Tekmovanja

52. področno matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

1. letnik

1. Poišči vsa realna števila x, za katera velja neenakost

$$|||2-x|-x|-8| \leq 2008.$$

2. Naj bo $ABCD$ štirikotnik in K taka točka znotraj trikotnika ABD, da sta si trikotnika ABD in KCD podobna. Dokaži, da sta si tedaj tudi trikotnika BCD in AKD podobna.

3. Poišči najmanjše trimestno število, za katero velja, da so vse števke njegovega trikratnika sode.

4. Stranica enakostraničnega trikotnika ABC je dolga 4 cm. Pravokotni projekciji razpolovišča D stranice AB na stranici BC in AC označimo z E in F. Izračunaj ploščino trikotnika DEF.

5. Na državnem tekmovanju so dijaki reševali 4 naloge. Vsaka je bila ovrednotena s celim številom točk, vsaj 0 in največ 7 točk. Tekmovanja se je udeležilo 42 dijakov. Natanko polovica tekmovalcev je dosegla vsaj 50 % točk. Za nagrado je zadoščalo zbrati vsaj 22 točk, to pa je uspelo šestini tekmovalcev.

   Tekmovalci, ki niso prejeli nagrade, so skupaj dosegli trikrat toliko točk, kot so jih skupaj dosegli vsi nagrajeni tekmovalci. Dokaži, da obstaja vsaj 6 tekmovalcev, ki so posamezno dosegli vsaj 25 % točk, a manj kot 50 % točk.

□ 2. letnik

1. Poišči vse celoštevilske rešitve enačbe

$$\frac{x^2}{2} + \frac{5}{y} = 7.$$

2. Dan je enakokrak trikotnik ABC z vrhom C. Naj bo A' nožišče višine na stranico BC. Denimo, da je $|CA'| = \frac{1}{2}|AB|$. Dokaži, da je tedaj trikotnik ABC enakostraničen.

3. Za števili a in b velja $a^3 + b^3 = 13$ in $a^9 + b^9 = -299$. Koliko je ab, če veš, da je število ab realno?

4. Naj bo D taka notranja točka stranice AB ostrokotnega trikotnika ABC, da je tudi trikotnik BCD ostrokotni. Označimo s H višinsko točko trikotnika BCD. Dokaži: če točke A, D, H in C ležijo na isti krožnici, je trikotnik ABC enakokrak.

5. Maja na tablo zapisuje naravna števila. Če je na tabli zapisano število n, zapiše na tablo še $3n + 13$. Če je na tabli zapisan popoln kvadrat, napiše tudi njegov koren.

   (a) Ali lahko Maja z omenjenima operacijama dobi število 55, če je na tabli že zapisano število 256?

   (b) Ali lahko Maja z omenjenima operacijama dobi število 256, če je na tabli že zapisano število 55?

□ 3. letnik

1. Dokaži, da za vsako realno število $x \in (-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ velja enakost

$$\frac{2}{1 - \sin x} = \tan^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 1.$$

2. Poišči vsa praštevila p, za katera ima polinom

$$q(x) = 2x^3 - 2px^2 + (1 - p)x + p$$

   vsaj eno racionalno ničlo.

3. Poišči vsa pozitivna realna števila x in y, za katera velja

$$x^{x+y} = y^{x-y} \quad \text{in} \quad x^2y = 1.$$

4. Naj bo $ABCD$ tak konveksen štirikotnik, da je trikotnik BCD ostrokoten in velja $|AB| = |AD|$. Presečišče simetrale kota $\angle CAD$ s stranico CD označimo s K, presečišče simetrale kota $\angle BAC$ s stranico BC pa z L. Naj bosta K' in L' pravokotni projekciji točk K in L na stranici BC in CD. Dokaži, da točke B, D, L' in K' ležijo na isti krožnici.

5. Danih je n naravnih števil $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Za neko naravno število k, $k < n$, velja: če izmed danih n naravnih števil kakorkoli izberemo k števil, je vsota izbranih števil deljiva z n. Dokaži, da je tudi vsota $a_1+a_2+\ldots+a_n$ deljiva z n.

□ 4. letnik

1. Za realni števili a in b velja $\frac{4a}{a+2b} - \frac{5b}{2a+b} = 1$. Kolikšno vrednost lahko zavzame $\frac{a-2b}{4a+5b}$?

2. Naj bo D razpolovišče stranice AB, T pa težišče trikotnika ABC. Izračunaj dolžine njegovih stranic, če velja $|AD| = 3$, $|DT| = 5$ in $|TA| = 4$.

3. Naj bo $n = (p^2 - 1)(p^2 - 4) + 9$. Koliko je najmanjša možna vsota števk števila n, če je p praštevilo? Za katera praštevila p je ta vsota dosežena?

4. Poišči vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere velja

$$x + f(xf(y)) = f(y) + yf(x)$$

za poljubni realni števili x in y.

5. Če na vsaki mejni ploskvi kocke narišemo eno izmed dveh diagonal te ploskve, ugotovimo, da se nekatere narisane diagonale stikajo – izhajajo iz skupnega oglišča. Število parov stikajočih se diagonal označimo z N, pri čemer lahko posamezna diagonala nastopa tudi v več parih. Določi največjo in najmanjšo možno vrednost števila N.

■ 52. državno matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

□ 1. letnik

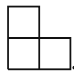
1. Poišči vsa praštevila p in q, za katera je število $2p^2q + 45pq^2$ popoln kvadrat.

2. Dokaži: če za neničelna realna števila a, b in c velja

$$a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)=ab+bc+ca,$$

je vrednost izraza $\dfrac{a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)}{abc}$ celo število.

3. Dane so dolžine stranic trikotnika ABC: $|AB|=15$ cm, $|BC|=14$ cm in $|CA|=13$ cm. Naj bo D nožišče višine na stranico BC, E pa taka točka na tej višini, da je $\angle BAD=\angle DEC$. Presečišče premic AB in CE označimo s F. Izračunaj $|EF|$.

4. Anja ima ploščice oblike , Bojan pa . Izmenično postavljata po 1 ploščico na pravokotno tabelo. Če je na potezi Bojan in ne more postaviti ploščice na tabelo, čeprav je na njej še kak nepokrit kvadratek, zmaga Anja, sicer zmaga Bojan. Dokaži:

   (a) če imata tabelo velikosti 6×9, Bojan ne more zmagati, ne glede na to, kdo začne;

   (b) če imata tabelo velikosti 8×8, lahko Bojan polaga ploščice tako, da bo zmagal ne glede na to, kako bo igrala Anja, in ne glede na to, kdo začne.

(Opomba: Ploščice morajo v celoti ležati na tabeli, se med seboj ne smejo prekrivati, pokriti pa morajo vsa polja tabele.)

□ 2. letnik

1. Poišči vsa realna števila x in y, ki zadoščajo enačbama

$$\begin{aligned} x^3+8y^3 &= x+2y,\\ 2x^2y+4xy^2 &= x+2y. \end{aligned}$$

2. (a) Pokaži, da vsota števk števila 10^n+9n ni deljiva z 2007 za nobeno naravno število n.

   (b) Poišči vsaj eno naravno število n, za katero je vsota števk števila 10^n+9n enaka 2008.

3. Na višini na stranico AC enakokrakega trikotnika ABC z vrhom B izberemo točko D tako, da je premica AC tangenta na očrtano krožnico $\mathcal{K}$

trikotnika ABD. Naj bo E taka točka na krožnici $\mathcal{K}$, da je tetiva DE pravokotna na tetivo AB. Dokaži, da sta trikotnika ABE in ABC skladna.

4. Igralca imata kup enakih žetonov, s katerega izmenično jemljeta po enega in ga postavljata na poljubno prazno polje kvadratne tabele velikosti 2008×2008. Zmaga tisti, ki prvi postavi žeton tako, da skupaj s tremi drugimi tvori oglišča pravokotnika, ki ima stranice vzporedne stranicam tabele. Kateri igralec ima zmagovalno strategijo – tisti, ki je igro začel, ali njegov soigralec?

□ 3. letnik

1. Jaka si je zamislil trimestno število x, ki ima v zapisu različne neničelne števke. Nato je na list napisal vsa druga trimestna števila, ki jih je lahko zapisal s števkami števila x. Določi vsa možna števila x, če je vsota števil na listu enaka 3434.

2. Naj bo D notranja točka stranice BC pravokotnega trikotnika ABC s pravim kotom pri C. Trikotniku ABD očrtano krožnico označimo s $\mathcal{K}$. Naj bo E taka točka na $\mathcal{K}$, da je tetiva DE pravokotna na AB. Dokaži, da je trikotnik AEB enakokrak z vrhom B natanko tedaj, ko je CA tangenta na krožnico $\mathcal{K}$.

3. Za katera naravna števila $n > 1$ doseže izraz

$$\frac{\log_{10} 2 \cdot \log_{10} 3 \cdots \log_{10} n}{10^{n-1}}$$

najmanjšo vrednost? Kolikšna je ta vrednost?

4. Igralca imata kup enakih žetonov, s katerega izmenično jemljeta po enega in ga postavljata na poljubno prazno polje kvadratne tabele velikosti 2008×2008. Zmaga tisti, ki prvi postavi žeton tako, da skupaj s tremi drugimi tvori oglišča enakokrakega trapeza, ki ni pravokotnik, in katerega osnovnici sta vzporedni enemu izmed robov tabele. Kateri igralec ima zmagovalno strategijo – tisti, ki je igro začel, ali njegov soigralec?

□ 4. letnik

1. Členi a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 geometrijskega zaporedja so naravna števila, manjša od 2008. Število a_2 je deljivo s 5, a_3 je deljivo s 4, a_4 je deljivo s 3, število a_1 pa ni deljivo s 6. Nobeno praštevilo ne deli vseh 5 členov zaporedja. Izračunaj člene tega zaporedja.

2. Poišči vsa realna števila x, za katera je vrednost izraza

$$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{5x-x^2}$$

celo število.

3. Na stranici BC pravokotnega trikotnika ABC s pravim kotom pri C izberemo točko D, različno od B in C. Trikotniku ABD očrtano krožnico označimo s $\mathcal{K}$. Naj bo T taka točka na stranici AB, da je DT pravokotna na AB. Premica DT seka krožnico $\mathcal{K}$ še v točki E. Presečišče premic CT in EB označimo s F. Premica DF seka krožnico $\mathcal{K}$ še v točki G. Dokaži, da sta trikotnika CEF in BEG podobna.

4. Naj bo K podmnožica naravnih števil. Za vsaki dve števili a in b iz množice K velja, da a deli b ali b deli a. Dokaži, da je tedaj vsako število c iz množice K večje od vsote vseh tistih števil iz množice K, ki so manjša od c.

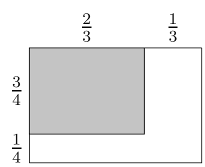
■ 44. področno tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

□ 7. razred

A1. Natanko koliko deliteljev ima produkt treh različnih praštevil?

(**A**) 3 (**B**) 5 (**C**) 7 (**D**) 8 (**E**) več kot 8

A2. Kolikšen del velikega pravokotnika je osenčen?

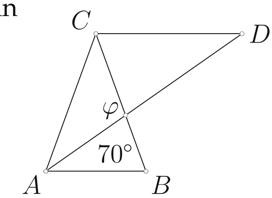


(**A**) $\frac{1}{12}$ (**B**) $\frac{1}{3}$ (**C**) $\frac{1}{2}$ (**D**) $\frac{3}{4}$ (**E**) $\frac{11}{12}$

A3. Koliko je vseh petmestnih naravnih števil, katerih vsota števk je 3?

(**A**) 10 (**B**) 15 (**C**) 20 (**D**) 25 (**E**) 35

A4. Koliko meri kot φ, če je $|AC| = |BC|$, $|AC| = |CD|$, $AB \parallel CD$ in $\sphericalangle CBA = 70°$?



(**A**) $70°$ (**B**) $105°$ (**C**) $120°$ (**D**) $150°$ (**E**) $170°$

A5. Kateri x reši enačbo: $\frac{x}{4} + \frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{x}{3}$?

(**A**) 3 (**B**) 2 (**C**) $\frac{5}{4}$ (**D**) $\frac{1}{2}$ (**E**) $\frac{4}{5}$

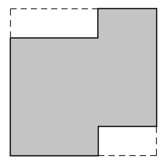
A6. Na opozorilni napravi utripata rdeča in zelena lučka. Rdeča lučka posveti vsako minuto in 20 sekund, zelena lučka vsake 0.3 minute. Ob 13.00 uri sta posvetili obe lučki hkrati. Ob kateri uri posvetita lučki spet istočasno?

(**A**) 13.08 (**B**) 13.12 (**C**) 13.20 (**D**) 13.24 (**E**) 13.30

A7. Koliko je x, če je $\frac{2}{3}$ števila x enako $\frac{7}{6}$?

(**A**) $1\frac{1}{3}$ (**B**) $1\frac{1}{2}$ (**C**) $1\frac{5}{8}$ (**D**) $1\frac{2}{3}$ (**E**) $1\frac{3}{4}$

A8. Kvadratu s stranico $a = 5$ na dveh vogalih odrežemo dva pravokotnika, kot kaže slika. Koliko meri obseg nastalega lika?



(**A**) 10 (**B**) 18 (**C**) 20 (**D**) 22 (**E**) 25

B1. Kot ob oglišču C trikotnika ABC meri $80°$. Simetrala tega kota seka nasprotno stranico c v točki D. Trikotnik DBC je enakokrak z osnovnico BC. Izračunaj velikost kota pri oglišču A. Nariši skico.

B2. Vesna nakupuje. Kupi si šminko in šampon, ki je polovico cenejši od šminke. Polovico preostalega denarja nameni za nakup toaletne torbice. Tako ji preostane 15 EUR. Na začetku je imela v denarnici tri bankovce po 10 EUR, štiri bankovce po 5 EUR in nekaj kovancev po 2 EUR. Drugega denarja ni imela. Število bankovcev v Vesnini denarnici je bilo za 2 večje od števila kovancev. Izračunaj, koliko stanejo posamezni izdelki, ki jih je Vesna kupila.

B3. Petmestno naravno število $a679b$ je deljivo z 72. Izračunaj neznani števki a in b.

□ 8. razred

A1. Kateri ulomek ima pomen za vsako celo število x?

(**A**) $\frac{x}{x+1}$ (**B**) $\frac{1}{x^2-1}$ (**C**) $\frac{2}{x^2-x}$ (**D**) $\frac{3}{x+3}$ (**E**) $\frac{x}{x^2-3}$

A2. Na neki šoli je 42 % fantov, deklet pa je 72 več kot fantov. Koliko je vseh učencev na šoli?

(**A**) 378 (**B**) 420 (**C**) 450 (**D**) 480 (**E**) 522

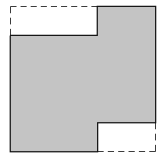
A3. Kolikšna je vrednost izraza $(\frac{6^3}{6^{-1}})^{-1}$?

(**A**) 6^{-4} (**B**) 6^{-3} (**C**) 6^{-2} (**D**) 6^2 (**E**) 6^4

A4. Katero od naštetih števil je največje?

(**A**) $\frac{3}{\sqrt{7}}$ (**B**) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (**C**) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$ (**D**) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ (**E**) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

A5. Obseg lika na sliki je $3a$. Koliko meri ploščina kvadrata z enakim obsegom?



(**A**) $\frac{3}{16}a^2$ (**B**) $\frac{9}{16}a^2$ (**C**) $\frac{16}{9}a^2$ (**D**) $\frac{9}{16}a$ (**E**) $\frac{3}{4}a^2$

A6. Za katero število velja, da je njegova petina dvakratnik števila 8?

(**A**) 90 (**B**) 80 (**C**) 75 (**D**) 45 (**E**) 20

A7. V paralelogramu $ABCD$ je stranica AB dvakrat daljša od stranice BC. Točka M leži na stranici AB tako, da velja: $|AM| = |MB|$. Koliko meri kot DMC?

(**A**) $60°$ (**B**) $75°$ (**C**) $90°$ (**D**) $105°$ (**E**) $120°$

A8. Iz posode vsako minuto izteče pol litra vode. Po 15 minutah je v posodi le še četrtina prvotne količine vode. Koliko litrov vode je bilo v posodi na začetku?

(**A**) 5 (**B**) 8 (**C**) 10 (**D**) 12 (**E**) 15

B1. Mateja je našla staro strgano knjigo brez platnic, v kateri manjka prvih 142 strani. Vse strani v knjigi so bile oštevilčene. Koliko strani še ima knjiga, če je številka zadnje strani sestavljena iz enakih števk kot številka strani, s katero se raztrgana knjiga začne?

B2. V kvadratu $ABCD$ nariši enakostranični trikotnik ABE in diagonalo AC. Presečišče daljic EB in AC je točka F. Simetrala kota BAE seka daljico BE v točki G in daljico BC v točki H. Izračunaj vse notranje kote štirikotnika $FGHC$.

B3. Izračunaj vrednost izraza:

$$\left(\frac{280^4}{(3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 13)^3} - 2^5 \cdot 5 \cdot 7\right)^3 \cdot \frac{1}{2^{14} \cdot 5^3 \cdot 7^3} =$$

□ 9. razred

A1. Kmet ima za svoje konje na zalogi oves, ki zadošča za 30 dni. Če bi imel 10 konj več, bi oves zadoščal le še za 20 dni. Koliko konj ima kmet?

(**A**) 10 (**B**) 20 (**C**) 30 (**D**) 40 (**E**) 60

A2. Koliko celih števil x zadošča neenakosti $|x - 2| \leq 3$?

(**A**) 3 (**B**) 5 (**C**) 6 (**D**) 7 (**E**) več kot 7

A3. Dedek prehodi v 17 sekundah $6\frac{3}{8}$ m dolgo pot, njegov vnuk pa v 4 sekundah $7\frac{1}{2}$ m. V kolikšnem razmerju sta njuni hitrosti, če se gibljeta enakomerno?

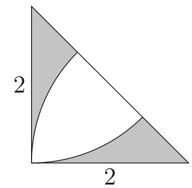
(**A**) $1:5$ (**B**) $17:20$ (**C**) $17:4$ (**D**) $4:17$ (**E**) $1:10$

A4. Majin povprečen dosežek na sedmih preizkusih je 56 %. Piše še en preizkus in si želi skupen povprečen dosežek 60 %. Kako uspešno mora pisati zadnji preizkus, da ji bo to uspelo?

(**A**) 58 % (**B**) 60 % (**C**) 64 % (**D**) 80 % (**E**) 88 %

A5. Kolikšna je ploščina osenčenega dela pravokotnega trikotnika?

(**A**) $4-\pi$ (**B**) $4+\pi$ (**C**) π (**D**) 4 (**E**) 4π



A6. Katera števka nastopa na mestu enic v številu 7^{35}?

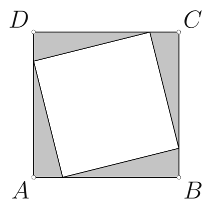
(**A**) 1 (**B**) 3 (**C**) 5 (**D**) 7 (**E**) 9

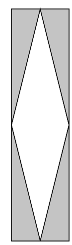
A7. Tri rdeče kocke in dve zeleni kocki skupaj tehtajo 32 kg. Štiri rdeče kocke in tri zelene kocke skupaj tehtajo 44 kg. Vse rdeče kocke so enake in vse zelene kocke so enake. Koliko skupaj tehtajo dve rdeči kocki in ena zelena kocka?

(**A**) 20 kg (**B**) 22 kg (**C**) 25 kg (**D**) 30 kg (**E**) 34 kg

A8. Če v kvadratu $ABCD$ pobarvamo štiri skladne pravokotne trikotnike, kot prikazuje leva slika, meri ploščina belega kvadrata $17\ \mathrm{m}^2$. Če postavimo te iste trikotnike v drugo lego, dobimo desno sliko, pri kateri meri ploščina belega romba $8\ \mathrm{m}^2$. Kolikšna je ploščina kvadrata $ABCD$?

(**A**) $19\ \mathrm{m}^2$ (**B**) $24\ \mathrm{m}^2$ (**C**) $25\ \mathrm{m}^2$ (**D**) $32\ \mathrm{m}^2$ (**E**) $36\ \mathrm{m}^2$





B1. Krožnici včrtamo največji možni kvadrat in tako nastalemu kvadratu včrtamo največjo možno krožnico. Katero število dobimo, če delimo obseg večje krožnice z obsegom manjše krožnice?

B2. Razdaljo med Amsterdamom in Benetkami avto prevozi v 23 urah. Pol poti prevozi s hitrostjo 80 km/h, tretjino s hitrostjo 60 km/h, ostalo pot pa s hitrostjo 40 km/h. Koliko km meri razdalja med Amsterdamom in Benetkami?

B3. Poišči vse dvojice naravnih števil, za katere velja, da je razlika kvadratov teh dveh števil enaka 2008.

■ Rešitve nalog z 52. področnega matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije

I/1. Najprej ločimo dve možnosti glede na vrednost izraza $2-x$. Če je $x \geq 2$, je $|2-x| = -(2-x)$ in lahko neenakost preoblikujemo v $||x-2-x|-8| \leq 2008$, kar je enakovredno $6 \leq 2008$. Torej vsa števila x, ki so večja ali enaka 2, zadoščajo neenakosti.

Naj bo še $x < 2$. Tedaj dobimo

$$||2-2x|-8| \leq 2008.$$

Ločimo dva primera glede na predznak izraza $2-2x$. Če je $x \geq 1$, je $|2-2x| = -(2-2x)$ in dobimo $|2x-10| \leq 2008$. Očitno za $1 \leq x < 2$ ta neenakost drži.

Ogledati si moramo še primer, ko je $x < 1$. Tedaj dobimo $|-2x+2-8| \leq 2008$ oziroma $|2x+6| \leq 2008$. Dobljena neenakost je enakovredna

$$-2008 \leq 2x+6 \leq 2008.$$

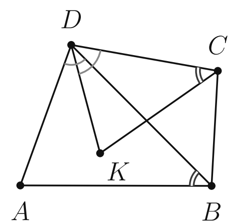
Ker je $x < 1$, sledi $2x+6 < 2+6 = 8$, zato desna ocena velja. Iz pogoja na levi strani pa sledi $-2014 \leq 2x$ oziroma $-1007 \leq x$. V tem primeru neenakosti zadoščajo števila x, za katera velja $-1007 \leq x < 1$.

Če združimo dobljene rezultate, sledi, da neenakost velja za vse $x \geq -1007$.

I/2. Ker sta si trikotnika ABD in KCD podobna, velja $\angle ADB = \angle KDC$ in $\frac{|DA|}{|DB|} = \frac{|DK|}{|DC|}$. Izračunamo lahko, da je

$$\angle ADK = \angle ADB - \angle BDK = \angle KDC - \angle BDK = \angle BDC,$$

od koder zaradi $\frac{|DA|}{|DK|} = \frac{|DB|}{|DC|}$ sledi, da sta si tudi ADK in DBC podobna, saj se ujemata v kotu in razmerju priležnih stranic.



I/3. 1. način Označimo trimestno število z $\overline{abc}$. Trikratnik tega števila je enak

$$3 \cdot \overline{abc} = (3a) \cdot 100 + (3b) \cdot 10 + 3c.$$

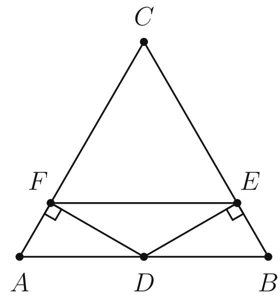
Najmanjše možno število na mestu stotic je $a = 1$. Da bo v tem primeru števka na mestu stotic v $3 \cdot \overline{abc}$ soda, mora biti $3b \cdot 10 + 3c \geq 100$, od koder sledi $10b + c \geq \frac{100}{3} = 33 + \frac{1}{3}$. Najmanjše število, ki tej neenakosti zadošča je 34, torej je iskano število 134, njegov trikratnik pa 402.

2. način Oglejmo si kakšno je lahko število, sestavljeno iz samih sodih števk, ki je trikratnik naravnega števila. Ker je število trimestno, je trikratnik vsaj 300. Ker pa ima trikratnik le sode števke, je števka na mestu stotic vsaj 4. Najmanjše trimestno število, ki je vsaj 400 in je deljivo s 3, je 402. Vse števke so sode, zato je $\frac{402}{3} = 134$ iskano trimestno število.

I/4.

1. način Očitno je $|DA| = |DB| = \frac{|AB|}{2} = 2$. Trikotnik DBE ima kote enake $60°$, $90°$ in $30°$, torej je enak polovici enakostraničnega trikotnika, zato je $|BE| = \frac{|BD|}{2} = 1$. Podobno velja

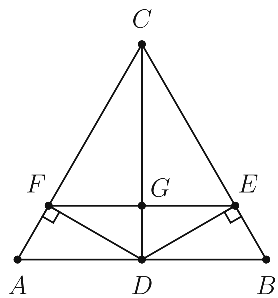
za trikotnik ADF, torej je skladen trikotniku BDE. Dolžina stranice DE oziroma DF je enaka $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |BD| = \sqrt{3}$. Ploščina posameznega trikotnika je tako enaka $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Trikotnik ECF ima stranici dolžine $|CF| = |CA| - |AF| = 3$ in $|CE| = |CB| - |EB| = 3$, torej je enakokrak trikotnik s kotom $60°$ pri vrhu, tj. enakostraničen. Ploščina tega trikotnika je tako enaka $\frac{3^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.



Ploščino trikotnika DEF torej lahko izračunamo tako, da ploščini trikotnika ABC odštejemo ploščine trikotnikov DBE, ADF in ECF. Dobimo, da je iskana ploščina enaka

$$\frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

2. način Očitno je $|DA| = |DB| = \frac{|AB|}{2} = 2$. Trikotnika AFD in BED imata kote enake $60°$, $90°$ in $30°$ ter se ujemata v dolžini hipotenuze, zato sta skladna. To pomeni $|DE| = |DF|$, torej je trikotnik DEF enakokrak. Označimo z G presečišče daljic CD in EF. Ker je $\angle FDG = \angle GDE = 60°$, je DG višina trikotnika DEF. Zato sta tudi trikotnika DGE in DGF skladna in imata kote enake $60°$, $90°$ in $30°$.
Trikotniki ADC, AFD in DGF so si torej podobni. Iz podobnosti ADC in AFD sledi $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AF|}{|AD|}$, od koder sledi $|AF| = 1$. Prav tako velja $\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|AF|}{|FD|}$, od koder dobimo $|FD| = \sqrt{3}$.

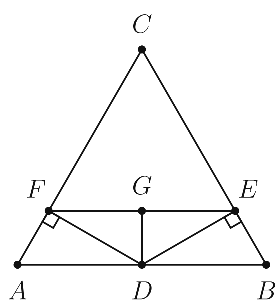


Podobnost trikotnikov ADC in DGF pa nam da $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|DG|}{|DF|}$, torej je $|DG| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Podobno iz $\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|DG|}{|GF|}$ sledi $|GF| = \frac{3}{2}$.
Ploščina trikotnika DEF je enaka vsoti ploščin trikotnikov FGD in DGE, torej je enaka

$$|DG| \cdot |FG| = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

3. način Očitno je $|DA| = |DB| = \frac{|AB|}{2} = 2$. Trikotnika AFD in BED imata kote enake $60°$, $90°$ in $30°$ ter se ujemata v dolžini hipotenuze, zato sta skladna. Torej je $|DE| = |DF| = \sqrt{3}$. Označimo z G razpolovišče daljice EF. Ker je $EF \parallel AB$, sta trikotnika FGD in EGD skladna pravokotna in $\angle DFG = \angle DEG = 30°$. Torej je

$$p_{DEF} = 2p_{DFG} = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$



I/5. Nagrade je prejela šestina tekmovalcev, torej 7. V zgornjo polovico se je uvrstilo 21 tekmovalcev, zato jih je $21 - 7 = 14$ doseglo med 14 in 21 točk.

Vsak nagrajeni tekmovalec je dosegel vsaj 22 točk, zato so vsi nagrajeni skupaj dosegli vsaj $22 \cdot 7 = 154$ točk.

Naj x označuje število tekmovalcev, ki so prejeli vsaj 25 % in manj kot 50 % točk, to je vsaj 7 in največ 13 točk. Potem je število tekmovalcev, ki so dosegli največ 6 točk, enako $42 - 21 - x = 21 - x$.

Izračunajmo še, koliko točk so dosegli nenagrajeni tekmovalci. Tisti z največ 6 točkami so vsi skupaj dosegli največ $6 \cdot (21 - x)$ točk. Tisti, ki so prejeli vsaj 7 in največ 13 točk, so skupaj dosegli največ $13x$ točk. Upoštevati moramo še nenagrajene tekmovalce v zgornji polovici, ki jih je 14, vsak izmed njih pa je prejel največ 21 točk, torej so prejeli največ $21 \cdot 14 = 294$.

Nenagrajeni tekmovalci skupaj so tako skupaj prejeli največ $6 \cdot (21 - x) + 13x + 294 = 420 + 7x$ točk. Po drugi strani pa vemo, da so prejeli trikrat toliko točk kot nagrajeni tekmovalci, to pomeni vsaj $3 \cdot 154 = 462$ točk. Od tod sledi

$$462 \leq 420 + 7x,$$

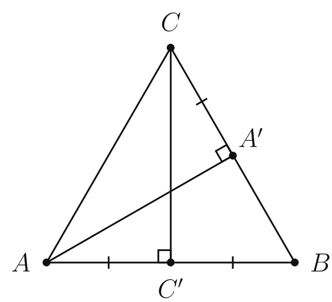
kar je enakovredno pogoju $7x \geq 42$ oziroma $x \geq 6$. To pa ravno pomeni, da obstaja vsaj 6 tekmovalcev, ki so posamezno dosegli vsaj 25 % točk, a manj kot 50 % točk.

II/1. Če je (x, y) par števil, ki reši enačbo, potem enačbo reši tudi $(-x, y)$. Zato je dovolj opazovati le tista števila x, ki so nenegativna. Pomnožimo enačbo z $2y$, da dobimo $x^2y + 10 = 14y$, od koder lahko izrazimo

$$y = \frac{10}{14 - x^2}.$$

Od tod sledi, da mora biti $14 - x^2$ delitelj števila 10, zato je $-10 \leq 14 - x^2 \leq 10$ oziroma $-24 \leq -x^2 \leq -4$, torej mora biti $24 \geq x^2 \geq 4$. Ker smo privzeli, da je $x \geq 0$, dobimo $5 > x \geq 2$. Izračunamo lahko, da pri $x = 2$ dobimo $y = 1$, pri $x = 3$ dobimo $y = 2$ in pri $x = 4$ sledi $y = -5$. Torej so vse celoštevilske rešitve enačbe pari $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, -5)$, $(-2, 1)$, $(-3, 2)$ in $(-4, -5)$.

II/2.



1. način Naj bo C' nožišče višine iz C. Ker je trikotnik ABC enakokrak z vrhom C, je $|AC'| = |C'B| = \frac{1}{2}|AB| = |CA'|$.
Trikotnika ABA' in CBC' sta pravokotna in velja $\angle ABA' = \angle CBC'$, zato sta si podobna. Tako velja $\frac{|AB|}{|BA'|} = \frac{|CB|}{|BC'|}$. Če označimo s c dolžino stranice $|AB|$ in z $x = |BA'|$, lahko dobljeno enakost prepišemo v obliko

$$\frac{c}{x} = \frac{\frac{c}{2} + x}{\frac{c}{2}},$$

oziroma v kvadratno enačbo $2x^2 + cx - x^2 = 0$. Slednjo lahko razstavimo kot $(2x - c)(x + c) = 0$ in, ker sta x in c pozitivni, sledi $x = \frac{c}{2}$.
Dolžina stranice BC je tako enaka c, torej je $|AC| = |BC| = |AB| = c$, zato je trikotnik ABC enakostraničen.

2. način Označimo dolžino stranice AC z a, dolžino stranice AB pa s c. Potem je $|CA'| = \frac{c}{2}$ in $|A'B| = a - \frac{c}{2}$. Višino AA' lahko potem izračunamo na dva načina, saj je kateta v pravokotnih trikotnikih ACA' in ABA'. Če je $|AA'| = v$, potem iz Pitagorovega izreka v prvem trikotniku dobimo $v^2 = a^2 - \frac{c^2}{4}$, v drugem pa $v^2 = c^2 - (a - \frac{c}{2})^2$, torej velja

$$a^2 - \frac{c^2}{4} = c^2 - a^2 + ac - \frac{c^2}{4}$$

oziroma $2a^2 - ac - c^2 = 0$. Dobljeno kvadratno enačbo lahko razcepimo kot $(2a+c)(a-c) = 0$, od koder sledi, da je $a = c$, saj pogoj $2a+c = 0$ ne more biti izpolnjen, ker sta a in c pozitivni števili. Ker pa je $|BC| = |AC| = a = c$, so vse tri stranice enako dolge, torej je trikotnik enakostraničen.

3. način Naj bo C' nožišče višine iz C. Ker je trikotnik ABC enakokrak z vrhom C, je $|AC'| = |C'B| = \frac{1}{2}|AB| = |CA'|$.
Naj H označuje višinsko točko in naj bo γ kot pri C. Potem je $\angle ACC' = \angle C'CB = \frac{\gamma}{2}$. Velja še $\angle A'HC = \pi - \angle HA'C - \angle HCA' = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$, zato je tudi $\angle AHC' = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$. Od tod sledi, da je

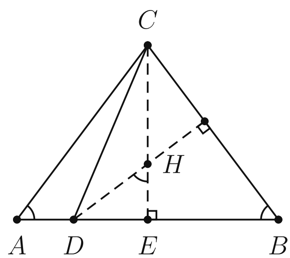
$$\angle C'AH = \pi - \angle AC'H - \angle AHC' = \frac{\gamma}{2}.$$

Trikotnika AHC' in CHA' se ujemata v kotih in dolžini katete pri kotu $\frac{\gamma}{2}$, zato sta skladna. Torej je $|CH| = |AH|$, zato je trikotnik AHC enakokrak, torej velja $\angle HAC = \angle ACH = \frac{\gamma}{2}$. Dobili smo $\angle BAC = \angle C'AH + \angle HAC = \gamma$, torej so vsi trije notranji koti trikotnika enaki γ, od koder sledi, da je trikotnik enakostraničen.

II/3. 1. način Ker je $a^9 + b^9 = (a^3 + b^3)(a^6 - a^3b^3 + b^6)$, je $a^6 - a^3b^3 + b^6 = -\frac{299}{13} = -23$. Upoštevamo še, da je $a^6 + 2a^3b^3 + b^6 = (a^3 + b^3)^2 = 13^2 = 169$. Enakosti odštejemo in dobimo $3a^3b^3 = 192$, od koder sledi $ab = 4$, saj je ab realno število.

2. način Velja $13^3 = (a^3 + b^3)^3 = a^9 + 3a^6b^3 + 3a^3b^6 + b^9 = -299 + 3a^6b^3 + 3a^3b^6$, od koder sledi $832 = a^6b^3 + a^3b^6$. Če izraz na desni razcepimo, dobimo $832 = a^3b^3(a^3 + b^3) = a^3b^3 \cdot 13$, od koder sledi $a^3b^3 = \frac{832}{13} = 64$, torej je $ab = 4$, saj je ab realno število.

II/4. Označimo $\angle BAC = \alpha$. Ker so točke A, D, H in C koncikliène, je $\angle DHC = \pi - \angle BAC = \pi - \alpha$.
Označimo z E nožišče višine iz točke C na stranico BD. Velja $\angle DHE = \pi - \angle DHC = \alpha$, zato je $\angle HDB = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Od tod nazadnje zaradi pravokotnosti premice DH na stranico BC sledi, da je $\angle CBA = \frac{\pi}{2} - \angle BDH = \alpha$, torej je trikotnik ABC res enakokrak.



II/5. Če je na tabli zapisano število 256, Maja lahko dobi število 55 in sicer tako, da 256 najprej koreni, da dobi 16. Iz 16 potem lahko dobi $3 \cdot 16 + 13 = 61$, iz tega števila pa naprej še $3 \cdot 61 + 13 = 196$. Število 196 lahko koreni, da dobi 14, nato pa iz njega $3 \cdot 14 + 13 = 55$. (Opomba: možno je, da obstaja več načinov kako lahko iz števila 256 dobi število 55, vendar je ta način edini, ki potrebuje manj kot 100 korakov).

Pokažimo, da iz števila 55 ne more dobiti števila 256. Oglejmo si ostanke pri deljenju s 4. Če je število sodo, je oblike $2k$, kvadrat tega števila je potem oblike $4k^2$. Če pa je število liho, je oblike $2k + 1$, zato je kvadrat tega števila enak $4k^2 + 4k + 1$, torej da pri deljenju s 4 ostanek 1. Torej, število je popoln kvadrat le, če da pri deljenju s 4 ostanek 0 ali 1, zato bomo lahko korenili le taka števila.

Število 55 da pri deljenju s 4 ostanek 3. Če na številu oblike $4k+3$ uporabimo pravilo $n \mapsto 3n+13$, dobimo $12k+9+13 = 4(3k+5)+2$, torej število, ki da ostanek 2. Če pa pravilo uporabimo na številu oblike $4k+2$, dobimo $12k+6+13 = 4(3k+4)+3$, torej število, ki da ostanek 3 pri deljenju s 4. To pomeni, da bomo iz števila 55 po enem koraku dobili število, ki da pri deljenju s 4 ostanek 2, nato število z ostankom 3, nato spet število z ostankom 2 in tako naprej. Ker pa je število 256 deljivo s 4, ga Maja na ta način ne bo dosegla.

III/1.

1. način S pomočjo adicijskega izreka za tangens lahko zapišemo

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\tan\frac{x}{2}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{x}{2}\tan\frac{\pi}{4}}\right)^2.$$

Če upoštevamo, da je $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ in zapišemo $\tan\frac{x}{2}$ s sinusi in kosinusi, naprej sledi

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}+1}{1-\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}\right)^2 = \left(\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Po kvadriranju dobimo

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}$$

in od tod z upoštevanjem zvez $\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2} = 1$ in $2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = \sin x$ sledi

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\sin x}{1-\sin x} = \frac{2}{1-\sin x} - 1.$$

Torej enakost res drži.

2. način Če zapišemo tangens s sinusom in kosinusom, dobimo

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}\right)^2.$$

Z upoštevanjem adiciskih izrekov za sinus in kosinus, naprej sledi

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{4}}\right)^2.$$

Vemo, da je $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ in $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, torej je izraz enak

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Po kvadriranju dobimo

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}$$

od koder z upoštevanjem $\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2} = 1$ in $2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = \sin x$ sledi

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}=\frac{2}{1-\sin x}-1.$$

Torej enakost res drži.

III/2. Če je $p=2$, je $q(x)=2x^3-4x^2-x+2=(x-2)(2x^2-1)$ in ima racionalno ničlo $x=2$. Naj bo zdaj p liho praštevilo. Edini kandidati za racionalne ničle so ± 1, $\pm p$, $\pm\frac{1}{2}$ in $\pm\frac{p}{2}$. Izračunajmo vse možnosti.

Velja $q(1)=3-2p$ in ker je $3-2p$ liho, je $q(1)\neq 0$. Jasno je $q(-1)=-3\neq 0$. Tudi izraz $q(-p)=-p^2+2p=p(2-p)$ je različen od 0, saj je $p\neq 2$. Podobno je $q(p)=-4p^3+p^2=p^2(1-4p)\neq 0$ in $q(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}\neq 0$. Preverimo lahko tudi $q(-\frac{1}{2})=p-\frac{3}{4}\neq 0$ ter $q(\frac{p}{2})=\frac{-p^3-2p^2+6p}{4}$. Ker je p lih, je števec zadnjega izraza lih, zato izraz ne more biti enak 0. Ostane še $q(-\frac{p}{2})=\frac{-3p^3+2p^2+2p}{4}$. Spet izraz ne more biti enak 0, saj je števec lih.

Za liha praštevila torej polinom q nima racionalnih ničel, kar pomeni, da je edino ustrezno praštevilo $p=2$.

III/3. Iz druge enačbe sledi $y=x^{-2}$, torej imamo

$$x^{x+x^{-2}}=x^{-2(x-x^{-2})}.$$

Enačbo logaritmiramo in dobimo

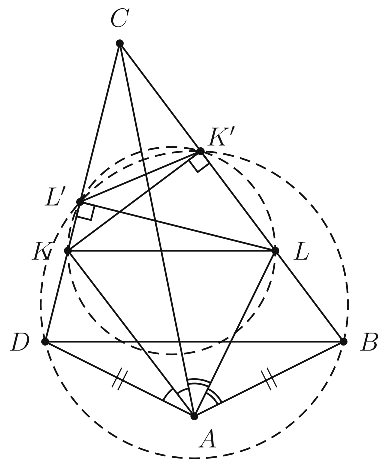
$$(x+x^{-2})\log x=-2(x-x^{-2})\log x.$$

Če je $\log x=0$, je $x=1$ in potem $y=1$. Sicer pa velja

$$x+x^{-2}=-2x+2x^{-2}$$

oziroma $3x^3=1$. Od tod sledi $x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ in nato $y=\sqrt[3]{9}$. Dobili smo dve rešitvi.

III/4. Po sinusnem izreku v trikotniku BAL velja



$$\frac{\sin(\angle BAL)}{|BL|}=\frac{\sin(\angle ALB)}{|AB|}.$$

Podobno velja v trikotniku CAL, da je

$$\frac{\sin(\angle LAC)}{|CL|}=\frac{\sin(\angle CLA)}{|AC|}.$$

Ker je $\angle ALB=\pi-\angle CLA$, velja $\sin\angle ALB=\sin\angle CLA$. Torej iz zgornjih enačb z upoštevanjem $\angle BAL=\angle LAC$ dobimo

$$\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|BL|}{|CL|}.$$

Podobno sledi še $\frac{|AD|}{|AC|}=\frac{|DK|}{|CK|}$.
(Dejstvo, da simetrala kota razdeli nasprotno stranico v razmerju priležnih stranic je znano in ga ni potrebno dokazovati prek sinusnega izreka. Zadošča sklep: ker je AL simetrala kota $\angle BAC$, je $\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|BL|}{|CL|}$.)
Ker je $|AB|=|AD|$, iz dobljenih enakosti sledi $\frac{|BL|}{|CL|}=\frac{|DK|}{|CK|}$. Zato velja

$$\frac{|CB|}{|CL|} = \frac{|BL| + |CL|}{|CL|} = \frac{|BL|}{|CL|} + 1 = \frac{|DK|}{|CK|} + 1 = \frac{|DK| + |CK|}{|CK|} = \frac{|CD|}{|CK|}.$$

Trikotnika DBC in KLC sta si podobna, saj imata skupen kot pri C in velja $\frac{|CB|}{|CL|} = \frac{|CD|}{|CK|}$. Torej je premica KL vzporedna diagonali BD. Zaradi pravih kotov pri K' in L' so točke K, L, K' in L' konciklične. Ker je trikotnik BCD ostrokoten, ležita točki K' in L' na istem bregu premice KL in na istem bregu premice BD. Torej velja

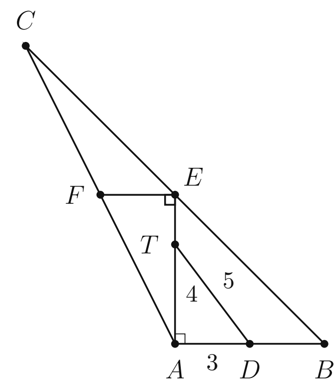
$$\angle DL'K' = \angle KL'K' = \pi - \angle K'LK = \pi - \angle K'BD$$

in zato so točke B, D, L' in K' konciklične.

III/5. Če je $k = 1$, je vsako izmed števil $a_1, a_2, \ldots, a_n$ deljivo z n, torej je z n deljiva tudi njihova vsota. Naj bo torej $1 < k < n$. Naj bo $i \neq j$. Ker množica $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \backslash \{a_i, a_j\}$ vsebuje $n - 2 \geq k - 1$ elementov, si lahko izberemo podmnožico S s $k - 1$ elementi. Potem sta $S \cup \{a_i\}$ in $S \cup \{a_j\}$ k-terici števil, zato sta njuni vsoti deljivi z n, torej je tudi razlika njunih vsot deljiva z n. Ta razlika je enaka $a_i - a_j$. Torej n deli $a_i - a_j$. Ker sta bila i in j poljubna, to pomeni, da imajo števila $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enake ostanke pri deljenju z n, ker pa jih je skupaj n, je njihova vsota deljiva z n.

IV/1. Najprej opazimo, da izraza $a + 2b$ in $2a + b$ ne smeta biti enaka 0, torej števili a in b hkrati ne smeta biti enaki 0. V enačbi $\frac{4a}{a+2b} - \frac{5b}{2a+b} = 1$ odpravimo ulomke in dobimo $8a^2 + 4ab - 5ab - 10b^2 = 2a^2 + 5ab + 2b^2$, kar lahko preoblikujemo v $6(a + b)(a - 2b) = 0$. Če je $a = -b$, je vrednosti izraza $\frac{a-2b}{4a+5b}$ enaka $\frac{-3b}{b} = -3$, saj mora biti b različen od 0 (kajti a in b ne smeta biti hkrati enaki 0). Če pa je $a = 2b$, je vrednost izraza $\frac{a-2b}{4a+5b}$ enaka 0, saj je spet imenovalec neničeln. Torej je vrednost izraza lahko enaka 0 ali -3.

IV/2. Točka D je razpolovišče stranice AB in zaradi $|AD| = 3$ sledi $|AB| = 6$. Označimo z E razpolovišče stranice BC in s F razpolovišče AC. V trikotniku ADT za dolžine stranic velja Pitagorov izrek, zato je ta trikotnik pravokotni. Ker težišče deli težiščnico v razmerju 2 proti 1 in je $|AT| = 4$, je zato $|AE| = 6$. Torej v pravokotnem trikotniku ABE poznamo dolžini katet, zato lahko po Pitagorovem izreku izračunamo $|BE| = \sqrt{|AB|^2 + |AE|^2} = \sqrt{36 + 36} = 6\sqrt{2}$. Od tod sledi, da je $|BC| = 2|BE| = 12\sqrt{2}$.



Ker sta E in F razpolovišči stranic BC in AC, je EF vzporedna z AB. Ker pa je EA pravokotna na AB, je EA pravokotna tudi na EF. Torej je trikotnik AEF pravokotni. Vemo že, da je $|AE| = 6$, velja pa še, da je $|EF| = \frac{|AB|}{2} = 3$. Torej lahko izračunamo dolžino FA po Pitagorovem izreku in sicer

$$|FA| = \sqrt{|EF|^2 + |AE|^2} = \sqrt{9 + 36} = 3\sqrt{5}.$$

Od tod sledi, da je dolžina stranice AC enaka $|AC| = 2|AF| = 6\sqrt{5}$.

IV/3. Izračunajmo prvih nekaj števil n. Pri $p = 2$ dobimo $n = 9$, pri $p = 3$ je $n = 49$ in pri $p = 5$ je $n = 513$. Naj bo sedaj $p > 5$. Zapišimo n kot $n = (p-2)(p-1)(p+1)(p+2)+9$. Ker je $(p - 2), (p - 1), p, (p + 1), (p + 2)$ pet zaporednih števil, je vsaj eno deljivo s 5. Če je

$p > 5$, število p ni deljivo s 5, zato je s 5 deljivo eno izmed števil $(p-2), (p-1), (p+1), (p+2)$, torej je njihov produkt $(p-2)(p-1)(p+1)(p+2)$ deljiv s 5. Vsaj eno izmed števil $p+1$ oziroma $p+2$ je sodo, zato je produkt deljiv tudi z 2. Torej je število $(p-2)(p-1)(p+1)(p+2)$ za $p > 5$ deljivo z 10. Tako je število n za $p > 5$ vsaj dvomestno in ima na mestu enic števko 9, zato je vsota števk števila n večja od 9. Najmanjša vsota števk je tako pri $p = 2$ in $p = 5$, ko je enaka 9.

IV/4. V funkcijsko enačbo vstavimo $x = 0$ in dobimo $f(0) = f(y) + yf(0)$. Torej je f linearna funkcija oblike $f(x) = a - ax$ za neko realno število a. Ta predpis vstavimo v funkcijsko enačbo in dobimo, da za vsaka $x, y \in \mathbb{R}$ velja $x+a-ax(a-ay) = a-ay+y(a-ax)$, torej

$$x - a^2x + a^2xy = -axy.$$

Če v to enačbo vstavimo $y = 0$, dobimo $x = a^2x$ za vsak x, torej $a^2 = 1$. Ko to upoštevamo v zgornji enakosti, se poenostavi v $xy = -axy$ oziroma $(1+a)xy = 0$, od koder sledi $a = -1$, saj mora enakost veljati za vsaka x in y.

Dobili smo $f(x) = x - 1$. Če ta predpis vstavimo v obe strani prvotne enačbe, dobimo

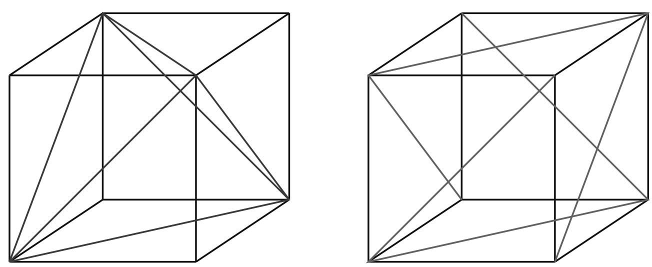
$$x + f(xf(y)) = x + f(xy - x) = x + xy - x - 1 = xy - 1$$

in

$$f(y) + yf(x) = y - 1 + y(x - 1) = xy - 1,$$

kar je enako za vsaka x in y, torej je $f(x) = x - 1$ edina funkcija, ki zadošča dani enačbi.

IV/5. Na prvi sliki je $N = 12$, na drugi pa $N = 4$. Dokažimo, da sta to največja in najmanjša možna vrednost N.



Vseh oglišč kocke je 8. Vseh narisanih diagonal je 6 in zato je vseh krajišč diagonal 12. Iz nekega oglišča kocke lahko izhajajo 0, 1, 2 ali 3 diagonale. Torej nam vsako oglišče kocke prinese 0, 0, 1 ali 3 različne pare dotikajočih se diagonal.

Denimo, da lahko dosežemo $N \leq 3$. Če iz nekega oglišča izhajajo 3 diagonale, lahko iz ostalih oglišč izhaja kvečjemu ena diagonala. To bi pomenilo, da je krajišč diagonal kvečjemu $1 \cdot 3 + 7 \cdot 1 = 10$, to pa ni možno. Torej se v nobenem oglišču ne stikajo tri diagonale in imamo lahko kvečjemu 3 oglišča, v katerih se stikata po dve diagonali. Iz vsakega ostalega oglišča potem izhaja kvečjemu ena diagonala. Tako je vseh krajišč diagonal kvečjemu $3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 11$. To pa je protislovje. Torej je pri vsaki izbiri dopustnih diagonal $N \geq 4$.

Vseh različnih parov diagonal je $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$. Diagonali, ki ležita na nasprotnih ploskvah kocke, se ne moreta stikati. Zato obstaja kvečjemu $15 - 3 = 12$ različnih parov stikajočih se diagonal. Torej je pri vsaki izbiri dopustnih diagonal $N \leq 12$.

Rešitve nalog z 52. državnega matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije

I/1. Najprej denimo, da je $p = q$. Potem mora biti število $47p^3$ popoln kvadrat. Ker je deljivo s 47 in je 47 praštevilo, mora biti deljivo tudi s 47^2, od koder sledi, da 47 deli p^3 oziroma 47 deli p. Toda p je praštevilo, torej mora biti enako 47. Res, pri $p = q = 47$ je število $2p^2q + 45pq^2$ enako 47^4 in je torej popoln kvadrat.

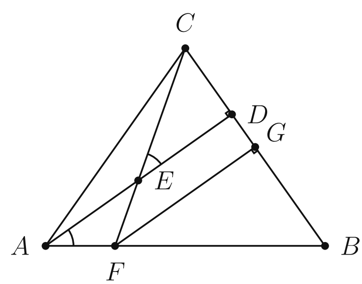
Naj bo sedaj $p \neq q$. Ker je število $2p^2q + 45pq^2 = pq(2p + 45q)$ popoln kvadrat deljiv s p, mora biti deljiv tudi s p^2. Torej p deli $q(2p + 45q)$ oziroma, ker sta p in q tuji, p deli $2p + 45q$. Od tod sledi, da p deli $45q$ oziroma, da p deli 45. Torej je $p = 3$ ali pa $p = 5$. Podobno sklepamo, da q deli $2p + 45q$, od koder sledi, da q deli $2p$ oziroma $q = 2$. Torej je $pq(2p + 45q) = 4p(p + 45)$. Če je $p = 3$, je to število enako $4 \cdot 3 \cdot 48 = 24^2$, pri $p = 5$ pa je enako 4000 in ni popolni kvadrat. Edini rešitvi sta torej $p = q = 47$ in $p = 3$, $q = 2$.

I/2. Iz dane enačbe sledi $ab + bc + ca = 0$. Zato lahko zapišemo

$$\frac{a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b)}{abc} = \frac{a(ab+ac) + b(ba+bc) + c(ca+cb)}{abc}.$$

Upoštevamo, da je $ab + ac = -bc$, $ba + bc = -ca$ in $ca + cb = -ab$ in dobimo

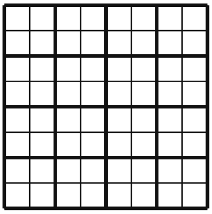
$$\frac{a(ab+ac) + b(ba+bc) + c(ca+cb)}{abc} = \frac{a(-bc) + b(-ca) + c(-ab)}{abc} = \frac{-3abc}{abc} = -3.$$



I/3. Najprej izračunajmo dolžini $|AD|$ in $|CD|$. Označimo $|AD| = v$ in $|CD| = x$. Po Pitagorovem izreku je $v^2 = |AC|^2 - x^2 = |AB|^2 - (|BC| - x)^2$, od koder dobimo $13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$ oziroma $13^2 = 15^2 - 14^2 + 2 \cdot 14 \cdot x$. Torej je $x = 5$ in potem $v = 12$.
Ker je $\angle BAD = \angle DEC$, je trikotnik EDC je podoben trikotniku ADB. Zato je $\frac{|EC|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AD|}$ in $\angle DBA = \angle ECD$. Sledi $|EC| = \frac{15}{9} \cdot 5 = \frac{25}{3}$ in $\angle FCB = \angle CBF$, torej je trikotnik BFC enakokrak z vrhom B. Zato je $|CF| = |FB|$.
Naj bo G razpolovišče BC. Potem je FG pravokotna na BC. Trikotnik FBG je podoben trikotniku ABD, zato velja $\frac{|FB|}{|BG|} = \frac{|AB|}{|BD|}$, torej je $|FB| = \frac{|AB| \cdot |BG|}{|BD|} = \frac{15 \cdot 7}{9} = \frac{35}{3}$.
Dolžina $|EF|$ je enaka $|EF| = |CF| - |CE| = |FB| - |CE| = \frac{35}{3} - \frac{25}{3} = \frac{10}{3}$.

I/4. (a) Tabela 6×9 ima 54 kvadratkov. Če želi zmagati Bojan, morata tabelo pokriti v celoti, saj lahko Anja svoje ploščice polaga dokler je še kakšno prazno polje. Ko bosta Bojan in Anja vsak 13-krat postavila svojo ploščico na tabelo, bosta ostali še $54 - 13 \cdot (1 + 3) = 2$ nepokriti polji. Ne glede na to kdo je začel, tabele ne bosta pokrila do konca, kar pomeni, da bo zmagala Anja.

(b) Tabelo 8×8 lahko razdelimo na 16 kvadratov 2×2 kot prikazuje slika. Če je igro začela Anja, potem v svoji potezi položi svojo ploščico v enega izmed 2×2 kvadratov. Bojan lahko ta kvadrat v svoji potezi zapolni. To lahko stori po vsaki Anjini potezi, dokler ne zapolnita cele tabele. Torej je zmagovalec Bojan.



Če igro začne Bojan, položi svojo ploščico v nek 2×2 kvadrat. V kolikor ga Anja zapolni, v naslednji potezi spet položi svojo ploščico v nek 2×2 kvadrat. Če pa Anja kvadrata 2×2 ne zapolni, potem Bojan v svoji potezi dopolni 2×2 kvadrat, v katerega je Anja položila ploščico. Po 15 potezah je na vrsti Bojan, na tabeli pa je prost bodisi en kvadrat velikosti 2×2 bodisi štirje kvadratki, pri čemer se trije kvadratki nahajajo znotraj istega 2×2 kvadrata. Bojan lahko tako svojo ploščico položi na tabelo, zadnja pa je na potezi Anja, ki mora zapolniti še preostalo prosto polje, kar pomeni, da je zmagal Bojan.

II/1. Enačbi lahko prepišemo v obliko

$$\begin{aligned}(x+2y)(x^2-2xy+4y^2) &= x+2y,\\ 2xy(x+2y) &= x+2y.\end{aligned}$$

Očitno vsak par števil x in y, ki zadošča zvezi $x+2y=0$, reši enačbi. Naj bo sedaj $x+2y\neq 0$. Tedaj lahko delimo z $x+2y$ in dobimo $x^2-2xy+4y^2=1$ in $2xy=1$, torej je

$$(x+2y)^2 = x^2+4xy+4y^2 = (x^2-2xy+4y^2)+6xy = 4.$$

Ločimo dve možnosti in sicer je $x+2y=2$ ali pa $x+2y=-2$. V prvem primeru dobimo $1=2xy=2(2-2y)y=4y-4y^2$, torej $0=4y^2-4y+1=(2y-1)^2$. Od tod sledi $y=\frac{1}{2}$ in $x=2-2y=1$. V drugem primeru pa je $x=-2-2y$ in zato velja $1=2xy=2(-2-2y)y=-4y-4y^2$, torej je $0=(2y+1)^2$. Sledi $y=-\frac{1}{2}$ in $x=-1$.

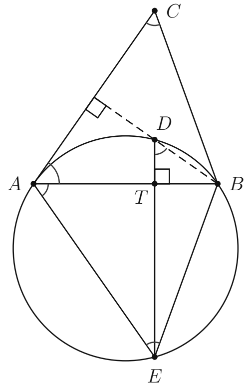
Enačbi tako zadoščajo vsa realna števila x in y, za katera velja $x+2y=0$, poleg teh pa še $x=-1$, $y=-\frac{1}{2}$ in $x=1$, $y=\frac{1}{2}$.

II/2. (a) Število je deljivo z 9 natanko tedaj, ko je vsota njegovih števk deljiva z 9. Recimo, da je vsota števk števila 10^n+9n deljiva z 2007. Ker je 2007 večkratnik števila 9, je potem vsota števk števila 10^n+9n deljiva z 9. To pa pomeni, da je 10^n+9n deljivo z 9, kar pa ne velja.

(b) Naj bo $n=1\ldots1$, kjer v zapisu nastopa 223 enic. Tedaj je $9n=9\ldots9$, kjer v zapisu nastopa 223 devetic. Število 10^n+9n je potem enako $10\ldots09\ldots9$, pri čemer v zapisu nastopa 223 devetic in $n-223=1\ldots1-223$ ničel. Vsota števk tega števila je enaka $1+9\cdot 223=2008$.

II/3. Označimo s T presečišče tetiv DE in AB. Vemo, da je trikotnik DTB pravokotni. Označimo $\angle CAB=\angle ACB=\alpha$. Ker je AC tangenta, je torej kot $\angle CAB$ enak nepriležnemu kotu $\angle AEB$ nad tetivo AB. Zato je $\angle AEB=\alpha$.
Velja tudi, da je $\angle ABD=\frac{\pi}{2}-\alpha$, zato je $\angle TDB=\alpha$. Tako je $\angle EDB=\alpha$ in ta kot je enak $\angle EAB$, saj sta obodna kota nad tetivo BE. Torej je $\angle BAE=\alpha=\angle BEA$, zato je trikotnik

ABE enakokrak z vrhom B. Trikotnika ABE in ABC se ujemata v vseh kotih in dolžini skupne in istoležne stranice AB, torej sta skladna.



II/4. Zmagovalno strategijo ima drugi igralec. Stolpce razdeli v 1004 parov in sicer sta v prvem paru stolpca 1 in 2, v drugem stolpca 3 in 4, in tako naprej, do zadnjega para, v katerem sta stolpca 2007 in 2008. Kadarkoli da prvi igralec žeton v enega izmed stolpcev, da drugi igralec žeton v isto vrstico drugega stolpca iz para. Najkasneje po 1004 potezah bo moral prvi igralec postaviti žeton v stolpec, kjer se žeton že nahaja. Tedaj bo drugi igralec s postavitvijo žetona tvoril pravokotnik in zmagal.

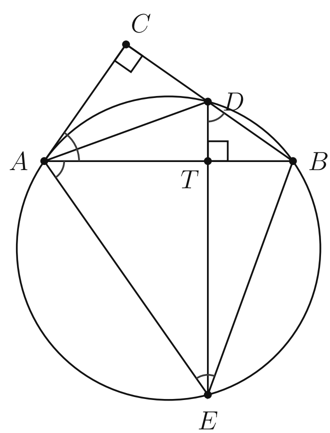
III/1. Označimo števke števila x z a, b in c, torej $x = \overline{abc}$. Vsa trimestna števila, sestavljena iz števk a, b in c so $\overline{abc}, \overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{cba}$, njihova vsota pa je $100(2a + 2b + 2c) + 10(2a + 2b + 2c) + (2a + 2b + 2c) = 222(a + b + c)$. Vsota števil na listu je tako enaka

$$3434 = 222(a + b + c) - \overline{abc} = 122a + 212b + 221c.$$

Oglejmo si zgornjo enačbo glede na deljivost z 9. Ostanek števila 3434 pri deljenju z 9 je enak 5, ostanek števila $122a + 212b + 221c$ pa je enak ostanku števila $5a + 5b + 5c = 5(a + b + c)$. Od tod sledi, da mora biti ostanek števila $a + b + c$ pri deljenju z 9 enak 1. Ker pa je $6 = 1 + 2 + 3 \leq a + b + c \leq 7 + 8 + 9 = 24$, je torej $a + b + c$ enako bodisi 10 bodisi 19.

Če je $a + b + c = 10$, lahko ocenimo $3434 = 122a + 212b + 221c < 221(a + b + c) = 221 \cdot 10 < 3434$, kar ni možno. Torej je $a + b + c = 19$. Sedaj lahko izračunamo $\overline{abc} = 222(a + b + c) - 3434 = 222 \cdot 19 - 3434 = 784$. Edina možnost je $x = 784$.

III/2. Označimo s T presečišče tetiv DE in AB. Vemo, da je trikotnik DTB pravokotni.
Denimo najprej, da je trikotnik ABE enakokrak. Označimo $\angle AEB = \angle BAE = \alpha$. Obodna kota $\angle EAB$ in $\angle EDB$ nad tetivo BE sta enaka, zato je tudi $\angle EDB = \alpha$. Ker pa je DE pravokotna na AB, je zato $\angle ABD = \frac{\pi}{2} - \alpha$. V pravokotnem trikotniku ABC torej velja $\angle ABC = \frac{\pi}{2} - \alpha$, zato je $\angle CAB = \alpha$. Torej je kot $\angle CAB$ med premico AC in tetivo AB enak kotu $\angle AEB$ nad tetivo AB, kar ravno pomeni, da je CA tangenta na krožnico $\mathcal{K}$.
Obratno, denimo, da je AC tangenta na krožnico $\mathcal{K}$. Označimo $\angle CAB = \alpha$. Ker je AC tangenta, je torej kot $\angle BAC$ enak kotu $\angle AEB$ nad tetivo AB. Zato je $\angle AEB = \alpha$.



Velja tudi, da je $\angle ABC = \frac{\pi}{2} - \alpha$, zato je $\angle TDB = \alpha$. Tako je $\angle EDB = \alpha$ in ta je enak $\angle BAE$, saj sta obodna kota nad tetivo BE. Torej je $\angle BAE = \alpha = \angle BEA$, zato je trikotnik ABE enakokrak z vrhom B.

III/3. Primerjajmo izraza $\frac{\log_{10} 2 \log_{10} 3 \cdots \log_{10}(n-1)}{10^{n-2}}$ in $\frac{\log_{10} 2 \log_{10} 3 \cdots \log_{10} n}{10^{n-1}}$. Neenakost

$$\frac{\log_{10} 2 \log_{10} 3 \cdots \log_{10}(n-1)}{10^{n-2}} \geq \frac{\log_{10} 2 \log_{10} 3 \cdots \log_{10} n}{10^{n-1}}$$

velja natanko tedaj, ko je $1 \geq \frac{1}{10} \log_{10} n = \log_{10} \sqrt[10]{n}$, kar je enakovredno $10 \geq \sqrt[10]{n}$ oziroma $10^{10} \geq n$. Od tod sledi

$$\frac{\log_{10} 2}{10} > \frac{\log_{10} 2 \cdot \log_{10} 3}{10^2} > \ldots > \frac{\log_{10} 2 \cdot \log_{10} 3 \cdots \log_{10}(10^{10}-1)}{10^{10^{10}-2}}$$
$$= \frac{\log_{10} 2 \cdot \log_{10} 3 \cdots \log(10^{10})}{10^{10^{10}-1}}$$

in

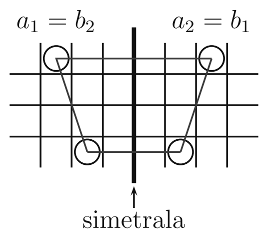
$$\frac{\log_{10} 2 \cdot \log_{10} 3 \cdots \log(10^{10})}{10^{10^{10}-1}} < \frac{\log_{10} 2 \cdot \log_{10} 3 \cdots \log(10^{10}+1)}{10^{10^{10}}}$$
$$< \frac{\log_{10} 2 \cdot \log_{10} 3 \cdots \log(10^{10}+2)}{10^{10^{10}+1}} < \ldots .$$

Torej je vrednost izraza $\frac{\log_{10} 2 \log_{10} 3 \cdots \log_{10} n}{10^{n-1}}$ najmanjša pri $n = 10^{10} - 1$ in $n = 10^{10}$. Enaka je

$$\frac{\log_{10} 2 \log_{10} 3 \cdots \log_{10} 10^{10}}{10^{10^{10}-1}}.$$

III/4. Poimenujmo enakokrak trapez, ki ni pravokotnik, in ima osnovnici vzporedni enemu izmed robov tabele, *pravilen* trapez. Zmaga drugi igralec in to ne glede na to kako igra prvi. Drugi igralec po vsaki potezi prvega preveri, ali lahko s postavitvijo svojega žetona tvori pravilen trapez. Če tega ne more narediti, postavi svoj žeton na tabelo tako, da bo po njegovi potezi simetrična glede na navpično simetralo (t.j. njegova poteza je simetrična potezi prvega igralca glede na navpično simetralo tabele).

Denimo, da je zmagal prvi igralec, ki je v zadnji potezi postavil žeton na polje a_0. Naj bodo a_1, a_2 in a_3 preostala tri polja, ki s poljem a_0 tvorijo pravilen trapez (torej so pokrita z žetoni in so med seboj različna). Označimo z b_0, b_1, b_2 in b_3 njim simetrična polja glede na navpično simetralo tabele. Polja b_1, b_2 in b_3 so pokrita z žetoni, polje b_0 pa je prazno. Pokažimo, da so polja a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2 in b_3 vsa med seboj različna.



Ker je dolžina tabele soda, je $a_i \neq b_i$ za vsak $i = 0, 1, 2, 3$. Če bi veljalo $a_i = b_j$ za $i \neq j$, potem bi bilo tudi $b_i = a_j$, torej bi bila stranica $a_i a_j$ trapeza $a_0 a_1 a_2 a_3$ vodoravna. Vendar potem bi morala biti tudi stranica $a_k a_l$ za $\{k, l\} = \{0, 1, 2, 3\} \backslash \{i, j\}$, vodoravna, ker pravilen trapez nima pravih kotov. Od tod pa bi zaradi enakokrakosti sledilo, da je tudi $b_k = a_l$ in $a_l = b_k$ za $l \neq k$. Zato bi bilo $b_0 = a_m$ za nek $m \neq 0$, kar pa ni mogoče, saj je polje b_0 prazno, na poljih a_1, a_2 in a_3 pa so žetoni.

Vsa polja so med seboj različna, zato sta bili pred zadnjo potezo prvega igralca trojici a_1, a_2, a_3 in b_1, b_2, b_3 pokriti z žetoni, kar pomeni, da je bila pred zadnjo potezo drugega igralca vsaj ena izmed njiju pokrita z žetoni. Drugi igralec je imel priložnost zmagati, a ni zmagal, torej ni upošteval strategije.

IV/1. Ker so a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 členi geometrijskega zaporedja, jih lahko zapišemo v obliki $a_i = a_1 \cdot q^{i-1}$ za $i = 2, 3, 4, 5$, kjer je q neko realno število. Toda $q = \frac{a_2}{a_1}$ je kvocient dveh naravnih števil, torej je racionalno število. Zapišimo $q = \frac{m}{n}$ kot okrajšani ulomek. Tedaj so členi zaporedja enaki

$$a_1, \frac{a_1 \cdot m}{n}, \frac{a_1 \cdot m^2}{n^2}, \frac{a_1 \cdot m^3}{n^3}, \frac{a_1 \cdot m^4}{n^4}.$$

Ker so vsi členi naravna števila, m in n pa sta si tuji, je n^4 delitelj števila a_1. Zato lahko zapišemo $a_1 = dn^4$, kjer je d neko naravno število. Torej so členi tega zaporedja števila

$$dn^4, dmn^3, dm^2n^2, dm^3n, dm^4.$$

Ker pa ne obstaja praštevilo, ki bi delilo vse člene zaporedja, sledi $d = 1$, zaporedje pa je oblike $n^4, mn^3, m^2n^2, m^3n, m^4$. Vemo še, da so členi zaporedja manjši od 2008, zato je $m^4 < 2008$ in $n^4 < 2008$. Od tod sledi, da je $m \leq 6$ in $n \leq 6$. Toda člen $a_1 = n^4$ ni deljiv s 6, zato je $n \leq 5$. Vemo še, da je $a_2 = n^3m$ deljiv s 5, $a_3 = n^2m^2$ deljiv s 4 in $a_5 = m^3n$ deljiv s 3, zato je produkt mn deljiv z 2, 3 in 5, torej s 30. Hkrati pa je $mn \leq 6 \cdot 5 = 30$, torej je produkt kar enak 30, od koder sledi $m = 6$ in $n = 5$. Členi zaporedja so tako $5^4 = 625$, $5^3 \cdot 6 = 750$, $5^2 \cdot 6^2 = 900$, $5 \cdot 6^3 = 1080$ in $6^4 = 1296$.

IV/2. Ocenimo vrednost izraza. Očitno je $1 - x^2 \leq 1$, vrednost $5x - x^2$ pa je omejena z $5x - x^2 = \frac{25}{4} - (x - \frac{5}{2})^2 \leq \frac{25}{4}$, zato je

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{5x - x^2} \leq \sqrt{1} + \sqrt{\frac{25}{4}} = 1 + \frac{5}{2} = 3 + \frac{1}{2}.$$

Po drugi strani pa je vrednost izraza nenegativna in ne more biti enaka 0, saj bi to pomenilo, da je $1 - x^2 = 0$ in $5x - x^2 = 0$, kar pa ni možno. Tako so edine celoštevilske vrednosti, ki jih izraz lahko zavzame, enake 1, 2 ali 3.

Pišimo $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{5x - x^2} = a$ in odpravimo korene. Raje kot izraz v taki obliki kvadrirajmo $\sqrt{1-x^2} = a - \sqrt{5x-x^2}$, saj potem dobimo $1 - x^2 = a^2 - 2a\sqrt{5x-x^2} + 5x - x^2$ oziroma $2a\sqrt{5x-x^2} = a^2 - 1 + 5x$. Po ponovnem kvadriranju sledi $4a^2(5x - x^2) = (a^2 - 1)^2 - 10x + 10a^2x + 25x^2$ oziroma

$$x^2(25 + 4a^2) + x(-10a^2 - 10) + (a^2 - 1)^2 = 0.$$

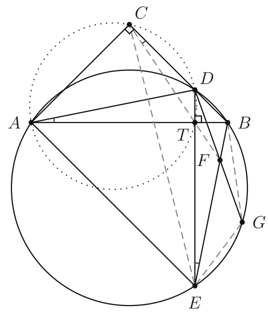
Če je $a = 1$ dobimo $x(29x - 20) = 0$, od koder sledi $x = 0$ ali $x = \frac{20}{29}$. Če rešitvi vstavimo v prvotni izraz, ugotovimo, da ustreza le $x = 0$.

Pri $a = 2$ lahko kvadratno enačbo za x razcepimo kot $(x - 1)(41x - 9) = 0$, od koderdobimo, da je $x = 1$ ali $x = \frac{9}{41}$. V obeh primerih izračun pokaže, da je vrednost izraza res enaka 2.

Ostane še primer $a = 3$, ko dobimo kvadratno enačbo $61x^2 - 100x + 64 = 0$. Ker pa je njena diskriminanta $D = 100^2 - 4 \cdot 61 \cdot 64 = 100^2 - (2 \cdot 64)(2 \cdot 61) = 100^2 - 128 \cdot 122$ negativna, nima realnih rešitev.

Vrednost izraza je torej celo število, ko je $x = 0$, $x = \frac{9}{41}$ ali pa $x = 1$.

IV/3. Ker je vsota nasprotnih kotov $\angle ATD$ in $\angle ACD$ v štirikotniku $ATDC$ enaka π, je ta štirikotnik tetiven. Označimo $\angle TCD = \alpha$. Zaradi tetivnosti sledi $\angle TAD = \angle TCD = \alpha$. Ker pa so točke A, B, E, D koncoklične, velja tudi $\angle BED = \angle BAD = \angle TAD = \alpha$. Dobili smo torej $\angle FED = \angle BED = \alpha = \angle TCD = \angle FCD$, torej sta v štirikotniku $FECD$ kota FED in FCD enaka, zato je tudi ta štirikotnik tetiven.



Naj bo sedaj $\angle ECF = \beta$. Zaradi tetivnosti štirikotnika $FECD$ sledi $\angle EDF = \angle ECF = \beta$. Ker pa točke E, D, B in G ležijo na krožnici $\mathcal{K}$, sledi še $\angle EBG = \angle EDG = \angle EDF = \beta$.
Označimo še $\angle EFC = \gamma$. Zaradi tetivnosti štirikotnika $CDFE$ sledi $\angle EDC = \angle EFC = \gamma$, torej je $\angle EDB = \pi - \angle EDC = \pi - \gamma$. Ker pa so točke D, B, G in E konciklične sledi, da je $\angle EGB = \pi - \angle EDB = \pi - (\pi - \gamma) = \gamma$, torej je $\angle EFC = \angle EGB$. Ker pa smo že pokazali, da velja $\angle ECF = \beta = \angle EBG$, se trikotnika ECF in EBG ujemata v dveh kotih, zato sta si podobna.

IV/4. Elemente množice K označimo z $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ tako, da velja $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$. Dokažimo trditev z indukcijo. Očitno je vsota vseh števil, ki so manjša od a_2, enaka a_1 in torej manjša od a_2. Denimo sedaj, da za naravno število n velja

$$a_n > a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1.$$

Dokažimo, da taka ocena velja tudi za $n+1$.

Ker je $a_n < a_{n+1}$, a_{n+1} ne more biti delitelj števila a_n, zato je a_n delitelj a_{n+1}. Torej obstaja naravno število k, da velja $a_{n+1} = ka_n$. Ker sta a_n in a_{n+1} različni, je $k \geq 2$. Zato velja

$$a_{n+1} = ka_n \geq 2a_n = a_n + a_n > a_n + (a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1),$$

kjer smo upoštevali indukcijsko predpostavko. To pa ravno pomeni, da trditev velja tudi za $n+1$ in zato tudi za vsa ostala števila.

■ Rešitve nalog s 44. področnega tekmovanja iz matematike za Vegovo priznanje

□ 7. razred

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
D	C	B	B	E	B	E	C

Utemeljitve:

A1. Vsako od treh praštevil je lahko zastopano v delitelju ali pa ne, torej imamo za vsako dve možnosti: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

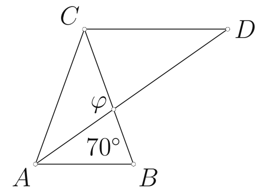
A2. Če je ploščina celega pravokotnika 1, je ploščina osenčenega $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$, torej polovica.

A3. Če se število začne s 3, imamo samo eno možnost: 30000.

Z 2 se začnejo 4 taka števila: 20001, 20010, 20100, 21000.

Z 1 pa začnejo 4 taka števila, ki imajo še števko 2, in sicer: 10002, 10020, 10200, 12000. Obstaja pa še 6 števil, ki se začnejo z 1 in imajo še 2 enici v nadaljevanju: 10011, 10101, 10110, 11001, 11010, 11100. Takih števil je torej 15.

A4. Kot ACB meri 40°, kot BCD pa 70°, kot DAC meri potem 35° in $\varphi = 105°$.



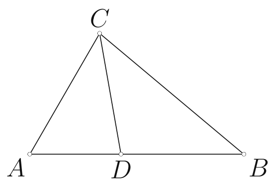
A5. To je število $\frac{4}{5}$, saj edino od ponujenih števil na obeh straneh enačbe prinese isto vrednost, in sicer $\frac{8}{15}$.

A6. Rdeča lučka se prižge vsakih 80 s, zelena pa vsakih 18 s. Najmanjši skupni večkratnik števil 80 in 18 je 720 s ali 12 minut. Spet bosta obe posvetili ob 13:12.

A7. Ker je $\frac{1}{3}$ iskanega števila enako $\frac{7}{12}$, je $\frac{3}{3}$ potem enako $\frac{7}{4}$.

A8. Oba lika imata enak obseg, $4 \cdot 5 = 20$.

B1. Ker je trikotnik DBC enakokrak, je kot pri B enak polovici kota pri C, torej 40°. Ker merijo vsi trije koti v trikotniku 180°, meri kot pri oglišču A 60°.



B2. Na začetku je imela 60 EUR.

Ker je polovico preostalega denarja namenila za toaletno torbico in ji je ostalo v denarnici 15 EUR, je tudi torbica stala 15 EUR. Torej je za šminko in šampon skupaj plačala 30 EUR. Ker je šminka dvakrat dražja od šampona, je za šminko plačala 20 EUR, za šampon 10 EUR.

B3. Označimo $N = a679b$. Ker je $72 = 8 \cdot 9$, mora biti število N deljivo z 8 in 9. Da bi bilo število N deljivo z 8, mora biti trimestno število $79b$ deljivo z 8. Ker je $792 = 99 \cdot 8$, je lahko le $b = 2$. Če hočemo, da bo število N deljivo tudi z 9, mora biti vsota njegovih števk deljiva z 9. Vsota števk je $24 + a$, torej mora biti $a = 3$.

□ 8. razred

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
E	C	A	D	B	B	C	C

Utemeljitve:

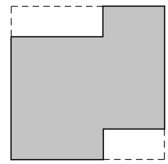
A1. Ulomek mora imeti v imenovalcu izraz, ki za nobeno celo število ne bo enak 0, tak pa je samo x^2–3, ki nima celoštevilskih ničel.

A2. Deklet je 58 %, razlika 72 torej predstavlja 16 % vseh učencev. 1 % je torej 4.5 in vseh učencev na šoli je 450.

A3. Ker je $6^3 : 6^{-1} = 6^4$, sledi $(6^4)^{-1} = 6^{-4}$.

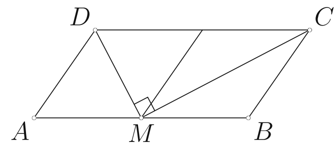
A4. Števila so po vrsti: $\sqrt{\frac{9}{7}}$, $\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\sqrt{\frac{7}{5}}$, $\sqrt{\frac{5}{3}}$, $\sqrt{\frac{4}{3}}$. Med ulomki pod korenom pa je največji $\frac{5}{3}$.

A5. Kvadrat ima enak obseg in zato meri njegova stranica $\frac{3a}{4}$, ploščina pa potem $\frac{9a^2}{16}$.



A6. Ker je $\frac{x}{5} = 2 \cdot 8 = 16$, velja $x = 80$.

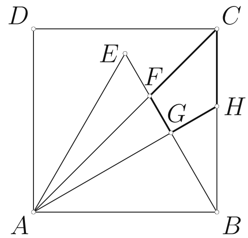
A7. Če potegnemo vzporednico stranici BC skozi M, razpade paralelogram na dva romba. Kot DMC je enak kotu med diagonalama romba in zato meri $90°$.



A8. V petnajstih minutah je izteklo 7.5 litra vode, kar predstavlja $\frac{3}{4}$ prvotne količine vode, torej je bilo na začetku 10 litrov vode.

B1. Ostanek knjige se začne s številko 143, konča pa s sodo številko, sestavljeno iz istih števk. Torej je zadnja stran 314 in v ostanku knjige je še 314–142 = 172 strani.

B2. Ker je simetrala kota v enakostraničnemu trikotniku tudi njegova višina, je $\sphericalangle FGH = \sphericalangle AGB = 90°$.



Diagonala AC kvadrata $ABCD$ je simetrala kota BCD, zato je $\sphericalangle FCH = 45°$.

Ker je $\sphericalangle BAH = 30°$, je $\sphericalangle AHB = 60°$ in $\sphericalangle CHG = 180° - 60° = 120°$.

Nazadnje izračunamo $\sphericalangle GFC = 360° - 90° - 120° - 45° = 105°$.

B3. Ker je $280 = 10 \cdot 28$ in $3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 13 = 5(15 + 13) = 5 \cdot 28$, sledi $\dfrac{280^4}{(3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 13)^3} = \dfrac{10^4 \cdot 28^4}{5^3 \cdot 28^3} = 5 \cdot 2^4 \cdot 28 = 2^6 \cdot 5 \cdot 7$. Zaradi $2^6 \cdot 5 \cdot 7 - 2^5 \cdot 5 \cdot 7 = 2^5 \cdot 5 \cdot 7$ nazadnje izračunamo

$$\left(\frac{280^4}{(3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 13)^3} - 2^5 \cdot 5 \cdot 7\right)^3 \cdot \frac{1}{2^{14} \cdot 5^3 \cdot 7^3} = \frac{(2^5 \cdot 5 \cdot 7)^3}{2^{14} \cdot 5^3 \cdot 7^3} = \frac{2^{15} \cdot 5^3 \cdot 7^3}{2^{14} \cdot 5^3 \cdot 7^3} = 2.$$

Vrednost izraza je 2.

□ 9. razred

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
B	D	A	E	A	B	A	C

Utemeljitve:

A1. Označimo število konj z n. Torej n konj porabi zalogo ovsa v 30 dneh, $n + 10$ konj pa v

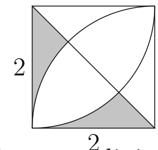
20 dneh. Sledi: $30n = 20(n + 10)$ in $n = 20$.

A2. Ker je $|x - 2| \leq 3$, sledi $-3 \leq x - 2 \leq 3$ in $2 - 3 \leq x \leq 2 + 3$. Cele rešitve neenačbe so: -1, 0, 1, 2, 3, 4 in 5.

A3. Dedek ima hitrost $\frac{6\frac{3}{8}}{17} = \frac{\frac{51}{8}}{17} = \frac{3}{8}$ m/s, vnuk pa $\frac{7.5}{4} = \frac{15}{8}$ m/s. Razmerje hitrosti je enako $\frac{\frac{3}{8}}{\frac{15}{8}} = \frac{1}{5}$.

A4. Označimo z x dosežek na osem preizkusu. Tedaj je $7 \cdot 58\ \% + x = 8 \cdot 60\ \%$ in $x = 88\ \%$.

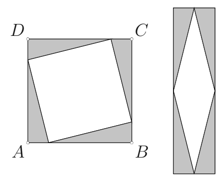
A5. Ploščino enega od obeh enakih osenčenih delov na sliki dobimo kot razliko med ploščino polovice kvadrata s stranico 2 in ploščino krožnega izseka s polmerom 2 in središčim kotom 45°. Izsek predstavlja osmino kroga. Torej ima polovica narisanega lika ploščino $2 - \frac{\pi}{2}$, cel pa $4 - \pi$.



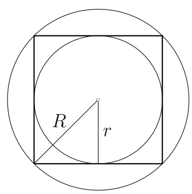
A6. Zadnje števke potenc števila 7 si sledijo v zaporedju 7, 9, 3, 1, 7, 9 ... Torej se ponavljajo s periodo 4. Ker je $35 = 8 \cdot 4 + 3$, je zadnja števka v številu 7^{35} enaka 3.

A7. Teža rdeče kocke naj bo x, zelene pa y. Potem je $3x + 2y = 32$, $4x + 3y = 44$ in $2x + y = 2 \cdot (3x + 2y) - (4x + 3y) = 2 \cdot 32 - 44 = 20$.

A8. Ploščina romba na desni sliki je enaka ploščini štirih sivih pravokotnih trikotnikov, to je 8 m^2. Kvadrat $ABCD$ ima torej ploščino $17 + 8 = 25$ m^2.



B1. Označimo z R polmer večje krožnice in z r polmer manjše krožnice. Potem je iskano razmerje obsegov enako $\frac{2\pi R}{2\pi r}$ in je enako razmerju $\frac{R}{r}$ polmerov teh dveh krožnic.



Manjši krog ima za polmer polovico stranice včrtanega kvadrata, torej $\frac{1}{2}\frac{2R}{\sqrt{2}}$, saj njegova diagonala meri $2R$. Sledi $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$. Razmerje njunih obsegov je enako $\frac{R}{r} = \frac{R}{\frac{R}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$.

B2. Označimo s s (v km) razdaljo med Amsterdamom in Benetkami. Čas (v h), ki ga porabimo za polovico poti, znaša $\frac{s}{2} \cdot \frac{1}{80}$, za tretjino $\frac{s}{3} \cdot \frac{1}{60}$, za preostanek ($1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ poti) pa $\frac{s}{6} \cdot \frac{1}{40}$. Skupni čas je $\frac{s}{2} \cdot \frac{1}{80} + \frac{s}{3} \cdot \frac{1}{60} + \frac{s}{6} \cdot \frac{1}{40}$. Ker je $2 \cdot 80 = 16 \cdot 10 = 2^4 \cdot 10$, $3 \cdot 60 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 10$ in $6 \cdot 40 = 3 \cdot 2^3 \cdot 10$, je skupni imenovalec enak $2^4 \cdot 3^2 \cdot 10 = 1440$. Sledi $\frac{s}{2} \cdot \frac{1}{80} + \frac{s}{3} \cdot \frac{1}{60} + \frac{s}{6} \cdot \frac{1}{40} = \frac{9s}{1440} + \frac{8s}{1440} + \frac{6s}{1440} = \frac{23s}{1440} = 23$, torej je $s = 1440$. Razdalja med Amsterdamom in Benetkami je 1440 km.

B3. Označimo iskani števili z x in y. Tedaj je $x^2 - y^2 = 2008$. Praštevilski razcep števila 2008 je $2008 = 2^3 \cdot 251$. Ker je $(x - y)(x + y) = 2008 = 1 \cdot 2008 = 2 \cdot 1004 = 4 \cdot 502 = 8 \cdot 251$, obravnavamo več možnosti.

1. možnost: $x + y = 2008$, $x - y = 1$, od koder sledi $2x = 2009$, vendar tak x ni naravno število.

2. možnost: $x + y = 1004$, $x - y = 2$, od koder sledi $2x = 1006$ in $x = 503$, $y = 501$.

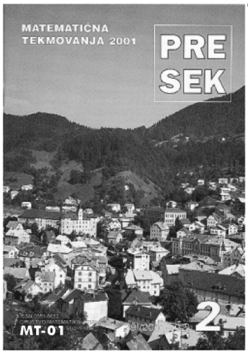
3. možnost: $x + y = 502$, $x - y = 4$, od koder sledi $2x = 506$ in $x = 253$, $y = 249$

4. možnost: $x + y = 251$, $x - y = 8$, od koder sledi $2x = 259$, vendar tak x ni naravno število.

Iskani dvojici sta $(503, 501)$ in $(253, 249)$.

Tekmovanja v reviji Presek

Za lažjo pripravo na matematična tekmovanja so pred leti izšle rešene tekmovalne naloge v tematskih številkah revije Presek.



MATEMATIČNA TEKMOVANJA 2001

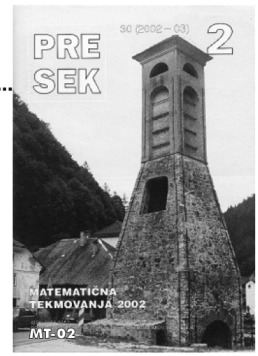
64 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

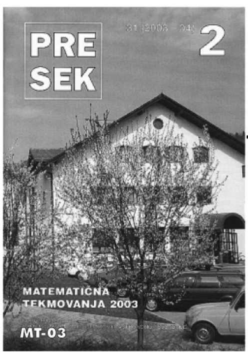
6,26 EUR

MATEMATIČNA TEKMOVANJA 2002

64 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

6,26 EUR





MATEMATIČNA TEKMOVANJA 2003

72 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

6,26 EUR

Poleg omenjenih treh lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog različnih zahtevnosti za osnovnošolce, srednješolce in študente s tekmovanj v znanju matematike, fizike, logike in računalništva. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite s popustom:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/tekmovanja/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.

Zbirke nalog s tekmovanj

Vsako šolsko leto na šolah potekajo različna tekmovanja v znanju. Za lažjo pripravo vam ponujamo več zbirk tekmovalnih nalog z rešitvami.

EVROPSKI MATEMATIČNI KENGURU 1996–2001

+ dodane naloge z dijaških šolskih tekmovanj v matematiki 1993–1995

264 strani
format 16,5 × 23,5 cm
mehka vezava

15,99 EUR

EVROPSKI MATEMATIČNI KENGURU 2002–2004

208 strani
format 16,5 × 23,5 cm
mehka vezava

10,99 EUR

MEDNARODNI MATEMATIČNI KENGURU 2005–2008

296 strani
barvni tisk
format 16,5 × 23,5 cm
mehka vezava

18,74 EUR

Poleg omenjenih treh lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog različnih zahtevnosti za osnovnošolce, srednješolce in študente s tekmovanj v znanju matematike, fizike, logike in računalništva. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite s popustom:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/tekmovanja/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.