Tekmovanja

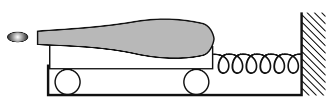
Naloge z regijskega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2007/08

skupina I

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Ropar beži pred policistom v temni ulici, na kateri sveti le ena ulična svetilka. Ker ropar nima časa, da bi se ozrl nazaj in videl kako daleč od njega je policist, beži pred njegovo senco, in sicer tako, da je vrh policistove sence vedno ravno pod njegovimi nogami.
   a) Kako hitro teče ropar, če je višina ulične svetilke 4 m, višina policista 1,9 m in hitrost policista 4 m/s?
   b) Kako hitro pa mora teči ropar, če tečeta s policistom navzdol po klancu z naklonskim kotom 30°? Ropar in policist se držita pokončno, svetilka pa je prav tako za 4 m nad tlemi, merjeno v navpični smeri. Hitrost policista je enaka kot pri a).
2. a) Na jablani ob reki visi okroglo 80 gramsko jabolko s premerom 6 cm. Pripravlja se na nevihto in začel je pihati močan veter v vodoravni smeri. Kolikšna je največja hitrost vetra, da se jabolko ravno še ne utrga z veje? Jabolko se utrga z veje, če na pecelj deluje sila vsaj 1,70 N. (Opomba: obravnavaj samo ravnovesno stanje in zanemari začetni sunek vetra, ki zaniha jabolko). Za gostoto zraka vzemi 1,2 kg/m^3.
   b) Zaradi močne nevihte je reka prestopila bregove, tako da je jablana popolnoma potopljena. Področje okrog jablane je precej ravno, tako da je reka poplavila zelo široko področje in se upočasnila. Z računom preveri, ali je hitrost reke 6 km/h dovolj velika, da utrga jabolko? Gostota vode je 1000 kg/m^3. Ostali podatki so v delu a).

   Fizikalni poduk: upor sredstva (zraka ali vode) dobro opiše kvadratni zakon upora $F_u = \frac{1}{2}c\rho S v^2$, kjer je ρ gostota sredstva, S prečni presek jabolka, v hitrost sredstva in c koeficient, ki je odvisen od oblike telesa in je za okroglo telo 0,4.
3. Za blaženje povratnega sunka pri streljanju s topom je le-ta montiran na vodilih, po katerih se lahko giblje. Ob izstrelitvi se začne gibati v nasprotni smeri gibanja granate, napeta vzmet pa ga zaustavi in potisne nazaj v prvotno lego.

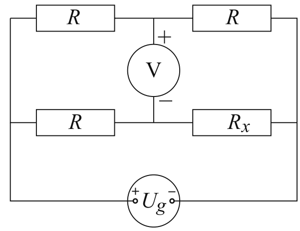
   

   Top z maso 20 ton izstreli granato z maso 200 kg v vodoravni smeri s hitrostjo 500 m/s glede na tla, pri čemer predpostavimo, da je čas izstrelitve zelo kratek in lahko sunek sile vzmeti zanemarimo. Zahtevamo, da top po izstrelitvi naredi 1 m dolgo pot po vodilih. Preden se začne top premikati je vzmet že stisnjena s silo, ki je enaka 90 % maksimalne sile pri zaustavljanju gibanja topa.
   a) Kolikšna je hitrost topa takoj po izstrelitvi?
   b) Za koliko moramo stisniti vzmet pred izstrelitvijo, da zadostimo pogoju, da je sila vzmeti pred izstrelitvijo enaka 90% končne sile?
   c) Kolikšen mora biti prožnostni koeficient vzmeti, da se top ustavi po 1 m?

◻ skupina II

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. V vezju na sliki je $R = 1$ kΩ, $U_g = 10$ V in notranji upor voltmetra $R_V = 10$ kΩ. Voltmeter kaže napetost $U_V = 1\ V$.



   a) Kolikšen tok teče skozi levi upor R v zgornji veji in kolikšen tok skozi levi upor R v spodnji veji? Sta tokova odvisna od upora R_x? (Tok skozi voltmeter teče v smeri od + k −.)

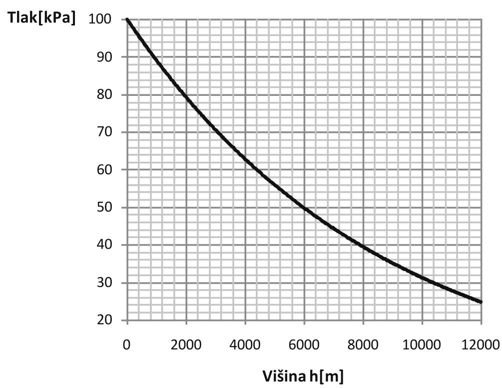
   b) Izračunaj upor R_x.

2. Balon na vroč zrak ima kupolo s polmerom 13 m. V košari balona je med drugim tudi gorilnik na propan, ki segreva zrak v kupoli in ga vzdržuje na približno konstantni temperaturi 120 °C. Temperatura zunanjega zraka je 20 °C. Ogrodje balona skupaj s posadko tehta 1600 kg.

   Predpostavi, da je temperatura v atmosferi na vseh višinah enaka. Odvisnost tlaka od višine v taki izotermni atmosferi je narisana na grafu. Kupola je na spodnjem koncu odprta, tako da je tlak v balonu enak zunanjemu zračnemu tlaku. Kilomolska masa zraka je 29 kg/kmol, splošna plinska konstanta pa je 8300 J/kmol K.

   a) Na kateri nadmorski višini ta balon leti?

   b) Kolikšno breme morajo odvreči, da bo nova ravnovesna višina letenja 100 m višje?



3. Z višine 100 cm nad zgornjo ploščo vodoravno postavljenega ploščatega kondenzatorja spustimo majhno nabito kroglico z maso 10 g in električnim nabojem $+1{,}0 \cdot 10^{-3}$ As. Zgornja plošča ima majhno luknjico, da lahko skoznjo pade kroglica. Plošči kondenzatorja sta priključeni na izvir napetosti 120 V (tako da je spodnja plošča nabita pozitivno, zgornja pa negativno).

   a) Kolikšen je največji razmik d med ploščama kondenzatorja, da se kroglica še odbije iz kondenzatorja, ne da bi se dotaknila spodnje plošče?

   b) Koliko časa mine v tem primeru od trenutka, ko kroglico spustimo, do trenutka, ko se vrne v izhodiščno lego?

□ skupina III

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 $\mathrm{m/s^2}$.

1. S stropa visi lahka vrvica z dolžino l, na kateri je obešena majhna masivna kroglica. Iz estetskih razlogov bi želeli, da bi nihalo prebilo na levi strani od pritrdišča veliki zlati rez sekund ($t_1 = (\sqrt{5}+1)/2$ s), na desni strani pa mali zlati rez sekund ($t_2 = (\sqrt{5}-1)/2$ s), zato na višini x nad položajem kroglice v ravnovesni legi postavimo tanek žebelj, tako da se zgornji del vrvi na njem ustavi, ko gre nihalo skozi ravnovesno lego pri gibanju v desno.

   a) Kolikšno mora biti razmerje x/l in iz katere smeri moramo na začetku poskusa spustiti nihalo, da bo nihalo nihalo na želen način?

   b) Nihanje je harmonično (sinusno) le v primeru, če so odmiki dovolj majhni. Če naj bo nihajni čas natančen vsaj na 1 %, odmik kota od navpičnice ne sme preseči 23°. Za kolikšen kot smemo na levi odmakniti nihalo, da bo pogoj izpolnjen?

2. Pri električnem avtu uporabimo velikanski kondenzator kot vir električne energije. V kondenzatorju je dielektrik barijev-titanat z dielektrično konstanto 19000, gostoto 4600 $\mathrm{kg/m^3}$ in prebojno električno poljsko jakostjo $2{,}4 \cdot 10^8$ V/m. Influenčna konstanta je $\varepsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12}$ As/Vm.

   a) Kolikšna je največja shranjena energija v kilogramu takega kondenzatorja? Je to odvisno od oblike kondenzatorja?

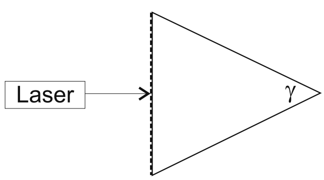
   b) Kolikšno pot lahko opravi avto pri stalni hitrosti 100 km/h, če ima vgrajen tak kondenzator z maso 500 kg? Pri vožnji s hitrostjo 100 km/h troši avto električno moč 10 kW.

   c) Za koliko se segreje kondenzator, če se zaradi tehnične napake pri polnjenju preseže maksimalno dovoljeno napetost, zaradi česar pride do preboja? Specifična toplota barijevega-titanata je $c_p = 550$ J/kgK.

3. Na ploskev tristrane steklene prizme z lomnim kvocientom 1,6 naparimo uklonsko mrežico iz aluminija z gostoto rež 1200 $\mathrm{mm^{-1}}$, kot kaže slika. Osnovna ploskev prizme je enakokrak trikotnik. Pravokotno na sredino uklonske mrežice posvetimo z laserjem valovne dolžine 633 nm.

   Kolikšen mora biti kot γ ob vrhu osnovne ploskve prizme, da se curek svetlobe prvega reda ojačitve lomi tako, da je izhajajoči curek svetlobe iz prizme vzporeden prvotnemu laserskemu curku svetlobe?

   Morda boš potreboval zvezi $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ in $\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$.

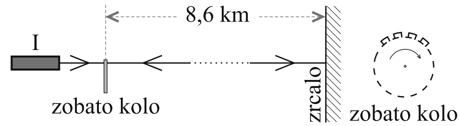


Ciril Dominko

Naloge z državnega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2007/08

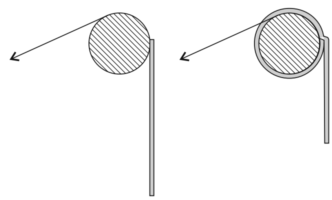
Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Eden izmed prvih zgodovinsko uspešnih poskusov merjenja hitrosti svetlobe je t.i. Fizeaujev način. Izvir svetlobe, na sliki označen z I, oddaja curek svetlobe. Svetloba potuje skozi zobato kolo, ki ima 720 zob in prav toliko rež (širini reže in zoba sta enaki, na sliki je narisanih samo nekaj zob in rež), do zrcala na razdalji 8,6 km. Od zrcala se odbije in vrne skozi režo v kolesu. Če kolo miruje, žarek potuje do zrcala in nazaj skozi isto režo. Svetlobe ne vidimo, če se vrne nazaj ravno na sredi katerega izmed zob na kolesu. Kolo pričnemo enakomerno pospešeno vrteti. Pri frekvenci 12,1 Hz prvič ne opazimo svetlobe. Kolikšna je hitrost svetlobe?



   Predpostaviš lahko, da v primeru, ko prvič ne opazimo svetlobe, potuje svetloba od izvira proti zrcalu skozi sredino reže zobatega kolesa, pri vračanju pa zadene sredino naslednjega zoba.

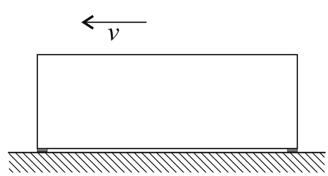
2. Roleta z maso 20 kg, dolžino 2,0 m in debelino 2,0 cm je na enem koncu pritrjena na obod valja s polmerom 5 cm. Roleto začnemo počasi dvigati z enakomernim vlečenjem tanke vrvice, ki je prav tako pritrjena na obod valja in večkrat ovita okrog.



   a) Kako se spreminja ročica sile teže visečega dela rolete (glede na os valja), v odvisnosti od dolžine rolete, ki je ovita okoli valja?
   b) Pri kolikšni dolžini visečega dela rolete je sila vrvice, s katero vrtimo valj (in s tem dvigamo roleto), največja?

   Pri računanju dolžine navitega dela rolete vedno upoštevaj notranji polmer posameznega ovoja. Slika ni v merilu!

3. Na spodnjo stran klade z maso 40 kg pritrdimo dve tanki letvi iz različnih materialov, kot kaže slika. Klada je v obliki kvadra z višino 20 cm in dolžino 45 cm. Letvi pritrdimo na sprednjem in zadnjem koncu klade. Celoten sistem se dotika tal le preko letev, vendar je debelina letev zanemarljiva v primerjavi z debelino klade. Klada po dolžini ni homogena, težišče se nahaja 15 cm od sprednjega konca. Višina težišča klade pa je na polovični višini.



   Klado potisnemo v vodoravni smeri, tako da se začne gibati s hitrostjo 5 m/s. Kolikšno pot opravi klada, preden se ustavi? Koeficient trenja med sprednjo letvijo in tlemi je 0,20, med zadnjo letvijo in tlemi pa 0,35.

   Os za računanje navorov postavi v težišče, ker rezultanta sil ni enaka nič.

4. Večjo in manjšo kroglico prevrtamo skozi njuni središči in nasadimo na zelo dolgo tanko navpično palico, po kateri drsita brez trenja. Kroglici dvignemo na višino 1 m nad tlemi, tako da je večja spodaj, malo razmaknemo in spustimo, da prosto padata. Spodnja krogla se prožno odbije od tal in takoj po odboju pri poti navzgor prožno trči ob manjšo. Kolikšno višino dosežeta kroglici po trku, če je masa manjše kroglice zanemarljivo majhna v primerjavi z večjo?

□ skupina II

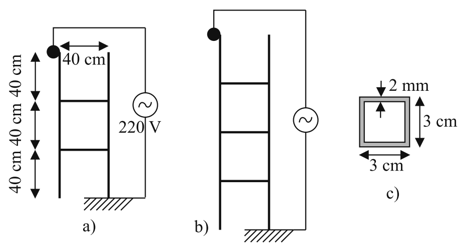
Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 $\mathrm{m/s^2}$.

1. Zemlja je v prvem približku krogla z radijem 6370 km. 71 % površine pokriva voda, 7 % vodne površine zaseda plavajoči led s povprečno debelino 25 m in temperaturo 0 °C, 9 % površine kopnega pa zaseda mirujoči led s povprečno debelino 2,2 km in temperaturo 0 °C. Gostota vode je 1000 $\mathrm{kg/m^3}$, gostota ledu 920 $\mathrm{kg/m^3}$, specifična talilna toplota ledu pa 334 kJ/kg.

   a) Za koliko bi se dvignil nivo vode v oceanih, če bi se naenkrat stalil ves plavajoči led in 10 % mirujočega ledu? Privzemi, da površina vodnega površja ostane ista.

   b) Človeštvo porablja v povprečju 15 TW $= 1{,}5 \cdot 10^{13}$ W moči. Koliko časa bi trajalo, da bi se stalil led, če bi vsa ta moč šla v taljenje ledu v primeru a)? Spremembo potencialne energije ledu zanemari.

2. Vrhnji krak lestve se dotika žice omrežne napeljave, ki je priključena na generator efektivne napetosti 220 V, eden izmed spodnjih krakov pa prevodne podlage, kot to prikazuje slika. Specifični upor snovi, iz katere je narejena lestev, je 50 $\mu\Omega$m. Kraka lestve in prečke so narejeni iz cevi z osnovnim presekom v obliki kvadrata, kot je prikazano na sliki c), kjer so podane tudi dimenzije preseka. Dimenzije lestve pa so prikazane na sliki a).

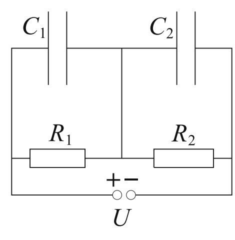


   a) Kolikšen je upor ene prečke?

   b) Kolikšen efektivni tok teče skozi lestev, ki je narisana na sliki a)?

   c) Kolikšen efektivni tok teče skozi lestev, ki je narisana na sliki b)? Podatki so na slikah a) in c).

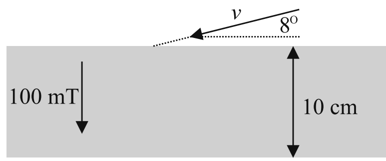
3. Vezje $C_1 = 100\ \mu$F, $C_2 = 50\ \mu$F, $R_1 = 100$ kΩ, $R_2 = 56$ kΩ, priključimo na napetost 12 V.



   a) Kolikšna sta naboja na kondenzatorjih?

   b) Izvir odstranimo in priključni žici, s katerima smo vezje vezali na izvir, kratko sklenemo. Takoj po sklenitvi steče z enega kondenzatorja na drugega nekaj naboja. Na skici označi polariteti na obeh kondenzatorjih in izračunaj napetosti na kondenzatorjih takoj po tem, ko se naboji prerazporedijo.

4. Delec α (helijevo jedro) prileti v ravnini slike s hitrostjo $1 \cdot 10^5$ m/s v pas homogenega magnetnega polja z gostoto 100 mT pod kotom 8°. Masa delca α je $6{,}65 \cdot 10^{-27}$ kg, naboj pa $+3{,}2 \cdot 10^{-19}$ As. Koliko obratov naredi delec v pasu polja?



□ skupina III

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Večjo in manjšo kroglico prevrtamo skozi njuni središči in nasadimo na zelo dolgo tanko navpično palico, po kateri drsita brez trenja. Kroglici dvignemo na višino 1 m nad tlemi, tako da je večja spodaj, malo razmaknemo in spustimo, da prosto padata. Spodnja krogla se prožno odbije od tal in takoj po odboju pri poti navzgor prožno trči ob manjšo.

   a) Kolikšno višino dosežeta kroglici po trku, če je masa manjše kroglice zanemarljivo majhna v primerjavi z večjo?

   b) Kolikšno višino pa dosežeta kroglici, če sta masi kroglic enaki?

2. Dve majhni kroglici s pozitivnima nabojema $1{,}0 \cdot 10^{-3}$As ter $2{,}0 \cdot 10^{-3}$As sta pritrjeni na tanko neprevodno palico v medsebojni razdalji 100 cm. Influenčna konstanta je $\varepsilon_0 = 8{,}9 \cdot 10^{-12}$ As/Vm.

   a) Kje med njima lahko damo na palico tretjo majhno kroglico s pozitivnim nabojem e, da bo v ravnovesju? Tretja kroglica je gibljiva po palici brez trenja.

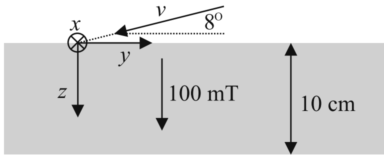
   b) Tretja kroglica ima maso 10 g in naboj $1{,}0 \cdot 10^{-11}$As. Pokaži, da pri majhnem odmiku kroglice iz njene ravnovesne lege med prvima dvema le-ta sinusno (harmonično) niha. Kolikšen je nihajni čas?

   Upoštevaj, da je za majhne x, torej $|x| \ll 1$, $(1+x)^n \approx 1 + nx$.

3. V vesolju se nahaja posrebrena homogena krogla, ki se vrti z neko kotno hitrostjo ω_0 okoli osi skozi svoje masno središče. V krogli je enakomerno razporejen radioaktivni material, ki sprošča v krogli konstantno moč 50 W. Masa krogle je 10 kg, specifična toplota pa 130 J/kgK. Čez koliko časa se bo kotna hitrost krogle zmanjšala za 1,0 %, če toplotno sevanje zanemarimo? Temperaturni koeficient linearnega raztezka snovi iz katere je krogla je $1{,}4 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}. Vztrajnostni moment krogle z maso m in radijem r okrog središča je $\frac{2}{5}mr^2$.

4. Delec α (helijevo jedro) prileti v ravnini slike s hitrostjo $1 \cdot 10^5$ m/s v pas homogenega magnetnega polja z gostoto 100 mT pod kotom 8°. Določi točko, v kateri delec zapusti pas. Točko določi v koordinatnem sistemu, katerega izhodišče sovpada s točko, v kateri delec prileti v homogeno magnetno polje in katerega koordinatne osi x, y in z so prikazane na sliki.

   Masa delca α je $6{,}65 \cdot 10^{-27}$ kg, naboj pa $+3{,}2 \cdot 10^{-19}$ As.



Ciril Dominko

■ Rešitve nalog z regijskega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2007/08

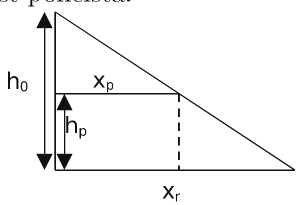
□ skupina I

1. *Podatki:* $h_0 = 4$ m, $h_p = 1{,}9$ m.

a) Iz podobnih trikotnikov na sliki sledi, da je oddaljenost roparja od točke pod svetilko x_r enaka

$$\frac{x_r}{h_0} = \frac{x_p}{h_0 - h_p}\,, \qquad x_r = \frac{h_0}{h_0 - h_p}\,x_p\,,$$

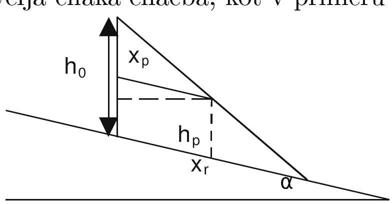
pri čemer je x_p oddaljenost policista.



Za hitrosti roparja in policista velja $x_r = v_r t$ in $x_p = v_p t$, torej

$$v_r = \frac{h_0}{h_0 - h_p}\,v_p = 7{,}6\ \mathrm{m/s}\,.$$

b) V primeru, ko tečeta po klancu navzdol, prav tako lahko narišemo dva podobna trikotnika, za katera velja enaka enačba, kot v primeru a).



Hitrost roparja je enaka tisti, izračunani pri a).

2. *Podatki:* $m = 80$ g, $F_0 = 1{,}70$ N, $r = 3$ cm, $\rho_z = 1{,}2$ kg/m^3, $v_0 = 6$ km/h, $\rho_v = 1000$ kg/m^3, $c = 0{,}4$.

a) Silo, ki v ravnovesju deluje na pecelj, razstavimo na vodoravno in navpično komponento:

$$\begin{aligned} F_x &= \tfrac{1}{2}c\rho_z S v^2 = \tfrac{1}{2}c\rho_z \pi r^2 v^2\,,\\ F_y &= mg\,. \end{aligned}$$

Velikost te sile, $\sqrt{F_x^2+F_y^2}$, mora biti manjša od mejne sile F_0, torej $F_x^2+F_y^2<F_0^2$. Neenačbo preuredimo:

$$\begin{aligned} F_x &< \sqrt{F_0^2-F_y^2}\,, \\ v &< \sqrt{\frac{2}{\pi c\rho_z r^2}\sqrt{F_0^2-m^2g^2}} = 47 \text{ m/s} = 170 \text{ km/h}\,. \end{aligned}$$

b) Predpostavimo najprej, da je tok dovolj šibek, da jabolka še ne utrga. Silo, ki deluje na pecelj v ravnovesju, ponovno razstavimo na vodoravno in navpično komponento, pri čemer pa moramo tokrat upoštevati tudi silo vzgona:

$$\begin{aligned} F_x &= \tfrac{1}{2}c\rho_v S v_0^2 = \tfrac{1}{2}c\rho_v \pi r^2 v_0^2 = 1{,}57 \text{ N}\,, \\ F_y &= \left(m-\rho_v\frac{4\pi r^3}{3}\right)g = -0{,}325 \text{ N}\,. \end{aligned}$$

Sila, ki deluje na pecelj je $F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=1{,}60 \text{ N} < F_0$. Tok je torej dovolj šibek, da jabolka ne utrga.

3. *Podatki:* $M=20$ t, $m=200$ kg, $v_g=500$ m/s, $l=1$ m, $\eta=90$ %.

a) Ker je čas iztrelitve zelo kratek, lahko sunek sile vzmeti v tem času zanemarimo. Ohranja se skupna gibalna količina topa in granate, $0=Mv-mv_g$, od koder dobimo hitrost topa takoj po izstrelitvi

$$v=\frac{m}{M}v_g = 5 \text{ m/s}\,.$$

b) Če z x_1 označimo začetni skrček vzmeti (glede na neobremenjeno vzmet) in z x_2 največji skrček vzmeti, velja za ustrezni sili, ki napenjata vzmet

$$F_1=kx_1\,,\qquad F_2=kx_2\,,\qquad \frac{F_1}{F_2}=\eta \quad \text{in od tod} \quad \frac{x_1}{x_2}=\eta\,,$$

ali $x_2=x_1/\eta$. Upoštevamo $x_2-x_1=l$ in za x_1 dobimo enačbo

$$\frac{x_1}{\eta}-x_1=l\,,\quad \text{z rešitvijo}\quad x_1=\frac{\eta}{1-\eta}l=9\,l=9 \text{ m}\,.$$

c) Na začetku ima top z vzmetjo kinetično in prožnostno energijo, ko se zaustavi, pa le prožnostno. Ker ni dela drugih sil, se ohranja vsota kinetične in prožnostne energije

$$\tfrac{1}{2}Mv^2+\tfrac{1}{2}kx_1^2=\tfrac{1}{2}kx_2^2\,.$$

Od tod izrazimo k:

$$k=\frac{Mv^2}{x_2^2-x_1^2}=\frac{(1-\eta)Mv^2}{(1+\eta)l^2}=\frac{Mv^2}{19l^2}=26 \text{ kN/m}\,.$$

□ skupina II

1. *Podatki:* $U_g = 10$ V, $U_V = 1$ V, $R = 1$ kΩ, $R_V = 10$ kΩ.

   a) Iz podatka za napetost in upor voltmetra lahko takoj izračunamo tok skozi voltmeter, $I_V = U_V/R_V = 0{,}1$ mA. Tok teče (na sliki pri besedilu naloge) navzdol, torej od zgornje veje proti spodnji. Iskana tokova lahko izračunamo brez poznavanja upora R_x.

   Tok skozi levi zgornji upornik v vezju označimo z I_1; tok skozi desnega je potem $I_1 - I_V$. Za padce napetosti v zgornji veji velja

$$RI_1 + R(I_1 + I_V) = U_g\,, \qquad I_1 = \frac{U_g}{2R} + \frac{I_V}{2} = \frac{U_g}{2R} + \frac{U_V}{2R_V} = 5{,}05\ \text{mA}\,.$$

   Tok skozi levi upornik v spodnji veji označimo I_2. Za padce napetosti na levem uporniku v zgornji veji, voltmetru in levem uporniku v spodnji veji velja:

$$RI_1 + U_V - RI_2 = 0\,, \qquad I_2 = I_1 + \frac{U_V}{R} = \frac{U_g}{2R} + \frac{U_V}{R} + \frac{U_V}{2R_V} = 6{,}05\ \text{mA}\,.$$

   b) Za padce napetosti v spodnji veji velja

$$RI_2 + R_x(I_2 + I_V) = U_g\,,$$

$$R_x = \frac{U_g - RI_2}{I_2 + I_V} = \frac{\frac{U_g}{2} - U_V - \frac{I_V}{2}R}{\frac{U_g}{2R} + \frac{U_V}{R} + \frac{3I_V}{2}} = \frac{1 - 2\frac{U_V}{U_g} - \frac{R}{R_V}\frac{U_V}{U_g}}{1 + 2\frac{U_V}{U_g} + 3\frac{R}{R_V}\frac{U_V}{U_g}}\,R = 642\ \Omega\,.$$

2. *Podatki:* $r = 13$ m, $T_0 = 20$ °C, $T = 120$ °C, $m = 1600$ kg, $M = 29$ kg/kmol, $\Delta h = 100$ m.

   a) Ker balon leti na konstantni višini, je vsota vseh sil v navpični smeri 0. Vzgon okoliškega zraka bo torej uravnovesil težo balona in vročega zraka znotraj kupole:

$$mg + F_{\text{zr}} = F_{\text{vzg}}.$$

   Za prostornino izpodrinjenega zraka vzamemo kar prostornino kupole: $V = 4\pi r^3/3$. S T_0 označimo temperaturo atmosfere, s T temperaturo vročega zraka v kupoli, z ρ_0 gostoto zraka v atmosferi, z ρ gostoto vročega zraka. Dobimo

$$mg = V(\rho_0 - \rho)g.$$

   Upoštevamo še splošno plinsko enačbo:

$$pV = \frac{mRT}{M}, \qquad p = \frac{\rho RT}{M}, \qquad \rho = \frac{pM}{RT}.$$

Izraz za gostoto vstavimo v enačbo za sile in dobimo

$$\begin{aligned} m &= \frac{4\pi r^3}{3}\frac{pM}{R}(1/T_0 - 1/T), \qquad (1) \\ p &= \frac{3mR}{4\pi r^3(1/T_0 - 1/T)M} = 57{,}3\,\mathrm{kPa}. \end{aligned}$$

Pri tem tlaku balon stabilno leti. Iz grafa odčitamo, da tolikšen tlak ustreza nadmorski višini 4800 m.

b) Spremembo mase lahko izračunamo iz enačbe (1), če poznamo spremembo tlaka pri podani spremembo višine. Sprememba višine je premajhna, da bi lahko spremembo tlaka odčitali iz grafa. Lahko pa uporabimo enačbo $\Delta p = \rho g \Delta h$, pri čemer vzamemo za ρ kar gostoto zraka na višini 4800 m. Ker je sprememba višine majhna, je sprememba gostote zanemarljivo majhna. Gostoto izračunamo iz plinske enačbe, saj smo pri a) izračunali tlak na tej višini:

$$\rho = \frac{pM}{RT_0} = 0{,}67\ \mathrm{kg/m^3}\,, \quad \Delta p = \rho g \Delta h = \frac{pMg\Delta h}{RT_0} = 660\ \mathrm{Pa}$$

in

$$\Delta m = \frac{4\pi r^3 \Delta p M}{3R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right) = \frac{m\Delta p}{p} = \frac{mMg\Delta h}{RT_0} = 19\ \mathrm{kg}\,.$$

3. *Podatki:* $h = 100$ cm, $m = 10$ g, $e = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ As, $U = 120$ V.

   a) Delo, ki ga opravi izvir pri zaustavljanju kroglice, je enako spremembi potencialne energije kroglice na poti $h + d$, pri čemer je d razmik med ploščama kondenzatorja.

$$eU = mg(h + d)\,, \qquad d = \frac{eU}{mg} - h = 22{,}4\ \mathrm{cm}\,.$$

   b) Na poti do zgornje plošče kondenzatorja pada s težnim pospeškom, za kar potrebuje čas:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}45\ \mathrm{s}\,.$$

   Znotraj kondenzatorja delujeta nanjo zaviralna električna sila in teža. Pojemek je

$$a = \frac{eE - mg}{m} = \frac{eU}{md} - g = 44\ \mathrm{m/s^2}$$

   in porabljeni čas

$$t_2 = \sqrt{\frac{2d}{a}} = 0{,}10\ \mathrm{s}\,.$$

   Skupni čas je torej $2t_1 + 2t_2 = 1{,}10$ s.

□ skupina III

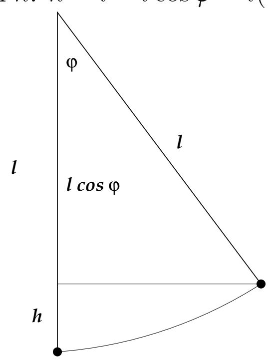
1. *Podatki:* $t_1 = (\sqrt{5}+1)/2$ s, $t_2 = (\sqrt{5}-1)/2$ s, $\varphi_0 = 23°$.

a) Iz enačbe za nihajni čas matematičnega nihala, veljavnega pri dovolj majhnih odmikih, dobimo

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,, \qquad \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{l}{x}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\,, \qquad \frac{x}{l} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^2 = 0{,}146\,.$$

Nihalo moramo na začetku odmakniti v levo.

b) V skrajnih legah ima nihalo le potencialno energijo. Iz ohranitve energije pri nihanju sledi, da se v obeh skrajnih točkah dvigne enako. Iz slike razberemo zvezo med odmikom φ in dvigom h: $h = l - l\cos\varphi = l(1-\cos\varphi)$.



Iz zahteve, da sta dviga v skrajnih točkah enaka, sledi

$$l(1-\cos\varphi) = x(1-\cos\varphi_0)\,,$$

pri čemer smo upoštevali, da manjši dolžini nihala ustreza večji kot odmika. Za začetni odklonski kot na levi dobimo

$$\cos\varphi = 1 - \frac{x}{l}\,(1-\cos\varphi_0)\,, \qquad \varphi = 8{,}7°\,.$$

2. *Podatki:* $\varepsilon = 19000$, $\rho = 4600$ kg/m^3, $E_p = 2{,}4 \cdot 10^8$ V/m, $v = 100$ km/h, $m = 500$ kg, $P = 10$ kW, $c_p = 550$ J/kgK.

a) Kondenzator s ploščino S in razmikom med ploščama d ima kapaciteto $C = \varepsilon\varepsilon_0\frac{S}{d}$. Ko ga nabijemo na napetost U, ima električno polje $E = U/d$ električno energijo

$$W = \tfrac{1}{2}\,CU^2 = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\varepsilon_0\frac{S}{d}U^2 = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\varepsilon_0\frac{S}{d}(Ed)^2 = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\varepsilon_0 VE^2 = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\varepsilon_0\frac{m}{\rho}E^2\,,$$

saj je prostornina kondenzatorja enaka $V = Sd$. Gostota električne energije je torej

$$w = \frac{W}{m} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2\rho}\,.$$

Največjo gostoto energije dosežemo z največjim dovoljenim električnim poljem

$$w_{\mathrm{maks}} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E_p^2}{2\rho} = 1{,}05\ \mathrm{MJ/kg}\,.$$

b) Celotna energija 500 kg kondenzatorja je enaka $W = mw = 523$ MJ. Če s to energijo napajamo vir z močjo $P = 10$ kW, se vsa energija porabi po času $t = W/P = 52300$ s $= 14{,}5$ h. Doseg avta je torej $R = v_a t = 1450$ km.

c) Poglejmo še, za koliko se segreje kondenzator pri električnem preboju. Takrat velja:

$$W = mc_p\Delta T\,, \qquad w = c_p\Delta T \quad \text{in} \quad \Delta T = \frac{w}{c_p} = 1900\ \mathrm{K}\,.$$

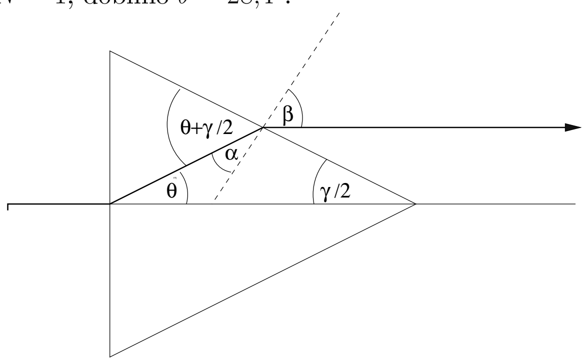
3. *Podatki:* $n = 1{,}6$, $1/a = 1200\,\mathrm{mm}^{-1}$, $\lambda = 633\,\mathrm{nm}$

Do ojačitev pride, ko je razlika optičnih poti žarkov iz dveh sosednjih rež cel večkratnik valovne dolžine. Upoštevati je treba, da je v steklu optična pot za faktor n-krat daljša, ker svetloba v sredstvu potuje počasneje kot v vakuumu.

Pogoj za ojačitev potem napišemo kot

$$a\sin\theta_N = N\,\frac{\lambda}{n}\,, \quad N \in \mathcal{Z}.$$

Za prvi red, $N = 1$, dobimo $\theta = 28{,}4°$.



Na sliki je narisana pot žarka, ki po izhodu iz prizme ostane vzporeden s prvotno smerjo. Iz slike razberemo $\beta = 90° - \frac{1}{2}\gamma$ in $\alpha = 90° - (\theta + \frac{1}{2}\gamma)$. Zapišimo lomni zakon

$$n = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos(\theta + \frac{1}{2}\gamma)} = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\cos\theta\cos\frac{1}{2}\gamma - \sin\theta\sin\frac{1}{2}\gamma}\,.$$

Števec in imenovalec delimo s $\cos\frac{1}{2}\gamma$ in dobimo

$$n = \frac{1}{\cos\theta - \sin\theta\,\tan\frac{1}{2}\gamma}\,, \qquad \tan\frac{1}{2}\gamma = \frac{n\cos\theta - 1}{n\sin\theta}\,, \qquad \gamma = 56{,}5°\,.$$

Bojan Golli

■ Rešitve nalog z državnega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2007/08

□ skupina I

1. *Podatki:* $N = 720$, $l = 8{,}6$ km, $\nu = 12{,}1$ Hz.

   Premik od sredine reže do sredine zoba je enak premiku za en zob. Temu premiku ustreza zasuk kolesa, ki je enak polnemu kotu, deljenemu s skupnim številom zob in rež: $\Delta\varphi = 2\pi/2N$. Ko se torej kolo zasuče za kot $\Delta\varphi$, prepotuje svetloba pot $2l$. Velja:

$$t = \frac{2l}{c} = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi\nu} = \frac{1}{2N\nu}\,, \qquad c = 4Nl\nu = 3{,}0 \cdot 10^8 \text{ m/s}\,.$$

2. *Podatki:* $m = 20$ kg, $l = 2{,}0$ m, $d = 2{,}0$ cm, $r = 5$ cm.

   a) Če dolžino visečega dela rolete označimo z x, je ročica teže visečega dela pri prvem obratu enaka

$$R = r + \frac{d}{2}\,, \qquad l - 2\pi r < x \le l\,,$$

   pri naslednjih ($n = 1, 2, 3, \ldots$) pa

$$R = r + (2n+1)\,\frac{d}{2}\,,$$

   za

$$l - 2\pi\left((n+1)r + n(n+1)\,\frac{d}{2}\right) < x \le l - 2\pi\left(nr + n(n-1)\,\frac{d}{2}\right)\,.$$

   b) Pri počasnem dviganju je navor sile, s katero dvigamo, enak navoru visečega dela rolete: $rF = m(x)gR$, $m(x) = mx/l$. Sila se zaradi večjega R poveča na začetku vsakega novega obrata, nato pa se zmanjšuje na račun manjše teže visečega dela rolete. Na začetku prvega obrata je

$$F_0 = \frac{mg}{r}\left(r + \frac{d}{2}\right)\,,$$

   na začetku drugega ($n = 1$), tretjega, …, pa

$$F_n = \frac{mg}{rl}\left(r + (2n+1)\,\frac{d}{2}\right)\left[l - 2\pi\left(nr + n(n-1)\,\frac{d}{2}\right)\right]\,.$$

   Po vrsti dobimo $F_0 = 235$ N, $F_1 = 264$ N, $F_2 = 244$ N, $F_3 = 160$ N, torej je sila največja na začetku drugega obrata.

3. *Podatki:* $m = 40$ kg, $h = 20$ cm, $l = 45$ cm, $r_1 = 15$ cm, $k_1 = 0{,}20$, $k_2 = 0{,}35$, $v = 5$ m/s.

   Pravokotno silo podlage v prednji letvi označimo z F_1, v desni pa z F_2. V vodoravni smeri potem velja $ma = k_1F_1 + k_2F_2$ in v navpični $F_1 + F_2 = mg$. Ravnovesje navorov zapišemo za os skozi težišče:

$$F_1 r_1 - k_1 F_1 \frac{h}{2} - F_2 r_2 - k_2 F_2 \frac{h}{2} = 0\,,$$

   pri čemer velja $r_2 = l - r_1$. Iz enačbe za ravnovesje navorov in enačbe za ravnovesje sil v navpični smeri sledi:

$$F_1 = \frac{r_2 + k_2\frac{h}{2}}{l + \frac{h}{2}(k_2 - k_1)}\,mg\,, \qquad F_2 = \frac{r_1 - k_1\frac{h}{2}}{l + \frac{h}{2}(k_2 - k_1)}\,mg\,.$$

   Končno dobimo

$$a = \frac{k_1F_1 + k_2F_2}{m} = \frac{r_2k_1 + r_1k_2}{l + \frac{h}{2}(k_2 - k_1)}\,g\,.$$

   Pot, ki jo klada opravi do zaustavitve, je

$$s = \frac{v^2}{2a} = 5{,}3 \text{ m}\,.$$

4. *Podatki:* $h = 1$ m.

   Ker je masa manjše kroglice zanemarljiva v primerjavi z maso večje, se manjša kroglica od večje odbije tako kot od toge stene, tj. z nasprotno enako hitrostjo, kot nanjo prileti. Po odboju večje od tal je relativna hitrost pred trkom $2v$, če je v hitrost, ki jo kroglici dosežeta pri padcu z višine h. Takoj po trku kroglic se manjša giblje s hitrostjo $2v$ glede na večjo, ki se giblje s hitrostjo v navzgor. Glede na tla je hitrost manjše $3v$, kar pomeni, da je njena kinetična energija devetkrat večja kot pred trkom. Manjša kroglica torej doseže višino $9h = 9$ m, večja pa se vrne (skoraj) na prvotno višino 1 m.

□ skupina II

1. *Podatki:* $R = 6370$ km, $r_\mathrm{v} = 71$ %, $r_\mathrm{pl} = 7$ %, $r_\mathrm{kl} = 9$ %, $d_\mathrm{pl} = 25$ m, $d_\mathrm{kl} = 2200$ m, $\eta = 10$ %, $P = 15$ TW, $\rho_l = 920$ kg/m^3, $q = 334$ kJ/kg.

   a) Staljeni plavajoči led ne prispeva k dvigu gladine, saj izpodriva enako prostornino vode kot je prostornina vode, ki nastane iz staljenega ledu. Masa kopenskega ledu, ki se stali je $m_\mathrm{kl} = r_\mathrm{kl}(1 - r_\mathrm{v})\,4\pi R^2 \eta d_\mathrm{kl}\rho_l$ in dvig gladine

$$\Delta h = \frac{m_\mathrm{kl}}{r_\mathrm{v}\,4\pi R^2 \rho_v} = \frac{r_\mathrm{kl}(1 - r_\mathrm{v})\eta d_\mathrm{kl}\rho_l}{r_\mathrm{v}\rho_v} = 7{,}4 \text{ m}\,.$$

b) Masa plavajočega ledu je $m_{\mathrm{pl}} = r_{\mathrm{pl}} r_{\mathrm{v}}\, 4\pi R^2 d_{\mathrm{pl}} \rho_l$; skupna masa ledu, ki se stali je $m = m_{\mathrm{kl}} + m_{\mathrm{pl}} = 3{,}3 \cdot 10^{18}$ kg. Led se stali v času

$$t = \frac{mq}{P} = \frac{(r_{\mathrm{kl}}(1 - r_{\mathrm{v}})\eta d_{\mathrm{kl}} + r_{\mathrm{pl}} r_{\mathrm{v}} d_{\mathrm{pl}}) 4\pi R^2 \rho_l q}{P} = 7{,}3 \cdot 10^{10}\ \mathrm{s} = 2300\ \mathrm{let}\,.$$

2. *Podatki:* $U = 220$ V, $\zeta = 50\ \mu\Omega$ m, $l = 40$ cm, $a = 3$ cm, $d = 2$ mm.

a) Upor ene prečke dobimo iz zveze $R = \zeta l / S$, pri čemer za prečni presek velja $S = a^2 - (a - 2d)^2$:

$$R = \frac{\zeta l}{a^2 - (a - 2d)^2} = \frac{\zeta l}{4d(a - d)} = 89\ \mathrm{m}\Omega\,.$$

b) Po desnem zgornjem odseku lestve in levem spodnjem odseku tok ne teče. Nadomestno vezje sestavljata dva zaporedno vezana upornika, ki sta zaporedno vezana z dvema vzporedno vezanima paroma zaporedno vezanih upornikov. Vsi uporniki imajo upor R. Nadomestni upor je enak

$$R' = R + \left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} \right)^{-1} + R = 3R\,,$$

tok skozi vezje pa $I = U/R' = 820$ A.

c) Računamo s tokovi. Tok v zgornjem levem odseku označimo z I, tok v zgornji prečki z I_1 in drugem levem odseku (štetem od zgoraj navzdol) z I_2; velja $I_2 = I - I_1$. Tok v drugem desnem odseku je I_1. Zaradi simetrije je tok v tretjem desnem odseku I_2 in v spodnji prečki I_1. V srednji prečki torej teče tok $I_2 - I_1$. V spodnjem desnem odseku teče tok I. Zapišimo padce napetosti v zgornjem kvadratu:

$$RI_1 + RI_1 - RI_2 - R(I_2 - I_1) = 0\,.$$

Iz zveze $I_2 = I - I_1$ takoj sledi

$$I_1 = \frac{2}{5} I\,, \qquad I_2 = I - I_1 = \frac{3}{5} I\,.$$

Zapišimo še enačbo za padce napetosti na poti od zgornjega priključka preko zgornje prečke in nato po desnem kraku lestve do spodnjega priključka:

$$RI + RI_1 + RI_1 + RI_2 + RI = U\,.$$

Ko v enačbo vstavimo izraza za I_1 in I_2, dobimo $I = 5U/17R = 720$ A.

3. *Podatki:* $C_1 = 100\ \mu$F, $C_2 = 50\ \mu$F, $R_1 = 100$ kΩ, $R_2 = 56$ kΩ, $U = 12$ V.

a) Napetost na kondenzatorju C_1 je enaka napetosti na uporniku R_1, $U_1 = R_1/(R_1 + R_2)\,U$; podobno velja za napetost na kondenzatorju C_2. Naboja, ki se nabereta na kondenzatorjih, sta enaka

$$e_1 = C_1 U_1 = \frac{C_1 R_1}{R_1 + R_2} U = 0{,}770\ \mathrm{mAs}\,,$$

$$e_2 = C_2 U_2 = \frac{C_2 R_2}{R_1 + R_2} U = 0{,}215 \text{ mAs}\,.$$

Na levi plošči prvega kondenzatorja je naboj $+e_1$, na desni $-e_1$, na drugem kondenzatorju pa po vrsti $+e_2$ in $-e_2$.

b) Ko priključka sklenemo, steče s prvega kondenzatorja na drugi kondenzator toliko naboja, da se napetosti na kondenzatorjih izenačita. Polariteta drugega kondenzatorja se pri tem spremeni; leva plošča postane negativna, desna pa pozitivna. Skupni naboj na kondenzatorjih $e = e_1 - e_2$ se torej razdeli med oba kondenzatorja $e = e_1' + e_2'$ tako, da velja

$$U_1' = U_2' = \frac{e_1'}{C_1} = \frac{e_2'}{C_2}\,.$$

Od tod sledi

$$e_1' = \frac{C_1 e}{C_1 + C_2}\,, \qquad e_2' = \frac{C_2 e}{C_1 + C_2}$$

in končno

$$U_1' = U_2' = \frac{e}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 R_1 - C_2 R_2}{(R_1 + R_2)(C_1 + C_2)} U = 3{,}7 \text{ V}\,.$$

4. *Podatki:* $v = 1 \cdot 10^5$ m/s, $B = 100$ mT, $\beta = 8°$, $m = 6{,}65 \cdot 10^{-27}$ kg, $e = +3{,}2 \cdot 10^{-19}$ As, $h = 10$ cm.

   V navpični smeri se delec alfa giblje enakomerno s hitrostjo $v_z = v \sin\beta$, v projekciji na vodoravno ravnino pa kroži pod vplivom magnetne sile $F = evB\cos\beta$ s hitrostjo $v' = v\cos\beta$. Iz enačbe za kroženje dobimo kotno hitrost kroženja

$$m\frac{v'^2}{r} = ev'B\,, \qquad \omega = \frac{v'}{r} = \frac{eB}{m}\,.$$

   V času, ko v navpični smeri prepotuje razdaljo h, opiše kot:

$$\varphi = \omega t = \frac{eBh}{mv\sin\beta} = 34{,}5\,, \quad \text{ali} \quad N = \frac{\varphi}{2\pi} = 5{,}5\,,$$

   torej v magnetnem polju naredi pet in pol obrata.

□ skupina III

1. *Podatki:* $h = 1$ m.

   a) glej II/4.

   b) Pri prožnem centralnem trku dveh enakih kroglic, ki trčita z nasprotno enakima hitrostima, se smeri hitrosti po trku zamenjata, po velikosti pa ostaneta nespremenjeni. Ko torej prva kroglica po odboju od tal trči s padajočo kroglico, prva le spremeni smer in se ponovno prožno odbije od tal, druga pa se po trku giblje navzgor s hitrostjo v. Obe kroglici se vrneta na začetno višino $h = 1$ m.

2. *Podatki:* $e_1 = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$As, $e_2 = 2{,}0 \cdot 10^{-3}$As, $l = 100$ cm, $m = 10$ g, $e = 1{,}0 \cdot 10^{-11}$As

a) Z r označimo ravnovesno razdaljo od prvega naboja. Iz ravnovesja sil

$$\frac{e_1 e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{e_2 e}{4\pi\varepsilon_0 (l-r)^2}\,,$$

sledi kvadratna enačba $(l-r)^2 = qr^2$, $q = e_2/e_1 = 2$, s smiselno rešitvijo

$$r = \frac{l}{\sqrt{q}+1} = \frac{l}{\sqrt{2}+1} = 0{,}414\ \mathrm{m}\,.$$

b) Odmaknimo srednji naboj za majhen s iz ravnovesne lege proti drugemu naboju. Sila na naboj je po tem enaka

$$\begin{aligned} F &= \frac{e_1 e}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{(r+s)^2} + \frac{q}{(l-r-s)^2}\right] \\ &= \frac{e_1 e}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r^2(1+\frac{s}{r})^2} + \frac{q}{(l-r)^2(1-\frac{s}{l-r})^2}\right]. \end{aligned}$$

Uporabimo $(1+x)^{-2} = 1 - 2x$ in zvezo $(l-r)^2 = qr^2$:

$$F = \frac{e_1 e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\frac{2s}{r} + \frac{2s}{l-r}\right] = \frac{e_1 e l}{2\pi\varepsilon_0 r^3 (l-r)}\, s \equiv ks\,.$$

Sila ima za majhne odmike s takšno obliko kot sila vzmeti, k ustreza konstanti vzmeti.

Za nihajni čas velja enaka formula kot za nihajni čas vzmetnega nihala

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 m r^3 (l-r)}{e_1 e\, l}}\,.$$

Vstavimo še zgornji izraz za r in dobimo

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 m l^3 \sqrt{q}}{e_1 e\,(\sqrt{q}+1)^4}} = 9{,}6\ \mathrm{s}\,.$$

3. *Podatki:* $P = 50$ W, $m = 10$ kg, $c_p = 130$ J/kgK, $\eta = 1{,}0$ %, $\alpha = 1{,}4 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}

Zaradi segrevanja krogle se povečuje njen radij, $r' = r + \Delta r$, $\Delta r = r\alpha\Delta T$ in s tem tudi njen vztrajnostni moment. Pri tem se ohranja vrtilna količina krogle:

$$\frac{2}{5}\, m(r+\Delta r)^2(\omega - \Delta\omega) = \frac{2}{5}\, mr^2\omega\,.$$

Preuredimo:

$$\frac{(r+\Delta r)^2}{r^2} = \frac{\omega}{\omega - \Delta\omega}\,, \qquad \frac{\Delta r}{r} = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{\Delta\omega}{\omega}}} - 1\,.$$

Velja

$$\frac{\Delta r}{r} = \alpha \Delta T = \alpha \frac{Pt}{mc_p}\,, \quad t = \frac{mc_p}{\alpha P}\left(\sqrt{\frac{1}{1-\eta}} - 1\right) \approx \frac{mc_p \eta}{2\alpha P} = 2{,}6\ \text{h}\,.$$

4. *Podatki:* $v = 1 \cdot 10^5$ m/s, $B = 100$ mT, $\varphi = 8°$, $m = 6{,}65 \cdot 10^{-27}$ kg, $e = +3{,}2 \cdot 10^{-19}$ As, $h = 10$ cm.

   V navpični smeri se delec alfa giblje enakomerno s hitrostjo $v_z = v \sin\beta$, v projekciji na vodoravno ravnino pa kroži pod vplivom magnetne sile $F = evB\cos\beta$ s hitrostjo $v' = v\cos\beta$. Iz enačbe za kroženje dobimo kotno hitrost kroženja

$$m\frac{v'^2}{r} = ev'B\,, \qquad \omega = \frac{v'}{r} = \frac{eB}{m}\,.$$

   Ko delec vstopi v magnetno polje, kaže sila v nasprotni smeri osi x, zato leži krožnica pri $x \leq 0$ (glej sliko pri besedilu naloge). Za radij kroženja dobimo

$$r = \frac{mv\cos\beta}{eB} = 2{,}06\ \text{cm}\,.$$

   V času, ko v navpični smeri prepotuje razdaljo h, opiše kot:

$$\varphi = \omega t = \frac{eBh}{mv\sin\beta} = 34{,}5\,, \quad \text{ali} \quad N = \frac{\varphi}{2\pi} = 5{,}50$$

   obrata. Pomeni, da se nahaja ravno na nasprotni strani krožnice, glede na začetno točko. Koordinata točke, kjer zapusti magnetno polje, je

$$\vec{r} = (-2r,\ 0,\ h) = (-4{,}12\ \text{cm}\,,\ 0,\ 10\ \text{cm})\,.$$

   Za splošno rešitev sicer velja:

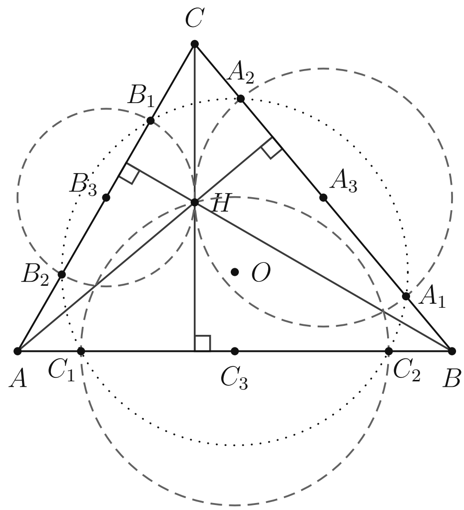
$$x = r(\cos(\omega t) - 1)\,, \qquad y = -r\sin(\omega t)\,, \qquad z = vt\sin\beta\,.$$

Bojan Golli

■ Rešitev 1. naloge z letošnje matematične olimpijade

Naloga je bila objavljena v prejšnji številki Preseka

1. Dokazati moramo, da so točke A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 in C_2 koneiklične. Narišimo primerno skico in poskusimo ugotoviti še kakšno lastnost te krožnice. Hitro opazimo, da bo središče kar središče trikotniku ABC očrtane krožnice. Zato pokažimo, da je $|OA_1| = |OA_2| = |OB_1| = |OB_2| = |OC_1| = |OC_2|$.



1. način [Jure Vogrinc] Označimo $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ in $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ ter $R = |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$. Vemo, da je tedaj $\overrightarrow{OH} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Po Pitagorovem izreku je $|OA_1|^2 = |OA_3|^2 + |A_3A_1|^2$, zato je

$$|OA_1|^2 = \overrightarrow{OA_3} \cdot \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{HA_3} \cdot \overrightarrow{HA_3}.$$

Izrazimo lahko

$$\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA_3} = \vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$$

in

$$\overrightarrow{HA_3} = \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OA_3} = -(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} = -\frac{2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2},$$

torej je

$$|OA_1|^2 = \frac{1}{4}(2R^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c}) + \frac{1}{4}(6R^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a}) = 2R^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}.$$

Analogno dobimo še

$$|OA_2|^2 = 2R^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a},$$

$$|OB_1|^2 = 2R^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a},$$

$$|OB_2|^2 = 2R^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a},$$

$$|OC_1|^2 = 2R^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a},$$

$$|OC_2|^2 = 2R^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a},$$

torej je točka O enako oddaljena od A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, zato te točke ležijo na krožnici s središčem v O in polmerom $|OA_1|$.

2. način [Aljaž Zalar] Pokažimo najprej, da so točke B_1, B_2, C_1, C_2 konciklične. Krožnici s premeroma B_1B_2 in C_1C_2 se sekata v točki H. Označimo drugo presečišče z K (če je presečišče samo eno, bo $K = H$). Premica KH je torej potenčna premica teh dveh krožnic, zato je pravokotna na zveznico središč, to je na premico B_3C_3. Ker pa sta B_3 in C_3 razpolovišči stranic, je B_3C_3 vzporedna z BC, zato je KH pravokotna na BC. Ker pa je tudi AH pravokotna na BC, sta premici AH in KH vzporedni ter vsebujeta skupno točko, torej sovpadata. To pomeni, da so točke A, K in H kolinearne. Potenca točke A na krožnico s premerom B_1B_2 nam da

$$\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AB_2} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AH},$$

potenca točke A na krožnico s premerom C_1C_2 pa

$$\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{AC_2} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AH}.$$

Od tod sledi

$$\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AB_2} = \overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{AC_2},$$

kar ravno pomeni, da so točke B_1, B_2, C_1 in C_2 konciklične.

Analogno dobimo konciklićnost točk A_1, A_2, B_1 in B_2 ter A_1, A_2, C_1 in C_2. Pokazati moramo le še, da ne gre za tri različne krožnice temveč eno samo. Središče tetivnega štirikotnika $B_1B_2C_1C_2$ leži v presečišču simetral stranic B_1B_2 in C_1C_2, to pa je ravno točka O. Zato je $|OB_1| = |OB_2| = |OC_1| = |OC_2|$. Enako lahko sklepamo tudi za ostali dve krožnici, od koder sledi še $|OC_1| = |OC_2| = |OA_1| = |OA_2|$. Zato točke A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 in C_2 vse ležijo na skupni krožnici s središčem O.

■ Rešitev naloge Teleprinter z letošnje računalniške olimpijade

Naloga je bila objavljena v prejšnji številki Preseka

NALOGA

Naloga zahteva, da izpišeš ***N*** besed na zastarel tiskalnik. Tiskalnik deluje tako, da vstavlja posamezne črke, ki tvorijo besedo in to besedo nato izpiše. Tiskalnik lahko napravi eno izmed naslednjih treh operacij:

- Doda črko na konec trenutno generirane besede.
- Izbriše zadnjo črko trenutno generirane besede. (To je dovoljeno samo, če beseda vsebuje vsaj eno črko)
- Trenutno generirano besedo dejansko izpiše.

Na začetku je tiskalnik prazen, ne vsebuje nobenih črk. Po končanem tiskanju tiskalnika ni potrebno izprazniti. Izpisati je potrebno vse podane besede, pri čemer je vrstni red izpisovanja poljuben, le da najdemo najhitrejši način.

Ker je za vsako operacijo tiskalnika potreben čas, želimo podane besede izpisati kar najhitreje, kar pomeni minimizirati skupno število operacij.

Program naj za izpis podanih ***N*** besed najde najhitrejši način izpisa, torej minimalno število operacij in na koncu to zaporedje operacij tudi izpiše.

OMEJITVE

1 <= ***N*** <= 25,000 Število besed za izpis.

VHODNI PODATKI

Program s standardnega vhoda prebere naslednje podatke:

- Vrstica 1 vsebuje celo število ***N***, to je število besed za izpisovanje.
- Vsaka izmed naslednjih ***N*** vrstic vsebuje po eno besedo za izpisovanje. Vsaka beseda je sestavljena iz malih črk angleške abecede (‘a’ – ‘z’) in vsebuje od 1 do vključno 20 črk.
- Vse besede v podatkih se med seboj razlikujejo.

IZHOD

Program naj na standardni izhod izpiše naslednje podatke:

- V prvi vrstici imamo izpisano celo število ***M,*** ki predstavlja minimalno število operacij potrebnih za izpis podanih **N** besed.
- Vsaka od naslednjih **M** vrstic vsebuje po en znak. Ti znaki opisujejo zaporedje potrebnih operacij na naslednji način:
    - Dodajanje črke na konec besede je označeno s črko samo.
    - Brisanje zadnje črke trenutno generirane besede označuje znak ‘-‘ (minus, ASCII koda 45).
    - Dejanski izpis trenutno generirane besede označuje znak ‘P’ (velika črka P).

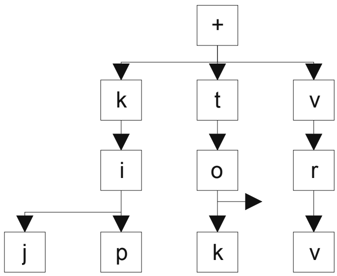
REŠITEV PROBLEMA

Potrebno optimizacijo v grobem dosežemo tako, da seznam besed preuredimo tako, da sestavljamo zaporedoma kar najbolj podobne besede. Besede iz priloženega zgleda „print the poem“ bomo najugodnejše natisnili tako, da bomo besedi print in poem natisnili zaporedoma, saj imata skupno prvo črko „p“ in bomo tako prihranili eno operacijo na tiskalniku. Seveda so si besede lahko medsebojno še bolj podobne in tedaj lahko prihranimo še večje število operacij. Pri zaporednem zapisu besed „**pres**ta“ in „**pres**kok“ prihranimo kar štiri operacije, ker nam ni potrebno izprazniti pomnilnika. Obe besedi izpišemo s trinajstimi ukazi „p r e s t a P - - k o k P“. Pomembno je tudi, da najprej izpišemo krajšo, potem pa še daljšo besedo, saj bi v nasprotnem primeru potrebovali 14 ukazov: p r e s k o k P - - - t a P.

Postopka se lotimo tako, da dane besede razvrstimo v skupine med seboj podobnih besed. Tak učinek prav gotovo lahko dosežemo, če vse besede razvrstimo po abecedi, vendar obstaja tudi drug, časovno še bolj učinkovit način.

Seznam besed zapišemo v računalniški pomnilnik v preprosti drevesni strukturi, ki se v literaturi omenja kot „trie“. Koren drevesa in vsako razvejišče v tej strukturi nosi kot podatek po eno črko besede. Besedo v strukturi dobimo tako, da preberemo zaporedoma črke od korena strukture do konca posamezne vejice.

Spodnji zgled je napravljen za zaporedje naslednjih besed: „kij, kip, to, tok in vrv“. Koren strukture je na vrhu (označen s „+“).



Besede v drevesni strukturi nato izpisujemo eno za drugo, dokler ne izpišemo vseh. Postopek poteka okvirno takole: Začnemo pri korenu strukture in preiskujemo po vejah drevesa do lista (tako običajno rečemo vejici, kjer ne moremo več nikamor dalje). Nato zapišemo besedo in se vrnemo do prvega razvejišča in poskušamo najti novo pot do lista in tako pot ponavljamo toliko časa, dokler ne preiščemo celega drevesa. Temu postopku pravimo tudi preiskovanje v globino.

Paziti moramo le na eno podrobnost. Če imamo dve besedi, od katerih je ena identična začetnemu delu druge, na primer „to“ in „tok“, potem moramo v strukturi predvideti, da se v razvejišču pri „to“ beseda „to“ konča, hkrati pa se struktura nadaljuje do besede „tok“.

Če želimo zgolj preiskati drevo, potem je vseeno kakšen vrstni red uporabimo pri preiskovanju. Če začnemo in končamo preiskovanje v korenu drevesa, potem gremo skozi vsako točko v strukturi natančno dvakrat, razen pri listih, kjer smo le enkrat. To bi veljalo tudi za teleprinter v naši nalogi, če bi morali za seboj počistiti pomnilnik. Vendar naš teleprinter deluje tako, da ga po zadnjem izpisu ni potrebno počistiti. To pa pomeni, da je izmed vseh možnih variant zaporedja izpisanih besed najugodnejša družina takih, ki se konča z najdaljšo besedo v seznamu (ali eno izmed njih, če jih je več enako dolgih).

Kako zagotovimo, da bo zadnja izpisana ravno najdaljša beseda?

Če preiskujemo po natančno takem postopku, kot je bil opisan zgoraj, to ni enostavno, zato uporabimo trik, po katerem postopek obrnemo. Začnemo tako, da gremo s korena po strukturi naravnost do lista, ki ustreza besedi v seznamu, ki naj bo izpisana zadnja, označimo razvejišča, da bomo vedeli, da smo jih že obiskali in izpišemo najdaljšo besedo (znak „P“) in nato izpisujemo črke „od zadaj“, torej izpišemo črko iz strukture, ki smo jo ravnokar zapustili. Znak „-“ pa vpišemo vsakič, kadar po strukturi napredujemo proti listom. Sproti tudi označujemo preiskana razvejišča, da jih ne bi preiskovali ponovno. Operacije lahko štejemo sproti, ali pa na koncu preštejemo dolžino ukaznega zaporedja. Postopek končamo na korenu drevesa, ko smo preiskali celotno drevo. Zaporedje ukazov ki smo ga pri tem beležili, je ravno obrnjeno kot ga zahteva naloga, zato ga izpišemo od zadaj.

Drug že prej omenjeni način reševanja naloge je z razvrščanjem. Vse besede medsebojno razvrstimo po abecedi. V primeru „to“ in „tok“ bomo najprej razvrstili krajšo besedo. Izpisujemo lahko po zaporedju urejenega seznama, le da na koncu izpisujemo besede, ki se vse začnejo z isto začetnico, kot jo ima najdaljša beseda v seznamu. Torej najprej izpišemo vse besede urejenega seznama besed, ki imajo začetnico različno kot najdaljša beseda, nato pa še besede z enako začetnico, kot jo ima najdaljša beseda.

IZBIRA REŠITVE

Kdaj izberemo katero metodo reševanja problema ?

Dokler je število podatkov relativno majhno, je težko govoriti o prednosti ene metode pred drugo. Večina programerjev meni, da je rešitev z razvrščanjem, za programiranje enostavnejša in jo bodo zato izbrali. Ko pa število podatkov narašča, moramo razmisliti o pravi izbiri in omejitvi pomnilnika ter časovni omejitvi, ki je za nalogo postavljena.

Glede na dane omejitve lahko pričakujemo do 25000 besed, kjer ima vsaka do 20 znakov.

Če bomo izbrali rešitev z razvrščanjem, potem moramo upoštevati število besed. Preprosti in manj učinkoviti algoritmi razvrščanja, pri katerih je število potrebnih operacij sorazmerno kvadratu dolžine niza, postanejo pri dolžini okoli 10000 zelo počasni in verjetno ne bodo ustrezni po časovnem kriteriju. Verjetno bi bili bolj ustrezni učinkovitejši algoritmi s številom računskih operacij premosorazmernim z $n \log(n)$, na primer „quick sort".

Če bomo izbrali način z urejeno drevesno strukturo, potem je število računskih operacij premosorazmerno vsoti števila črk vseh besed v seznamu, zato časovna omejitev ne bi smela biti odločilna. Načeloma je poraba pomnilnika pri tem zapisu precej večja kot pri prejšnjem, ker o vsaki črki vodimo kar veliko evidenco. Pričakujemo lahko 25000 krat 20, to je pol milijona črk. Tudi če s pomnilnikom ravnamo potratno in za vsako razvejišče porabimo 30 bajtov pomnilnika, to znese 15 MB, kar je še vedno približno polovica običajnih vrednosti postavljenih omejitev. Torej je pri postavljenih omejitvah naloge ta rešitev povsem ustrezna.

Izkazalo se je, da sta glede na postavljene omejitve ustrezni obe metodi reševanja problema, pri čemer je potrebno v primeru rešitve z razvrščanjem, uporabiti enega izmed učinkovitejših načinov razvrščanja, kjer je število računskih operacij premosorazmerno $n \log(n)$.

Zbirke nalog s tekmovanj

Vsako šolsko leto na šolah potekajo različna tekmovanja v znanju. Za lažjo pripravo vam ponujamo več zbirk tekmovalnih nalog z rešitvami.

EVROPSKI MATEMATIČNI KENGURU

1996–2001

več kot 900 nalog s tekmovanja

+ dodane naloge z dijaških šolskih tekmovanj v matematiki 1993–1995

264 strani
format 16,5 × 23,5 cm
mehka vezava

15,99 EUR

EVROPSKI MATEMATIČNI KENGURU

2002–2004

več kot 500 nalog s tekmovanja

+ dodanih še 160 novih nalog

208 strani
format 16,5 × 23,5 cm
mehka vezava 10,99 EUR

Poleg omenjenih dveh lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog različnih zahtevnosti za osnovnošolce in srednješolce s tekmovanj v znanju matematike, fizike, logike in računalništva. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite s popustom:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/tekmovanja/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.