Tekmovanja

Razpis 20. državnega tekmovanja v razvedrilni matematiki

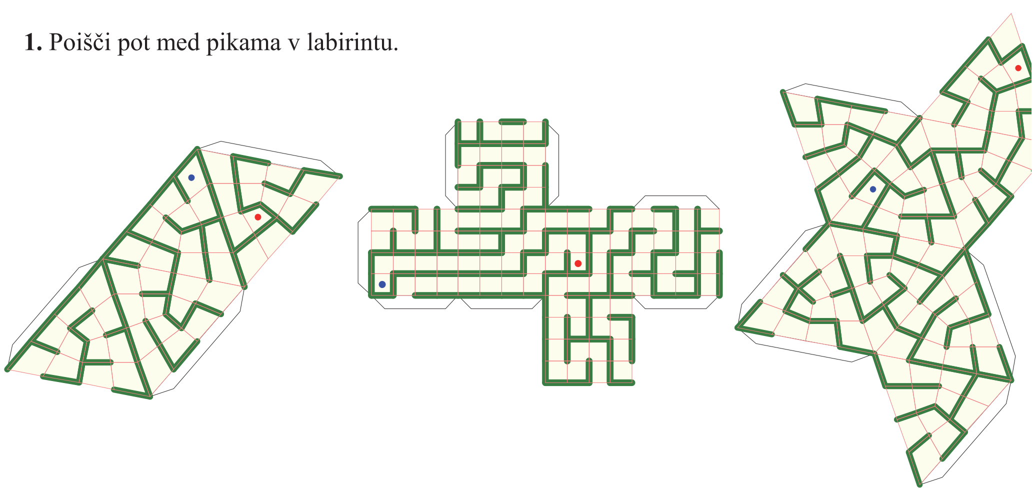
20. državno tekmovanje iz razvedrilne matematike bo potekalo
v soboto, 26. septembra 2009,
na Fakulteti za elektrotehniko v Ljubljani.

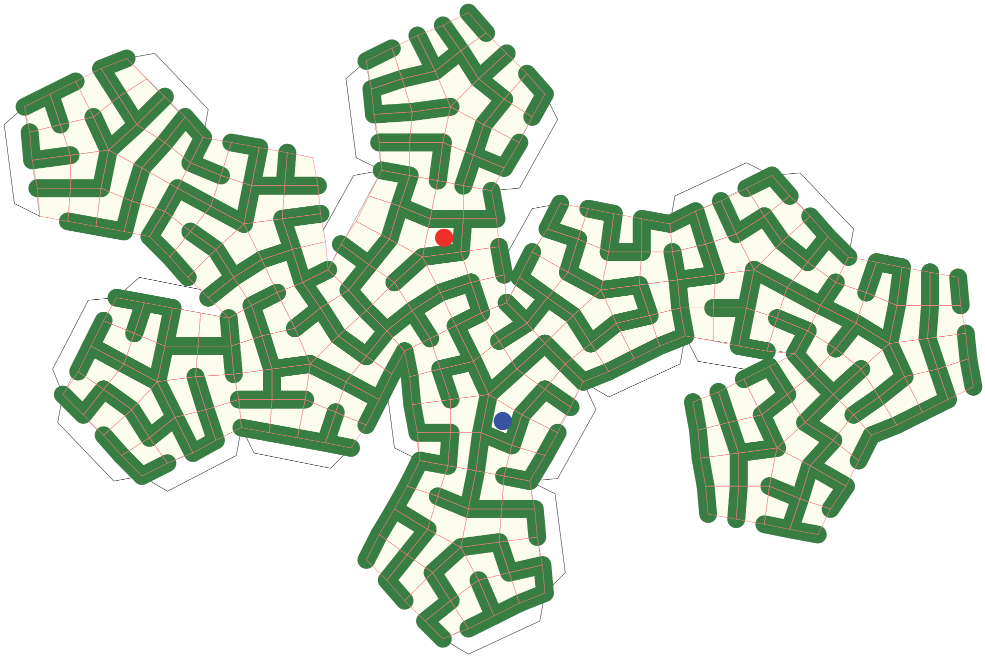
Na tekmovanje se lahko učenci 6., 7., 8. in 9. razreda devetletne OŠ, dijaki in študentje (oz. odrasli) prijavijo na tri načine:

1) *Prek šolskega tekmovanja, ki ga mora izvesti njihova šola do 1. julija 2009*. Naloge za šolsko tekmovanje bodo šole pripravile same in opravile tudi izbor učencev. Vsaka šola lahko prijavi na državno tekmovanje največ enega učenca za vsak razred ali letnik, seznam tekmovalcev naj pošlje na uredništvo revije L&RM do 1. avgusta 2009.
2) Tekmovalci se tako kot prejšnja leta lahko prijavijo z reševanjem nalog v reviji L&RM. Rešiti morajo čim več nalog iz rubrike *Tekmujmo v razvedrilni matematiki* iz te številke. Rešitve nalog morajo poslati do 28. avgusta na naslov **Logika d.o.o., Svetčeva 11, 1240 Kamnik,** s pripisom "**Za tekmovanje**" v navadni (**nepriporočeni**) pošiljki. Poznejših prijav zaradi velikega števila tekmovalcev ne bomo upoštevali. Učenci, študentje in dijaki naj pripišejo razred oziroma letnik, ki ga bodo obiskovali jeseni. Te podatke navedite tudi na zunanjem delu kuverte. Na tekmovanje bodo povabljeni tekmovalci, ki bodo pravilno rešili največ nalog (pri čemer bomo seveda upoštevali starost tekmovalca).
3) Prvih pet tekmovalcev iz vsake skupine na 19. državnem tekmovanju iz razvedrilne matematike se uvrsti na tekmovanje s prijavo in rešitvijo ene same naloge. Seznam uvrščenih tekmovalcev bo objavljen na medmrežju na strani

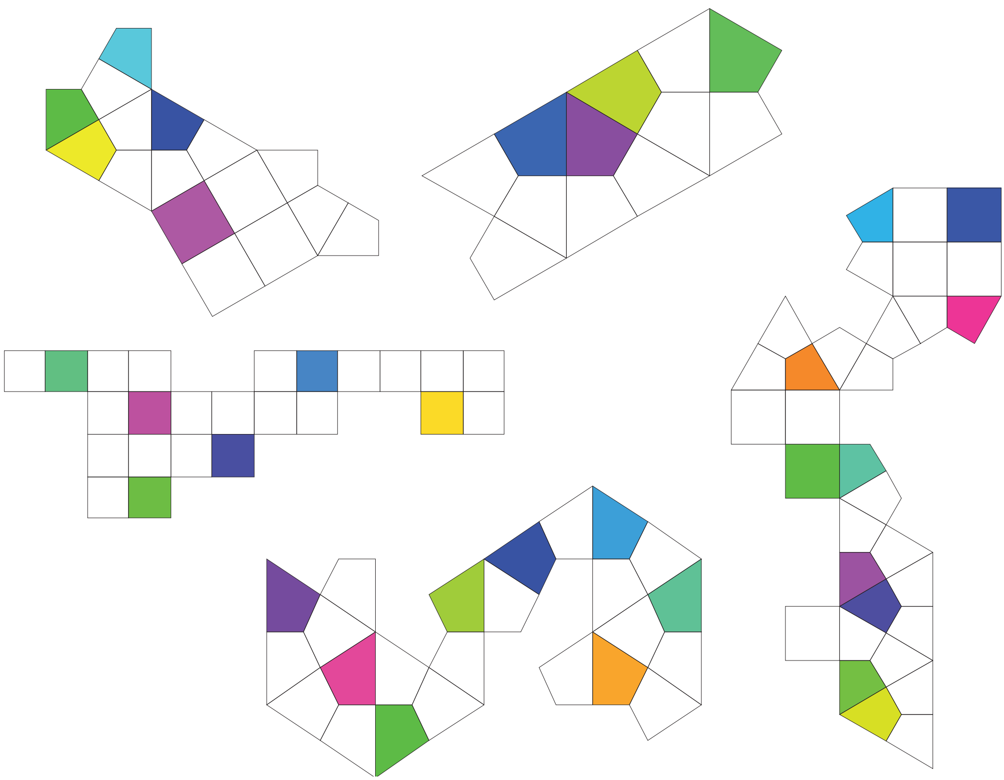
http://matematika.fe.uni-lj.si/people/izidor/homepage/RM/ do 14. septembra 2009.
Člani tekmovalnih komisij, ki želijo tudi tekmovati, naj to sporočijo do 14. 9. 2009.

1. Poišči pot med pikama v labirintu.

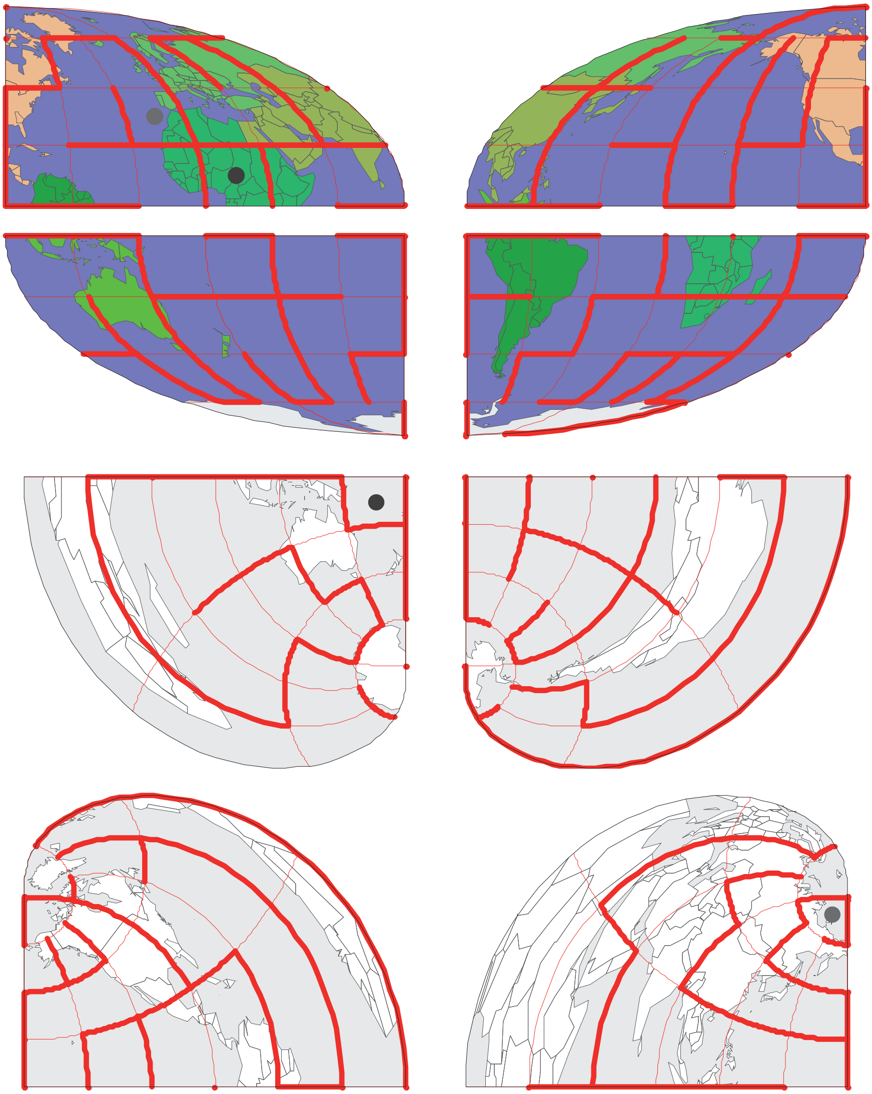




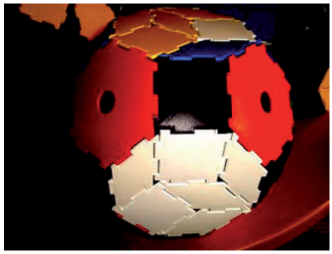
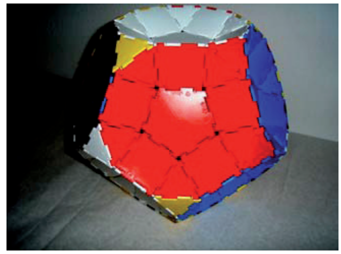
2. Dane so delno pobarvane mreže teles. Pobarvaj še preostale dele.



3. Poveži točki na zemeljskem labirintu



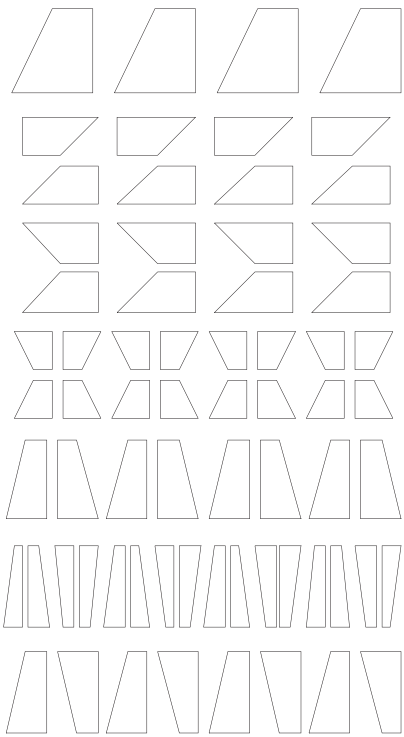
4. Koliko ploščic posamezne oblike potrebujemo za izdelavo naslednjih teles?

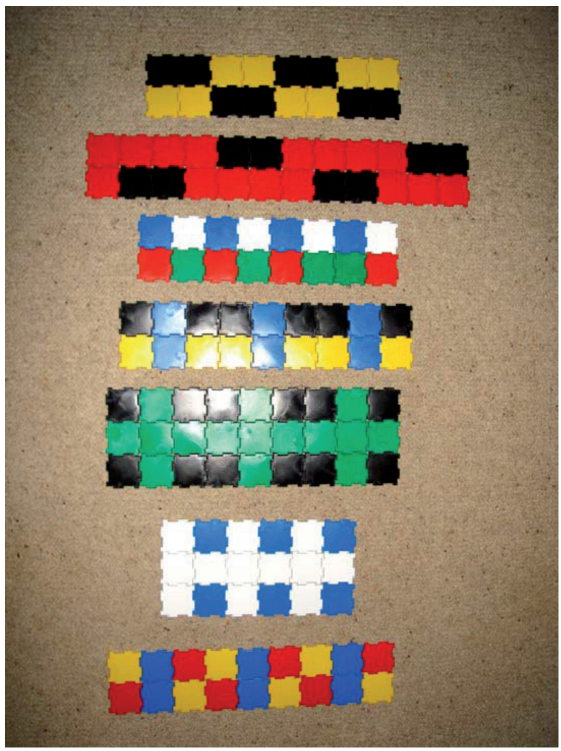
  

	Št. trikotnikov	Št. kvadratov	Št. petkotnikov	Št. šestkotnikov	Št. rombov
1					
2					
3					
4					
5					
6					

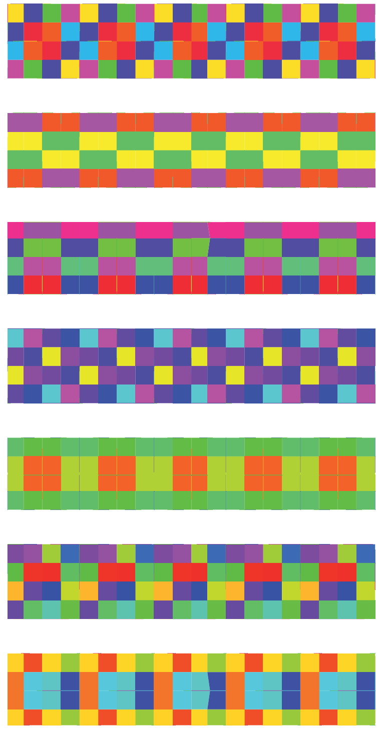
5. S črto poveži sliko iz levega stolpca s tisto sliko desnega stolpca, ki ustreza isti grupi.

a)

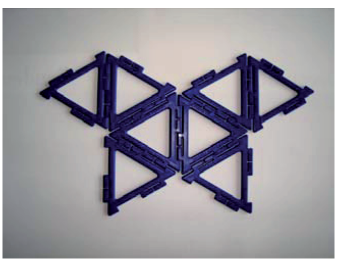
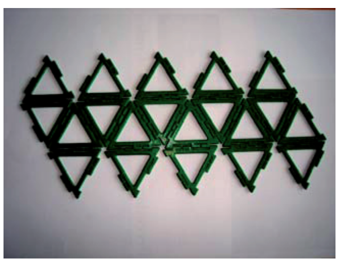
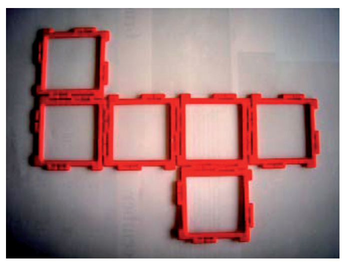


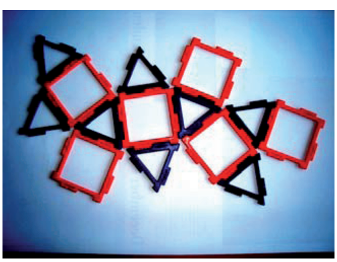
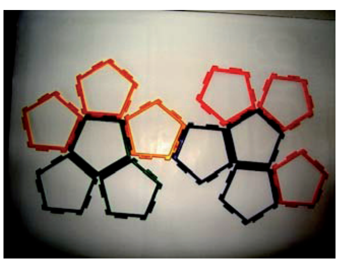
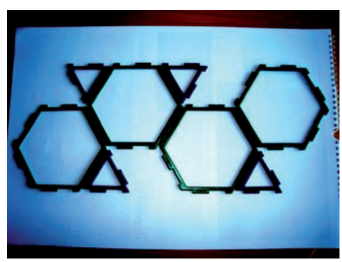


b)

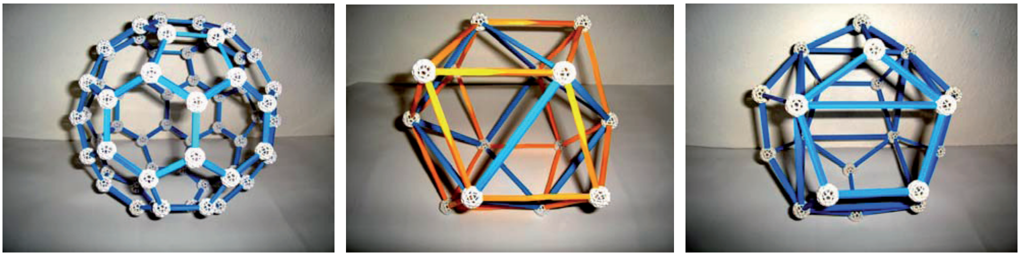


6. Poveži po dve stranici mreže, ki dasta isti rob poliedra.

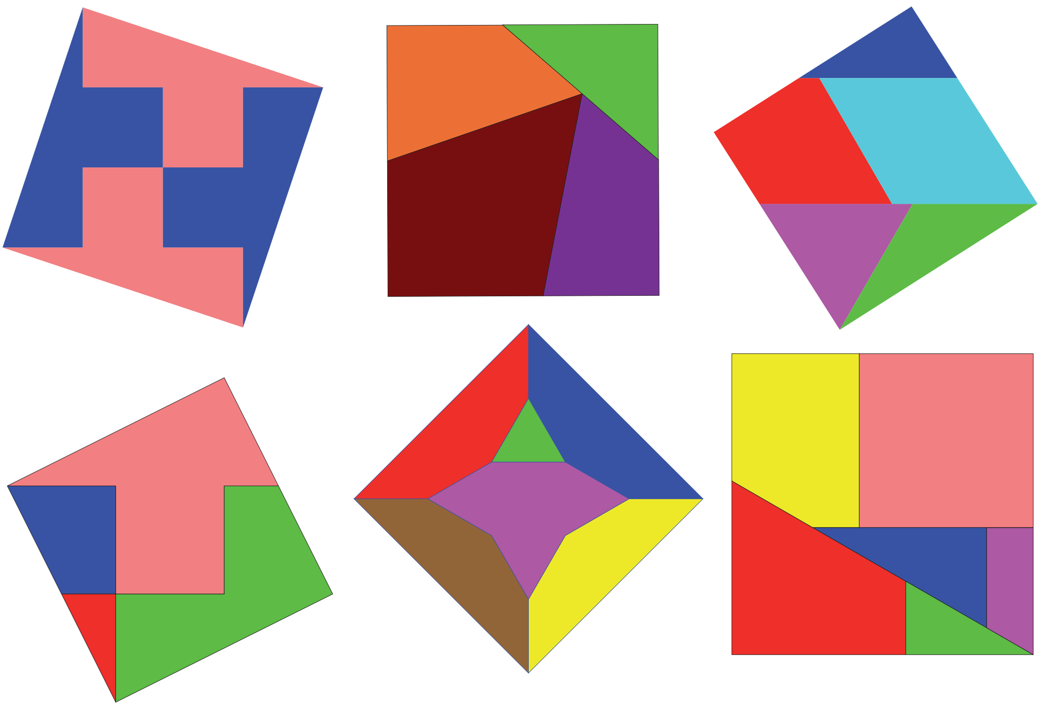




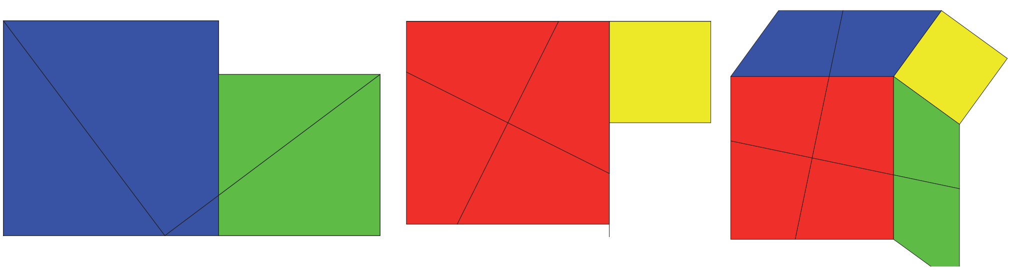
7. Koliko palic in koliko krogel potrebujemo za izdelavo naslednjih teles: prisekani dvajseterec, rombski dvanajsterec z včrtano kocko in dvanajsterec z včrtano kocko.

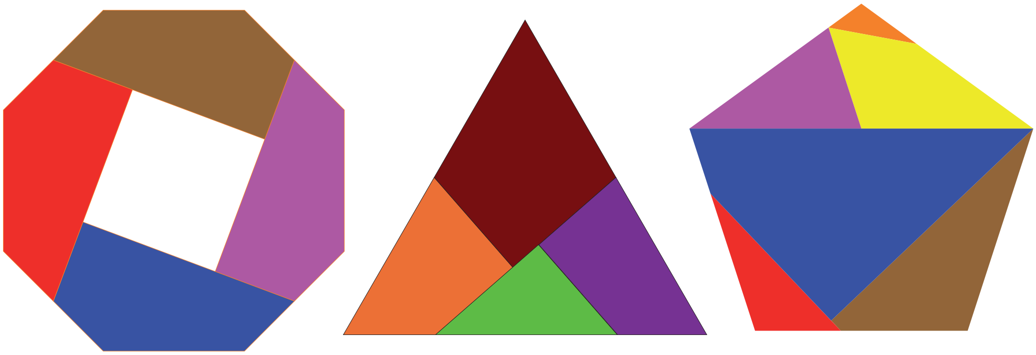


8. Razreži naslednje kvadrate in nato sestavi: dva grška križa, enakostranični trikotnik, šestkotnik, grški križ, osemkotnik in gnomon (kotnik). Kvadrate za razrez poiščite na naslednjih straneh!

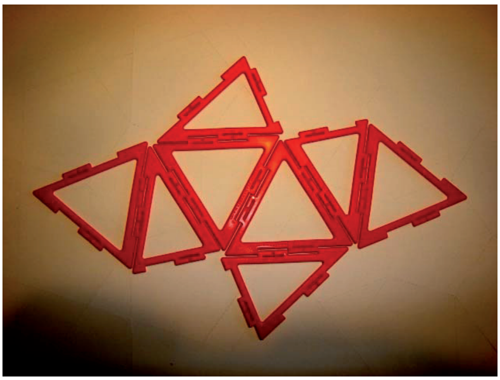


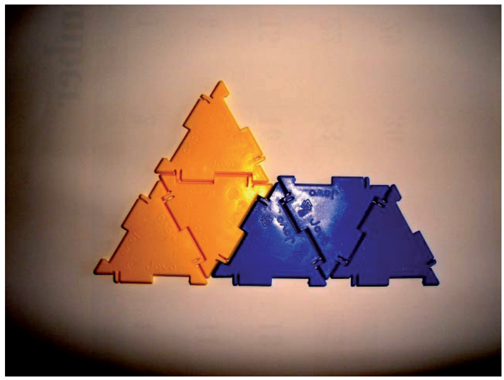
9. Razreži naslednje like in iz vsakega sestavi kvadrat. Like za razrez poiščite na naslednjih straneh!



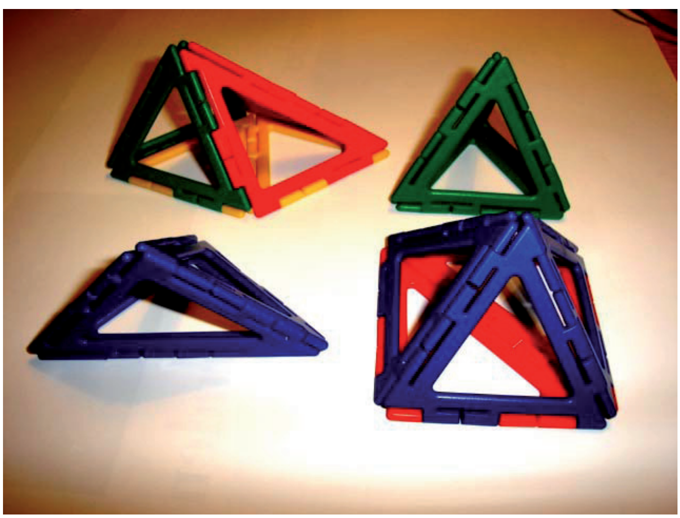


10. Iz vsake od naslednjih mrež lahko dobiš polieder na dva načina. Poveži po dve stranici trikotnikov, ki bosta dali isti rob. Za vsak način uporabi drugo barvo.





11. Izračunaj površine in prostornine teles, ki jih lahko dobiš s sestavljanjem štirih enakostraničnih trikotnikov s stranico 1 in dveh enakokrakih pravokotnih trikotnikov.



12. V n x n kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do n, tako da bo v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu nastopalo vseh n števil ter da bodo izpolnjene vse relacije.

a)

	>	2				
		3			<	
3	>		<			
			>	1		

b)

4					<	
	<					
			<		>	
1					>	

c)

	>		>			2
3			<			
			<		>	

d)

1	<				<	
					>	
			>		>	
		2				

e)

2	>		<	3		
	>					2
	<					
			>			

f)

			>		<	4
1	<				>	
		2				
	>					

g)

2			>		<	
			>			
						3
	>		<	3		

h)

			<	4		
			<			
3	<				>	
		2	>			

i)

3	>		<					5
	<	5	>				>	2
							<	
			<				>	
		1			<			

j)

1							>	
	<		<				>	
4								
			>		<	2		
	>		<	5	>			

k)

	>		<		<			
		5	>					1
			>	2	<		>	
					<			
2		3	<					

l)

			>				<	
			<		>	3		2
1	<	5			<			
	>			5			<	
					<			

■ 28. mednarodno matematično tekmovanje mest – pomladanski krog

□ I. skupina (1.del)

1. S pisalom v eni potezi (brez dvigovanja) na papir narišemo petkrako zvezdo, ki sestoji iz petih trikotnikov (kraki) in osrednjega petkotnika $\mathcal{P}$. Ali je $\mathcal{P}$ nujno pravilni petkotnik, če so kraki zvezde paroma skladni trikotniki?

2. Na tabli sta zapisani 2007-mestni števili m in n. Izkaže se, da lahko v številih m in n zbrišemo po 7 števk tako, da dobimo enaki števili. Dokaži, da lahko tedaj v števili m in n vrinemo po 7 števk tako, da dobimo enaki števili.

3. Trdnjava na šahovnici napada neko polje, če sta to polje in trdnjava bodisi v skupni vrstici, bodisi v skupnem stolpcu. Najmanj koliko trdnjav moramo postaviti na običajno šahovnico velikosti 8×8, da bo za vsako belo polje šahovnice obstajala trdnjava, ki to polje napada?

4. Dana so tri taka neničelna realna števila, da imajo vse kvadratne funkcije, katerih koeficienti so dana tri števila v nekem vrstnem redu, realno ničlo. Ali od tod sledi, da ima vsaka izmed teh kvadratnih funkcij pozitivno realno ničlo?

5. Pita ima obliko trikotnika T, škatla za pito pa obliko trikotniku T zrcalnega trikotnika. Kako lahko pito razrežemo na dva kosa tako, da jo brez prevračanja (zrcaljenja) in prekrivanja kosov zložimo v škatlo, če

   a) ima trikotnik T kota φ in 3φ?

   b) je T topokotni trikotnik, katerega topi kot je dvakrat večji od enega izmed preostalih dveh kotov?

□ II. skupina (1.del)

1. Polja kvadratne tabele velikosti 9×9 pobarvamo kot črno-belo šahovnico, pri čemer so vogalna polja bela. Trdnjava na šahovnici napada neko polje, če sta to polje in trdnjava bodisi v skupni vrstici, bodisi v skupnem stolpcu. Najmanj koliko trdnjav moramo postaviti na to šahovnico, da bo za vsako belo polje šahovnice obstajala trdnjava, ki to polje napada?

2. Realni polinom $x^3 + px^2 + qx + r$ ima tri ničle na odprtem intervalu $(0, 2)$. Dokaži neenakost

$$-2 < p + q + r < 0.$$

3. Premica p se dotika krožnice k v točki A. Na premici p izberimo točko B, $B \neq A$, in premico p zavrtimo okrog središča krožnice k za neki kot. Pri tem točka B preide v točko B', točka A pa v točko A'. Dokaži, da premica AA' razpolavlja daljico BB'.

4. Dano je zaporedje števil 0 in 1, pri čemer je k-ti člen tega zaporedja enak 0, če je vsota števk naravnega števila k soda in 1, če je ta vsota liha. Začetek tega zaporedja je tako sledeč:

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, \ldots.$$

   Dokaži, da dano zaporedje ni periodično. (Zaporedje a_k je *periodično*, če obstaja tako število d, da za vsak k velja $a_k = a_{k+d}$.)

5. Pita ima obliko trikotnika T, škatla za pito pa obliko trikotniku T zrcalnega trikotnika. Kako lahko pito razrežemo na dva kosa tako, da jo brez prevračanja (zrcaljenja) in prekrivanja kosov zložimo v škatlo, če

   a) je T topokotni trikotnik, katerega topi kot je dvakrat večji od enega izmed preostalih dveh kotov?

   b) ima trikotnik T kote $20°$, $30°$ in $130°$.

□ I. skupina (2.del)

1. Naj bo N naravno število. Marija išče celo število k, ki je najbližje številu $\sqrt{N}$. V ta namen določi popolni kvadrat m^2 (kjer je m naravno število), ki je najbližji številu N. Ali ima Marija prav, ko trdi, da je $k = m$?

2. Na stranicah AB, BC, CD in DA enotskega kvadrata $ABCD$ zapored izberemo take točke K, L, M in N, da je daljica KM vzporedna stranici BC in daljica LN vzporedna stranici AB. Določi ploščino trikotnika MND, če veš, da ima trikotnik KBL obseg 1.

3. Ana izbere 20 zaporednih naravnih števil in jih v nekem vrstnem redu enega poleg drugega zapiše na papir. Na papirju se tako pojavi neko naravno število M. Beno stori enako z 21 zaporednimi naravnimi števili in dobi število N. Ali je lahko $M = N$?

4. V n-kotniku P narišemo nekaj njegovih diagonal tako, da se nobene tri ne sekajo v skupni točki v notranjosti mnogokotnika P. Narisane diagonale dani mnogokotnik razdelijo na same trikotnike. Določi največje možno število teh trikotnikov.

5. Določi vsa končna aritmetična zaporedja z razliko d, katerih členi so praštevila, število členov pa presega razliko d.

6. V štirikotniku $ABCD$ imajo stranice AB, BC in CD enako dolžino, točka M pa je razpolovišče stranice AD. Določi kot, pod katerim se sekata diagonali štirikotnika $ABCD$, če je $\angle BMC = 90°$.

7. Nadja po mizi naključno razporedi 52 igralnih kart vzdolž krožnice, pri čemer eno mesto pusti prazno. Andrej, ki se nahaja v sosednji sobi, si zamisli neko karto in jo sporoči Nadji. Če se karta, ki si jo izbere Andrej, nahaja poleg praznega prostora, jo Nadja premakne na prazno mesto, sicer pusti vse karte pri miru. Svojih potez Nadja Andreju ne pove. Andrej si znova izbere karto in tako z Nadjo ponavljata opisani postopek, dokler Andrej ne ustavi igre.

   a) Ali lahko Andrej zagotovi, da v trenutku, ko se igra ustavi, nobena karta ni v svojem izhodiščnem položaju?

   b) Ali lahko Andrej zagotovi, da v trenutku, ko se igra ustavi, pikov as ni poleg praznega mesta?

□ II. skupina (2.del)

1. Na paraboli z enačbo $y = x^2$ so izbrane take točke A, B, C in D, da se premici AB in CD sekata na osi y. Določi absciso točke D, če veš, da so abscise točk A, B in C zapored enake a, b in c.

2. Dan je tak konveksen ravninski lik F, da lahko vsak enakostranični trikotnik s stranico dolžine 1 v ravnini vzporedno premaknemo tako, da so vsa tri njegova oglišča na robu lika F. Ali je lik F nujno krog?

3. Ali obstaja tak nekonstanten realni polinom f, da ima enačba $f(x) = a$ sodo število rešitev za vsako realno število a?

4. Nadja po mizi naključno razporedi 52 igralnih kart vzdolž krožince, pri čemer eno mesto pusti prazno. Andrej, ki se nahaja v sosednji sobi, si zamisli neko karto in jo sporoči Nadji. Če se karta, ki si jo izbere Andrej, nahaja poleg praznega prostora, jo Nadja premakne na prazno mesto, sicer pusti vse karte pri miru. Svojih potez Nadja Andreju ne pove. Andrej si znova izbere karto in tako z Nadjo ponavljata opisani postopek, dokler Andrej ne ustavi igre.

   a) Ali lahko Andrej zagotovi, da v trenutku, ko se igra ustavi, nobena karta ni v svojem izhodiščnem položaju?

   b) Ali lahko Andrej zagotovi, da v trenutku, ko se igra ustavi, pikov as ni poleg praznega mesta?

5. Dan je pravilni oktaeder z robom dolžine 1. V vsakem od oglišč danega oktaedra odrežemo piramido, katere osnovnica je kvadrat, njeni robovi pa imajo dolžino $\frac{1}{3}$. Na ta način dobimo polieder P, katerega mejne ploskve so kvadrati in pravilni šestkotniki. Ali je možno prostor napolniti s poliedri, skladnimi s poliedrom P?

6. Naj bo a_0 iracionalno število in $0 < a_0 < \frac{1}{2}$. Za $i \geq 0$ naj bo $a_{i+1} = \min(2a_i, 1 - 2a_i)$.

   a) Dokaži, da obstaja indeks n, za katerega velja $a_n < \frac{3}{16}$.

   b) Ali je možno, da velja $a_n > \frac{7}{40}$ za vsak indeks n?

7. Dana je točka T v trikotniku ABC, iz katere vidimo vse tri stranice trikotnika pod zornim kotom $120°$. Naj bodo p, q in r zapored zrcalne slike premic AT, BT in CT preko premic BC, CA in AB. Dokaži, da se premice p, q in r sekajo v skupni točki.

Gregor Cigler

■ 8. področno tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol

A1. 360000 sekund je:

(**A**) 5 ur (**B**) 10 ur (**C**) 36 ur (**D**) 60 ur (**E**) več kot 90 ur

A2. Vsota števk 4-mestne PIN-kode Matejine bančne kartice je 24. Prva in zadnja števka sta enaki 7. Število, ki predstavlja kodo, se z leve in desne strani prebere enako. Katera je predzadnja števka v PIN-kodi?

(**A**) 0 (**B**) 2 (**C**) 4 (**D**) 5

(**E**) ni mogoče določiti

A3. Številska os med 0 in 2 je razdeljena na 7 enakih delov. Katero število predstavlja točka A?

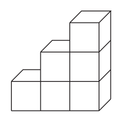
(**A**) $\frac{3}{14}$ (**B**) $\frac{6}{14}$ (**C**) $\frac{3}{7}$ (**D**) $\frac{6}{7}$ (**E**) 1

A4. Katarina je sestavila osem šopkov. Koliko cvetlic je porabila, če je v vsakem šopku sedem narcis in pet tulipanov?

(**A**) $8 \cdot 7 + 5$ (**B**) $8 \cdot (7 + 5)$ (**C**) $8 \cdot 7 \cdot 5$

(**D**) $8 + 7 + 5$ (**E**) nič od navedenega

A5. Stopnice so narejene iz kock. Koliko jih potrebujemo, če želimo narediti 9 stopnic?


3 stopnice

(**A**) 40 (**B**) 42 (**C**) 45 (**D**) 48 (**E**) 50

A6. Katera trditev je napačna?

(**A**) $\dfrac{-2}{-5} > 0$ (**B**) $\dfrac{-2-5}{-2} < 0$ (**C**) $\dfrac{(-2)\cdot(-5)}{-2} < 0$

(**D**) $\dfrac{-5}{(-2)\cdot(-2)} < 0$ (**E**) $\dfrac{-2}{-2-5} > 0$

A7. Plavalec je preplaval reko, široko 8 m. Plaval je naravnost, zaradi vodnega toka s hitrostjo 1 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ pa je stopil na nasprotni breg reke 6 m niže. Kolikšno razdaljo je preplaval?

(**A**) 8 m (**B**) 10 m (**C**) 11 m (**D**) 14 m (**E**) 20 m

A8. Če želimo zamesiti testo za tri pice, potrebujemo 360 dag moke, 45 g svežega kvasa, 9 g soli in 190 ml mlačne vode. Za največ koliko pic bi zadostovalo 0,75 kg kvasa?

(**A**) 5 (**B**) 25 (**C**) 50 (**D**) 100 (**E**) nič od tega

A9. 200-litrska cisterna za jabolčni sok ima obliko pokončnega valja in je visoka 1 m. Koliko litrov soka je v cisterni, če je napolnjena do višine 15 cm?

(**A**) 10 (**B**) 15 (**C**) 20 (**D**) 25 (**E**) 30

A10. Ceno nekega izdelka najprej znižajo za 50 %, nato znižano ceno še za dodatnih 50 %. Za koliko odstotkov bi morali znižati ceno izdelka na začetku, da bi bila končna cena izdelka enaka kot po drugem znižanju?

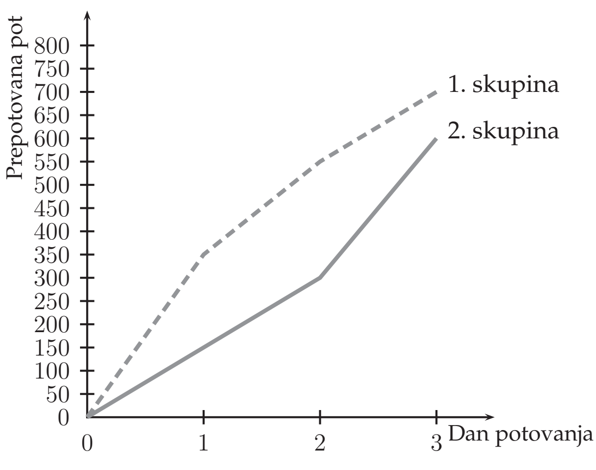
(**A**) za 25 % (**B**) za 66 % (**C**) za 75 %
(**D**) za 100 % (**E**) odvisno od začetne cene izdelka

B1. Tri skupine izletnikov so šle na tridnevno potovanje. Spodnji graf prikazuje, kako sta potovali prvi dve skupini, podatki za tretjo skupino pa so zapisani v tabeli.

Skupina	Dolžina prepotovane poti:		
	1. dan	2. dan	3. dan
1			
2			
3	250 km	200 km	350 km

A Na grafu predstavite podatke za 3. skupino.

B S pomočjo grafa dopolnite tabelo za 1. in 2. skupino.



B2. Iz 4 kg orehov dobimo 140 dag jedrc.

A Koliko % mase predstavljajo jedrca?

B Za potico potrebujemo 50 dag jedrc. Koliko kg orehov moramo imeti v ta namen? Rezultat zaokrožite na dve decimalki natančno.

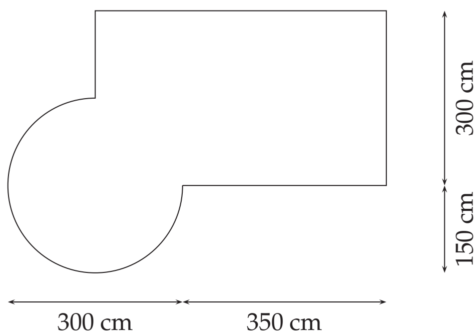
C Kaj se bolj splača kupiti: cele neizluščene orehe po 6 EUR (izluščimo jih zastonj) ali jedrca po 20 EUR za kg?

B3. Krava in teliček tehtata skupaj 480 kg. Razmerje njunih mas je $17 : 3$.

A Koliko tehta teliček?

B Teliček vsak naslednji dan tehta $1{,}5$ kg več kot prejšnji dan. V koliko dneh bo dosegel maso 120 kg?

B4. Na spodnji sliki je narisan tloris Petrine dnevne sobe. Petra bo nad celotnim krožnim lokom naredila zastekljeno verando v višini 2 m. Najmanj koliko kvadratnih metrov stekla bo potrebovala? Rezultat zaokrožite na dve decimalki natančno.



■ 8. državno tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol

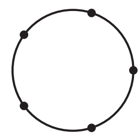
A1. Dana sta dva trikotnika s stranicami $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $c = 7$ cm in $a_1 = 10$ cm, $b_1 = 6$ cm, $c_1 = 14$ cm. Kaj lahko poveste o teh dveh trikotnikih?

(**A**) Sta skladna. (**B**) Sta si podobna. (**C**) Sta pravokotna.
(**D**) Sta enakokraka. (**E**) Sta ploščinsko enaka.

A2. Obseg pravokotnika, katerega stranici sta dolgi celo število centimetrov, je 24 cm. Koliko centimetrov sta lahko dolgi njegovi stranici?

(**A**) 12, 12 (**B**) 6, 4 ali 6, 3 (**C**) 6, 6 ali 8, 4 ali 10, 2
(**D**) 8, 3 (**E**) 12, 2

A3. Največ koliko različnih trikotnikov lahko narišete, če za oglišča vzamete poljubne tri od petih označenih točk na krožnici?



(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 10 (**E**) 11

A4. Anka je na rojstnodnevno zabavo prinesla košaro z jabolki in pomarančami. Gostje so pojedli polovico vseh jabolk in tretjino vseh pomaranč. Koliko sadja je ostalo v košari?

(**A**) Polovica vsega sadja. (**B**) Več kot polovica sadja.
(**C**) Manj kot polovica vsega sadja. (**D**) Tretjina vsega sadja.
(**E**) Manj kot tretjina sadja.

A5. Matej je kupil 12 zvezkov. V sosednji papirnici bi za vsak zvezek plačal 20 centov več in bi za enak znesek kupil 3 zvezke manj. Koliko je Matej plačal za en zvezek?

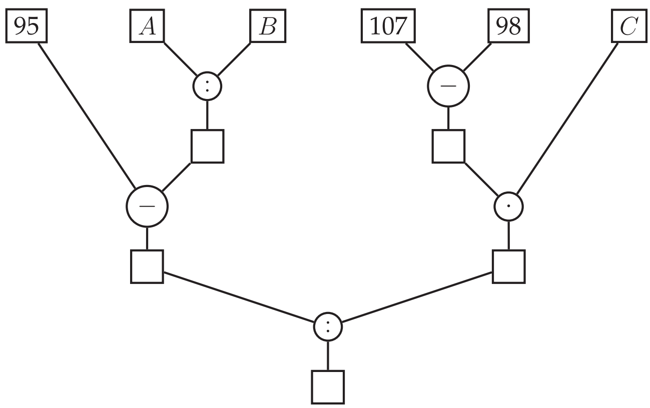
(**A**) 35 centov (**B**) 60 centov (**C**) 72 centov
(**D**) 3 evre (**E**) nič od navedenega

A6. Vlak je razdaljo med krajema A in B prevozil v 24 urah. Polovico časa je vozil s hitrostjo 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, tretjino časa s hitrostjo 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, preostanek časa pa s hitrostjo 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Kolikšna je razdalja med krajema A in B?

(**A**) 160 km (**B**) 180 km (**C**) 800 km
(**D**) 1600 km (**E**) 1800 km

B1. Zapišite izraz, ki ustreza danemu diagramu.

Nato izračunajte vrednost izraza, če je:
A najmanjši skupni večkratnik števil 3 in 5,
B dolžina katete v pravokotnem trikotniku s hipotenuzo, dolgo 5 enot, in drugo kateto, dolgo 4 enote,
C najmanjše praštevilo.



B2. Mama se je odločila, da bo dva tedna varčevala za svoja dva sinova. V Andrejev šparovček je vrgla prvi dan 1 cent, vsak naslednji dan pa dvakrat toliko kot prejšnji dan. V Mihov šparovček je dala ob koncu vsakega tedna 75 evrov.

A Koliko denarja je privarčevala za Andreja po enem tednu?

B Koliko denarja je privarčevala za Miha po dveh tednih?

C Koliko denarja je privarčevala za Andreja po dveh tednih?

D Komu je po dveh tednih privarčevala več denarja in za koliko %?

B3. V finalu plesnega turnirja *Just Dance* so uporabili ocenjevalni sistem, na podlagi katerega so določili zmagovalni par. Najprej je strokovna komisija podeljevala točke in jih zapisovala v preglednico:

Št. plesnega para	4	27	15	8	11
Nožna tehnika (T)	3	2	3	1	3
Koreografija (K)	1	2	1	3	2
Plesna figura (F)	2	2	3	3	3
Plesna izraznost (I)	3	2	2	3	2

kjer 3 točke pomenijo odlično, 2 točki dobro in 1 točka zadovoljivo.

Za izračun končne ocene (KO) so na tem tekmovanju uporabili formulo:

$$\text{KO} = 3T + K + 2F + I.$$

A Izračunajte končno oceno za par št. 15.

B V kateri kategoriji so bili plesni pari v povprečju najnižje ocenjeni?

C Kateri par je zmagal?

D Par št. 4 meni, da formula za izračun končne ocene ni poštena. Zapišite formulo za izračun končne ocene, ki bi temu paru prinesla zmago. Formula mora biti oblike

$$\text{KO} = \boxed{}\,T + \boxed{}\,K + \boxed{}\,F + \boxed{}\,I,$$

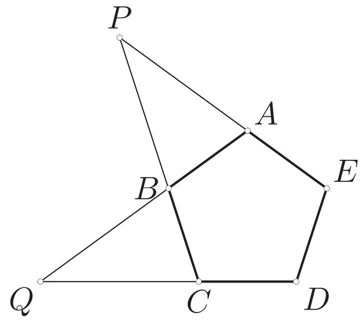
kjer morate v vsako prazno polje vpisati naravno število, manjše ali enako 3.

B4. Matej je stal na travniku in opazoval staro drevo. Nato se je napotil najprej 60 m proti severu in nato še 50 m proti zahodu ter ugotovil, da je drevo vzhodno od kraja, kamor je prišel. Ugotovil je še, da je od drevesa oddaljen enako kot na začetku svoje poti. Koliko metrov je oddaljen od drevesa? Narišite skico!

■ 28. mednarodno matematično tekmovanje mest – pomladanski krog – rešitve nalog

□ I. skupina (1.del)

1. Naj bo $\mathcal{P} = ABCDE$ osrednji petkotnik in PAB ter QBC kraka narisane zvezde. Označimo $\angle PAB = \alpha$, $\angle ABP = \beta$ in $\angle BPA = \gamma$. Tedaj velja $\angle QBC = \beta$ in $\angle CQB = \alpha$ ali $\angle CQB = \gamma$. Če bi veljalo $\angle CQB = \alpha$, bi bili premici AE in CD vzporedni in ne bi tvorili kraka nad stranico DE. Torej velja $\angle CQB = \gamma$, kar pomeni, da so vsi koti v vrhovih krakov enaki γ, notranji koti petkotnika pa so izmenično enaki $180° - \alpha$ in $180° - \beta$. Ker ima petkotnik liho mnogo oglišč, od tod sledi, da je $180° - \alpha = 180° - \beta$, oziroma $\alpha = \beta$. Ker so kraki skladni trikotniki, so tudi stranice petkotnika enako dolge, zato je $\mathcal{P}$ res pravilni petkotnik.



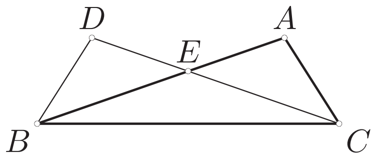
2. V število p, ki smo ga iz števil m in n dobili z brisanjem po 7 števk, vrinimo vseh skupno 14 zbrisanih števk. Števki iz m in n, ki ju v p vrinemo na isto mesto, lahko uredimo v poljubem vrstnem redu. Na ta način dobimo 2014-mestno število r, ki ga lahko dobimo, tako da vrinemo 7 števk bodisi v število m, bodisi v število n.

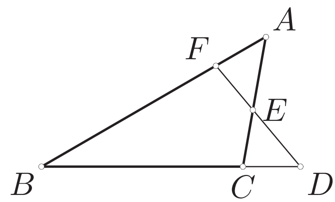
3. Trdnjava, ki stoji na črnem polju, napada natanko 8 belih polj, trdnjava, ki stoji na belem polju, pa napada natanko 7 belih polj. Ker je na šahovnici 32 belih polj, potrebujemo najmanj 4 trdnjave. Označimo, kot je običajno, stolpce šahovnice s črkami od 'a' do 'h' in vrstice šahovnice s števili od 1 do 8, pri čemer naj bo polje 'a1' črno. Pogoju lahko tedaj zadostimo z natanko 4 trdnjavami, ki jih postavimo na polja 'a7', 'c5', 'e3' in 'g1'.

4. Označimo dana tri števila z a, b in c. Ker velja $a, b, c \neq 0$, število 0 ni ničla nobene od 6 možnih kvadratnih funkcij, ki imajo dane koeficiente. Denimo, da ima funkcija $ax^2 + bx + c$ dve negativni ničli $-r$ in $-s$ za neki števili $r, s > 0$. Tedaj velja $ax^2 + bx + c = a(x + r)(x + s)$, od koder dobimo $b = a(r + s)$ in $c = ars$, torej imata koeficienta b in c enak predznak kot koeficient a. Privzamemo lahko, da je $a, b, c > 0$. Če ima kvadratna funkcija z realnimi koeficienti eno realno ničlo, sta realni obe njeni ničli, zato ima nenegativno diskriminanto. Od tod dobimo pogoje $b^2 \geq 4ac$, $c^2 \geq 4ab$ in $a^2 \geq 4bc$. Če te neenačbe pomnožimo, dobimo protislovno neenačbo $(abc)^2 \geq (8abc)^2$, torej ima nujno vsaj ena od kvadratnih funkcij vsaj kako pozitivno ničlo.

5. a) Naj trikotnik ABC predstavlja pito in naj bo $\angle ABC = \varphi$ ter $\angle BCA = 3\varphi$. Označimo z D zrcalno sliko točke A preko simetrale stranice BC, presečišče daljic AB in CD pa naj bo E. Trikotnik DBC tedaj predstavlja škatlo. Ni se težko prepričati, da velja $\angle DCA =$

$\angle AEC = 2\varphi$, zato je ECA enakokraki trikotnik. Če torej piti odrežemo trikotnik ECA, lahko z njim ravno prekrijemo skladni trikotnik BED in tako pito spravimo v dano škatlo.





b) Naj trikotnik ABC predstavlja pito in naj bo $\angle CAB = \varphi$ ter $\angle BCA = 2\varphi$. Označimo zapored z D in F zrcalni sliki točk A in C preko simetrale kota $\angle ABC$, presečišče daljic AC in DF pa naj bo E. Trikotnik DBF tedaj predstavlja škatlo. Velja

$$\angle DEC = \angle BCA - \angle BDF = \angle BCA - \angle BAC = \varphi = \angle BDF,$$

zato je CDE enakokraki trikotnik. Če torej piti odrežemo trikotnik CDE, lahko z njim ravno prekrijemo skladni trikotnik FAE in tako pito spravimo v dano škatlo.

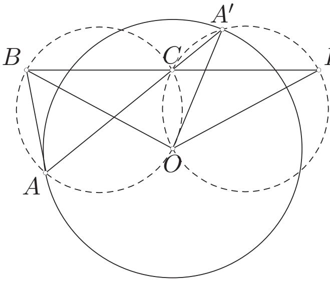
□ II. skupina (1.del)

1. Trdnjava, ki stoji na črnem polju, napada natanko 9 belih polj, trdnjava, ki stoji na belem polju, pa napada bodisi 7, bodisi 9 belih polj. Ker je na šahovnici 41 belih polj, potrebujemo najmanj 5 trdnjav. Označimo stolpce šahovnice s črkami od 'a' do 'i' in vrstice šahovnice s števili od 1 do 9, pri čemer naj bo polje 'a1' črno. Pogoju lahko tedaj zadostimo z natanko 5 trdnjavami, ki jih postavimo na polja 'a8', 'c6', 'e4', 'g2' in 'i2'.

2. Označimo ničle danega polinoma z a, b in c. Tedaj velja $x^3 + px^2 + qx + r = (x-a)(x-b)(x-c)$. Če v to zvezo vstavimo $x = 1$ dobimo $1 + p + q + r = (1-a)(1-b)(1-c)$. Ker velja $a, b, c \in (0, 2)$, velja $1-a, 1-b, 1-c \in (-1, 1)$ in zato tudi $1+p+q+r = (1-a)(1-b)(1-c) \in (-1, 1)$. Od tod sledi $p + q + r \in (-2, 0)$, kar je bilo treba dokazati.

3. Naj bo O središče krožnice in C razpolovišče daljice BB'. Daljici

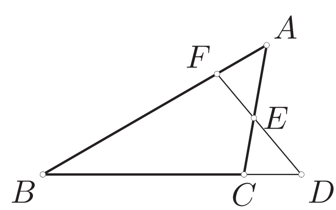
OC in BB' sta tedaj pravokotni. Velja $\angle OAB = \angle OCB = 90° = \angle OCB' = \angle OA'B'$, zato sta $OABC$ in $OCA'B'$ tetivna štirikotnika, od koder sledi $\angle ACB = \angle AOB = \angle A'OB' = \angle A'CB'$. Točke B, C in B' so kolinearne, zato so kolinearne tudi točke A, C in A', kar pomeni, da daljica AA' res seka daljico BB' v njenem razpolovišču C.



4. Definirajmo zaporedje S na enak način kot zaporedje v nalogi, s to razliko, da je lahko k nenegativno celo število. Tedaj je zaporedje S naše prvotno zaporedje z dodatnim členom $a_0 = 0$. Vsak blok desetih zaporednih členov $a_{10l}, a_{10l+1}, \ldots, a_{10l+9}$ zaporedja S je tedaj bodisi oblike $'0101010101'$, bodisi oblike $'1010101010'$. Definirajmo novo zaporedje S' tako, da blok prve oblike skrčimo v število 0, blok druge oblike pa v število 1. Tedaj je k-ti člen zaporedja S' enak 0 natanko tedaj, ko je vsota števk števila $10k$ sodo število, kar pomeni, da sta zaporedji S in S' enaki. Denimo, da ima zaporedje S od nekega člena dalje periodo p. Tedaj je zaporedje S' od nekje dalje periodično s periodo $\frac{p}{10}$, kar pa seveda ni možno, ker sta zaporedji S in S' enaki.

5. a) Glej rešitev naloge 5b) za prvo skupino.

   b) Naj bo $BCDEFGC$ tak šestkotnik s koti $\angle BDE = \angle DEF = \angle EFG = \angle FGC = 170°$ in $\angle DBC = \angle BCG = 20°$, da velja $|BD| = |DE| = |EF| = |FG| = |GC|$. Podaljšajmo stranico GC do tiste točke A, za katero velja $\angle ABC = 30°$. Trikotnik prerežemo vzdolž lomljene krivulje $BDEFGC$. Ni se težko prepričati, da lahko šestkotnik $ABDEFG$ prestavimo 'za eno stranico' (tako, da stranica BD sovpade s stranico DE) in tako dobimo zrcalno sliko trikotnika ABC.



5. Denimo, da obstaja praštevilo $p < d$, ki ne deli razlike d. Tedaj se natanko na vsakih p členov pojavi člen, ki je deljiv s p. Ker so členi zaporedja praštevila, je edini člen, ki je deljiv s p lahko le število p samo. Ker so vsi razen prvega člena nujno večji od razlike d, so večji tudi od števila p, torej je število p prvi člen takega zaporedja. Ker ima zaporedje več kot d členov, najdemo še en kasnejši člen, ki je deljiv s p, zato v tem primeru takega zaporedja ni. Če želimo zaporedje z dano lastnostjo, mora veljati bodisi $d = 1$ ali pa je razlika enaka produktu nekaj zaporednih praštevil $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots, p_n$.

   Če je $d = 1$, je vsak drugi člen deljiv z 2, zato je v tem primeru edino možno zaporedje enako $\{2, 3\}$.

   Za $d = 2$ je vsak tretji člen deljiv s 3, zato v tem primeru dobimo zaporedje $\{3, 5, 7\}$.

   V primeru $d = 2 \cdot 3 = 6$, je vsaj en člen deljiv s 5 in večji od 5.

   V primeru $d = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, je vsaj en člen deljiv s 7 in večji od 7.

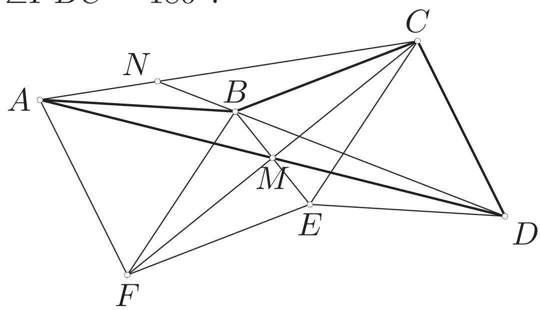
   Naj bo $d = p_1 p_2 \cdots p_n$, kjer je $n \geq 3$. Dokažimo, da tedaj velja $d > p_{n+1}$. Naj bo $m = p_2 p_3 \cdots p_n - 2$. Ker je $n \geq 3$ in $m > 1$, ima m prafaktor q. Ker je m liho število, je $q \neq 2$, prav tako pa se iz definicije števila m vidi, da je $q \neq p_2, p_3, \ldots, p_n$. Sledi $d > m \geq q \geq p_{n+1}$, torej bo vsaj en člen zaporedja deljiv s q in večji od q.

   Ugotovili smo, da sta $\{2, 3\}$ in $\{3, 5, 7\}$ edini zaporedji, ki zadoščata zahtevam naloge.

6. Podaljšajmo daljico BM do točke E, za katero velja $|BM| = |ME|$ in daljico CM do točke F, za katero velja $|CM| = |MF|$. Tedaj je $ABCDEF$ enakostranični šestkotnik. Ker velja $\angle BMC = 90°$, je $BCEF$ romb, zato so daljice BC, CE, EF in FB enako dolge, torej sta FAB in CDE enakostranična trikotnika. Če označimo presečišče nosilk diagonal AC in BD z N, dobimo

$$\angle CND = \angle CBD - \angle BCA = \frac{1}{2}(180° - \angle BCD) - \frac{1}{2}(180° - \angle ABC) =$$
$$= \frac{1}{2}(120° - \angle BCE) - \frac{1}{2}(180° - (360° - \angle FBC - \angle ABF)) =$$
$$= \frac{1}{2}(120° + 180° - 60° - (\angle BCE - \angle FBC)) = 30°,$$

saj velja $\angle BCE + \angle FBC = 180°$.



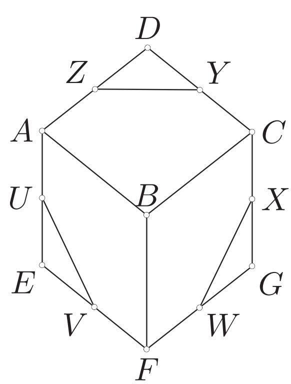
7. a) Dokažimo, da Andrej to lahko doseže! Najprej izbere pikovega asa, za njim pikovo dvojko, trojko, in tako naprej do pikovega kralja. Nato ta vrstni red ponovi še v barvi srca, kare in nazadnje v barvi križa. Ta vrstni red Andrejevih izbir imenujmo *cikel.* Znotraj enega cikla se vsaka karta premakne največ enkrat, poleg tega pa se premakne vsaj ena od 52 kart. Andrej zatem še 51-krat ponovi izbrani cikel. Trdimo, da imajo vsi premiki kart isto smer; bodisi smer urinega kazalca, bodisi smer nasprotno smeri urinega kazalca. Očitno je, da imajo vsi premiki v enem ciklu isto smer. Naj bo X tista karta nekega cikla γ, ki se je premaknila zadnja, karta $Y \neq X$ pa naj bo karta, ki po premiku karte X leži poleg prostega mesta. Ker se karta Y v okviru cikla γ ne premakne več, Andrej karto Y znotraj enega cikla kliče pred karto X. Od tod sledi, da bo Andrej karto Y tudi v naslednjem ciklu poklical pred karto X in jo bo Nadja premaknila v isti smeri, kot je prej v ciklu γ premaknila karto X. S tem smo dokazali, da se karte ves čas selijo v isto smer. Da bi se neka karta vrnila v svoj izhodiščni položaj, mora tako narediti 53 premikov, kar pa znotraj 52 ciklov seveda ni možno. Denimo torej, da se neka karta A sploh ne premakne. Ker se karte ves čas selijo v isto smer, bi to pomenilo, da lahko naredimo kvečjemu 51 premikov kart preden naletimo na karto A, kar je v protislovju z ugotovitvijo, da se vsakem od 52 ciklov preseli vsaj ena karta. Tako smo dokazali, da nobena karta na koncu ni več v izhodiščnem položaju.

   b) Andrej tega ne more zagotoviti! Konstruirajmo graf katerega vozlišča predstavlja vseh 52! možnih permutacij vrstnih redov kart, pri čemer si mislimo, da sta prva in zadnja karta nekega vrstnega reda poleg praznega mesta, karte pa razvrstimo v nasprotni smeri urinega kazalca. Dve vozlišči sta povezani, če lahko z enim klicem Andrej vrstni red iz prvega vozlišča spremeni v vrstni red drugega vozlišča.

Denimo, da Andrej to doseže tako, da izbere karto X. Tedaj z izbiro iste karte lahko doseže tudi nasprotno povezavo, zato lahko to povezavo gledamo kot neusmerjeno povezavo in jo označimo z oznako karte X. Opisani graf ima valenco 2 (vsako vozlišče ima dva soseda) in je unija disjunktnih ciklov. Vozlišče imenujmo *varno vozlišče*, če v pripadajoči razporeditvi pikov as ni poleg praznega mesta in postavimo po eno osebo v vsako vozlišče. Ko Andrej izbere karto X, naj se osebi na krajiščih povezave X premakneta vzdolž povezave X. Jasno je, da je po vsaki Andrejevi izbiri v vsakem vozlišču natanko ena oseba. Torej Andrej ne more vseh oseb spraviti v varna vozlišča, kar pomeni, da za poljuben vrstni red Andrejevih potez obstaja vozlišče, iz katerega se ne pride v varno vozlišče.

□ II. skupina (2.del)

5. Odgovor je pritrdilen. Naj bo $ABCDEFGH$ kocka in U, V, W, X, Y in Z zapored razpolovišča robov AE, EF, FG, GC, CD in DA. Tedaj so daljice UX, VW in YZ vzporedne daljici AC. Ker se daljice UV, VW in WZ sekajo v središču kocke, je $UVWXYZ$ ravninski pravilni šestkotnik, ki deli kocko $ABCDEFGH$ na dve skladni polovici, ki ju imenujmo *polkocki*. Vsaka od teh dveh polovic vsebuje oglišče, kjer se sekajo tri paroma pravokotne stranske ploskve kocke. Imenujmo tako oglišče *primarno oglišče*. Zlepimo osem kopij polkocke tako, da vsa njihova primarna oglišča sovpadejo. Na ta način dobimo polieder P, ki ga opisuje naloga. Ker lahko prostor zapolnimo s kockami velikosti $1 \times 1 \times 1$, ga lahko zaradi gornjega premisleka zapolnimo tudi s kopijami poliedra P.



6. a) Ločimo pet primerov:

1. $0 < a_0 < \frac{3}{16}$: Izberemo $n = 0$.

2. $\frac{3}{16} < a_0 < \frac{1}{5}$: Naj bo $a_0 = \frac{1}{5} - \varepsilon$, kjer je $0 < \varepsilon < \frac{1}{80}$. Tedaj je $a_1 = \frac{2}{5} - 2\varepsilon$, $a_2 = \frac{1}{5} + 4\varepsilon$, $a_3 = \frac{2}{5} + 8\varepsilon$, in $a_4 = \frac{1}{5} - 16\varepsilon$. Denimo, da je $a_{4k} > \frac{3}{16}$ za vsak $k \in \mathbb{N}$. Potem velja $a_{4k} = \frac{1}{5} - 16^k\varepsilon$, kar seveda ni možno, saj je ε fiksno pozitivno število.

3. $\frac{1}{5} < a_0 < \frac{1}{4}$: Naj bo $a_0 = \frac{1}{4} - \varepsilon$, kjer je $0 < \varepsilon < \frac{1}{20}$. Tedaj je $a_1 = \frac{1}{2} - 2\varepsilon$ in $a_2 = 4\varepsilon < \frac{1}{5}$. Torej lahko nadaljujemo po 1. primeru ali 2. primeru.

4. $\frac{1}{4} < a_0 < \frac{1}{3}$: Naj bo $a_0 = \frac{1}{3} - \varepsilon$, kjer je $0 < \varepsilon < \frac{1}{12}$. Tedaj je $a_1 = \frac{1}{3} + 2\varepsilon$ in $a_2 = \frac{1}{3} - 4\varepsilon$. Denimo, da velja $\frac{1}{4} < a_{2k}$, za vsak $k \in \mathbb{N}$. Potem velja $a_{2k} = \frac{1}{4} - 4^k\varepsilon$, kar ni možno, saj je ε fiksno pozitivno število.

5. $\frac{1}{3} < a_0 < \frac{1}{2}$: V tem primeru dobimo $a_1 < \frac{1}{3}$, kar pomeni, da lahko nadaljujemo po enem izmed prvih štirih primerov.

b) To lahko dosežemo. Število ε imenujmo *dobro število*, če število $\frac{\varepsilon}{3}$ dobimo tako, da v vrsti $\frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{2^{23}} + \cdots + \frac{1}{2^{8k+7}} + \cdots$ neperiodično izpustimo neskončno členov. Ker je vsota celotne vrste enaka $\frac{2}{255}$, je ε iracionalno število, za katerega velja $0 < \varepsilon < \frac{2}{85} = 3 \cdot \frac{2}{255}$, in zato $\frac{1}{5} - \varepsilon > \frac{1}{5} - \frac{2}{85} > \frac{7}{40}$ Definirajmo $a_0 = \frac{1}{5} - \varepsilon$, za neko dobro število ε. Ločimo dva primera:

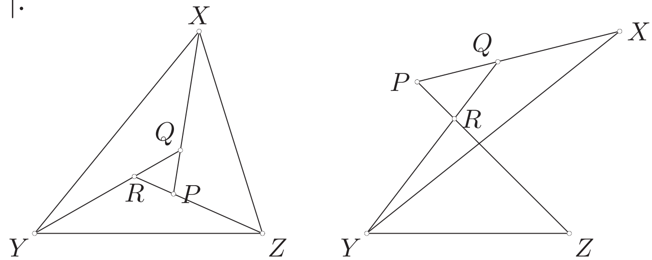
1. V vrsti za $\frac{\varepsilon}{3}$ ne izpustimo člena $\frac{1}{2^7}$. Tedaj je tudi $\delta = 2^8\varepsilon$ dobro število in velja $a_0 = \frac{1}{5} - \frac{\delta}{2^8}$, $a_1 = \frac{2}{5} - \frac{\delta}{2^7}$, $a_2 = \frac{1}{5} + \frac{\delta}{2^6}$, $a_3 = \frac{2}{5} + \frac{\delta}{2^5}$, $a_4 = \frac{1}{5} - \frac{\delta}{2^4}$, $a_5 = \frac{2}{5} - \frac{\delta}{2^3}$, $a_6 = \frac{1}{5} + \frac{\delta}{2^2}$, $a_7 = \frac{1}{5} + \frac{\delta}{2}$ in $a_8 = \frac{1}{5} - \delta$.
2. V vrsti za $\frac{\varepsilon}{3}$ izpustimo člen $\frac{1}{2^7}$. Tedaj je tudi $\delta = 2^8(\varepsilon - \frac{3}{2^7})$ dobro število in velja $a_0 = \frac{113}{640} - \frac{\delta}{2^8}$, $a_1 = \frac{113}{320} - \frac{\delta}{2^7}$, $a_2 = \frac{47}{160} + \frac{\delta}{2^6}$, $a_3 = \frac{33}{80} - \frac{\delta}{2^5}$, $a_4 = \frac{7}{40} + \frac{\delta}{2^4}$, $a_5 = \frac{7}{20} + \frac{\delta}{2^3}$, $a_6 = \frac{3}{10} - \frac{\delta}{2^2}$, $a_7 = \frac{2}{5} + \frac{\delta}{2}$ in $a_8 = \frac{1}{5} - \delta$.

V obeh primerih se lahko prepričamo, da je $a_n > \frac{7}{40}$ za $0 \leq n \leq 7$, člen a_8 pa je enake oblike kot člen a_0, zato lahko enako sklepanje uporabimo tudi za nadaljne člene, s čimer je dokaz končan.

7. Dokažimo najprej pomožni rezultat!

Lema. Naj bodo XP, YQ in ZR poltraki, ki se paroma sekajo. Če velja $\angle QYZ = \angle RZY$, $\angle RZX = \angle PXZ$ in $\angle PXY = \angle QYX$, se premice XP, YQ in ZR sekajo v skupni točki.

Dokaz leme. Denimo nasprotno, da se premice XP, YQ in ZR sekajo v treh različnih točkah. Oglejmo si najprej primer, ko so vsi trije poltraki usmerjeni proti nasprotnim stranicam trikotnika XYZ (levi del slike). Tedaj so QXY, PXZ in RYZ enakokraki trikotniki. Od tod dobimo protislovje $|XP| > |XQ| = |YQ| > |YR| = |ZR| > |ZP| = |XP|$.

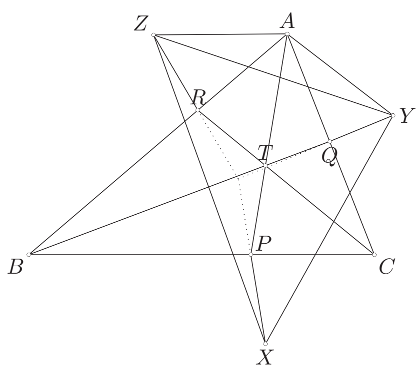


V preostalem primeru je natanko eden od poltrakov usmerjen proti nasprotni stranici. Denimo, da je to poltrak ZR (desni del slike). Znova so RYZ, PZX in RXY enakokraki trikotniki. Od tod dobimo protislovje $|QR| = |YQ| - |YR| = |XQ| - |ZR| = (|XP| - |PQ|) - (|ZP| - |PR|) = |PR| - |PQ|$.

Oglejmo si sedaj prvotni problem. Denimo, da poltraki AT, BT in CT sekajo nasprotne stranice trikotnika ABC zapored v točkah P, Q in R. Označimo zapored z X, Y in Z zrcalne slike točke T preko stranic BC, AC in AB. Tedaj velja $|AZ| = |AT| = |AY|$, zato je $\angle AYZ = \angle AZY$. Poleg tega dobimo še $\angle AYQ = \angle ATQ = 60° = \angle ATR = \angle AZR$, od koder sledi

$$\angle QYZ = \angle QYA - \angle ZYA = \angle RZA - \angle YZA = \angle RZY.$$

Podobno dokažemo še $\angle RZY = \angle PXZ$ in $\angle PXY = \angle QYX$. Po lemi se premice XP, YQ in ZR tedaj sekajo v skupni točki.



Gregor Cigler

■ Rešitve nalog 8. področnega tekmovanja v znanju matematike za dijake poklicnih šol

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
E	D	D	B	C	B	B	C	E	C

A1 360000 sekund je 100 ur. Pravilen odgovor je več kot 90 ur.

A2 Vsota prve in zadnje števke je 14. Za vsoto druge in tretje števke nam ostane 10. Ker je število palindrom, sta tudi druga in tretja števka enaki, torej sta enaki 5. Predzadnja števka je 5.

A3 En del številske premice predstavlja $\frac{2}{7}$. Točka A je slika ulomka $3 \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$.

A4 V vsakem šopku je $7 + 5$ cvetlic. Katarina je porabila $8 \cdot (7 + 5)$ cvetlic.

A5 Za 9 stopnic potrebujemo $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 45$ kock.

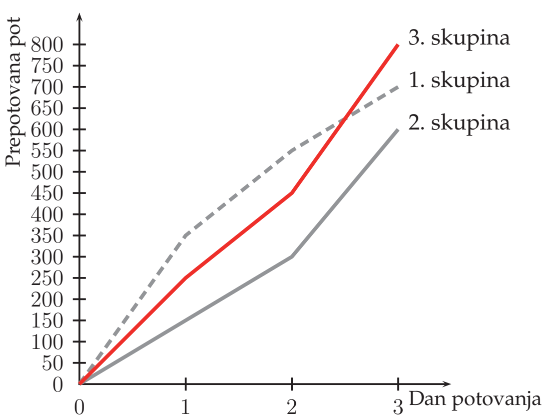
A6 Napačna trditev je izraz pod (B), saj je $\frac{-2-5}{-2} = \frac{-7}{-2} > 0$.

A7 Preplavana razdalja je hipotenuza pravokotnega trikotnika. Za izračun uporabimo Pitagorov izrek: $d = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10\ m$.

A8 Če za eno pico porabimo 15 g kvasa, bo 0,75 kg kvasa zadostovalo za $750 : 15 = 50$ pic.

A9 Ker je cisterna visoka 100 cm, ustreza vsakemu cm višine $200\ l : 100 = 2\ l$ soka. Če je cisterna napolnjena do višine 15 cm, je v njej $15 \cdot 2\ l = 30\ l$ soka.

A10 Izdelek s ceno a ima po 50 $\%$ znižanju ceno 0,5 a. Po dodatnem 50 $\%$ znižanju je cena izdelka $0,5\ a \cdot 0,5 = 0,25\ a$, kar predstavlja 25 $\%$ prvotne cene. Enako ceno dobimo, če izvedemo enkratno znižanje za 75 $\%$.



Skupina	Dolžina prepotovane poti:		
	1. dan	2. dan	3. dan
1	350 km	200 km	150 km
2	150 km	150 km	300 km
3	250 km	200 km	350 km

B2 Jedrca predstavljajo $\frac{1{,}4\ kg}{4\ kg} = 0,35 = 35\ \%$ mase.
Za 50 dag jedrc potrebujemo $\frac{50}{0{,}35} \approx 142,8\ dag = 1,43\ kg$
Iz kilograma celih orehov, za katerega odštejemo 6 EUR, dobimo 0,35 kg jedrc. Če kupimo enako količino orehovih jedrc, odštejemo $0,35 \cdot 20\ EUR = 7\ EUR$. Ugodneje je kupiti cele orehe.

B3 Iz razmerja mas krave in telička izračunamo sorazmernostni faktor $\frac{480\ kg}{20} = 24\ kg$. Masa telička je $24\ kg \cdot 3 = 72\ kg$. Če teliček vsak dan pridobi 1,5 kg, bo maso 120 kg dosegel v 32 dneh, kar izračunamo iz enačbe: $72 + 1,5x = 120 \Leftrightarrow x = 32$.

B4 Zastekljena veranda predstavlja $\frac{3}{4}$ plašča valja, ki je visok 2 m in ima za osnovno ploskev krog s polmerom 150 cm. Ploščina zastekljene verande je: $S = \frac{3}{4} \cdot 2\pi r \cdot v = \frac{3}{4} \cdot 2\pi \cdot 150\ cm \cdot 200\ cm = 141300\ cm^2 = 14,13\ m^2$.

■ Rešitve nalog 8. državnega tekmovanja v znanju matematike za dijake poklicnih šol

Sklop A

A1	A2	A3	A4	A5	A6
B	C	D	B	B	D

1. Razmerje med istoležnimi stranicami obeh trikotnikov je $1 : 2$, zato sta si trikotnika podobna.

2. Obseg pravokotnika je $24 = 2 \cdot (a + b)$, zato je vsota stranic a in b enaka $12\ cm$. Le pri odgovoru (C) je v vseh primerih vosta stranic enaka 12.

3. Točke na krožnici označimo z A, B, C, D in E. Če zapišemo vse različne možne trikotnike: ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE, jih je 10.

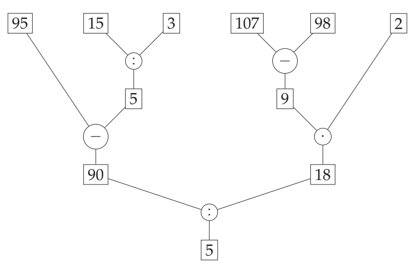
4. Anka je v košari prinesla x pomaranč in y jabolk. Po zabavi je ostalo $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = \frac{3x+4y}{6}$ sadja, kar je več kot polovica prinešenega sadja, saj je $\frac{3x+4y}{6} > \frac{3(x+y)}{6}$.

5. Ceno zvezka pred podražitvijo označimo z x in zapišemo enačbo: $12x = 9 \cdot (x + 0,20)$. En zvezek je pred podražitvijo stal $x = 0,60$ evra oz. 60 centov.

6. Vlak je v prvih 12 urah prevozil $80\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot 12\ h = 960\ km$, v naslednjih 8 urah $60\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot 8\ h = 480\ km$ in v zadnjih 4 urah $40\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot 4\ h = 160\ km$ poti. Razdalja med krajema A in B je $960\ km + 240\ km + 160\ km = 1600\ km$.

Sklop B

1. Izraz, ki ustreza diagramu, je $(95 - A : B) : ((107 - 98) \cdot C)$.
Ker je $A = 15$, $B = 3$ in $C = 2$, je njegova vrednost enaka $(95 - 15 : 3) : ((107 - 98) \cdot 2) = 5$.



2. Za Andreja mama prvi dan privarčuje $0,01$ evra, vsak naslednji dan pa dvakrat toliko kot prejšnji dan oz. v celem tednu: $0,01+0,02+0,04+0,08+0,16+0,32+0,64=1,27$ EUR. V naslednjem tednu pa: $1,28+2,56+5,12+10,24+20,48+40,96+81,92=162,56$ EUR. V obeh tednih za Andreja privarčuje 163,83 EUR.
Za Miha vsak teden privarčuje 75 EUR, torej 150 EUR v dveh tednih.
Za Andreja privarčuje $\frac{163{,}83}{150}=1{,}0922$ več kot za Miha, oz. $9{,}22$ %.

3. **A** Par št. 15 je pridobil za nožno tehniko $3\cdot 3$ točke, za koreografijo $1\cdot 1$ točko, za plesno figuro $2\cdot 3$ točke in za plesno izraznost $1\cdot 2$ točki. Skupaj 18 točk.

B Povprečne ocene parov iz:

- nožne tehnike $\frac{12}{5}$
- koreografije $\frac{9}{5}$
- plesne figure $\frac{13}{5}$
- plesne izraznosti $\frac{12}{5}$

V povprečju so bili pari najnižje ocenjeni iz koreografije.

C Točkovanje parov:

Par	T	K	F	I	$\sum$
4	9	1	4	3	17
27	6	2	4	2	14
15	9	1	6	2	18
8	3	3	6	3	15
11	9	2	6	2	19

D Par št. 4 bo zmagal po formuli: $2T+1K+1F+3I$ ali $3T+1K+1F+3I$.

4. Narišimo skico in označimo začetni položaj Mateja z Z, končni s K, položaj drevesa pa z D. Ker je ZDA pravokotni trikotnik, lahko zapišemo Pitagorov izrek: $(50+x)^2=60^2+x^2$. Enačba ima rešitev $x=11$. Matej je od drevesa oddaljen 61 m.