Tekmovanja

Naloge z 49. mednarodne matematične olimpijade Španija 2008

1. Naj bo H višinska točka ostrokotnega trikotnika ABC. Krožnica s središčem v razpolovišču stranice BC, ki gre skozi točko H, seka premico BC v točkah A_1 in A_2. Krožnica s središčem v razpolovišču stranice CA, ki gre skozi točko H, seka premico CA v točkah B_1 in B_2. Krožnica s središčem v razpolovišču stranice AB, ki gre skozi točko H, seka premico AB v točkah C_1 in C_2. Dokaži, da ležijo točke A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 in C_2 na isti krožnici.

2. (a) Dokaži, da velja neenakost

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1$$

za vsa realna števila x, y, z, ki so različna od 1 in za katera velja $xyz = 1$.

(b) Dokaži, da v zgornji neenakosti velja enakost za neskončno mnogo trojic racionalnih števil x, y, z, ki so različna od 1 in za katera velja $xyz = 1$.

3. Dokaži, da obstaja neskončno mnogo takih naravnih števil n, za katera je število n^2+1 deljivo s praštevilom, ki je večje od $2n+\sqrt{2n}$.

4. Poišči vse take funkcije $f\colon (0,\infty)\to(0,\infty)$ (torej, f je funkcija, ki slika iz pozitivnih realnih števil v pozitivna realna števila), za katere velja

$$\frac{\bigl(f(w)\bigr)^2+\bigl(f(x)\bigr)^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

za vsa pozitivna realna števila w, x, y, z z lastnostjo $wx = yz$.

5. Naj bosta n in k naravni števili z lastnostjo $k \geq n$ in $k-n$ je sodo število. Danih je $2n$ luči, ki so oštevilčene z 1, 2, …, $2n$. Vsaka izmed luči je lahko bodisi prižgana bodisi ugasnjena. Obravnavajmo zaporedja *korakov*: v vsakem koraku pritisnemo na stikalo natanko ene izmed luči (če je luč prižgana, se ugasne, če je luč ugasnjena, se prižge). Na začetku so vse luči ugasnjene.

Naj bo N število takih zaporedij s k koraki, pri katerih so na koncu vse luči od 1 do n prižgane, vse luči od $n+1$ do $2n$ pa ugasnjene.

Naj bo M število takih zaporedij s k koraki, pri katerih so na koncu vse luči od 1 do n prižgane, vse luči od $n+1$ do $2n$ ugasnjene in nobena izmed luči od $n+1$ do $2n$ ni bila nikoli prižgana.

Določi razmerje N/M.

6. Dan je konveksni štirikotnik $ABCD$, v katerem je $|BA| \neq |BC|$. Trikotniku ABC včrtano krožnico označimo z $\mathcal{K}_1$, trikotniku ADC včrtano krožnico pa z $\mathcal{K}_2$. Denimo, da obstaja krožnica $\mathcal{K}$, ki se dotika poltraka BA naprej od A, poltraka BC naprej od C in ki se dotika tudi premic AD in CD. Dokaži, da se skupni zunanji tangenti krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ sekata na krožnici $\mathcal{K}$.

Prevedla in uredila Gregor Dolinar in Irena Majcen

■ Teoretične naloge z 39. mednarodne fizikalne olimpijade Vietnam 2008

Objavljamo teoretične naloge z letošnje 39. mednarodne fizikalne olimpijade v Hanoju, Vietnam. Na fizikalni olimpijadi tekmovalci rešujejo teoretične naloge in po enodnevnem premoru še eksperimentalno nalogo. Za vsak del tekmovanja imajo na razpolago 5 ur časa. Zaradi pomanjkanja prostora objavljamo samo teoretične naloge, bralec pa lahko na spletni strani *http://www.jyu.fi/tdk/kastdk/olympiads/* poleg rešitev teoretičnih nalog ter eksperimentalne naloge z rešitvijo z letošnje olimpijade najde še naloge in rešitve nalog z vseh dosedanjih olimpijad.

□ Naloga 1. Tolkač riža na vodni pogon

A. Uvod

Riž je glavna hrana večine ljudi v Vietnamu. Da bi iz neoluščenega riža dobili beli riž je potrebno ločiti lupine od jedra in odstraniti otrobe. V hribovitih delih severnega Vietnama je veliko potokov in tam živeči ljudje za odstranjevanje otrobov uporabljajo tolkač riža na vodni pogon. Slika 1 prikazuje tak tolkač, slika 2 pa njegovo delovanje.

B. Zgradba in delovanje

1. Zgradba.

Tolkač riža je sestavljen iz naslednjih delov (slika 1):

Možnar: Možnar je lesena posoda, v kateri je riž.

Vzvod: Vzvod imenujemo leseno deblo z enim debelejšim krajiščem in enim tanjšim krajiščem. Vrtljiv je okrog vodoravne osi.

Tolkač: Tolkač je pripet pravokotno na vzvod na tanjšem krajišču vzvoda. Dolžina tolkača je taka, da se ravno dotakne riža v možnarju, ko je vzvod vodoraven.

Korito: Debelejše krajišče vzvoda je izklesano v korito. Oblika korita je bistvena za delovanje naprave.

2. Fazi v delovanju

Tolkač deluje v dveh fazah.

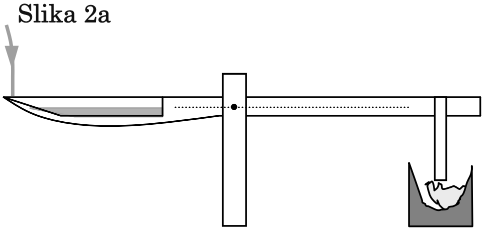
Delovna faza. V tej fazi naprava deluje v ciklu, ki je prikazan na sliki 2. Luščenje riža je posledica dela, ki ga opravi tolkač na rižu v stopnji (f) na sliki 2. Če se iz kakšnega razloga tolkač ne dotakne riža, pravimo, da naprava ne deluje.

Faza mirovanja z dvignjenim vzvodom. V delu (c) delovnega cikla (slika 2), ko se naklonski kot α povečuje, se količina vode v koritu zmanjšuje. V določenem trenutku je vode v koritu ravno toliko, da uravnovesi težo vzvoda. Označimo naklonski kot v tem trenutku z β. Če je vzvod nagnjen pod kotom β in je začetna kotna hitrost nič, potem bo vzvod ostal v tej legi. To je faza mirovanja z dvignjenim vzvodom. Stabilnost te lege je odvisna od masnega toka vode v korito, Φ. Če je Φ večji od neke vrednosti Φ_2, potem je faza mirovanja stabilna in naprava ne more biti v delovni fazi. Z drugimi besedami, Φ_2 je najmanjši masni tok, pri katerem naprava ne deluje.

Slika 1: Tolkač riža na vodni pogon.

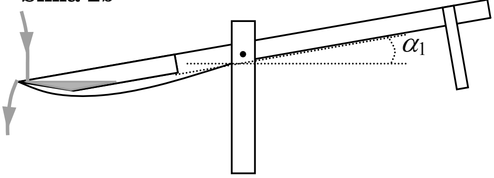
OPERACIJSKI CIKEL TOLKAČA RIŽA NA VODNI POGON

Slika 2a



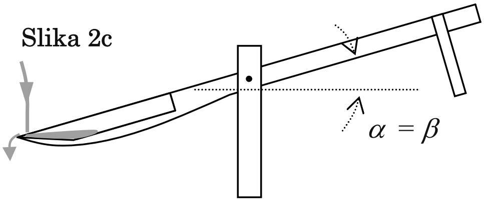
a) Na začetku ni vode v koritu, tolkač miruje v možnarju. Voda priteka v korito z majhnim masnim tokom, vendar ostane vzvod nekaj časa v vodoravni legi.

Slika 2b



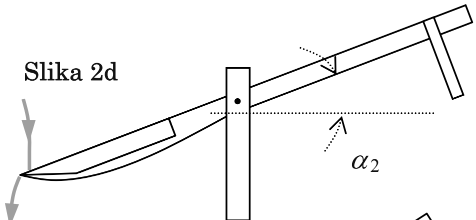
b) V nekem trenutku je vode dovolj, da dvigne vzvod. Zaradi nagnjenosti se voda prelije na krajišče korita in nagne vzvod zelo hitro. Voda začne iztekati iz korita pri $\alpha = \alpha_1$.

Slika 2c



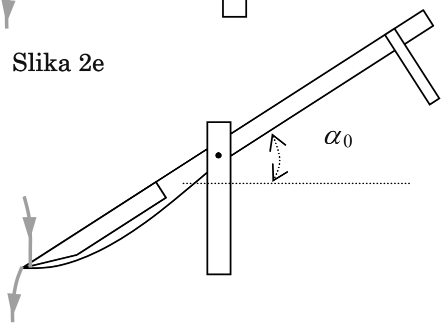
c) Ker se kot α povečuje, voda izteka. Pri določenem naklonskem kotu, $\alpha = \beta$, je rezultanta navora na vzvod enaka nič.

Slika 2d



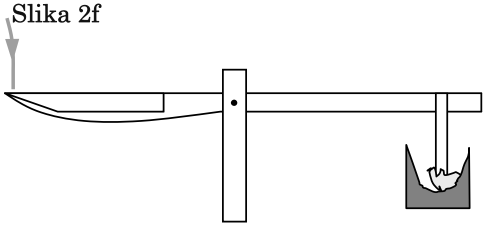
d) Kot α se še povečuje, voda izteka, dokler ne ostane nič vode v koritu.

Slika 2e



e) Kot α se povečuje še naprej zaradi vztrajnosti. Voda priteka v korito, vendar zaradi oblike korita tudi takoj izteče. Gibanje vzvoda zaradi vztrajnosti se nadaljuje, dokler ne doseže α največje vrednosti α_0.

Slika 2f



f) Ker ni več vode v koritu, teža vzvoda potegne vzvod nazaj v začetno vodoravno lego. Tolkač udari v možnar z rižem in začne se nov cikel.

C. Naloga

Obravnavaj tolkač riža na vodni pogon z naslednjimi parametri (slika 3).

Masa vzvoda (skupaj s tolkačem, vendar brez vode) je $M = 30$ kg.

Težišče vzvoda je v točki G. Vzvod se vrti okrog osi T (projicirana v točko T na sliki).

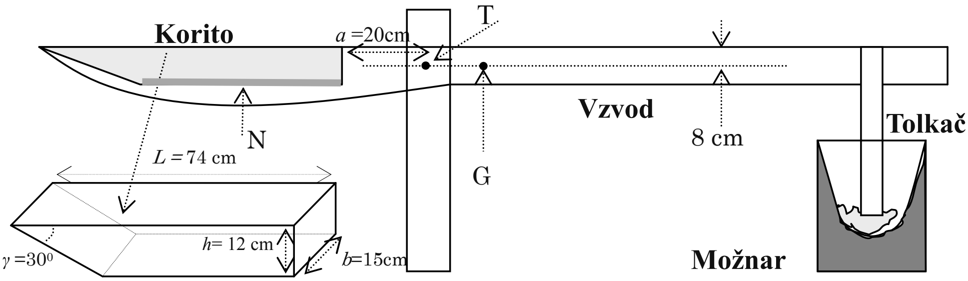
Vztrajnostni moment vzvoda okrog osi T je $I = 12\ \text{kgm}^2$.

Količino vode v koritu označimo z m, težišče vode je označeno z N.

Naklonski kot vzvoda glede na vodoravnico je α.

Bistveni podatki o dimenzijah naprave in korita so na sliki 3.

Zanemari trenje v osi vrtenja in silo zaradi padanja vode v korito. V nalogi bomo privzeli tudi, da je gladina vode vedno vodoravna.



Slika 3: Zgradba in dimenzije naprave.

1. Zgradba naprave

Na začetku je korito prazno in vzvod je v vodoravni legi. Potem priteka voda v korito, dokler se vzvod ne začne vrteti. V tem trenutku je v koritu m = 1,0 kg vode.

1.1. Določi razdaljo od težišča vzvoda G do osi vrtenja T. Naprava je narejena tako, da je daljica GT vodoravna, ko je korito prazno.

1.2. Voda začne iztekati iz korita, ko je kot med vzvodom in vodoravnico α_1. Korito je popolnoma prazno, ko je ta kot α_2. Določi α_1 in α_2.

1.3. Naj bo $\mu(\alpha)$ skupni navor (glede na os T), ki ga prispevajo teža vzvoda in voda v koritu. Navor $\mu(\alpha)$ je nič, ko je $\alpha = \beta$. Določi β in maso m_1 vode v koritu v tem trenutku.

2. Parametri v delovni fazi

Voda naj priteka v korito z majhnim in konstantnim masnim tokom Φ. Količina vode, ki priteče v korito medtem, ko se vzvod giblje, je zanemarljiva. V tem delu naloge zanemari spremembo vztrajnostnega momenta med delovno fazo.

2.1. Skiciraj graf navora μ v odvisnosti od kota α, $\mu(\alpha)$, med enim operacijskim ciklom. Zapiši vrednosti $\mu(\alpha)$ pri kotih α_1, α_2 in $\alpha = 0$.

2.2. Razloži, kako iz grafa v delu 2.1. grafično določiš vrednost celotne energije W_{celotna} navora $\mu(\alpha)$ in delo W_{udarca}, ki ga je tolkač oddal riži.

2.3. Iz grafa μ v odvisnosti od α oceni α_0 in W_{udarca}, (privzemi, da sta kinetična energija vode, ki priteka v korito, in kinetična energija vode, ki odteka iz korita, zanemarljivi). Pri računanju lahko gladke krivulje nadomestiš z odsekoma ravnimi črtami, da poenostaviš računanje.

3. Faza mirovanja

Naj teče voda v korito s konstantnim masnim tokom Φ, vendar pa za razliko od prej ne smemo zanemariti količine vode, ki priteče v korito med gibanjem vzvoda.

3.1. V tem delu naloge je korito v vsaki legi do roba napolnjeno z vodo.

3.1.1. Skiciraj graf navora μ v odvisnosti od kota α v okolici $\alpha = \beta$. Kakšno je ravnovesje vzvoda v primeru $\alpha = \beta$?

3.1.2. Poišči analitični izraz za navor $\mu(\alpha)$ kot funkcijo $\Delta\alpha$, ko je $\alpha = \beta + \Delta\alpha$ in je $\Delta\alpha$ majhen.

3.1.3. Zapiši enačbo gibanja za vzvod, ki se giblje brez začetne hitrosti z lege $\alpha = \beta + \Delta\alpha$ ($\Delta\alpha$ majhen). Pokaži, da je dober približek za to gibanje harmonično (sinusno) nihanje. Izračunaj nihajni čas τ.

3.2. Pri določenem toku Φ je korito ves čas polno vode, če se vzvod giblje dovolj počasi. Obstaja največja vrednost amplitude harmoničnega nihanja, ki je odvisna od Φ. Določi najmanjšo vrednost toka Φ_1 (v kg/s) tako, da vzvod lahko harmonično niha z amplitudo 1°.

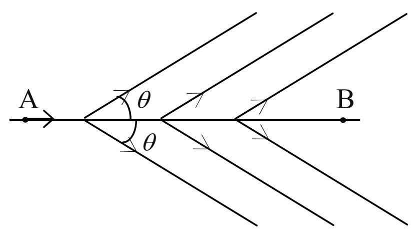
3.3. Privzemi, da je Φ dovolj velik, da je med prostim gibanjem vzvoda, ko se naklonski kot manjša od α_2 do α_1, korito vedno polno vode. Vendar naprava ne more delovati, če je Φ prevelik. Privzemi, da je gibanje vzvoda še vedno harmonično nihanje in oceni najmanjši tok Φ_2, da naprava ne bo delovala.

□ Naloga 2. Sevanje Čerenkova in detektor na osnovi slik v obliki kolobarja

V vakuumu se svetloba širi s hitrostjo c. Noben delec se ne more gibati s hitrostjo, večjo od c. Vendar je možno, da ima delec v prozorni snovi hitrost v večjo od hitrosti svetlobe v isti snovi, $\frac{c}{n}$, kjer je n lomni kvocient snovi. Poskus (Čerenkov, 1934) je pokazal in teorija (Tamm in Frank, 1937) potrdila, da nabiti delec, ki se giblje s hitrostjo v skozi prozorno snov z lomnim kvocientom n in je $v > \frac{c}{n}$, seva svetlobo, ki jo imenujemo *Čerenkovo sevanje*, v smeri, ki oklepa s smerjo gibanja kot

$$\theta = \arccos\frac{1}{\beta n}, \qquad (1)$$

kjer je $\beta = \frac{v}{c}$.



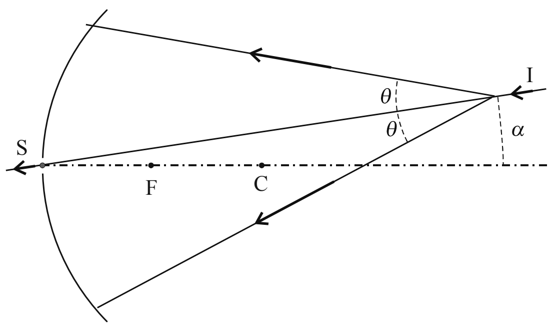
1. Dognanja zgoraj potrdimo, tako da obravnavamo delec, ki se giblje s konstantno hitrostjo $v > \frac{c}{n}$ vzdolž ravnega tira (premice). Delec gre skozi točko A ob času 0 in skozi B ob času t_1. Ker je problem osno simetričen okoli smeri AB, je dovolj, da obravnavamo svetlobo v poljubni ravnini, ki vsebuje daljico AB.

V katerikoli točki C med A in B seva delec svetlobo v vse smeri s hitrostjo $\frac{c}{n}$. Nastajajo krogelne valovne ploskve. Stožčasto valovno fronto ob času t definiramo kot ovojnico vseh krogelnih valovnih ploskev, ki jih do tega časa izseva delec.

1.1. Določi valovno fronto ob času t_1 in nariši njen presek z ravnino, ki vsebuje tir delca.

1.2. Izrazi kot φ med valovno fronto in tirom delca s količinama n in β.

2. Obravnavamo curek delcev, ki se gibljejo s hitrostjo $v > \frac{c}{n}$ vzdolž premice IS tako, da je kot θ majhen. Curek gre skozi konkavno krogelno zrcalo z goriščno razdaljo f, ki ima središče v točki C. Curek gre skozi zrcalo v točki S. Daljica SC tvori z daljico SI majhen kot α. Curek delcev ustvari v goriščni ravnini sliko v obliki krožnice. S pomočjo skice pojasni nastanek take slike. Določi položaj središča O in polmer r krožnice.



Tako postavitev uporabljamo v Čerenkovih detektorjih na osnovi slik v obliki kolobarja (*Ring imaging Cherenkov counters* – RICH). Snov, skozi katero se giblje delec, imenujemo *sevalec*.

Opozorilo: v vseh vprašanjih te naloge bomo zanemarili majhne člene drugega reda in višjih redov v kotih α in θ.

3. Curek delcev je sestavljen iz treh vrst delcev: protonov, kaonov in pionov z mirovnimi masami po vrsti $M_p = 0{,}94$ GeV $/c^2$, $M_\kappa = 0{,}50$ GeV $/c^2$ in $M_\pi = 0{,}14$ GeV $/c^2$. Gibalna količina vsakega delca je $p = 10{,}0$ GeV $/c$. Ne pozabi, da imata pc in Mc^2 enoto energije, da je 1 eV energija, ki se spremeni elektronu, ko preleti napetost 1 V, da je 1 GeV = 10^9 eV in 1 MeV = 10^6 eV.

Curek delcev se giblje skozi zrak (sevalec) s tlakom P. Empirična relacija med lomnim kvocientom zraka in tlakom zraka P je:

$$n = 1 + aP\,, \quad \text{kjer je } a = 2{,}7\cdot 10^{-4}\ \text{bar}^{-1}.$$

3.1. Za vsako od treh vrst delcev izračunaj najmanjšo vrednost zračnega tlaka $P_{\min}$, pri katerem ti delci oddajajo Čerenkovo sevanje.

3.2. Izračunaj tlak $P_{½}$, pri katerem je polmer slike v obliki krožnice za kaone (κ) enak polovici polmera slike v obliki krožnice za pione (π). Izračunaj vrednosti kotov θ_κ in θ_π za ta primer.

Ali je pri tem tlaku mogoče opaziti sliko v obliki krožnice za protone?

4. V resnici curek ni povsem monokromatičen: gibalna količina delcev je porazdeljena okoli vrednosti 10 GeV/c in ima polovično širino na polovični višini Δp. Zaradi tega se slika v obliki krožnice razmaže v kolobar, ustrezno se vrednosti kota θ porazdelijo in imajo polovično širino na polovični višini $\Delta\theta$. Tlak sevalca naj bo $P_{½}$, kot si določil v delu 3.2.

4.1. Izračunaj $\frac{\Delta\theta_\kappa}{\Delta p}$ in $\frac{\Delta\theta_\pi}{\Delta p}$, torej vrednosti $\frac{\Delta\theta}{\Delta p}$ za kaone in pione.

4.2. Ko je razdalja med obema slikama v obliki kolobarja, $\theta_\pi - \theta_\kappa$, večja od desetkratne vrednosti vsote polovičnih širin, $\Delta\theta = \Delta\theta_\kappa + \Delta\theta_\kappa$, ko torej velja $\theta_\pi - \theta_\kappa > 10\,\Delta\theta$, je mogoče dobro ločiti obe sliki v obliki kolobarja. Izračunajte največjo vrednost Δp, pri kateri se še dobro ločita obe sliki v obliki kolobarja.

5. Čerenkov je odkril pojav, ki nosi njegovo ime, ko je opazoval steklenico vode ob radioaktivnem viru. Opazil je, da voda v steklenici oddaja svetlobo.

5.1. Za delec z mirovno maso M, ki se giblje skozi vodo, določi najmanjšo kinetično energijo $T_{\min}$, pri kateri pride do Čerenkovega sevanja. Lomni kvocient vode je n = 1,33.

5.2. Radioaktivni vir, ki ga je uporabil Čerenkov, je oddajal ali delce α (torej helijeva jedra) z mirovno maso M_α = 3,8 GeV/c^2 ali delce β (torej elektrone) z mirovno maso M_e = 0,51 MeV/c^2. Izračunaj številčno vrednost $T_{\min}$ za delce α in β.

Vemo, da kinetična energija delcev, ki jih izseva radioaktivni vir, nikoli ne preseže nekaj MeV. Na podlagi tega dejstva določi vrsto delcev, katerih sevanje je opazil Čerenkov.

6. V dosedanjih delih naloge smo zanemarili vpliv valovne dolžine svetlobe λ pri Čerenkovem sevanju. Sedaj upoštevaj, da ima Čerenkovo sevanje širok zvezen spekter, ki vključuje tudi vidno svetlobo (valovne dolžine od 0,4 μm do 0,8 μm). Vemo tudi, da se lomni kvocient sevalca n spreminja tako, da se razlika $n - 1$ linearno zmanjša za 2%, ko se λ zveča med obema skrajnima mejama vidnega dela spektra.

6.1. Obravnavaj curek pionov s točno določeno gibalno količino 10,0 GeV/c, ki se giblje skozi zrak s tlakom 6 bar. Poišči kotno razliko $\delta\theta$ med skrajnima mejama vidne svetlobe.

6.2. S pomočjo rezultata iz 6.1 kvalitativno preuči vpliv disperzije svetlobe na razmazanost slike v obliki kolobarja za pione, ki imajo gibalno količino porazdeljeno okoli vrednosti p = 10 GeV/c s polovično širino na polovični višini Δp = 0,3 GeV/c.

6.2.1. Izračunaj kotno razmazanost zaradi disperzije (spreminjanje lomnega kvocienta) in kotno razmazanost zaradi akromatičnosti (spreminjanje gibalne količine).

6.2.2. Opiši, kako se spreminja barva slike v obliki kolobarja, ko se pomikamo od notranjega do zunanjega roba.

□ Naloga 3. Spremembe temperature z višino, stabilnost atmosfere in onesnaženost zraka

Navpično gibanje zraka je odločilno pri mnogih procesih v atmosferi, recimo pri nastanku oblakov in padavin, kot tudi pri razpršitvi onesnaženja v zraku. Kadar je atmosfera *stabilna*, je navpično gibanje omejeno in onesnaženje zraka (vsebnost snovi, ki onesnažujejo zrak) se ne razprši in razredči, ampak ostane v okolici vira onesnaženja. Nasprotno v *nestabilni* atmosferi navpično gibanje zraka povzroči navpično razpršitev onesnaženja zraka. Torej koncentracija onesnaženja ni odvisna le od moči virov onesnaženja, ampak tudi od *stabilnosti* atmosfere.

Stabilnost atmosfere bomo določili z uporabo koncepta *kosa zraka*, kot ga uporabljajo v meteorologiji – opazovali in primerjali bomo temperaturo kosa zraka, ki se bo ali adiabatno dvigal ali adiabatno spuščal v atmosferi, s temperaturo okoliškega zraka. Videli bomo, da se v mnogih primerih kos zraka z onesnaženjem, ki se prične dvigati s tal, ustali na določeni višini, ki jo zato imenujemo *mešalna višina*. Višja ko je mešalna višina, nižja je koncentracija onesnaženja. V nalogi bomo določili mešalno višino in koncentracijo ogljikovega monoksida, ki ga oddajajo motorna kolesa v mestnem območju Hanoja ob jutranji prometni konici, ko je s temperaturno inverzijo (temperatura zraka narašča z višino) navpično mešanje zraka omejeno na višino nad 119 m.

Zrak bomo obravnavali kot idealni dvoatomni plin z molsko maso μ = 29 g/mol.

Zveza med tlakom p in volumnom V določene količine zraka pri adiabatni spremembi je pV^{κ} = konstanta, kjer je $\kappa = \frac{c_p}{c_V}$ razmerje med specifično toploto pri konstantnem tlaku in specifično toploto pri konstantnem volumnu za plin.

Če potrebuješ številske vrednosti konstant, lahko uporabiš naslednje vrednosti:
Splošna plinska konstanta R = 8,31 J/(mol K).
Zračni tlak na površju p_0 = 101,3 kPa.
Težni pospešek g = 9,81 m/s^2.

Specifična toplota (izražena na mol) plina pri konstantnem tlaku: $c_p = \frac{7}{2}R$ za zrak.

Specifična toplota (izražena na mol) plina pri konstantnem volumnu: $c_V = \frac{5}{2}R$ za zrak.

Matematični namigi

a. $\int \frac{dx}{A+Bx} = \frac{1}{B}\int \frac{d(A+Bx)}{A+Bx} = \frac{1}{B}\ln(A+Bx)$

b. Rešitev diferencialne enačbe $\frac{dx}{dt} + Ax = B$ (s konstantnima A in B) je

$x(t) = x_1(t) + \frac{B}{A}$, kjer je $x_1(t)$ rešitev diferencialne enačbe $\frac{dx}{dt} + Ax = 0$.

c. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

1. Tlak v odvisnosti od višine.

1.1. Privzemi, da je temperatura atmosfere povsod T_0. Zapiši odvisnost tlaka p v atmosferi kot funkcijo višine z.

1.2. Predpostavi, da spreminjanje temperature zraka v atmosferi z višino opisuje enačba

$$T(z) = T(0) - \Lambda z,$$

kjer je Λ konstanta, ki jo imenujemo obratni navpični temperaturni gradient (navpični temperaturni gradient je $-\Lambda$).

1.2.1. Zapiši odvisnost tlaka p v atmosferi kot funkcijo višine z.

1.2.2. Če se gostota zraka veča z višino, pride do tako imenovane proste konvekcije. Določi, pri katerih vrednostih Λ se pojavi prosta konvekcija.

2. Sprememba temperature kosa zraka pri navpičnem dviganju

Obravnavaj kos zraka, ki se navpično dviga in spušča v atmosferi. Obravnavani kos zraka mora biti primerno velik volumen zraka (s stranicami nekaj metrov), da ga lahko obravnavamo kot neodvisno termodinamično telo, hkrati pa lahko privzamemo, da je temperatura zraka v celotnem volumnu kosa enaka. Navpično gibanje kosa zraka lahko obravnavamo kot kvaziadiabatno spremembo; izmenjava toplote z okoliškim zrakom je zanemarljivo majhna. Če se kos zraka dviga v atmosferi, se razširja in ohlaja. Če pa se kos zraka spušča v atmosferi, naraščajoči zunanji tlak stiska obravnavani kos zraka in temperatura se mu veča.

Ker obravnavani kos zraka ni velik, lahko privzamemo, da ima atmosferski tlak na različnih točkah meje obravnavanega kosa zraka enako vrednost $p(z)$, kjer vzamemo za z višino središča obravnavanega kosa zraka. Temperatura v obravnavanem kosu zraka je povsod enaka $T_{\text{kos}}(z)$ in je v splošnem različna od temperature okoliškega zraka $T(z)$. V delih naloge 2.1 in 2.2 je $T(z)$ splošna funkcija, za katero vnaprej ne predpostavimo nobene poenostavitve.

2.1. Sprememba temperature T_{kos} obravnavanega kosa zraka v odvisnosti od višine je definirana kot $\frac{dT_{\text{kos}}}{dz} = -G$. Izpelji izraz za $G(T, T_{\text{kos}})$.

2.2. Obravnavaj specifičen primer, kjer je na poljubni višini z temperatura atmosfere T enaka temperaturi T_{kos} v obravnavanem kosu zraka, torej $T(z) = T_{\text{kos}}(z)$. S črko Γ bomo označili G, ko je $T = T_{\text{kos}}$, torej $\Gamma = -\frac{dT_{\text{kos}}}{dz}$. Količino Γ imenujmo *suhi adiabatni temperaturni gradient*.

2.2.1. Izpelji izraz za Γ.

2.2.2. Izračunaj številčno vrednost Γ.

2.2.3. Izpelji izraz za temperaturo atmosfere v odvisnosti od višine $T(z)$.

2.3. Privzemi, da je odvisnost temperature atmosfere od višine enaka $T(z) = T(0) - \Lambda z$, kjer je Λ konstanta. Izrazi odvisnost temperature kosa zraka $T_{\text{kos}}(z)$ od višine z.

2.4. Zapiši približen izraz za $T_{\text{kos}}(z)$, ko je $|\Lambda z| << \mathrm{T}(0)$ in je $T(0) \approx T_{\text{kos}}$.

3. Stabilnost atmosfere.

V tem delu privzemi, da se T spreminja linearno z višino.

3.1. Privzemi, da je na začetku obravnavani kos zraka v ravnovesju z okoliškim zrakom na višini z_0, torej ima enako temperaturo $T(z_0)$ kot okoliški zrak. Če se kos zraka premakne malo gor ali dol (npr. zaradi zračnih turbulenc), so možne naslednje tri situacije:

- Kos zraka se vrne nazaj na začetno višino z_0, ravnovesje kosa zraka je stabilno. Za atmosfero rečemo, da je stabilna.
- Kos zraka se giblje naprej v začetni smeri gibanja, ravnovesje kosa zraka je nestabilno. Atmosfera je nestabilna.
- Kos zraka ostane v novi legi, ravnovesje kosa zraka je indiferentno. Za atmosfero rečemo, da je nevtralna.

Kakšni so pogoji za Λ, da bo atmosfera stabilna, nestabilna ali nevtralna?

3.2. Kos zraka ima ob površju višjo temperaturo $T_{\text{kos}}(0)$ kot je temperatura $T(0)$ okoliškega zraka. Zaradi vzgona se bo kos zraka dvigal. Izpelji izraz za največjo višino, ki jo lahko doseže kos zraka v primeru stabilne atmosfere, v odvisnosti od Λ in Γ.

4. Mešalna višina

4.1. V tabeli 1 so zapisane temperature zraka, izmerjene z meteorološkim balonom nekega novembrskega dne ob 7.00 v Hanoju. Odvisnost temperature od višine lahko približno opišemo z enačbo $T(z) = T(0) - \Lambda z$ s tremi različnimi obratnimi navpičnimi temperaturnimi gradienti Λ v treh plasteh: $0\ \text{m} < z < 96\ \text{m}$, $96\ \text{m} < z < 119\ \text{m}$ in $119\ \text{m} < z < 215\ \text{m}$.

Obravnavaj primer, ko se kos zraka s temperaturo $T_{kos}(0) = 22\ °\text{C}$ dviga s površja. S podatki v tabeli 1 in z ustrezno linearno aproksimacijo izračunaj temperaturo kosa zraka na višini 96 m in 119 m.

4.2. Določi največjo višino H, ki jo lahko doseže kos zraka, in temperaturo kosa zraka $T_{kos}(H)$.

Višino H imenujmo *mešalna višina*. Onesnaženje s tal se lahko meša z zrakom v atmosferi (npr. zaradi vetra, turbulence in disperzije) in se razredči znotraj plasti.

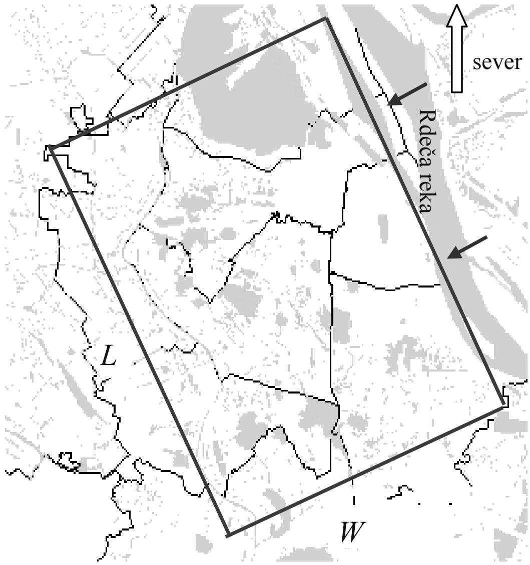
Tabela 1

Temperature zraka, izmerjene z meteorološkim balonom nekega novembrskega dne ob 7.00 v Hanoju.

Višina [m]	Temperatura [°C]	Višina [m]	Temperatura [°C]	Višina [m]	Temperatura [°C]
5	21,5	109	20,1	178	21,0
60	20,6	113	20,1	189	21,5
64	20,5	119	20,1	202	21,8
69	20,5	128	20,2	215	22,0
75	20,4	136	20,3	225	22,1
81	20,3	145	20,4	234	22,2
90	20,2	153	20,5	246	22,3
96	20,1	159	20,6	257	22,3
102	20,1	168	20,8		

5. Ocenitev onesnaženja z ogljikovim monoksidom (CO) v Hanoju zaradi motornih koles v enourni jutranji prometni konici

Za mestno območje Hanoja vzamemo približno velikost pravokotnika s stranicama L in W, kot je prikazano na sliki, pri čemer poteka ena meja vzdolž jugozahodnega brega Rdeče reke.



Med enourno jutranjo prometno konico od 7:00 do 8:00 je na cesti $8 \cdot 10^5$ motornih koles, ki prevozijo v povprečju 5 km in oddajajo 12 g CO na kilometer. Privzemi, da med prometno konico oddajajo motorna kolesa CO enakomerno, s hitrostjo *M*. Istočasno piha severovzhodni veter s čistim zrakom, pravokotno na Rdečo reko (to je pravokotno na stranico *L* pravokotnika), s hitrostjo *u*. Z enako hitrostjo piha čez mesto in odnese del CO onesnaženja iz mestnega zraka.

Uporabimo naslednji grobi približni model:

- CO se hitro razširi po celem volumnu v mešalni plasti nad mestnim območjem Hanoja, tako da privzamemo, da je koncentracija $C(t)$ ogljikovega monoksida v času t konstanta v kvadru z dimenzijami L, W in H.
- Zrak, ki ga prinese veter v kvader, je čist. Nič onesnaženja ne uide skozi ploskve, ki so vzporedne z vetrom.
- Pred 7:00 je koncentracija CO v zraku zanemarljiva.

5.1. Izpelji diferencialno enačbo, ki določa koncentracijo CO onesnaženja $C(t)$ kot funkcijo časa.

5.2. Zapiši rešitev enačbe $C(t)$.

5.3. Izračunaj, kolikšna je koncentracija $C(t)$ ob 8:00.

Podatki: $L = 15$ km, $W = 8$ km, $u = 1$ m/s.

Prevedla in uredila Jurij Bajc in Ciril Dominko

RIBE

Šeherezada je dejala, da je daleč na sredi puščave čudovito jezero. V njem živi ***F*** rib. Obstaja tudi ***K*** različnih vrst dragocenih biserov. Vsaka riba je požrla natanko en biser. Ker ima lahko ***K*** manjšo vrednost, kot je število rib, ima lahko več rib v trebuhu isto vrsto biserov.

Minila so leta in ribe so se po slovenski navadi začele žreti med seboj. Riba lahko požre manjšo ribo le v primeru, če je vsaj dvakrat večja od nje (Riba ***A*** lahko požre ribo ***B*** le, če je $L_A >= 2 * L_B$.). Ni pravila, kdaj se riba odloči, da bo požrla manjšo. Lahko se tudi odloči, da je ne požre, kljub izpolnjenemu pogoju. Lahko tudi ne požre nobene ribe. Vsakič, ko riba požre manjšo ribo, se njena dolžina ne spremeni, pač pa je v njenem trebuhu tudi biser požrte ribe.

Šeherezada je povedala, da če najdeš to jezero, lahko ujameš natanko eno ribo in obdržiš vse bisere, ki so bili v njenemu trebuhu. Ker želiš poskusiti srečo, želiš preden se podaš na pot, ugotoviti število različnih kombinacij vrst biserov, ki bi lahko bile v njihovih trebuhih.

NALOGA

Napiši program, ki za podane podatke o ribah: dolžina ribe in vrsta bisera v njej izračuna število različnih možnih kombinacij vrst biserov, ki lahko končajo v trebuhu posamezne ribe. To število mora biti izpisano po modulu *M*. Biseri posamezne vrste so med seboj identični, zato za kombinacijo šteje le njihovo število posamezne vrste, medtem ko njihov vrstni red ni pomemben.

OMEJITVE

1 <= ***F*** <= 500,000	Začetno število rib v jezeru.
1 <= ***K*** <= ***F***	Število različnih vrst biserov.
2 <=***M*** <= 30,000	
1 <= L_X <= 1,000,000,000	Dolžina x-te ribe.

VHODNI PODATKI

Program s standardnega vhoda prebere naslednje podatke:

- Vrstica 1 vsebuje celo število ***F***, začetno število rib v jezeru.
- Vrstica 2 vsebuje celo število ***K***, število različnih vrst biserov.
  Različne vrste biserov so predstavljene s številkami od 1 do vključno ***K***.
- Vrstica 3 vsebuje celo število ***M***.
- Vsaka izmed naslednjih ***F*** vrstic vsebuje podatke o ribi in sicer dve celi števili ločeni s presledkom: dolžina ribe in vrsta bisera, ki je na začetku v ribi.

OPOMBA: Zagotovo je v testnih primerih vsaj po en biser vsake izmed ***K*** vrst biserov.

IZHOD

Program naj na standardni izhod izpiše celo število, katerega vrednost je med 0 in vključno ***M-1***, to je število možnih kombinacij vrst biserov po modulu ***M***. Jasno je, da za rešitev problema vrednost ***M*** nima nobene druge vloge, kot poenostavitev izračunavanja.

OCENJEVANJE

Za pridobitev skupno 70 točk, ***K*** ne bo presegel vrednosti 7,000.
Poleg tega za nekatere izmed teh testov v vrednosti 25 točk, ***K*** ne bo presegel vrednosti 20.

PODROBNI ODZIV TESTIRANJA

Med tekmovanjem bodo poslane rešitve ocenjene na uradnih podatkih, prikazan pa bo le povzetek rezultatov.

PRIMER

Sample Input	Sample Output
5 3 7 2 2 5 1 8 3 4 1 2 3	4

Obstaja 11 možnih kombinacij, zato ima izpis po modulu 7 vrednost 4. Te kombinacije so: [1] [1,2] [1,2,3] [1,2,3,3] [1,3] [1,3,3] [2] [2,3] [2,3,3] [3] in [3,3].
(Za vsako kombinacijo je napravljen seznam številk, ki predstavljajo vrste biserov. Tako je v primeru [2,3,3] kombinacija, ki vsebuje en biser vrste 2 in dva bisera vrste 3.)
Zgoraj navedene možne kombinacije dobimo na naslednji način:

- [1]: Ujamemo drugo ali četrto ribo, preden le ta požre katero koli drugo ribo.
- [1,2]: Druga riba je požrla prvo, zato sedaj nosi v trebuhu en biser vrste 1 (to je bil njen začetni biser) in en biser vrste 2, ki ga je imela v trebuhu požrta prva riba.
- [1,2,3]: Ena izmed možnih variant za dosego te kombinacije je: Četrta riba požre prvo ribo in za tem pristane v trebuhu tretje ribe. Sedaj ta tretja riba vsebuje po en biser vsake vrste.
- [1,2,3,3]: Četrta riba požre prvo, tretja požre četrto in za tem še peto, nato jo ujameš.
- [1,3]: Ujameš tretjo po tem, ko je požrla četrto.
- [1,3,3]: Ujameš tretjo po tem, ko je požrla četrto in peto.
- [2]: Ujameš prvo ribo.
- [2,3]: Ujameš tretjo po tem, ko je požrla prvo.
- [2,3,3]: Ujameš tretjo po tem, ko je požrla prvo in peto.
- [3]: Ujameš tretjo, preden je požrla kako ribo.
- [3,3]: Ujameš tretjo po tem, ko je požrla peto.

OTOKI

Obiskal si park, ki ga sestavlja ***N*** otokov. Z vsakega otoka ***i*** vodi natančno en most. Dolžina mostu, ki pripada otoku, je označena z L_i. V parku je natančno ***N mostov***. Vsak most lahko prečkamo v obeh smereh. Dodatno imamo med vsakim parom otokov trajektno povezavo.

Ker si se odpravil v park na sprehod, želiš peš opraviti čim daljšo pot, torej poiskati največjo vsoto dolžin mostov, ki jih lahko prečkaš pod naslednjimi pogoji:

- Obisk otokov lahko začneš na poljubnem otoku.
- Vsak otok lahko obiščeš največ enkrat.
- Kadarkoli se lahko premakneš z otoka S na drugi otok D, ki ga še nisi obiskal. To lahko narediš
  - s sprehodom: to je možno samo v primeru, da med izbranima otokoma obstaja most, katerega dolžino prišteješ k opravljeni poti ali
  - s trajektom, ki ga lahko uporabiš le v primeru, da otok D ni dosegljiv z otoka S preko kakršne koli kombinacije mostov oziroma že uporabljenih trajektov (pri ugotavljanju, ali je otok dosegljiv ali ne, upoštevaj vse možne povezave, vključno z vsemi, ki si jih že opravil).

Pozor: Ne zahtevamo obiska vseh otokov in prav tako obstaja možnost, da pod navedenimi pogoji ne moremo prečkati vseh mostov.

NALOGA

Napiši program, ki za podanih *N* mostov, vključno z njhovimi dolžinami izračuna najdaljšo peš pot preko mostov ob upoštevanju navedenih pravil.

OMEJITVE

2 <= ***N*** <= 1,000,000	Število otokov v parku.
1<= L_i <= 100,000,000	Dolžina mostu ***i***.

VHODNI PODATKI

Program s standardnega vhoda prebere naslednje podatke:

- Vrstica 1 vsebuje celo število ***N***, to je število otokov v parku. Otoki so oštevilčeni od 1 do vključno ***N.***
- Vsaka izmed naslednjih ***N*** vrstic opisuje most. ***I**-ta* vrstica (izmed teh ***N*** vrstic) opisuje most, ki vodi iz ***i**-tega* otoka in vsebuje dve celi števili. Prvo je številka otoka, na katerega vodi most in druga, ki predstavlja dolžino mostu L_i**.** Za podatke velja, da vsak most vodi na otok, katerega oznaka je različna od ***i.***

IZHOD

Program naj na standardni izhod izpiše samo eno vrstico, ki vsebuje dolžino najdaljše možne skupne peš poti.

Napotek 1: Pri nekaterih testnih primerih lahko dobimo pravilni rezultat le v primeru, da uporabimo 64 bitno aritmetiko. Tako potrebujete **int64** v pascalu oziroma **long long** v C/C++.

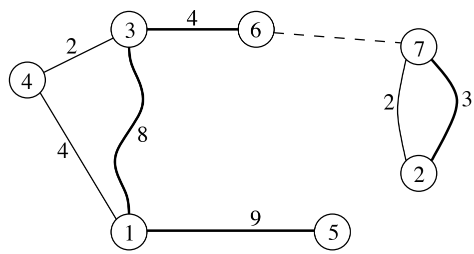
Napotek 2: Izvajanje programov napisanih v pascalu v danem okolju je občutno počasnejše v primeru branja 64 bitnih podatkovnih tipov. Zato za branje priporočamo 32 bitno aritmetiko in takoj nato prehod na 64 bitno aritmeriko.

OCENJEVANJE

Za pridobitev skupno 40 točk, ***N*** ne bo presegel vrednosti 4000.

PRIMER

Sample input	Sample output
7 3 8 7 2 4 2 1 4 1 9 3 4 2 3	24



Pri ***N=7*** na vzorcu imamo naslednje mostove: (1-3), (2-7), (3-4), (4-1), (5-1), (6-3) in (7-2). Pozor: Med otokoma 2 in 7 imamo dva različna mostova, saj en vodi z otoka 2 na 7 in drugi z otoka 7 na 2. En način, kako lahko dobimo najdaljšo možno peš pot je:

- Pričnemo na otoku 5.
- Prečkamo most dolžine 9 in pridemo na otok 1.
- Prečkamo most dolžine 8 in pridemo na otok 3.
- Prečkamo most dolžine 4 in pridemo na otok 6.
- Uporabimo trajekt iz otoka 6 na otok 7.
- Prečkamo most dolžine 3 in pridemo na otok 2.

Na koncu smo na otoku 2 in skupna prehojena peš pot ima dolžino 9+8+4+3 = 24. V tem primeru nismo obiskali otoka 4, saj ga po podanih predpisih sploh ne moremo obiskati. Natančneje:

- Ne moremo ga obiskati peš, ker med otokoma 2 (kjer se trenutno nahajamo) in 4 ni mostu.
- Prav tako ne moremo uporabiti trajekta med otokoma 2 in 4, ker je otok 4 dosegljiv preko drugih poti, to je: uporabimo most (2-7), nato trajektno povezavo med otokoma 7 in 6 (to smo dejansko že uporabili), zatem preko mostu (6-3), kar smo tudi že uporabili in končno preko mostu (3-4).

TELEPRINTER

Naloga zahteva, da izpišeš ***N*** besed na zastarel tiskalnik. Tiskalnik deluje tako, da vstavlja posamezne črke, ki tvorijo besedo in jo nato izpiše. Tiskalnik lahko napravi eno izmed naslednjih treh operacij:

- Doda črko na konec trenutno generirane besede.
- Izbriše zadnjo črko trenutno generirane besede (To je dovoljeno samo, če beseda vsebuje vsaj eno črko.).
- Trenutno generirano besedo dejansko izpiše.

Na začetku je tiskalnik prazen, ne vsebuje nobenih črk. Po končanem tiskanju tiskalnika ni potrebno izprazniti. Izpisati je potrebno vse podane besede, pri čemer je vrstni red izpisovanja poljuben, le da najdemo najhitrejši način.

Ker je za vsako operacijo tiskalnika potreben čas, želimo podane besede izpisati kar najhitreje, kar pomeni minimizirati skupno število operacij.

NALOGA

Program naj za izpis podanih *N* besed najde najhitrejši način izpisa, torej minimalno število operacij in na koncu to zaporedje operacij tudi izpiše.

OMEJITVE

1 <= ***N*** <= 25,000 Število besed za izpis.

VHODNI PODATKI

Program s standardnega vhoda prebere naslednje podatke:

- Vrstica 1 vsebuje celo število ***N***, to je število besed za izpisovanje.
- Vsaka izmed naslednjih ***N*** vrstic vsebuje po eno besedo za izpisovanje. Vsaka beseda je sestavljena iz malih črk angleške abecede ('a' – 'z') in vsebuje od 1 do vključno 20 črk. Vse besede v podatkih se med seboj razlikujejo.

IZHOD

Program naj na standardni izhod izpiše naslednje podatke:

- V prvi vrstici imamo izpisano celo število ***M*,** ki predstavlja minimalno število operacij potrebnih za izpis podanih ***N*** besed.
- Vsaka od naslednjih ***M*** vrstic vsebuje po en znak. Ti znaki opisujejo zaporedje potrebnih operacij na naslednji način:
  - Dodajanje črke na konec besede je označeno s črko samo,
  - Brisanje zadnje črke trenutno generirane besede označuje znak '-' (minus, ASCII koda 45),
  - Dejanski izpis trenutno generirane besede označuje znak 'P' (velika črka P).

OCENJEVANJE
Za pridobitev skupno 40 točk, ***N*** ne bo presegel vrednosti 18.

PODROBNI ODZIV TESTIRANJA
Med tekmovanjem bodo poslane rešitve ocenjene na uradnih podatkih, prikazan pa bo le povzetek rezultatov.

PRIMER

Sample input	Sample output
3 print the poem	20 t h e P - - - p o e m P - - - r i n t P

Prevedla in uredila Jelko Urbančič in Roman Dorn

UREJENI DREVORED

Ko se je Ramzes II vrnil z zmagovitega pohoda, se je odločil, da v spomin na zmago uredi veličastni drevored, ki bi naj potekal iz Luksorja pa vse do Karnaka. Drevored naj bi bil sestavljen le iz lotusovih in papirusovih dreves. Drevesa naj bi simbolizirala nižjo in višjo kasto prebivalcev Egipta.

Drevored sestavlja ***N*** dreves. Drevored je postavljen tako, da bo celoten in tudi katerikoli strnjen del zaporedja dreves znotraj nasada uravnotežen, kar pomeni, da se na tem delu število lotusovih in papirusovih dreves ne razlikuje za več kot 2.

Drevored je predstavljen z nizom črk 'L' (lotus) in 'P' (papyrus); kar je lahko tudi nič ali ena. Tako imamo za primer ***N=5*** možnih 14 uravnoteženih zaporedij. Uravnotežena zaporedja urejena po abecednem vrstnem redu so: LLPLP, LLPPL, LPLLP, LPLPL, LPLPP, LPPLL, LPPLP, PLLPL, PLLPP, PLPLL, PLPLP, PLPPL, PPLLP, in PPLPL.

Za dano dolžino drevoreda so vsa možna uravnotežena zaporedja dreves urejena po abecednem vrstnem redu in oštevilčena s števili od 1 naprej. V prejšnjem zgledu za ***N=5*** je uravnoteženo zaporedje **`PLPPL`** oštevilčeno s številom 12.

NALOGA

Program naj za dano število dreves *N* najde zaporedno številko danega uteženega zaporedja med uravnoteženimi zaporedji dane dolžine, urejene po abecednem vrstnem redu. Izpiše naj rezultat, ki je izračunan po modulu podanega celega števila *M*. Jasno je, da za rešitev problema vrednost *M* nima nobene druge vloge, kot poenostavitev izračunavanja.

OMEJITVE

1 <= ***N*** <= 1,000,000
7 <= ***M*** <= 10,000,000

OCENJEVANJE

Za pridobitev skupno 40 točk, ***N*** ne bo presegel vrednosti 40.

VHODNI PODATKI

Program s standardnega vhoda prebere naslednje podatke:

- Vrstica 1 vsebuje celo število ***N***, to je število vseh dreves.
- Vrstica 2 vsebuje celo število ***M*** (modul).
- Vrstica 3 vsebuje uravnotežen niz dolžine ***N*** znakov, sestavljen le iz črk 'L' (lotus) ali 'P' (papyrus), ki predstavljajo iskano izvedbo uteženega drevoreda.

IZHOD

Program naj na standardni izhod izpiše celo število, katerega vrednost je med 0 in vključno ***M-1,*** to je število, ki predstavlja *zaporedno številko* danega uravnoteženega zaporedja preračunano po **modulu *M***.

PRIMER

Sample input 1	Sample output 1
5 7 PLPPL	5

Uravnoteženo zaporedje **`PLPPL`** je **12. po vrsti** med abecedno urejenimi zaporedji dolžine pet. Torej bo ustrezni izpis **12** modulo **7,** kar je enako **5**.

DODATNI PRIMER

Sample input 2	Sample output 2
12 10000 LPLLPLPPLPLL	39

TELEPORTERJI

Udeležili ste se tekmovanja, kjer morate prečkati Egipt po predpisani poti v ravni črti od zahoda proti vzhodu. Pot začnete v skrajni zahodni točki poti. Potovati morate stalno proti vzhodu.

Na poti se nahaja ***N*** teleporterjev. Vsak teleporter ima dve krajišči: vzhodno in zahodno. Ko naletite na eno od njih, vas teleporter v trenutku teleportira v drugo svoje krajišče. Bodite pozorni; če naletite na zahodno krajišče teleporterja, vas teleportira naprej proti vzhodu v vzhodno krajišče, če naletite na vzhodno krajišče teleporterja, pa vas teleportira nazaj proti zahodu v zahodno krajišče. Ko ste bili teleportirani, morate svojo pot nadaljevati proti vzhodu vzdolž predpisane poti. Ko naletite na eno od krajišč teleporterja, se teleportiranju ne morete izogniti. Nikoli ne najdemo krajišč dveh teleporterjev na istem mestu. Krajišči teleporterjev se nahajajo strogo med začetno in končno točko predpisane poti.

Za vsako teleportiranje pridobite po 1 točko. Cilj tekmovanja je, da zberete čim več točk. Da bi povečali število točk, imate še dodatno možnost: še preden začnete potovanje, lahko na predpisano pot sami postavite največ ***M*** dodatnih teleporterjev. Vsako teleportiranje z dodatnimi teleporterji vam ravno tako prinese po 1 točko.

Svoje teleporterje lahko postavite poljubno, dovoljeni so tudi neceloštevilski položaji krajišč, medtem ko so krajišča začetno podanih teleporterjev vedno na celih številih. Krajišč dodatnega teleporterja ne smete postaviti na mesto, ki je že zasedeno; krajišča dveh teleporterjev ne smejo nikoli sovpadati, so unikatna. Krajišča dodatnih teleporter- jev, se tako kot krajišča začetnih, nahajajo strogo med začetno in končno točko predpisane poti.

Zagotovljeno je, da boste ne glede na to, kako postavite dodatne teleporterje, vedno dosegli cilj.

NALOGA
Napiši program, ki bo pri danih položajih *N* teleporterjev in številu *M* dodatnih teleporterjev, ki jih lahko dodatno vstavite, izračunal največje možno število točk, ki jih lahko dosežete na celotni poti.

OMEJITVE

1 <= ***N*** <= 1,000,000	Število teleporterjev na začetku.
1 <= ***M*** <= 1,000,000	Število dodatnih teleporterjev.
1 <= ***Wx*** < ***Ex*** <= 2,000,000	Razdalja od začetka poti do zahodnega krajišča ***Wx*** in od začetka poti do vzhodnega krajišča ***Ex***-tega teleporterja.

VHODNI PODATKI

Vaš program prebere s standardnega vhoda naslednje podatke:

- vrstica 1 vsebuje celo število ***N***, začetno število teleporterjev;
- vrstica 2 vsebuje celo število ***M***, število dodatnih teleporterjev, ki jih lahko vstavite sami;
- vsaka od naslednjih ***N*** vrstic opisuje po en teleporter z dvema celima številoma, ločenima s presledkom. Ti dve števili predstavljata koordinati krajišč ustreznega teleporterja, to sta njihovi razdalji od začetne točke poti. Obe **celi števili** se nahajata v mejah med vključno 1 do vklučno 2,000,000. Prvo celo število je strogo manjše od drugega. Torej, ***i***-ta od teh vrstic ima zapisani dve števili, ***Wi*** in ***Ei*,** to sta položaja zahodnega in vzhodnega krajišča ***i***-tega teleporterja.

Dve krajišči nikoli ne sovpadata. Pot po kateri potujete, se začne v točki 0 in se konča v točki 2,000,001.

IZHODNI PODATKI

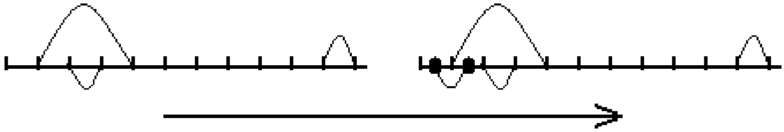
Vaš program naj izpiše na standardni izhod eno samo vrstico, ki vsebuje maksimalno vrednost točk, ki jo lahko dosežete.

OCENJEVANJE

Skupina testov v skupni vrednosti 30 točk, pri omejitvi ***N*** <= 500 in ***M*** <= 500.

PRIMER

Sample input 1	Sample output 1
3 1 10 11 1 4 2 3	6



Leva slika predstavlja pot s tremi originalnimi teleporterji. Desna slika prikazuje isto pot, potem ko smo dodali nov teleporter s krajiščema 0.5 in 1.5.

Eno izmed možnih postavitev dodatnega teleporterja prikazuje desna slika in po njej bo vaše potovanje potekalo takole:

- začnete v položaju 0, in se napotite proti vzhodu;
- ko dosežete položaj 0.5, ste teleportirani v položaj 1.5 (in dobite 1 točko);
- nadaljujete pot do položaja 2, kjer ste teleportirani v položaj 3 (imate že 2 točki);
- nadaljujete pot do položaja 4, kjer ste teleportirani v položaj 1 (imate 3 točke);
- ko dosežete položaj 1.5, ste teleportirani v položaj 0.5 (imate 4 točke);
- nadaljujete na položaj 1, kjer ste teleportirani v položaj 4 (imate 5 točk);
- ko pridete na položaj 10, vas teleportira v položaj 11 (imate 6 točk);
- nadaljujete do konca poti in končate pot s šestimi točkami.

DODATNI PRIMER

Sample input 2	Sample output 2
3 3 5 7 6 10 1999999 2000000	12

TLORIS PIRAMIDE

Vlada se je odločila, da bo v Vipavski dolini postavila mega piramido, ki jo bo gradila s širjenjem obstoječe, in te prosi, da pomagaš najti lokacijo, kjer je možno postaviti največjo možno piramido. Na voljo so ti podatki o zemljiščih, to so parcele v obliki ***M*** * ***N*** kvadratnih celic. Tloris piramide je vedno kvadrat s stranicama vzporednima z mrežo kvadratnih celic.

Obstaja seznam ***P***-tih ovir, ki so predstavljene v obliki pravokotnikov, sestavljenih iz enakih kvadratnih celic, kot je zemljišče. Možno je, da se pozamezne ovire medsebojno prekrivajo. Piramido je možno postaviti le na kvadratni del zemljišča, kjer so ovire popolnoma odstranjene. Odstranjevanje *i*-te ovire stane $\boldsymbol{C_i}$ enot denarja in tudi tvoj čas. Če se lotimo odstranjevanja ovire, jo moramo vedno popolnoma odstraniti, četudi bi potrebovali le del zemlišča, kjer leži ovira. Bodite pozorni, da če odstranite oviro, to nič ne vpliva na morebitno drugo oviro, ki se z njo kakorkoli prekriva.

NALOGA

Napiši program, ki za dano zemljišče velikosti *M* * *N*, kjer je na voljo *B* enot denarja za odstranjevanje ovir s podatki o *P* ovirah, to je položaj in cena za njeno odstranjevanje, najde osnovnico največje možne piramide, ki jo je možno pod danimi finančnimi pogoji postaviti na tem zemljišču. Skupni strošek pri tem ne sme preseči vrednosti *B*.

OMEJITVE IN OCENJEVANJE
Program bo ocenjen na treh ločenih skupinah testnih primerov. Vsem so skupne spodnje omejitve:

$1 <= M, N <= 1{,}000{,}000$	Dimenzija mreže.
$1 <= C_i <= 7{,}000$	Strošek odstranjevanja ***i***-te ovire.
$1 <= X_{i1} <= X_{i2} <= M$	X koordinate skrajnih levih in desnih celic ***i***-te ovire.
$1 <= Y_{i1} <= Y_{i2} <= N$	Y koordinate skrajnih spodnjih in zgornjih celic ***i***-te ovire.

<u>V prvi skupini testov v skupni vrednosti **35 točk**:</u>

$B = 0$	Razpoložljivi denar za odstranjevanje ovir (Ovir ne odstranjuješ.).
$1 <= P <= 1{,}000$	Število ovir na zemljišču.

<u>V drugi skupini testov v skupni vrednosti **35 točk**:</u>

$0 < B <= 2{,}000{,}000{,}000$	Razpoložljivi denar za odstranjevanje ovir.
$1 <= P <= 30{,}000$	Število ovir na zemljišču.

<u>V tretji skupini testov v skupni vrednosti **30 točk**:</u>

$B = 0$	Razpoložljivi denar za odstranjevanje ovir (Ovir ne odstranjuješ.).
$1 <= P <= 400{,}000$	Število ovir na zemljišču.

VHODNI PODATKI
Program s standardnega vhoda prebere naslednje podatke:

- Vrstica 1 vsebuje dve celi števili ***M*** in ***N***, ločeni s presledkom.
- Vrstica 2 vsebuje celo število ***B***, največji skupni strošek (razpoložljivi denar), ki je na voljo za odstanjevanje ovir na zemljišču, da bi postavili čim večjo piramido.
- Vrstica 3 vsebuje celo število ***P,*** število ovir na zemljišču.
- Vsaka izmed naslednjih ***P*** vrstic vsebuje podatke o ovirah. ***i***-ta izmed teh vrstic vsebuje podatke o ***i***-ti oviri in sicer pet celih števil ločenih s presledkom: X_{i1}, Y_{i1}, X_{i2}, Y_{i2}, in C_i. Predstavljajo koordinate spodnje leve in zgornje desne celice ter strošek za odstranitev te ovire.

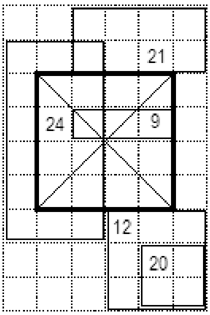
OPOMBA: Spodnja leva celica ima koordinato (1,1), zgornja desna pa (***M***,***N***).

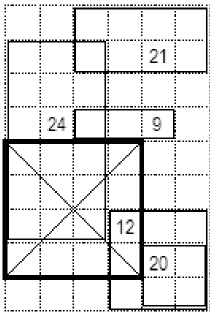
IZHOD
Program naj na standardni izhod izpiše vrstico, ki vsebuje celo število, ki predstavlja osnovnico največje možne piramide, ki jo je možno postaviti na zemljišču. Če ni možno postaviti nobene piramide, tudi najmanjše ne, naj program izpiše 0.

PODROBNI ODZIV TESTIRANJA
Med tekmovanjem bodo poslane rešitve ocenjene na uradnih podatkih, prikazan pa bo le povzetek rezultatov.

PRIMER

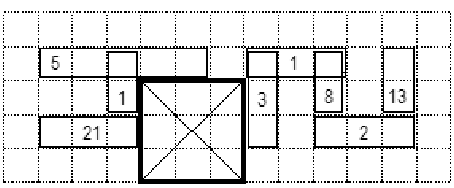
Sample input 1	Sample output 1
6 9 42 5 4 1 6 3 12 3 6 5 6 9 1 3 3 8 24 3 8 6 9 21 5 1 6 2 20	4





Slika prikazuje dva možna položaja za postavitev piramide z dolžino osnovnice 4.

Sample input 2	Sample output 2
13 5 0 8 8 4 10 4 1 4 3 4 4 1 10 2 12 2 2 8 2 8 4 3 2 4 6 4 5 10 3 10 4 8 12 3 12 4 13 2 2 4 2 21	3



Slika prikazuje edini možni položaj za postavitev piramide z dolžino osnovnice 3.

Prevedli in uredili Jelko Urbančič, Roman Dorn in Borut Jurčič-Zlobec

■ Naloge s 7. regijskega tekmovanja v znanju matematike za dijake poklicnih šol

□ 1. del: kratke naloge

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10

A1. Sviloprejka prede surovo svileno nit. En meter niti ima maso približno 0,13 mg. Kolikšna je masa 1 km niti?

(**A**) 0,0013 g (**B**) 0,013 g (**C**) 0,13 g (**D**) 1,3 g (**E**) 130 g

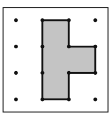
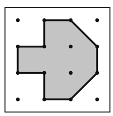
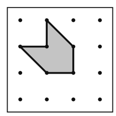
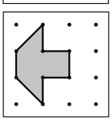
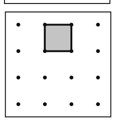
A2. Slikar je na reklamni pano narisal sliko z motivom stavbe in vrtnice pred njo. Na sliki je vrtnica visoka 1,5 cm, stavba pa 7,5 dm. V naravi je vrtnica visoka $\frac{3}{4}$ m. Kako visoka je stavba, če je slikar risal v istem razmerju, kot je v naravi?

(**A**) 1,5 m (**B**) 150 dm (**C**) 3,75 m (**D**) 37500 cm (**E**) 375 dm

A3. Tri števila -7, -10 in -13 si sledijo po nekem pravilu. Jure je poiskal število, ki bi po tem pravilu sledilo številu -13. Če bi seštel kvadrata prvega in dobljenega števila, bi dobil:

(**A**) 23 (**B**) 81 (**C**) 207 (**D**) 245 (**E**) 305

A4. Na vsaki sliki geoplošče je narisan lik. Na kateri sliki ima narisani lik ploščino 4 ploščinske enote, če je ploščinske enota enaka ploščini lika ?

(**A**) 
(**B**) 
(**C**) 
(**D**) 
(**E**) 

A5. Na razprodaji so bile z rdečo nalepko označene tiste srajce, ki so jim bile cene znižane za 50 %, z modro pa tiste, ki so jim bile cene znižane za 25 %. Štefan je kupil 2 srajci z rdečima nalepkama, ki sta pred razprodajo stali vsaka po 10 evrov, in eno srajco z modro nalepko, katere prvotna cena je bila 16 evrov. Koliko evrov je odštel za nakup?

(**A**) 14 (**B**) 17 (**C**) 22 (**D**) 34 (**E**) 36

A6. Katerega izmed navedenih znakov lahko vstaviš v kvadrat, da bo izjava $(-1)^{-8} \square\, 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ pravilna?

(**A**) $<$ (**B**) $>$ (**C**) $\leq$ (**D**) $\neq$

(**E**) nobenega izmed zapisanih

A7. Vika se lahko premika po labirintu le vodoravno ali navpično, čez vsako polje gre lahko samo enkrat. Ob vhodu ima na listu zabeleženo število 0, nato pa sproti prišteva števila, ki jih prebere na prehojenih poljih. Koliko je vseh poti, po katerih pride do vsote 13?

→ 3	1	5	1
2	0	2	1
2	4	2	4
3	3	1 ↓	0

(**A**) 4 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3

(**E**) Nobene takšne poti ni.

A8. Ura na železniški postaji ima minutni kazalec dolg 45 cm. Kateri približek je najboljši za dolžino poti, ki jo opiše konica minutnega kazalca v 1 h in 45 min?

(**A**) 495 cm (**B**) 410 cm (**C**) 376 cm (**D**) 353 cm (**E**) 283 cm

A9. V nogometnem moštvu je 11 igralcev, katerih povprečna starost je 21 let. Katera izjava je gotovo pravilna?

(**A**) Največ igralcev v ekipi je starih 21 let.
(**B**) Vsi igralci so mlajši od 21 let.
(**C**) Vsi igralci skupaj so stari 242 let.
(**D**) Vsaj pet igralcev je starih točno 21 let.
(**E**) Vsota starosti vseh igralcev je 231 let.

A10. Trimestno število $2A4$ prištejemo k 329 in dobimo $5B3$. Katera je največja možna vrednost števke A, če je $5B3$ deljivo s 3?

(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 4 (**D**) 1 (**E**) 9

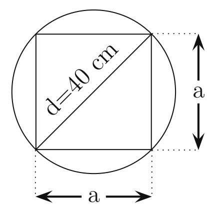
□ 2. del: daljše naloge

B1. Čarovnica Čiračara se je specializirala za matematične uroke. Sestavine za magični urok so: 3, 133, 38, 42, 2, 56, 9, 120 in 6. Magično število izračunamo po naslednjem navodilu:

Delite največje sodo število z najmanjšim lihim številom, da dobite vražje število. Nato pomnožite najmanjše sodo število z največjim lihim številom, da dobite čarovniško število. Na koncu pomnožite z deset razliko, ki jo dobite, če od dvakratnika vražjega števila odštejete čarovniško število. Dobljeni zmnožek je magično število.

Katero je magično število čarovnice Čiračara? Zapiši odgovor.

B2. Iz hrastovega debla premera $d = 40$ cm želimo izrezati največji tram kvadratnega prečnega prereza z robom dolžine a, kot kaže slika prečnega prereza. Dolžina debla (in trama) je 4 m.



A Izračunajte dolžino roba trama, označeno z a.
Rezultat zapišite v centimetrih na eno decimalko natančno.

B Izračunajte prostornino trama v kubičnih metrih na tri decimalke natančno.

C Izračunajte prostornino debla na tisočinko kubičnega metra natančno (za π uporabite vrednost 3,14).

B3. V gledališču je 960 sedežev. Gledališče je razdeljeno na tri dele: parter, balkone in lože. V parterju je 370 sedežev. Število sedežev v ložah je za 290 manjše od števila sedežev na balkonih. Koliko sedežev je na balkonih in koliko v ložah? Zapiši odgovor.

B4. Nekega zimskega večera so se vsi člani družine dedka Alberta tehtali. Ker imajo vsi radi matematiko, so tisto, kar je pokazala tehtnica, povedali na bolj zvit način.

Dedek Albert: *"Jaz sem za $5 \cdot 10^6$ mg lažji od očka."*
Očka Miha: *"Jaz tehtam toliko kot mama in Žan skupaj."*
Mama Jana: *"Jaz tehtam dvakrat toliko kot Tomaž."*
Metka: *"Jaz tehtam dvakrat toliko kot Žan."*
Tomaž: *"Jaz tehtam 0,004 t manj kot Metka."*
Žan: *"Jaz tehtam 10 kg 800 dag 2000 g."*

A Koliko tehta vsak družinski član?

B Koliko tehtajo vsi skupaj?

C Uredite jih od najlažjega do najtežjega. Zapišite njihova imena.

■ Rešitve nalog s 7. regijskega tekmovanja v znanju matematike za dijake poklicnih šol

□ 1. del

A1. Ker ima 1 m niti maso 0,13 mg oziroma 0,00013 g, ima 1 km niti 1000-krat tolikšno maso, to je 0,13 g.

A2. Na sliki sta velikosti vrtnice in stavbe v razmerju 1 : 50. Če je v naravi vrtnica visoka 0,75 m, je stavba visoka 50-krat toliko, to je 37,5 m = 375 dm.

A3. Vsak naslednji člen zaporedja je manjši za 3, številu -13 sledi število -16. Vsota kvadratov prvega in dobljenega števila je $(-7)^2 + (-16)^2 = 49 + 256 = 305$.

A4. Lik na geoplošči (**C**) ima ploščino 4 ploščinske enote, saj ga lahko razrežemo na 4 pravokotne trikotnike s katetama dolžine 1 enota.

A5. Štefan je kupil dve srajci po 10 evrov in zanju zaradi popusta plačal 2-krat po 5 evrov. Za tretjo srajco je odštel 12 evrov. Na blagajni je za vse tri srajce odštel 22 evrov.

A6. Izraza $(-1)^{-8}$ in $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ imata vrednost 1. Izjava je pravilna, če v kvadrat postavimo znak $\leq$.

A7. Skozi labirint lahko gremo po naslednjih treh poteh: $3 \to 2 \to 0 \to 4 \to 3 \to 1$, $3 \to 2 \to 0 \to 2 \to 1 \to 4 \to 0 \to 1$ in $3 \to 1 \to 0 \to 2 \to 2 \to 4 \to 0 \to 1$. Drugih poti z vsoto 13 ni, saj lahko opazimo, da je vsota števil vzdolž vsake poti, ki se izogne polju s številom 0 v drugem stolpcu druge vrstice, vsaj 14.

A8. Konica minutnega kazalca opiše v 1 h in 45 min pot 1,75 obsega krožnice s polmerom 45 cm, kar znaša $1{,}75\ o = 1{,}75 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 45 = 494{,}55$ cm ≈ 495 cm.

A9. Vsi igralci skupaj so stari $11 \cdot 21 = 231$ let.

A10. V trimestnem številu $2A4$ ima A lahko največjo vrednost 4. Tedaj je vsota $244 + 329 = 573$ deljiva s 3. Zaradi deljivosti s 3, bi števko A lahko povečali za 3, a tedaj vsota $274+329 = 603$ ne bi imela oblike $5B3$.

□ 2. del

B1. Največje sodo število (120) delimo z najmanjšim lihim (3), da dobimo vražje število 40. Najmanjše sodo število (2) pomnožimo z največjim lihim številom (133), da dobimo čarovniško število 266. Magično število je: $10 \cdot (2 \cdot 40 - 266) = -1860$.

B2.
- **A** Dolžino roba trama izračunamo s Pitagorovim izrekom: $40^2 = a^2 + a^2$. Rob a je dolg 28,3 cm.
- **B** Prostornina trama je $V_t = a^2 \cdot l = (28{,}3)^2 \cdot 400 = 320356\ \text{cm}^3 = 0{,}320\ \ \text{m}^3$.
- **C** Prostornina debla je $V_d = \pi r^2 \cdot l = 3{,}14 \cdot 20^2 \cdot 400 = 502400\ \text{cm}^3 = 0{,}502\ \text{m}^3$.

B3. Število sedežev na balkonih označimo z b. Tedaj je število sedežev v ložah enako $b - 290$. Število vseh sedežev v gledališču je: $960 = b + (b - 290) + 370$. Odtod izrazimo: $b = 440$. Na balkonih je 440 sedežev, v ložah pa 150 sedežev.

B4.
- **A** Žan tehta 20 kg, Metka 40 kg, Tomaž 36 kg, mama 72 kg, oče 92 kg, dedek 87 kg.
- **B** Vsi skupaj tehtajo 347 kg.
- **C** Od najlažjega do najtežjega se zvrstijo: Žan, Tomaž, Metka, Jana, Albert, Miha.

