cdot 180° = 1440°$. Notranji koti pri A_5, A_6, …, A_{12} se ujemajo z notranjimi koti prvotnega dvanajstkotnika, zato merijo po $150°$. Vsota notranjih kotov ob stranici A_1A_4 desetkotnika meri $1440° - 8 \cdot 150° = 240°$. Ker sta kota $\sphericalangle A_4A_1A_{12}$ in $A_5A_4A_1$ enaka, merita po $120°$ in sta tudi najmanjša kota v nastalem desetkotniku.



3. Stranica kvadrata $A'B'C'D'$ meri $\frac{a}{2}$, njegova ploščina je $(\frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$. Točka E' je za $\frac{a}{4}$ oddaljena od stranice AB. Ploščina trikotnika ABE' je $\frac{a \cdot \frac{a}{4}}{2} = \frac{a^2}{8}$. Ploščino osenčenega lika dobimo, če od ploščine kvadrata $ABCD$ odštejemo ploščine skladnih trikotnikov ABE', BCF', CDG' in DAH' ter ploščino kvadrata $A'B'C'D'$. Osenčeni del ima ploščino $a^2 - (4\frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{4}) = \frac{a^2}{4}$.



4. Ulomek predstavlja naravno število, če je števec večkratnik imenovalca. Zato mora biti $10n + 35$ deljivo s 45. Število je deljivo s 45, če je hkrati deljivo s 5 in z 9. $10n + 35$ ima v desetiškem zapisu števke 1, 3, 5, ostalo so ničle (razen v primeru $n = 1$, ko dobimo število 45), tako je vsota števk tega števila 9, kar pomeni, da je število deljivo z 9. Ker se konča s števko 5, je deljivo tudi s 5 in s tem s 45.

5. Možne vsote vseh štirih števil si po velikosti sledijo:

$$a + b < a + c < a + d \leq b + c < b + d < c + d$$

ali

$$a + b < a + c < b + c \leq a + d < b + d < c + d.$$

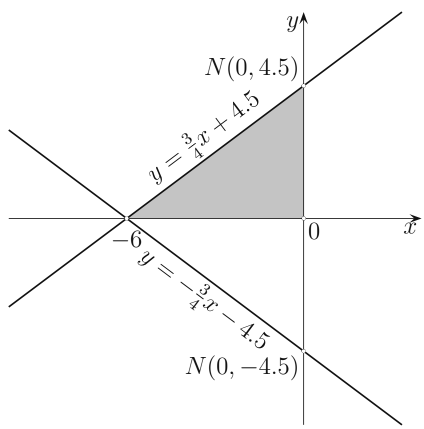
V prvem primeru je $c + d = 8$, $b + d = 7$ in $a + d = 5$, kar pomeni: $b = a + 2$, $c = a + 3$. Če zapišemo še četrto zvezo $b + c = 4$, dobimo $2a + 5 = 4$ in $a = -\frac{1}{2}$, kar ni celo število.

V drugem primeru je: $c + d = 8$, $b + d = 7$, $a + d = 4$, kar pomeni $b = a + 3$, $c = a + 4$. Upoštevamo še zvezo med b in c, $b + c = 5$, dobimo $2a + 7 = 5$ in $a = -1$.

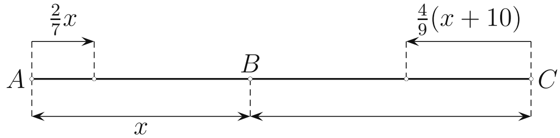
9. razred

1. Premica s koordinatnima osema tvori pravokotni trikotnik (glej sliko). Ena kateta trikotnika meri 6 enot. Dolžino druge katete izračunamo iz ploščine: $13.5 = \frac{6x}{2}$, zato druga kateta meri 4.5 enote. Premica seka ordinatno os v točki $N(0, 4.5)$ ali $N(0, -4.5)$.

Premica ima enačbo $y = kx + n$. V prvem primeru dobimo $0 = k \cdot (-6) + 4.5$ in od tod $k = \frac{3}{4}$, v drugem primeru pa iz $0 = k \cdot (-6) - 4.5$ sledi $k = -\frac{3}{4}$. Enačbi premic sta $y = \frac{3}{4}x + 4.5$ in $y = -\frac{3}{4}x - 4.5$.

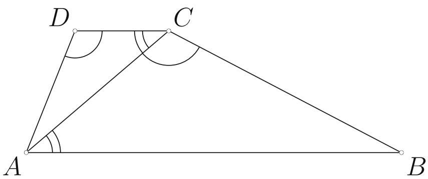


2. Če z x označimo razdaljo od A do B, razdalja od B do C meri $x+10$. Del, ki ga prevozi prvi motorist je $\frac{2}{7}x$, od kraja B pa je oddaljen $\frac{5}{7}x$.

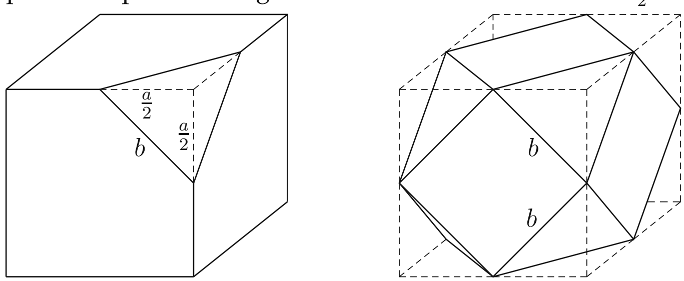


Del, ki ga prevozi drugi motorist je $\frac{4}{9}(x+10)$, od kraja B pa je oddaljen $\frac{5}{9}(x+10)$. Ker sta enako oddaljena od B, velja enačba: $\frac{5}{9}(x+10) = \frac{5}{7}x$. Rešitev x te enačbe je 35 km. Razdalja med krajema A in C je $2x+10 = 80$ km.

3. Kota $\sphericalangle DCA$ in $\sphericalangle BAC$ sta skladna, ker imata vzporedne krake. Ker sta skladna tudi kota $\sphericalangle ADC$ in $\sphericalangle ACB$, sta si trikotnika ACD in BAC podobna. Razmerje stranic zapišemo kot: $|AB| : |AC| = |AC| : |CD|$. Diagonala $|AC|$ tako meri 6 cm. Podobno lahko zapišemo še razmerje, v katerem nastopa krak AD: $|AD| : |DC| = |BC| : |AC|$, iz katerega izračunamo krak $|AD| = 4$ cm. Obseg trapeza meri $o = 12 + 3 + 8 + 4 = 27$ cm.



4. Ko mizar kocki odreže vogale, dobi telo, ki ga omejuje 8 skladnih enakostraničnih trikotnikov in 6 skladnih kvadratov. Stranica enakostraničnega trikotnika je enako dolga kot hipotenuza pravokotnega trikotnika s krakoma dolžine $\frac{a}{2}$.



Torej meri $b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Ploščina enakostraničnega trikotnika je enaka $\frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. Stranica kvadrata je enaka stranici enakostraničnega trikotnika, ploščina kvadrata pa meri $\frac{a^2}{2}$. Celotna površina novega telesa meri $P = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{8} + 6 \cdot \frac{a^2}{2} = a^2(\sqrt{3}+3)$. Če bi mizar pobarval prvotno kocko, ki ima površino $6a^2$, bi porabil 6 litrov barve, zato je za novo nastalo telo porabil $\frac{a^2(\sqrt{3}+3)}{6a^2} \cdot 6 = (\sqrt{3}+3)$ litrov barve.

5. a) Če hočemo, da bo število deljivo z 18, mora biti z 2 in z 9. Palindrom se torej začne in konča z 2 (najmanjša soda možna števka, ker na začetku ne sme biti 0). Vsota števk mora biti soda (ker vsaka izmed treh različnih števk v zapisu palindroma nastopa dvakrat) in deljiva z 9, torej najmanj 18. Števke na drugem tretjem, četrtem in petem mestu imajo torej vsoto 14, druga in četrta pa morata biti čim manjši, torej 0. Iskani palindrom je 207702.

b) Štirimestni palindromi so oblike $abba$. Njihov desetiški zapis je $abba = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 91 \cdot 11a + 10 \cdot 11b = 11(91a + 10b)$. Vsi štirimestni palindromi so deljivi z 11, torej niso praštevila.

Rešitve nalog 29. tekmovanja za Stefanovo priznanje – državno tekmovanje

8. razred (Sklop A)

A1	A2	A3	A4
C	B	A	B

8. razred (Sklop B)

B1 a) Takoj po pristanku je bila 1/12 letala v vodi, ostali del pa nad vodo. To pomeni, da je povprečna gostota letala 1/12 gostote vode:

$$\rho_{letala} = \frac{1}{12}\rho_{vode} = \frac{1}{12}\frac{1000\ \text{kg}}{\text{m}^3} = 83{,}3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Iz povprečne gostote letala lahko izračunamo njegovo prostornino

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{70000\ \text{kg}\cdot\ \text{m}^3}{83{,}3\ \text{kg}} = 840\ \text{m}^3$$

b) Letalo bo potonilo, ko bo njegova gostota večja od gostote vode. Ker je njegova gostota 1/12 gostote vode, se mora njegova masa povečati za 11-krat. Torej je masa vode, ki mora priteči v letalo, 11-krat večja od mase letala.

$$m_{vode} = 11 \cdot m_{letala} = 770000\ \text{kg}$$

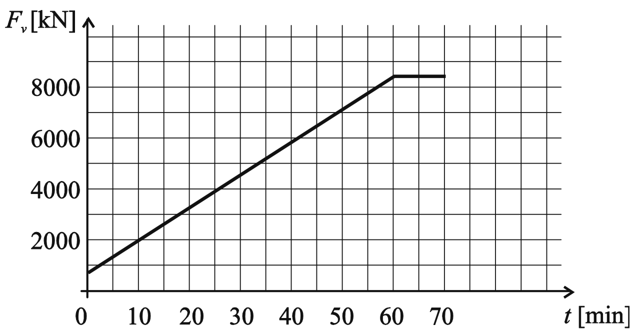
Ker en m^3 vode tehta 1000 kg, je prostornina vode, ki mora priteči v letalo 770 m^3

c) V eni uri mora priteči v letalo 770 m^3 vode. To je 770000 l vode. Torej mora vsako sekundo priteči 213,9 l.

3600 s ... 770000 l

1 s ... 213,9 l

d)



B2 a) Delo, ki ga opravi motor je enako produktu sile s katero vleče in razdalje

$$A = F \cdot s = 17\ \text{kN} \cdot 70\ \text{m} = 1190\ \text{kJ}$$

b) Ker se vozički gibljejo ves čas enakomerno velja $A = \Delta W_p \Rightarrow \Delta W_p = 1190\ \text{kJ}$

c) Sprememba potencialne energije je enaka produktu teže vozičkov in višinski razliki

$$\Delta W_p = F_g \cdot h \Rightarrow F_g = \frac{\Delta W_p}{h} = \frac{1190\ \text{kJ}}{50\ \text{m}} = 23{,}8\ \text{kN}$$

Masa vozičkov je približno 10 krat manjša od njihove teže, torej je 2380 kg

d) Če trenje zanemarimo, velja izrek o ohranitvi energije. Za koliko se bo zaradi nižje lege zmanjšala potencialna energija vozičkov, se bo povečala njihova kinetična energija .

$\Delta W_k = \Delta W_p$

$\Delta W_k = F_g \cdot \Delta h = 23{,}8\ \text{kN} \cdot 20\ \text{m} = 476\ \text{kJ}$

8. razred (Sklop C – eksperimentalna naloga)

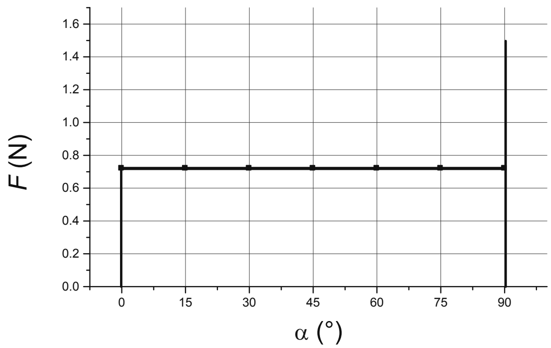
C1 a) Zaradi neenakih tež klad in nenatančnih silomerov lahko pride do 10% odstopanj med različnimi delovnimi mesti.

α (°)	15	30	45	60	75
F (N)	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75

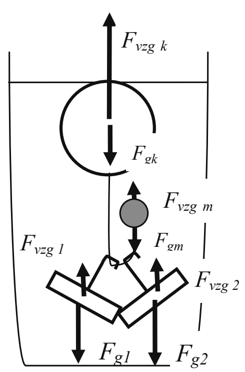
b) Pri kotu 0° je lahko sila *F od 0 N do 0,75 N,*

pri kotu 90° je lahko sila *F od 0 N do 1,5 N*

c)



C2 a)



$F_{vzg\ k}$ sila vzgona na kroglo

F_{gk} teža krogle

$F_{vzg\ m}$ sila vzgona na matice

$F_{g\ m}$ teža matic
$F_{vzg\ 1}$ sila vzgona na prvo utež
F_{vzg2} sila vzgona na drugo utež
$F_{g\ 1}$ teža prve uteži
$F_{g\ 2}$ teža druge uteži

b) Masa obešenih uteži in matic je približno 124 g. (Ker vse krogle niso povsem enake, je dovoljeno odstopanje ± 4 g). Teža obešenih železnih delov je 1,24 N.
Masa krogle je približno 3 g.

Prostornina potopljenih železnih delov (uteži in matic) je $V_ž = m/\rho_ž$ = 124 g / (7,8 g/cm^3)

= 16 cm^3

Sila vzgona na potopljene železne dele je $F_{vzg} = 0{,}010\ \mathrm{N/\,cm^3} \cdot 16\ \mathrm{cm^3} = 0{,}16\ \mathrm{N}$.

c) Ker sistem teles miruje, velja: $F_{gk} + F_{gž} = F_{vzg\,k} + F_{vzg\,ž}$

Sila vzgona na potopljeno kroglo je $F_{vzg\,k} = F_{gk} + F_{gž} - F_{vzg\,ž}$

$F_{vzg\,k} = 0{,}03\mathrm{N} + 1{,}24\ \mathrm{N} - 0{,}16\ \mathrm{N} = 1{,}11\ \mathrm{N}$.

d) Prostornino krogle izračunamo iz sile vzgona $V_k = F_{vzg\,k}/\sigma_v = 1{,}11\ \mathrm{N}/\ 0{,}010\ \mathrm{N/\,cm^3} \approx 110\ \mathrm{cm^3}$.

9. razred (Sklop A)

A1	A2	A3	A4
B	B	C	B

9. razred (Sklop B)

B1 a) $t = \frac{s}{v} = \frac{18{,}4\ \mathrm{m}}{41{,}7\ \mathrm{m}} \cdot \mathrm{s} = 0{,}44\ \mathrm{s}$

b) Sprememba hitrosti žogice je 150 km/h, čas ustavljanja lahko ocenimo na polovico časa, ko se žogica in kij dotikata – 1/2000 s

$$a = \frac{\Delta v}{t} = \frac{41{,}7\ \mathrm{m}}{\frac{1}{2000}\ \mathrm{s \cdot s}} = 83300\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$$

c) $s = \overline{v} \cdot t = \frac{20{,}83\ \mathrm{m} \cdot 1\ \mathrm{s}}{2000\ \mathrm{s}} = 0{,}01\ \mathrm{m}$

d) $F = m \cdot a = \frac{0{,}145\ \mathrm{kg} \cdot 83333\ \mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} = 12{,}1\ \mathrm{kN}$

B2 a) Delo, ki ga opravi motor, je enako produktu sile in razdalje $A = F \cdot s = 17\ \mathrm{kN} \cdot 70\ \mathrm{m} = 1190\ \mathrm{kJ}$.

b) Sedemdeset odstotkov moči lahko motor izkoristi za dvigovanje vozičkov:

100% ... 80 kW

70% ... 56 kW

$$P = \frac{A}{t} \Rightarrow t = \frac{A}{P} = \frac{1190\ \mathrm{kJ}}{56\ \mathrm{kW}} = 21{,}3\ \mathrm{s}$$

c) Ker se vozički gibljejo ves čas enakomerno, velja $A = \Delta W_p \Rightarrow \Delta W_p = 1190\ \mathrm{kJ}$

d) Za izračun kinetične energije vozičkov moramo izračunati hitrost in maso vozičkov.

$$\Delta W_p = m \cdot g \cdot \Delta h \Rightarrow m = \frac{\Delta W_p}{g \cdot \Delta h} = \frac{1190\ \mathrm{kJ}}{10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \cdot 50\ \mathrm{m}} = 2380\ \mathrm{kg}$$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{70\ \mathrm{m}}{21{,}3\ \mathrm{s}} = 3{,}3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$W_k = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{2380\ \text{kg} \cdot \left(3{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2} = 13\ \text{kJ}$$

e) $P = U \cdot I \Rightarrow I = \frac{P}{U} = \frac{80000\ \text{W}}{230\ \text{V}} = 350\ \text{A}$

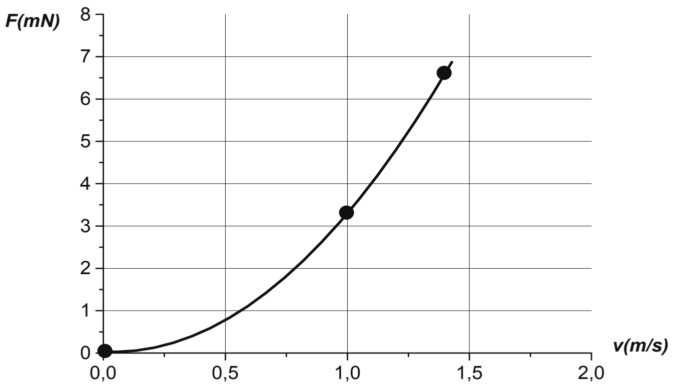
9. razred (Sklop C – eksperimentalna naloga)

C1 a) Masa ene skodelice je 0,33g , teža pa 3,3 mN.
Ker se skodelica zadnjih 100 cm giblje premo enakomerno, je sila upora kar enaka teži skodelice.
2 skodelici:
t_2 = 0,7 s (dovoljeno odstopanje ± 0,2 s).
v_2 = 1,0 m / 0,7 s = 1,4 m/s F_{upora2} = 6,6 mN

b) **1 skodelica:**
t_1 = 1,00 s (dovoljeno odstopanje ± 0,2 s).
v_2 = 1,0 m / 1,00 s =1,0 m/s F_{upora1} = 3,3 mN

c) **zelo lahka skodelica**:
Hitrost padanja bi bila zelo majhna, blizu vrednosti nič (dovoljena ocena 0 do 0,1 m/s)
$v_0 \approx 0$ F_{uporaO} = 0,003 mN

d)



e) F_{upora} *(pri 0,5 m/s)* ≈ 0,8 N

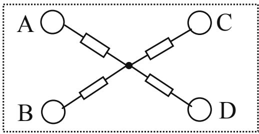
F_{upora} *(pri 1,0 m/s)* ≈ 3,3 N 3,3 N/ 0,8 N = 4,1

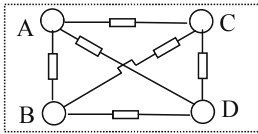
Odgovor: Če se hitrost poveča na dvakratno vrednost (npr. iz 0,5 m/s na 1,0 m/s) , se sila upora poveča približno štirikrat.

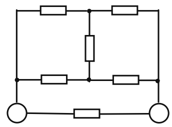
Zaradi ne povsem enakih skodelic so dovoljena večja odstopanja.

C2 a) Zaradi nenatančnih merilnikov in neenakih baterij so možna odstopanja 10% med različnimi delovnimi mesti.

priključka	AB	AC	AD	BC	BD	CD
I (mA)	6,8	6,8	6,8	6,8	6,8	6,8







b) 1. rešitev

2. rešitev

Razlaga 2. rešitve - vezje med dvema priključkoma

Ker so vsi tokovi enaki, so tudi poti med priključkoma enako "težke". Pri prvi rešitvi teče tok skozi dva upornika. Nekaj več razmisleka je potrebno pri drugi rešitvi: zaradi simetrije je vsak priključek neposredno povezan preko upornika z vsakim od ostalih treh priključkov. Če prerišemo vezje, ugotovimo, da je enako vezje med katerimakoli priključkoma.

Rešitve nalog 53. matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije – izbirno tekmovanje

I/1. 1. način. Označimo s P število nalog, pri katerih je tekmovalec prejel 1 točko in z N število nalog, pri katerih so mu $\frac{1}{4}$ točke odšteli. Tedaj velja $P - \frac{1}{4}N = 13$ oziroma $N = 4P - 52$. Ker je vseh nalog 24, sledi $P + N \leq 24$ oziroma $5P - 52 \leq 24$. Torej je $5P \leq 76$ in zato $P \leq 15$. Največja vrednost P je 15 ter je možna, če je $N = 8$.

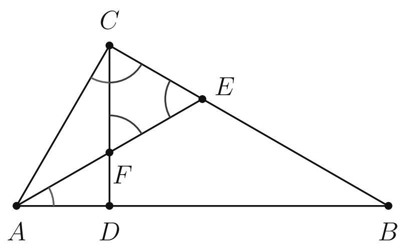
2. način. Tekmovalec je zbral 13 točk, če je pravilno rešil 15 nalog, napačno 8 nalog, pri eni pa ni odgovarjal ali pa je obkrožil več kot en odgovor.

Če bi tekmovalec pravilno rešil vsaj 16 nalog in bi zbral 13 točk, bi moral dobiti vsaj 3 negativne točke, zato bi moral vsaj $3 \cdot 4 = 12$ nalog rešiti napačno. Ker pa je skupaj 24 nalog in je $16 + 12 = 28 > 24$, to ni možno. Zato je pravilno rešil največ 15 nalog.

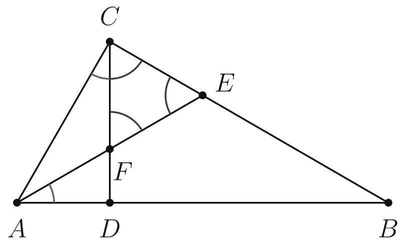
3. način. Tekmovalec je zbral 13 točk, če je pravilno rešil 15 nalog, napačno 8 nalog, pri eni pa ni odgovarjal ali pa je obkrožil več kot en odgovor.

Če bi tekmovalec pravilno rešil vsaj 16 nalog, bi jih največ $24 - 16 = 8$ rešil napačno in bi dobil vsaj $16 - \frac{1}{4} \cdot 8 = 14$ točk. Ker je prejel 13 točk, to ni možno. Zato je pravilno rešil največ 15 nalog.

I/2. 1. način. Ker je trikotnik CEF enakostraničen, je $\angle EFC = 60°$. Od tod sledi $\angle CFA = 120°$. Zato je $\angle FAC = 180° - \angle CFA - \angle ACF = 60° - \angle ACF$ in velja $\angle BAC = \angle BAE + \angle FAC = \angle BAE + 60° - \angle ACD = 60°$.
Ker je $|AB| = 2|AC|$ in $\angle BAC = 60°$, je trikotnik ABC polovica enakostraničnega trikotnika, torej je $\angle CBA = 30°$ in $\angle ACB = 90°$.



2. način. Ker je trikotnik CEF enakostraničen, je $\angle EFC = \angle CEF = 60°$. Od tod sledi $\angle CFA = \angle AEB = 120°$. Ker velja še $\angle BAE = \angle ACD = \angle ACF$, se trikotnika ABE in CAF ujemata v dveh kotih, torej sta si podobna. Zato velja $\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AC|}{|CF|}$ oziroma $|AE| = 2|CF|$.



Trikotnik CFE je enakostraničen, torej je $|AF| + |FE| = |AE| = 2|CF| = 2|FE|$ oziroma $|AF| = |FE| = |FC|$. Zato je trikotnik AFC enkakokrak z vrhom F in zaradi $\angle AFC = 120°$ je $\angle FAC = \angle ACF = 30°$. Od tod sledi $\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = 60°$ in $\angle CBA = 30°$.

I/3. Neenakost $x^2 + y^2 + 1 \geq 2(xy - x + y)$ preoblikujemo v neenakost $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 1 \geq 0$. Izraz na levi še dodatno preoblikujemo $(x - y)^2 + 2(x - y) + 1 \geq 0$ in opazimo, da je natanko popolni kvadrat $((x - y) + 1)^2 \geq 0$, zato velja neenakost za vsak par realnih števil x in y. Enakost velja natanko takrat, ko je $(x - y) + 1 = 0$.

I/4. Očitno je $r \neq 0$. Zapišimo r v obliki okrajšanega ulomka $r = \frac{m}{n}$ in privzemimo, da je n naravno število. Tedaj dobimo $\frac{m}{n}(5k - 7\frac{m}{n}) = 3$ oziroma $m(5kn - 7m) = 3n^2$. Zato je m delitelj $3n^2$. Ker pa sta si števili m in n tuji, $m \mid 3$. Ločimo štiri primere.

Če je $m = 1$, dobimo $5kn - 7 = 3n^2$ oziroma $n(5k - 3n) = 7$, od koder sledi, da $n \mid 7$. Ker je n naravno število, je enako 1 ali 7. Pri $n = 1$ dobimo rešitev $k = 2$ in $r = 1$, pri $n = 7$ pa protislovno enačbo $5k = 22$.

Če je $m = 3$, sledi $n(5k - n) = 21$. Spet vidimo, da $n \mid 21$, ker pa sta si m in n tuji, sledi da $n \mid 7$. Ponovno je $n = 1$ ali $n = 7$. Rešitev dobimo le v drugem primeru in sicer $k = 2$, $r = \frac{3}{7}$.

Če je $m = -1$, dobimo $n(5k + 3n) = -7$, zato ponovno $n \mid 7$. Pri $n = 1$ dobimo rešitev $k = -2$, $r = -1$, pri $n = 7$ pa rešitev ni.

Ostane še $m = -3$, ko je $n(5k + n) = -21$. Ker sta si m in n tuji, je n delitelj števila 7. Dobimo še eno rešitev in sicer $k = -2$, $r = -\frac{3}{7}$.

Vsi pari rešitev (k, r) so $(2, 1)$, $(-2, -1)$, $(2, \frac{3}{7})$ in $(-2, -\frac{3}{7})$.

I/5. Označimo z x število tekmovalcev pred Andrejem. Potem je tudi za Andrejem x tekmovalcev, vseh pa je $2x + 1$, torej liho. Ker je Andrej v vrsti pred Blažem, ki je na 19. mestu, je pred Andrejem največ 17 tekmovalcev, zato je $x \leq 17$. Torej je vseh tekmovalcev največ $2x + 1 \leq 2 \cdot 17 + 1 = 35$. Ker je Žan na 28. mestu, je tekmovalcev vsaj 28. Vsaka šola je poslala 3 tekmovalce, zato je bilo število tekmovalcev deljivo s 3. Med 28 in 35 sta s 3 deljivi le števili 30 in 33, liho pa je le število 33. Na tekmovanju je sodelovalo 33 tekmovalcev, torej 11 šol.

2. letnik

II/1. 1. način. Ker je $m^2 = 252 - n^5$ nenegativno število, sledi $n^5 \leq 252$, torej je $n < 4$. Če je $n = 1$ dobimo $m^2 = 251$, pri $n = 2$ sledi $m^2 = 220$ in $n = 3$ nam da $m^2 = 9$. Edina možnost je torej $m = n = 3$.

2. način. Ker je n naravno število, je $m^2 = 252 - n^5 \leq 252$. Zato je $m < 16$. Če vstavljamo po vrsti za m vrednosti od 1 do 15, dobimo za n^5 vrednosti 251, 248, 243, 236, 227, 216, 203, 188, 171, 152, 131, 108, 83, 56, 27. Ker je $1^5 = 1$, $2^5 = 32$, $3^5 = 243$ in $4^5 = 1024$, dobimo rešitev le pri $m = 3$, ko je $n = 3$.

II/2. Velja $x^2+\frac{1}{x^2}+1=(x+\frac{1}{x})^2-1=(x+\frac{1}{x}+1)(x+\frac{1}{x}-1)$. Ker je $x+\frac{1}{x}+1$ naravno število, je $x+\frac{1}{x}-1$ celo število in zato je $x^2+\frac{1}{x^2}+1$ celo število. Ker pa je $x^2+\frac{1}{x^2}+1\geq 1$, je $x^2+\frac{1}{x^2}+1$ res naravno število, ki je deljivo z $x+\frac{1}{x}+1$.

Opomba. Nalogo je možno rešiti tudi na precej težji način in sicer z vpeljavo $n=x+\frac{1}{x}+1$. Tedaj je $x^2+(1-n)x+1=0$ in zato

$$x=\frac{n-1\pm\sqrt{(n-1)^2-4}}{2}.$$

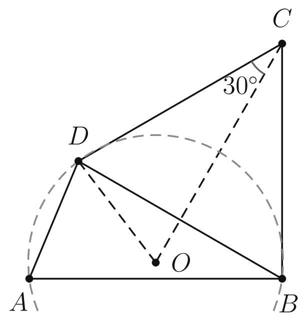
Če dobljeno vstavimo v izraz $x^2+\frac{1}{x^2}+1=\frac{x^4+x^2+1}{x^2}$, po daljšem preurejanju dobimo

$$\frac{n(n^3-4n^2+3n+2)\pm n(n^2-3n+2)\sqrt{n^2-2n-3}}{n^2-2n-1\pm(n-1)\sqrt{n^2-2n-3}}$$

$$=\frac{n(n^2-2n-1)(n-2)\pm n(n-2)(n-1)\sqrt{n^2-2n-3}}{n^2-2n-1\pm(n-1)\sqrt{n^2-2n-3}}=n(n-2).$$

Število $x^2+\frac{1}{x^2}+1=n(n-2)$ je zagotovo celo. Očitno je pozitivno, zato je naravno in deljivo z $n=x+\frac{1}{x}+1$.

II/3. (a) Točki C in O ležita na simetrali stranice BD, zato je $\angle DCO=30°$. Zaradi skladnosti trikotnikov ABD in OCD velja $\angle DBA=\angle DCO=30°$. Od tod sledi $\angle CBA=\angle CBD+\angle DBA=90°$.
(b) Če je $\angle ABC=90°$, velja $\angle ABD=30°$. Točki C in O ležita na simetrali stranice BD, zato je $\angle DCO=30°$. Zaradi zveze med obodnim in središčnim kotom velja $\angle BOD=2\angle BAD$. Toda $\angle BOD=2\angle COD$, zato je $\angle COD=\angle BAD$. V trikotnikih ABD in OCD torej velja $\angle BAD=\angle COD$, $\angle DBA=\angle DCO$ in $|BD|=|CD|$, zato sta skladna.



II/4. 1. način. Opazimo, da velja

$$\sqrt{2010+2\sqrt{2009}}=\sqrt{1+2\sqrt{2009}+2009}=\sqrt{(1+\sqrt{2009})^2}=1+\sqrt{2009}.$$

Podobno vidimo, da je $\sqrt{2010-2\sqrt{2009}}=\sqrt{2009}-1$. Ker je $1+\sqrt{2009}$ rešitev kvadratne enačbe $x^2+ax+b=0$, velja $2010+2\sqrt{2009}+a(1+\sqrt{2009})+b=0$ oziroma

$$\sqrt{2009}(2+a)=-b-2010-a.$$

Desna stran enačbe je celo število, zato mora biti tudi leva, kar pomeni, da je $2+a=0$ oziroma $a=-2$. Iz $-b-2010-a=0$ dobimo $b=-2008$. Kvadratna enačba $x^2-2x-2008=0$ ima rešitvi $1+\sqrt{2009}$ in $1-\sqrt{2009}$, zato število $\sqrt{2009}-1$ ne reši te enačbe.

2. način. Število $\sqrt{2010+2\sqrt{2009}}$ poskusimo zapisati v obliki $A+\sqrt{B}$ za neko celo število A in naravno število B, torej $\sqrt{2010+2\sqrt{2009}}=A+\sqrt{B}$. Po kvadriranju dobimo $2010+2\sqrt{2009}=A^2+B+2A\sqrt{B}$ oziroma $2010-A^2-B=2A\sqrt{B}-2\sqrt{2009}$. Leva stran enačbe je celo število, zato mora biti tudi desna. To bo zagotovo izpolnjeno, kadar sta obe strani enaki

0. Tedaj je $A^2B = 2009$ in $2010-A^2-B = 0$. Izpeljemo lahko $A^2(2010-A^2) = 2009$ oziroma $(A^2-1)(A^2-2009) = 0$. Ustreza le $A = 1$, ko je $B = 2009$. Torej je $\sqrt{2010+2\sqrt{2009}} = 1+\sqrt{2009}$.

Ker je $1+\sqrt{2009}$ rešitev kvadratne enačbe $x^2+ax+b = 0$, velja $2010+2\sqrt{2009}+a(1+\sqrt{2009})+b = 0$ oziroma

$$\sqrt{2009}(2+a) = -b-2010-a.$$

Desna stran enačbe je celo število, zato mora biti tudi leva, kar pomeni, da je $2+a = 0$ oziroma $a = -2$. Iz $-b-2010-a = 0$ dobimo $b = -2008$. Kvadratna enačba $x^2-2x-2008 = 0$ ima rešitvi $1+\sqrt{2009}$ in $1-\sqrt{2009}$. Očitno je $1-\sqrt{2009} < 0$. Ker je $\sqrt{2010-2\sqrt{2009}}$ pozitivno število in ni enako $1+\sqrt{2009}$, to število ne reši dobljene kvadratne enačbe.

3. način. Ker je dano število rešitev dane enačbe, mora veljati

$$(2010+2\sqrt{2009})+a\sqrt{2010+2\sqrt{2009}}+b = 0$$

oziroma

$$(2010+2\sqrt{2009})+b = -a\sqrt{2010+2\sqrt{2009}}. \tag{1}$$

Po kvadriranju dobimo

$$(2010^2+4\cdot 2009+4\cdot 2010\sqrt{2009})+b^2+2b(2010+2\sqrt{2009}) = a^2(2010+2\sqrt{2009}),$$

kar lahko preuredimo do

$$(2010^2+4\cdot 2009)+2\cdot 2010b+b^2-2010a^2 = (2a^2-4\cdot 2010-4b)\sqrt{2009}. \tag{2}$$

Ker je leva stran enačbe celo število, mora biti tudi desna, torej sta obe enaki 0. Zato je

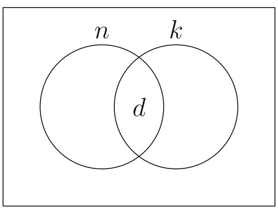
$$(2010^2+4\cdot 2009)+2\cdot 2010b+b^2-2010a^2 = 0,$$

$$4\cdot 2010+4b = 2a^2.$$

Iz druge enačbe izrazimo a^2 in vstavimo v prvo, da dobimo $b^2 = 2010^2-4\cdot 2009 = 4032064 = 2008^2$, oziroma $b = \pm 2008$. Zato je $a^2 = 2\cdot 2010\pm 2\cdot 2008 = 4020\pm 4016$. Ker $4020+4016 = 8036$ ni popolni kvadrat, je $b = -2008$ in $a^2 = 4$. Iz enakosti (1) sklepamo, da moramo tudi pri a vzeti negativen predznak.

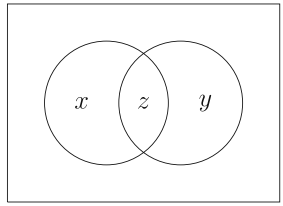
Dobili smo enačbo $x^2-2x-2008 = 0$. Rešitvi te enačbe sta $1\pm\sqrt{2009}$, ena je pozitivna, druga negativna. Ker je $\sqrt{2010+2\sqrt{2009}}$ pozitivna rešitev, je druga rešitev negativna, torej $\sqrt{2010-2\sqrt{2009}}$ ni rešitev dobljene enačbe.

II/5. 1. način. Označimo število nogometašev z n, število košarkašev s k, število dijakov, ki se ukvarjajo z obema športoma pa z d. Petina nogometašev se ukvarja s košarko, zato je $\frac{n}{5} = d$. Sedmina košarkašev se ukvarja z nogometom, zato je $\frac{k}{7} = d$. Od tod sledi $n = 5d$ in $k = 7d$.



Košarkašev, ki se ne ukvarjajo z nogometom je $k-d$, nogometašev, ki se ne ukvarjajo s košarko pa $n-d$. Zato je $(n-d)+(k-d)$ dijakov, ki se ukvarjajo samo z enim športom, torej je $110 = n+k-2d$. Dobimo $110 = 10d$ oziroma $d = 11$. Z obema športoma se ukvarja 11 dijakov.

2. način. Naj bo x število dijakov, ki se ukvarjajo le s košarko, y število dijakov, ki se ukvarjajo le z nogometom in z število dijakov, ki se ukvarjajo z obema športoma.



Vseh nogometašev je $y+z$. Ker petina nogometašev igra košarko, sledi $z = \frac{1}{5}(y+z)$ oziroma $y = 4z$. Vseh košarkašev je $x+z$, z nogometom pa se jih ukvarja $\frac{1}{7}$ oziroma z, torej je $z = \frac{1}{7}(x+z)$ oziroma $x = 6z$.

Ker se z natanko enim športom ukvarja $x+y$ dijakov, je $x+y = 110$, od koder sledi $110 = 6z + 4z = 10z$, torej je $z = 11$. Z obema športoma se ukvarja 11 dijakov.

3. letnik

III/1. Očitno je stopnja takega polinoma vsaj 2. Če bi bil tak polinom stopnje 2, bi bil oblike

$$p(x) = x^2 + ax + b = (x^2+1) + ax + (b-1).$$

Ker je ostanek pri deljenju z x^2+1 enak 2, je $ax + (b-1) = 2$, torej $a = 0$ in $b = 3$. Toda $p(x) = x^2 + 3 = (x-1)(x+1) + 4$ ne da ostanka 1 pri deljenju z $x+1$. Slednje lahko vidimo tudi tako, da izračunamo $p(-1) = 4$, saj je $p(-1)$ ravno ostanek pri deljenju polinoma $p(x)$ z $x+1$, ki torej ni enak 1.

Zato je tak polinom stopnje vsaj 3. Naj bo

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = (x+a)(x^2+1) + (b-1)x + c - a.$$

Ponovno sledi $(b-1)x + c - a = 2$ oziroma $b = 1$, $c = a + 2$. Torej je

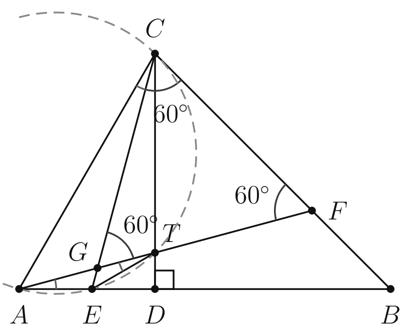
$$p(x) = x^3 + ax^2 + x + a + 2 = (x+1)(x^2 + (a-1)x + 2 - a) + 2a,$$

od koder sledi $2a = 1$ (kar lahko vidimo tudi iz zveze $1 = p(-1) = -1 + a - 1 + a + 2$). Iskan polinom je $p(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{5}{2}$.

III/2. Zadnja števka kvadrata naravnega števila je 0, 1, 4, 5, 6 ali 9. Označimo dano število z n. Da bo n popoln kvadrat, se mora končati s števko 0. Denimo, da je zadnjih k števk števila n enakih 0, števka pred tem pa je različna od 0. Če je k liho število, $k = 2m-1$, je tudi število $\frac{n}{10^{2m-2}}$ popoln kvadrat, ki je deljiv z 10. Zato mora biti deljiv tudi s 25, kar pa ni, saj je števka desetic enaka 3 ali 7.

Torej se mora število n končati s sodo ničlami, zato je k sodo število. Tedaj je $\frac{n}{10^k}$ naravno število in popoln kvadrat, katerega zadnja števka je enaka 3 ali 7, kar pa ni možno. Zato tako število ni popoln kvadrat.

III/3. Označimo $\angle BAF = \angle ACE = \varphi$. Ker je trikotnik CGF enakostraničen, sledi $\angle CGA = 120°$. Zato je $\angle GAC = 180° - \angle CGA - \angle ACG = 60° - \varphi$ in velja $\angle BAC = \angle BAF + \angle GAC = \varphi + 60° - \varphi = 60°$.



Ker je trikotnik AET enakokrak, velja $\angle ETA = \varphi = \angle ECA$, zato so točke A, E, T in C koncikllične. Tedaj pa je $\angle ECT = \angle EAT = \varphi$. Torej je $2\varphi = \angle ACE + \angle ECD = \angle ACD = \frac{\pi}{2} - \angle DAC = 30°$, od koder sledi $\varphi = 15°$.

Izračunamo lahko še $\angle CBA = \angle FBA = 60° - \varphi = 45°$ in $\angle ACB = 75°$.

III/4. 1. način. Označimo $x + y = z$, torej $x = z - y$. Potem je $y = z(2z - 2y + 3y) = z(2z + y)$, od koder lahko izrazimo

$$y = -\frac{2z^2}{z-1} = -\frac{2z^2 - 2 + 2}{z-1} = -2(z+1) - \frac{2}{z-1}.$$

Ker je y celo število, mora $z - 1$ deliti 2, torej je $z - 1$ enako 2, 1, -1 ali -2. Dobimo po vrsti $z = 3$, $z = 2$, $z = 0$ in $z = -1$, od koder lahko izračunamo, da so pari (x, y) enaki $(12, -9)$, $(10, -8)$, $(0, 0)$ in $(-2, 1)$.

2. način. Opazimo, da mora število $x + y$ deliti y. Torej lahko zapišemo $y = k(x + y)$ za neko celo število k. Če je $k = 0$, sledi $y = 0$ in iz prvotne enačbe tudi $x = 0$. Sicer lahko izrazimo $x = \frac{y}{k} - y$ in vstavimo v enačbo. Dobimo

$$y = \frac{y}{k}\left(\frac{2y}{k} - 2y + 3y\right) = \frac{y^2}{k}\left(1 + \frac{2}{k}\right).$$

Primer $y = 0$ smo že obravnavali, zato naj bo $y \neq 0$. Tedaj lahko obe strani delimo z y in izrazimo

$$y = \frac{k^2}{k+2} = \frac{k^2 + 2k - 2k}{k+2} = \frac{k(k+2) - 2k - 4 + 4}{k+2} = k + \frac{-2(k+2) + 4}{k+2} = k - 2 + \frac{4}{k+2}.$$

Od tod sledi, da je $k + 2$ delitelj števila 4. Ločimo šest primerov, saj je $k + 2$ lahko ± 1, ± 2 in ± 4. Pri $k + 2 = 1$ dobimo $y = 1$ in $x = -2$, pri $k + 2 = 2$ sledi $k = 0$, kar pa smo že obravnavali posebej. Če je $k + 2 = 4$, je $y = 3$ in $x = -\frac{3}{2}$ ni celo število.

Primer $k + 2 = -1$ nam da $y = -9$ in $x = 12$, $k + 2 = -2$ pa $y = -8$ in $x = 10$. Ostane še $k + 2 = -4$, od koder sledi $y = -9$ in $x = \frac{21}{2}$, kar pa spet ni celo število.

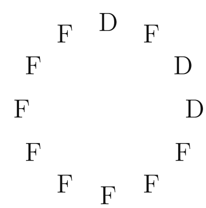
3. način. Enačbo lahko prepišemo v

$$2x^2 + 5xy + y(3y - 1) = 0.$$

Da ima kvadratna enačba v x celoštevilsko rešitev, mora biti diskriminanta popoln kvadrat. Torej je $D = y^2 + 8y = a^2$, od koder sledi $(y+4)^2 - 16 = a^2$ oziroma $(y+4-a)(y+4+a) = 16$. Števili $y + 4 - a$ in $y + 4 + a$ sta enake parnosti, torej sta obe sodi. Privzamemo lahko, da je število a neengativno in je tako $y + 4 + a \geq y + 4 - a$. Ločimo naslednje možnosti.

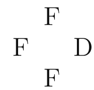
Če je $y + 4 - a = 2$ in $y + 4 + a = 8$, sledi $y = 1$, $a = 3$, kvadratna enačba ima eno celoštevilsko ničlo $x = -2$. Pri $y + 4 - a = 4 = y + 4 + a$ sledi $a = y = 0$ in $x = 0$. Iz $y + 4 - a = -4 = y + 4 + a$ dobimo $a = 0$, $y = -8$ in $x = 10$. Ostane še $y + 4 - a = -8$, $y + 4 + a = -2$, kjer je $y = -9$, $a = 3$ in $x = 12$.

III/5. 1. način. Naj bo x število deklet in y število fantov. Potem je $y = 3x$ in zato je skupaj $4x$ otrok.

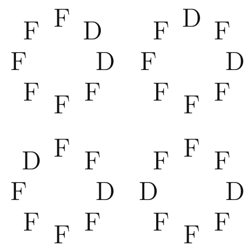


Naj bo a število dvojic v katerih sta otroka različnih spolov. Potem je število dvojic v katerih sta otroka istega spola enako $2a$. Torej je skupaj $3a$ dvojic. Število dvojic je kar enako številu vseh otrok, saj je vsak otrok v dveh dvojicah, kar nam da $2 \cdot 4x$ dvojic, pri tem pa smo vsako dvojico šteli dvakrat, torej je različnih dvojic $\frac{2 \cdot 4x}{2} = 4x$. Zato je $3a = 4x$. Najmanjše število x, pri katerem taka enačba lahko velja, je $x = 3$. Zato je za okroglo mizo sedelo vsaj 12 otrok. Če so se posedli kot prikazuje slika (z D so označena dekleta, z F pa fantje), je dvojic, v katerih sta otroka istega spola, dvakrat toliko kot dvojic, v katerih sta otroka različnega spola.

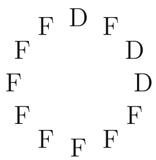
2. način. Če je za okroglo mizo sedelo samo eno dekle, so sedeli še trije fantje. Tedaj sta dve dvojici, v katerih sta otroka različnega spola in dve dvojici, v katerih sta otroka istega spola. Ker to ne zadostuje pogojem naloge, sta za mizo sedeli vsaj dve dekleti.



Preštejmo števila dvojic, če sta za mizo sedeli dve dekleti. Če sta sedeli skupaj, sta le 2 dvojici, v katerih sta fant in punca, ostalih dvojic pa je 6. Recimo, da dekleti ne sedita skupaj. Obravnavajmo primere glede na najmanjšo skupino fantov, ki sedijo skupaj. Ker je vseh fantov 6, ima najmanjša skupina največ 3 fante. V vseh treh primerih je število dvojic, v katerih sta otroka istega spola enako številu dvojic v katerih sta otroka različnega spola.



Noben izmed obravnavanih primerov ne ustreza pogojem naloge, zato so za mizo sedela vsaj 3 dekleta. Tedaj ni težko najti primerne postavitve, na primer kot prikazuje zadnja slika.



4. letnik

IV/1. Naj bo d diferenca zaporedja (a_n). Potem je $a_2 = 1+d$, $a_5 = 1+4d$ in $a_{11} = 1+10d$. Ker a_2, a_5 in a_{11} tvorijo geometrijsko zaporedje, velja $(1+4d)^2 = (1+d)(1+10d)$, oziroma $6d^2 = 3d$. Ker je zaporedje nekonstantno, je $d = \frac{1}{2}$, vsota prvih 2009 členov pa je enaka $2009 + \frac{2009 \cdot 2008}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1010527$.

Opomba. Pogoj, da a_2, a_5 in a_{11} tvorijo geometrijsko zaporedje lahko zapišemo tudi v obliki $(d+1)q^2 = (4d+1)q = 10d+1$, kjer q označuje kvocient dveh zaporednih členov tega zaporedja.

IV/2. Naj bo n sodo naravno število, $n = 2k$. Tedaj je $\frac{n^2}{4} = k^2$ celo število, zato je $[\frac{n^2}{4}] = k^2$ popolni kvadrat.

Če je n liho število, ga lahko zapišemo v obliki $n = 2k+1$, $k \geq 0$. Tedaj je

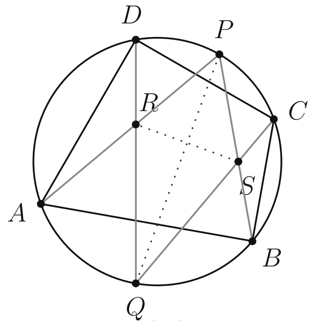
$$\left[\frac{n^2}{4}\right] = \left[\frac{4k^2+4k+1}{4}\right] = \left[k^2+k+\frac{1}{4}\right] = k^2+k = k(k+1).$$

Da bo število $k(k+1)$ popoln kvadrat, morata biti števili k in $k+1$ popolna kvadrata, saj sta si tuji, torej $k = a^2$ in $k+1 = b^2$, od koder sledi $(b-a)(b+a) = 1$. Možnosti sta dve in sicer $b-a = 1 = b+a$ ter $b-a = -1 = b+a$. Iz obeh sledi $k = 0$, torej je $n = 1$ edino tako liho število.

Da je k^2+k popolni kvadrat, lahko vidimo še drugače. Kvadratna enačba $k^2+k-x^2 = 0$ ima rešitvi $k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4x^2}}{2}$, zato je $1+4x^2 = y^2$ oziroma $(y-2x)(y+2x) = 1$. Od tod sledi $x = 0$, zato je $k = 0$.

Vrednost izraza $[\frac{n^2}{4}]$ je popoln kvadrat natanko takrat, ko je $n = 1$ ali pa je n sodo število.

IV/3. Zaradi tetivnosti štirikotnika $AQPD$ velja $\angle RPQ = \angle APQ = \angle ADQ$. Ker je DQ simetrala kota ADB, je $\angle ADQ = \angle QDB$. Zaradi tetivnosti štirikotnika $QBPD$ velja še $\angle QDB = \angle QPB = \angle QPS$. Torej je $\angle RPQ = \angle QPS$.
Podobno zaradi tetivnosti štirikotnika $QBPD$ dobimo $\angle PQR = \angle PQD = \angle PBD$. Ker je BP simetrala kota $\angle CBD$, je $\angle PBD = \angle CBP$, iz tetivnosti štirikotnika $QBCP$ pa sledi še $\angle CBP = \angle CQP = \angle SQP$. Torej je $\angle PQR = \angle SQP$.



Trikotnika SPQ in RPQ se ujemata v kotih in skupni stranici, zato sta skladna. Torej je štirikotnik $PRQS$ deltoid, od koder sledi, da je $PQ \perp RS$.

IV/4. 1. način. Iz formule za dvojne kote in iz adicijskih izrekov za sinus sledi

$$\begin{aligned}
&\sin(4x) + 2\sin(5x) + \sin(6x) = \\
&\quad = 2\sin(2x)\cos(2x) + 2(\sin(2x)\cos(3x) + \sin(3x)\cos(2x)) + 2\sin(3x)\cos(3x) \\
&\quad = 2\cos(2x)(\sin(2x) + \sin(3x)) + 2\cos(3x)(\sin(2x) + \sin(3x)) \\
&\quad = 2(\cos(2x) + \cos(3x))(\sin(2x) + \sin(3x)),
\end{aligned}$$

slednje pa je po predpostavki enako $2(\sin(2x) + \sin(3x))$, kar je bilo treba pokazati.

2. način. S pomočjo adicijskih izrekov lahko $\cos(2x) + \cos(3x) = 1$ preoblikujemo v

$$4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0.$$

Podobno je

$$2\sin(2x) + 2\sin(3x) = 2\sin x(4\cos^2 x + 2\cos x - 1)$$

in

$$\sin(4x) + 2\sin(5x) + \sin(6x) = 2\sin x(16\cos^5 x + 16\cos^4 x - 12\cos^3 x - 12\cos^2 x + \cos x + 1).$$

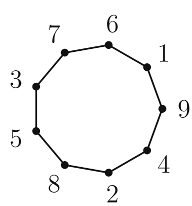
Zato je dovolj pokazati

$$4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 16\cos^5 x + 16\cos^4 x - 12\cos^3 x - 12\cos^2 x + \cos x + 1.$$

Zapis poenostavimo z vpeljavo $\cos x = t$. Pokazati želimo $16t^5 + 16t^4 - 12t^3 - 16t^2 - t + 2 = 0$, vemo pa, da velja $4t^3 + 2t^2 - 3t - 2 = 0$. Torej je dovolj preveriti, da polinom $4t^3 + 2t^2 - 3t - 2$ deli polinom $16t^5 + 16t^4 - 12t^3 - 16t^2 - t + 2$. Res, če polinoma delimo, dobimo

$$16t^5 + 16t^4 - 12t^3 - 16t^2 - t + 2 = (4t^3 + 2t^2 - 3t - 2)(4t^2 + 2t - 1). \tag{3}$$

IV/5. Pokazali bomo, da je $n = 16$. Kot prikazuje slika, lahko števila od 1 do 9 zapišemo v oglišča pravilnega 9-kotnika tako, da je vsota treh zaporednih števil največ 16.



Dokažimo, da pri $n < 16$ števil od 1 do 9 ni mogoče razporediti tako, da je vsota števil v poljubnih treh zaporednih ogliščih največ n. Denimo, da je to možno. Če seštejemo vse vsote števil iz treh zaporednih oglišč, bomo vsako število šteli trikrat, saj nastopa v treh takšnih vsotah. Torej

je dobljeno število enako $3 \cdot (1+2+\ldots+9) = 135$. Po drugi strani pa je vsaka vsota števil iz treh zaporednih oglišč največ n, vseh vsot je 9, zato je vsota vseh največ $9n$. Sledi $9n \geq 135$ oziroma $n \geq 15$.
Pokažimo še, da vrednost n ne more biti 15. V tem primeru namreč v zgornji oceni velja enakost, kar pomeni, da so vse vsote števil iz treh zaporednih oglišč enake 15. Če označimo števila v štirih zaporednih ogliščih po vrsti z a_1, a_2, a_3 in a_4 to pomeni, da je $a_1+a_2+a_3 = 15$ in $a_2 + a_3 + a_4 = 15$, od koder sledi $a_1 = a_4$, kar pa ni možno, saj razvrščamo 9 različnih števil. Od tod sledi, da mora biti n vsaj 16.