Tekmovanja

■ Šolsko tekmovanje iz znanja poslovne matematike – 2006/2007

□ 1. skupina (nižja stopnja zahtevnosti)

1. V podjetju „Sladko življenje“ se ukvarjajo s peko medenjakov. Običajno uspe 8 zaposlenim delavkam v 20 dneh speči 620 kg medenjakov pri predpostavki, da medenjake izdelujejo 5 ur dnevno in so tehnične zmogljivosti izrabljene 80-odstotno.

   a) V decembru se je zaradi bližajočih božično-novoletnih praznikov povpraševanje po medenjakih močno povečalo. 8 zaposlenih delavk je medenjake izdelovalo 22 dni po 8 ur na dan, tehnične zmogljivosti so izrabili 100-odstotno. Kolikšno število polkilogramskih škatel medenjakov so uspeli proizvesti?

   b) Denimo, da bi v proizvodnem obratu želeli proizvesti 1600 kg medenjakov. Koliko delavk bi morali dodatno zaposliti, če bi proizvodnja potekala 22 dni po 8 ur na dan? (Osnova za izračun naj bo izhodiščna situacija – običajna proizvodnja.) Rezultat zaokroži na najbližje celo število.

2. a) Slovensko podjetje je v decembru 2006 iz Madžarske uvozilo 1100 kg ogrske salame po ceni 2.768 HUF za kg. Po kolikšni ceni (v SIT) je podjetje v decembru 2006 prodajalo 30-dekagramske kose te salame, če je cena vključevala 20-odstotno maržo, tako povišani ceni pa je bil prištet 8,5-odstotni DDV? (1 HUF = 0,9029 SIT)

   b) Denimo, da bi kos salame iz primera (a) stal 976,2 SIT. S 1. 1. 2007 je uradna valuta v Sloveniji postal evro. Kolikšna bo cena kosa salame v EUR? (239,64 SIT = 1 EUR)

c) Isti madžarski proizvajalec ogrske salame svoje izdelke prodaja tudi na Hrvaško. V januarju 2007 je hrvaško podjetje od njega kupilo 3000 kg salame po ceni 2.400 HUF za kg. Koliko HRK je podjetje potrebovalo za ta nakup, če upoštevamo 8-odstotne stroške, ki jih je imelo ob sklenitvi tega posla? (7,3686 HRK = 1 EUR; 253,26 HUF = 1 EUR)

3. Na šahovskem turnirju so najboljšim šestim tekmovalcem razdelili nagradni sklad v znesku 16.000 EUR, in sicer takole:

   a) 3/8 nagrade na enake dele;
   b) 60 % nagrade so razdelili premo sorazmerno s točkami; osvojili pa so 6,5 točk, 5 točk, 5 točk, 3,5 točke, 3 točke in 2 točki;
   c) ostanek nagradnega sklada pa so razdelili prvi trojici (najboljšim) tako, da je dobil drugi 40 EUR več kot tretji, prvi pa dvakrat toliko kot drugi.

   Koliko EUR dobi vsak tekmovalec?

4. a) Zlijemo 4 g 21-karatnega zlata, 6 g zlata čistine 800 in 5 g zlata čistine 650. Koliko g zlata čistine 600 moramo dodati, če želimo z mešanjem pridobiti zlato čistine 18 karatov?
   b) Pomešamo zlato čistin 875, 800, 650 in 600 tako, da dobimo 850 g mešanice čistine 750 ‰. Pri mešanju pa želimo porabiti kar največ zlata čistine 600. Koliko g posameznega zlata mešamo?

□ 2. skupina (višja stopnja zahtevnosti)

1. Na banki smo imeli tri mesece denarni znesek 15.000 EUR in dobili 131,25 EUR obresti.

   a) Koliko je znašala obrestna mera?
   b) Koliko časa bi morali pustiti glavnico, da bi dobili 150 EUR obresti?
   c) Za koliko % bi morala banka zvišati obrestno mero, da bi dobili 150 EUR v treh mesecih?

2. Jaka je dobil zaposlitev v oddaljenem mestu. Ker ni urejenega javnega prevoza do delovnega mesta, se je odločil za nakup avtomobila v vrednosti 4.000 DE. Denar si je izposodil od prijatelja na začetku leta 2006 in se z njim dogovoril, da mu bo konec leta 2008 vrnil 2.500 DE in na začetku leta 2011 še za 20 % nižji znesek od predhodnega vračila. Kolikšen bo njegov dolg konec leta 2014, če je potrebno upoštevati naslednje pogoje:

a) Celotno obdobje je letna obrestna mera 5 % in navadno obrestovanje.
b) Do konca leta 2008 je obrestna mera 6 % p. a. in mesečna kapitalizacija, ostalo obdobje 8 % p. a. in četrtletna kapitalizacija. Uporablja se relativno dekurzivno obrestovanje.
c) Prvih šest let (do vključno leta 2011) je obrestna mera 5 % p. a. in četrtletna kapitalizacija, ostalo obdobje za 15 % višja letna obrestna mera in pripis obresti vsaka dva meseca. Obrestovanje je konformno dekurzivno.

3. Glavnica 50.000 DE se je v trinajstih letih pri anticipativnem obrestovanju povečala za 70 %.

    a) Po kolikšni letni anticipativni obrestni meri se je obrestovala, če je kapitalizacija mesečna in obrestovanje relativno?
    b) Koliko dodatnih let bi se morala glavnica še obrestovati pri dnevni kapitalizaciji in 0,04-odstotni dnevni obrestni meri, da bi dobili dodatnih 4.000 DE obresti? Upoštevaj konformno obrestovanje!
    c) Kolikšna bi morala biti letna anticipativna obrestna mera prvih pet let, da bi glavnica 50.000 DE prinesla obresti v višini 3.000 DE, če se ostalo obdobje uporablja obrestna mera 3 % p. a.? Vseh trinajst let je kapitalizacija letna.

4. Podjetje je zašlo v likvidnostne težave, zato trenutno ne more plačati svojih obveznosti do dobavitelja. Zato se je v banki dogovorilo za različne načine odplačila dolga. Banka mu je dala možnost odplačila obveznosti z 20-imi kvartalnimi obroki po 60 EUR (ob koncu vsakega kvartala).

    a) Kolikšna bo končna vrednost vseh vplačil ob dospetju zadnjega obroka, če je banka odobrila 4,5 % letno obrestno mero, četrtletno kapitalizacijo in dekurzivni izračun z relativno obrestno mero?
    b) Za koliko % bi se spremenila končna vrednost vplačil, če bi banka spremenila kapitalizacijo v mesečno s konformno obrestno mero, obroki pa bi dospevali nespremenjeno tako časovno kot zneskovno?
    c) Podjetje pa se je odločilo za tretjo ponujeno možnost, kjer bi svojo obveznost (ki bi ji dodali še en neplačan račun) začelo vračati šele po letu in pol. Takrat bi plačali enkraten znesk 500 EUR, nato pa na začetku vsakega polletja 8 obrokov po 100 EUR (prvič na začetku 3. leta). Kolikšna je v tem primeru končna vrednost vseh vplačil ob koncu 6-tega leta, če je kapitalizacija polletna in relativna obrestna 5 % p. a.?

■ Državno tekmovanje iz znanja poslovne matematike – 2006/2007

□ 1. skupina (nižja stopnja zahtevnosti)

1. 50 šivilj sešije v 4 dneh, če delajo po 8 ur dnevno, 2600 zaves dolžine 2,4 m in širine 2 m. Novo naročilo pa zahteva 3800 zaves, ki so dolge 3 m in široke 2,3 m.

   a) Koliko šivilj bo približno še potrebno dodatno zaposliti, da bo delo končano v 5 dneh, če bodo delale po 8 ur dnevno? (Zaokroži na najbližje celo število.)
   b) 50 šivilj konča neko naročilo v 14 dneh. Vendar pa po šestih dneh zboli kar petina vseh šivilj. V koliko dneh bo sedaj delo končano?
   c) 50 šivilj sešije v nekem času 2600 zaves. Koliko zaves, ki so za 20 % širše, te šivilje sešijejo v istem delovnem času?

2. Ameriško podjetje uvozi iz Švedske 50 ton plemenitega jekla po ceni 21.000 SEK za 1 tono.

   a) Po čem bo podjetje v ZDA prodajalo 1 short tono (at) tega jekla, če mu je švedska jeklarna odobrila 4 % popusta na osnovno ceno. V ceno mora vračunati 18 % carine in 12 % lastnega zaslužka. Zadnja dva stroška obračuna od iste osnove! (1 USD = 10,3533 SEK; 1 at = 907,185 kg)
   b) Koliko bi znašal izkupiček švedske jeklarne (v USD) za celotno količino tega jekla, če upoštevamo, da je jeklarna odobrila kupcu 4 % popusta, sam izvoznik (jeklarna) pa plača še 9 % transporta in 5 ‰ takse. Vsak strošek obračunamo posebej (ni skupne osnove). Cena je enaka kot v točki (a). (1 USD = 10,3533 SEK)

3. Slaščičar bi 6 kg moke razdelil po naslednjem merilu: 1/5 za torte, preostalo pa bo porabil za čokoladne, figove in orehove piškote. Od tega bo za figove piškote porabil 10 dag moke več kot za čokoladne, za orehove pa še enkrat toliko kot za figove.

   a) Koliko moke bo porabil slaščičar za posamezne piškote?
   b) Iz 1/5 moke, ki jo bo porabil za torte, bo naredil dve čokoladni torti, eno orehovo in eno sadno torto. Koliko kg moke porabi za eno čokoladno torto, če je v orehovi torti polovična količina moke, ki jo potrebuje sadna torta? Pri peki sadne torte pa se potrebuje 10 dag več moke kot za čokoladno torto.

c) Babica je pri slaščičarju kupila čokoladno torto za vnučkin rojstni dan. Na zabavi so torto razrezali na dvanajst enakih kosov in jih razdelili med otroke tako, da so trije kosi ostali nerazdeljeni. Koliko otrok je bilo na zabavi poleg slavljenke, ki je edina pojedla dva kosa torte (vsi drugi so dobili po en kos)?

4. Podjetje „Varen dom“ izdeluje protivlomna vrata.

a) V januarju prejšnjega leta so izdelali 40, v februarju 38, v marcu pa 45 protivlomnih vrat. Načrtovana proizvodnja v prvem trimesečju prejšnjega leta je bila 110 vrat. Za koliko % je bila dejanska proizvodnja večja od načrtovane proizvodnje?

b) Denimo, da bi bila dejanska proizvodnja iz primera (a) za 8 % manjša od načrtovane proizvodnje. Kolikšna bi bila načrtovana proizvodnja v tem primeru? Rezultat zaokroži na najnižje celo število.

c) Proizvodnja podjetja „Varen dom“ se je v 2. polletju leta 2006 spreminjala tako: v juliju so proizvedli 40 vrat, avgusta 10 % več kot v mesecu juliju, septembra 3 vrata manj kot avgusta, novembra je bila proizvodnja za 20 % manjša od proizvodnje v mesecu oktobru, decembra, ko so proizvedli 42 vrat, pa je bila proizvodnja za 5 % večja od proizvodnje v mesecu novembru. Koliko vrat je podjetje izdelalo v mesecu oktobru 2006?

□ 2. skupina (višja stopnja zahtevnosti)

1. Družini Krajnc in Horvat sta že dolgo let sosedi. Lansko leto sta se odločili za skupno investicijo postavitve nadstreška za njuni garaži. 1. 7. 2006 je družina Krajnc vplačala skupni znesek v vrednosti 3.320 EUR.

a) Družina Horvat bo svoj polovični delež vrnila Krajnčevim po osmih mesecih, seveda z dogovorjenimi obrestmi v višini 4,5 % p. a. Kolikšno bo vračilo, če je dogovorjen obračun obresti po navadnem obrestnem računu in času v mesecih?

b) Koliko dni prepozno in kdaj (datum) je družina Horvat vrnila denar, če so Krajnčevim plačali 1.713,42 EUR? Upoštevaj, da bi morali znesek vrniti 1. 3. 2007. Račun izvedi z navadnim obrestnim računom in v celoti s časom v dnevih pri sistemu (K, 365).

c) Kolikšen bi bil znesek investicije na dan 1. 7. 2006, če bi se družini z izvajalcem dogovorili za plačilo po osmih mesecih z obrestmi vred v skupnem znesku 3.450,00 EUR, izvajalec pa bi upošteval 5 % letno obrestno mero in navadni obrestni račun?

2. Janez bi rad višek svojega denarja, 1.800,00 EUR, vezal za krajše časovno obdobje, zato preverja različne ponudbe bank. Pomagaj mu dokončati obračune.

   a) V prvi banki je ponujena letna obrestna mera v prvih dveh mesecih 4 %, v drugih dveh mesecih pa 10 % višja. Kolikšna bi morala biti letna obrestna mera (zaokroženo na dve decimalki) v zadnjih dveh mesecih, da bi Janez ob koncu vezave (po preteku šestih mesecev) lahko dvignil 1.840,00 EUR? Banka uporablja dekurzino obrestovanje z mesečno kapitalizacijo in konformno obrestno mero.
   b) Koliko bi privarčeval po 9 mesecih v drugi banki, če banka ponuja za vezane vloge letno obrestno mero 6 %, uporabi pa dekurzivni, relativni izračun in četrtletno kapitalizacijo?
   c) Koliko časa bi imel denar v banki, ki bi vezane vloge obrestovala po letni obrestni meri 5,2 %, uporabila pa bi konformni način s polletno kapitalizacijo, da bi po izteku časa vezave sredstev dobil 243,20 EUR obresti?

3. Komitent je pred tremi leti na banki najel posojilo v višini 2.000,00 EUR, ki ga je banka obrestovala po 3,15 % p. a. anticipativno po obrestnoobrestnem računu.

   a) Koliko bi se lahko komitent dodatno zadolžil do danes, da bi bil končni dolg čez 5 let (šteto seveda od danes) točno 5.000,00 EUR, banka pa bi ob dodatnem izplačilu posojila spremenila obrestno mero na 3,10 % p. a. anticipativno po obrestnoobrestnem računu?
   b) Koliko bi moral vložiti pri istih pogojih, če bi bilo obrestovanje ves čas dekurzivno?
   c) Koliko znaša povprečna dekurzivna obrestna mera (zaokroži na tri decimalna mesta)?

4. a) Koliko moramo vlagati na začetku vsakega polletja prvih 5 let, da bomo lahko naslednja 4 leta ob koncu vsakega leta prejemali rento po 2.000,00 EUR? Vseh 9 let bo veljala obrestna mera 3,15 % p. a. pri mesečni kapitalizaciji in relativni obrestni meri.
   b) Rentni sklad znaša 10.000,00 EUR. Iz tega sklada se bo po 2-letnem odlogu izplačalo 25 polletnih postnumerandnih rent. Kolikšna bo renta, če bodo v računu upoštevani obrestna mera 4,5 % p. a., kvartalni pripis obresti in konformni obračun?

■ 28. Mednarodno matematično tekmovanje mest – Jesenski krog

□ Prva skupina (prvi del)

1. Na tabli sta zapored zapisani naravni števili m in n, za kateri velja $m \leq n$. Marija v svojo beležnico zapiše število m^2, števili na tabli pa nadomesti s številoma m in $n - m$ v nepadajočem vrstnem redu. Ta postopek potem ponavlja, dokler se na tabli ne pojavi število 0. Določi vsoto vseh števil v Marijini beležnici. (4 točke)

2. V nekem kraju živijo lažnivci, ki vedno lažejo, resnicoljubi, ki vedno govore resnico, in omahljivci, ki enkrat govore resnico, drugič pa lažejo. Osebam lahko zastavljamo vprašanja z odgovoroma 'da' in 'ne' (npr. 'Ali je ta človek omahljivec?').

   a) Pred teboj stojijo lažnivec, resnicoljub in omahljivec, ki drug drugega poznajo. Kako lahko odkriješ njihove značaje? (1 točka)

   b) Pred teboj stojijo lažnivec, resnicoljub in dva omahljivca, ki drug drugega poznajo. Dokaži, da lahko omahljivca vedno odgovarjata na tvoja vprašanja tako, da iz odgovorov ne moreš odkriti značaja nobenega od štirih ljudi pred teboj. (3 točke)

3. a) Na tabli je zapisano 2007 naravnih števil, večjih od 1. Dokaži, da lahko s table zbrišeš eno število tako, da je produkt preostalih števil na tabli možno predstaviti v obliki $m^2 - n^2$ za neki naravni števili m in n. (2 točki)

   b) Na tabli je zapisano 2007 naravnih števil, ki so večja od 1, eno izmed njih pa je enako 2006. Dokaži: Če obstaja na tabli natanko eno tako število, da lahko produkt preostalih števil na tabli predstavimo v obliki $m^2 - n^2$ za neki naravni števili m in n, je to število enako 2006. (2 točki)

4. Stranico BC trikotnika ABC podaljšamo od oglišča B do točke B', za katero velja $|BB'| = |AB|$. Presečišče simetral zunanjih kotov ob ogliščih B in C označimo z M. Dokaži, da so točke A, C, M in B' konciklične. (4 točke)

5. Kvadrat razrežemo na n skladnih nekonveksnih poligonov, ki imajo vse stranice vzporedne kaki izmed stranic kvadrata. Določi največje možno število n, če veš, da noben izmed poligonov ni vzporedni premik kakega drugega poligona. (4 točke)

□ Druga skupina (prvi del)

1. Na tabli so zapisana naravna števila x, y in z. Marija v svojo beležnico zapiše produkt dveh izmed teh števil in tretje število na tabli zmanjša za 1. Ta postopek potem ponavlja, dokler se na tabli ne pojavi število 0. Določi vsoto vseh števil v Marijini beležnici. (4 točke)

2. Dan je štirikotnik z včrtano krožnico. Zaporedne točke, kjer se krožnica dotika stranic štirikotnika, povežemo s tetivami. V štiri trikotnike, ki jih te tetive odrežejo od danega štirikotnika, včrtamo krožnice s središči S_1, S_2, S_3 in S_4. Dokaži, da sta diagonali štirikotnika $S_1S_2S_3S_4$ pravokotni. (4 točke)

3. Števila $1, 2, 3, \ldots, 2006^2$ so naključno zapisana v poljih tabele velikosti 2006×2006. Dokaži, da obstajata taki polji tabele s skupno stranico ali s skupnim ogliščem, da je vsota števil zapisanih v teh dveh poljih deljiva s 4. (4 točke)

4. Dani sta neskončno aritmetično zaporedje $a_1, a_2, \ldots$ in neskončno geometrijsko zaporedje $b_1, b_2, \ldots$. Dokaži, da je kvocient geometrijskega zaporedja celo število, če veš, da vse člene danega geometrijskega zaporedja najdemo tudi med členi danega aritmetičnega zaporedja. (4 točke)

5. Ali lahko pravilni oktaeder včrtamo v kocko tako, da njegova oglišča ležijo na robovih kocke? (Pravilni oktaeder ima 6 oglišč, v katerih se stikajo po štirje robovi, njegove stranske ploskve pa so enakostranični trikotniki.) (5 točk)

□ Prva skupina (drugi del)

1. Pravilnemu sedemkotniku P_1 z očrtano krožnico K_1 je včrtana krožnica k_1, pravilnemu sedemnajstkotniku P_2 z očrtano krožnico K_2 pa je včrtana krožnica k_2. Kolobar med krožnicama k_1 in K_1 ima enako ploščino kot kolobar med krožnicama k_2 in K_2. Dokaži, da imata tedaj mnogokotnika P_1 in P_2 enako dolge stranice. (3 točke)

2. Ana se je zaposlila v novem podjetju in se pozanimala, kateri sodelavci se med seboj poznajo. Zatem je narisala krožnico in sodelavce predstavila s tetivami na tak način, da se dve tetivi sekata natanko tedaj, ko se ustrezna sodelavca poznata. Ali ima Ana prav, ko trdi, da se da na tak način predstaviti poznanstva v poljubnem podjetju? (5 točk)

3. V tabelo velikosti 3×3 so v prvi vrstici zapored vpisana števila a, b, c, v drugi vrstici zapored vpisana števila d, e, f in v tretji vrstici zapored vpisana

števila g, h, i. Nastala shema je magični kvadrat, kar pomeni, da je vsota števil v poljubni vrstici enaka vsoti števil v poljubnem stolpcu in vsoti števil s poljubne diagonale. Dokaži, da velja:

a) $2(a + c + g + i) = b + d + f + h + 4e$. (3 točke)

b) $2(a^3 + c^3 + g^3 + i^3) = b^3 + d^3 + f^3 + h^3 + 4e^3$. (3 točke)

4. Krožnica s polmerom R je včrtana v ostrokotni trikotnik. Tri tangente na dano krožnico razdelijo trikotnik na tri trikotnike in šestkotnik z obsegom Q. Določi vsoto premerov krožnic, včrtanih v tri nastale trikotnike. (6 točk)

5. Dana je slika velikosti 1×1. Pravokoten kos papirja s ploščino 2 se imenuje *ovoj*, če lahko z njim brez rezanja ovijemo dano sliko. Primera ovoja sta tako pravokotnik velikosti 2×1 in kvadrat velikosti $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$.

   a) Dokaži, da poleg gornjih dveh ovojev obstajajo še drugi. (4 točke)

   b) Dokaži, da obstaja neskončno mnogo različnih ovojev. (3 točke)

6. Naj bo
$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{a_n}{b_n},$$
kjer sta a_n in b_n tuji si naravni števili. Dokaži, da obstaja neskončno mnogo različnih n, za katere velja $b_{n+1} < b_n$. (8 točk)

7. Delilec kart ima v roki komplet 52 igralnih kart, igralci pa poskušajo ugotoviti vrstni red kart v tem kompletu. Igralec si lahko zamisli dve različni karti in delilca vpraša koliko kart je med izbranima kartama. Eden od igralcev pozna vrstni red kart. Določi najmanjše število vprašanj, ki jih mora ta igralec zastaviti delilcu, da bodo ostali igralci zagotovo lahko ugotovili vrstni red kart v kupčku? (9 točk)

□ Druga skupina (drugi del)

1. Ana se je zaposlila v novem podjetju in se pozanimala, kateri sodelavci se med seboj poznajo. Zatem je narisala krožnico in sodelavce predstavila s tetivami na tak način, da se dve tetivi sekata natanko tedaj, ko se ustrezna sodelavca poznata. Ali ima Ana prav, ko trdi, da se da na tak način predstaviti poznanstva v poljubnem podjetju? (4 točke)

2. Dan je ostrokotni trikotnik ABC. Na stranicah BC, AC in AB zapored ležijo take točke A_1, B_1 in C_1, da so daljice A_1A, B_1B in C_1C simetrale kotov trikotnika $A_1B_1C_1$. Dokaži, da so tedaj A_1A, B_1B in C_1C višine trikotnika ABC. (6 točk)

3. Število $a = 0{,}12457\ldots$ ima lastnost, da je njegova n-ta decimalka enaka zadnji števki pred decimalno vejico v številu $n\sqrt{2}$. Dokaži, da število a ni racionalno. (6 točk)

4. Ali lahko kako prizmo razrežemo na piramide z osnovnimi ploskvami na eni osnovni ploskvi prizme in vrhovi na drugi osnovni ploskvi prizme, tako da se notranjosti dobljenih piramid ne sekajo? (4 točke)

5. Naj bo
$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{a_n}{b_n}\,,$$
kjer sta a_n in b_n tuji si naravni števili. Dokaži, da obstaja neskončno mnogo različnih n, za katere velja $b_{n+1} < b_n$. (7 točk)

6. Igralni komplet 52 kart je *pravilno urejen*, če je gornja karta kompleta pikov as, spodnja karta bodisi as, bodisi pik in sta vsaki dve sosednji karti v kupčku bodisi enake barve, bodisi enake vrednosti. Dokaži, da je število pravilnih ureditev kompleta kart

   a) deljivo z 12!. (3 točke)

   b) deljivo z 13!. (5 točk)

7. Pozitivna realna števila $x_1, x_2, \ldots x_k$ zadoščajo pogojema
$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 < \frac{x_1 + ... + x_k}{2}$$
in
$$x_1 + \cdots + x_k < \frac{x_1^3 + ... + x_k^3}{2}.$$

   a) Dokaži, da je $k > 50$. (3 točke)

   b) Za kako vrednost k poišči primer takih števil. (3 točke)

   c) Določi minimalno vrednost k, za katero obstaja primer takih števil. (3 točke)

Gregor Cigler

■ Rešitve nalog s šolskega tekmovanja iz znanja poslovne matematike – 2006/2007

□ 1. skupina (nižja stopnja zahtevnosti)

1. a)

$$\begin{array}{ccccc} 8\text{ del.} & 20\text{ dni} & 620\,\text{kg} & 5\,\text{h} & 80\,\% \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ 8\text{ del.} & 22\text{ dni} & x\,\text{kg} & 8\,\text{h} & 100\,\% \end{array}$$

$$x = \frac{620 \cdot 8 \cdot 22 \cdot 8 \cdot 100}{8 \cdot 20 \cdot 5 \cdot 80} = 1364 \text{ kg}; \qquad 1364 \cdot 2 = 2728 \text{ škatel}$$

Odgovor: Uspeli so proizvesti 2728 škatel medenjakov.

b)

$$\begin{array}{ccccc} 8\text{ del.} & 20\text{ dni} & 620\,\text{kg} & 5\,\text{h} & 80\,\% \\ & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \downarrow \\ x & 22\text{ dni} & 1\,600\,\text{kg} & 8\,\text{h} & 100\,\% \end{array}$$

$$x = \frac{8 \cdot 20 \cdot 1600 \cdot 5}{22 \cdot 620 \cdot 8} = 11{,}73 \text{ del.}$$

Odgovor: Dodatno bi morali zaposliti še 4 delavke.

2. a)

$$\begin{array}{l|l} x\text{ SIT} & 30\,\text{dag} \\ 100\,\text{dag} & 1\,\text{kg} \\ 1\,\text{kg} & 2.768\text{ HUF} \\ 1\text{ HUF} & 0{,}9029\text{ SIT} \\ 100\text{ SIT} & 120\text{ SIT} \\ 100\text{ SIT} & 108{,}5\text{ SIT} \end{array}$$

$$x = \frac{108{,}5 \cdot 120 \cdot 0{,}9029 \cdot 2.768 \cdot 30}{100 \cdot 100 \cdot 100} = 976{,}2 \text{ SIT}$$

Odgovor: Cena 30-dekagramskega kosa salame je bila 976,2 SIT.

b) $\begin{array}{l|l} x \text{ EUR} & 976{,}2 \text{ SIT} \\ 239{,}64 \text{ SIT} & 1 \text{ EUR} \end{array}$

$$x = \frac{976{,}2}{239{,}64} = 4{,}07 \text{ EUR}$$

Odgovor: Cena po 1. 1. 2007 je 4,07 EUR.

c) $\begin{array}{l|l} x \text{ HRK} & 3000\,\text{kg} \\ 1 \text{ kg} & 2.400 \text{ HUF} \\ 253{,}26 \text{ HUF} & 1 \text{ EUR} \\ 1 \text{ EUR} & 7{,}3686 \text{ HRK} \\ 100 \text{ HRK} & 108 \text{ HRK} \end{array}$

$$x = \frac{7{,}3686 \cdot 2.400 \cdot 3000 \cdot 108}{253{,}26 \cdot 100} = 226.242{,}73\,\text{HRK}$$

Odgovor: Hrvaško podjetje je za sklenitev posla potrebovalo 209.484,01 HRK.

3. a) $16.000 \cdot 3/8 = 6.000$ EUR; $\frac{6.000}{6} = 1.000$ EUR

b) $16.000 \cdot 0{,}60 = 9.600$ EUR

$$\begin{array}{lcr} \text{A} & 6{,}5x & 2.496 \text{ EUR} \\ \text{B} & 5x & 1.920 \text{ EUR} \\ \text{C} & 5x & 1.920 \text{ EUR} \\ \text{D} & 3{,}5x & 1.344 \text{ EUR} \\ \text{E} & 3x & 1.152 \text{ EUR} \\ \text{F} & 2x & 768 \text{ EUR} \\ \hline \end{array}$$

$$25x = 9.600$$
$$x = 384$$

c) OSTANEK $= 16.000 - (6.000 + 9.600) = 400$ EUR

$$\begin{array}{lc|cr} \text{A} & (x+40) \cdot 2 & 2x + 80 & 220 \text{ EUR} \\ \text{B} & x + 40 & x + 40 & 110 \text{ EUR} \\ \text{C} & x & x & 70 \text{ EUR} \\ \hline \end{array}$$

$$4x + 120 = 400$$
$$x = 70$$

d)

A	$1.000 + 2.496 + 220 =$	3.716 EUR
B	$1.000 + 1.920 + 110 =$	3.030 EUR
C	$1.000 + 1.920 + 70 =$	2.990 EUR
D	$1.000 + 1.344 =$	2.344 EUR
E	$1.000 + 1.152 =$	2.152 EUR
F	$1.000 + 768 =$	1.768 EUR

4. a) 21 karatov = 875 ‰
18 karatov = 750 ‰
ali
800 ‰ = 19,2 karata
650 ‰ = 15,6 karata
600 ‰ = 14,4 karatov

$4 \cdot 875 + 6 \cdot 800 + 5 \cdot 650 + 600x = (15 + x) \cdot 750$
$3500 + 4800 + 3250 + 600x = 11250 + 750x$
$x = 2\,\mathrm{g}$

b)

875	150	$6x$	300 g
800	100	$4x$	200 g
750			
650	50	$2x$	100 g
600	125	$5x$	250 g

$17x = 850; \quad x = 50$

□ 2. skupina (višja stopnja zahtevnosti)

1. a) $p = \dfrac{131{,}25 \cdot 1200}{15000 \cdot 3} = 3{,}50\,\%$ p. a.

b) $m = \dfrac{325 \cdot 1200}{3{,}25 \cdot 15000} = 8$ mesecev

c) $p^* = \dfrac{150 \cdot 1200}{3 \cdot 15000} = 4{,}00\,\%; \quad p^{**} = \dfrac{0{,}75 \cdot 100}{3{,}25} = 23{,}08\,\%$

2. a) $x = 4000 \cdot \left(1 + \dfrac{9 \cdot 5}{100}\right) - 2500 \cdot \left(1 + \dfrac{6 \cdot 5}{100}\right) - 2000 \cdot \left(1 + \dfrac{4 \cdot 5}{100}\right) =$

$= 150{,}00$ DE

b) $r_1 = 1{,}005; \qquad r_2 = 1{,}02$

$$G_n = ((4000 \cdot r_1^{36} - 2500) \cdot r_2^8 - 2000) \cdot r_2^{16} = 932,48 \text{ DE}$$

c) $r_1 = 1{,}012272234; \qquad p_2 = 5 \cdot 1{,}15 = 5{,}75\,\% \longrightarrow r_2 = 1{,}009361486$

$$G_n = ((4000 \cdot r_1^{12} - 2500) \cdot r_1^8 - 2000) \cdot r_1^4 \cdot r_2^{18} = 433{,}21 \text{ DE}$$

Račun se lahko v celoti izvede z letno kapitalizacijo $m = 1$.

$r_1 = 1{,}05; \qquad p_2 = 5 \cdot 1{,}15 = 5{,}75\,\% \longrightarrow r_2 = 1{,}0575$

$$G_n = ((4000 \cdot r_1^3 - 2500) \cdot r_1^2 - 2000) \cdot r_1 \cdot r_2^3 = 433{,}21 \text{ DE}$$

3. a) $G_n = 1{,}70 \cdot 50000 = 85000; \qquad M = 12$

$$\pi = \left(1 - \sqrt[n\cdot M]{\frac{G_0}{G_n}}\right) \cdot 100 \cdot M = \left(1 - \sqrt[13\cdot 12]{\frac{50000}{85000}}\right) \cdot 100 \cdot 12 = 4{,}07\,\%$$

b) $\rho_d = \dfrac{100}{100 - 0,04} = 1{,}00040016; \quad n = \dfrac{\log \frac{89000}{85000}}{365 \cdot \log \rho_d} = 0{,}315$ let

c) $\rho_2 = \dfrac{100}{100 - 3} = 1{,}030927835; \quad \pi_1 = \left(1 - \sqrt[5]{\dfrac{50000}{73000 \cdot \frac{1}{\rho_2^8}}}\right) \cdot 100 = 2{,}66\,\%$

ali

$50000 \cdot \rho_1^5 \cdot \rho_2^8 = 73000; \quad \rho_2 = \sqrt[8]{\dfrac{73000}{50000 \cdot (\frac{100}{100-3})^5}} = 1{,}027319061$

$$\pi = \frac{100 \cdot (\rho - 1)}{\rho} = 2{,}66\,\%$$

4. a) $r = 1{,}01125; \quad S_n = 60 \cdot \dfrac{r^{20} - 1}{r - 1} = 1.337{,}34$ EUR

b) $r = 1{,}003674809; \quad S_n = 60 \cdot \dfrac{r^{60} - 1}{r^3 - 1} = 1.334{,}92$ EUR

$$p^* = \frac{(1337{,}34 - 1334{,}92)}{1337{,}34} \cdot 100 = 0{,}18\,\% \text{ (zmanjšanje)}$$

b) $p = 5\,\%, m = 2 \longrightarrow r = 1{,}025$

$$S_n = 500 \cdot r^9 + 100 \cdot r \cdot \frac{r^8 - 1}{r - 1} = 1.519{,}88 \text{ EUR}$$

■ Rešitve nalog z državnega tekmovanja iz znanja poslovne matematike – 2006/2007

□ 1. skupina (nižja stopnja zahtevnosti)

1. a)

150 šivilj $\uparrow$	$\downarrow$ 4 dni	8 h/dan	$\uparrow$ 2600 zaves	$\uparrow$ 2,4 m dolge	$\uparrow$ 2 m široke
x	5	8	3800	3	2,3

Naloga je lahko rešena tudi na druge možne načine.

$$x = \frac{50 \cdot 4 \cdot 3800 \cdot 3 \cdot 2{,}3}{5 \cdot 2600 \cdot 2{,}4 \cdot 2} = 84 \text{ šivilj}$$

$84 - 50 = 34$ šivilj dodatno

b) $50 \cdot 14 = 50 \cdot 6 + 40x; \quad x = 10$

$6 + 10 = 16$ dni

c)

50 šivilj	$\uparrow$ 2600 zaves	$\downarrow$ 100 %
50	x	120 %

$x = 2167$ zaves

2. a)

x USD s str.	1 at
1 at	907,185 kg
1000 kg	1 t
1 t	21000 SEK
10,3533 SEK	1 USD
100 USD	96 USD s str. (popust)
100 USD	130 USD s str.

$$x = \frac{1 \cdot 907{,}185 \cdot 1 \cdot 21000 \cdot 1 \cdot 96 \cdot 130}{1 \cdot 1000 \cdot 1 \cdot 10{,}3533 \cdot 100 \cdot 100} = 2296{,}42 \text{ USD/at}$$

b)

x USD s str.	50 t
1 t	21000 SEK
10,3533 SEK	1 USD
100 USD	96 USD s str. (popust)
100 USD	91 USD s trans. str.
1000 USD	995 USD s takso

$x = 88.154,85$ USD/50 t

3. a) $\dfrac{6 \cdot 4}{5} = 4{,}8\,\text{kg} = 480\,\text{dag}$ moke za piškote

čokoladni p.	x	$= 112{,}5\,\text{g}$
figovi p.	$x + 10$	$= 122{,}5\,\text{g}$
orehovi p.	$2(x + 10)$	$= 245\,\text{g}$

$4x + 30 = 480; \quad x = 112,5$

b) $1/5 = 120\,\text{dag}$

čokoladna t.	$2x$	$= 60\,\text{dag} \Longrightarrow 30\,\text{dag}$ / eno čokoladno t.
orehova t.	$(x + 10)/2$	
sadna t.	$x + 10$	

$$2x + \frac{x + 10}{2} + x + 10 = 120; \quad x = 30$$

c) **Odgovor:** 8 otrok

4. a) Število vrat v 1. trimesečju: 123.

$$\frac{123}{110} \cdot 100 = 111,82$$

Odgovor: Dejanska proizvodnja je za 11,82 % večja od načrtovane proizvodnje.

b) 123 .... 92 %
x .... 100 %

$$x = \frac{123 \cdot 100}{92} = 133,7$$

c) **Odgovor:** Načrtovana proizvodnja bi bila 134 kosov.

Julij	40
Avgust	44
September	41
Oktober	50
November	40
December	42

Odgovor: V oktobru so izdelali 50 vrat.

□ 2. skupina (višja stopnja zahtevnosti)

1. a) $G^+ = G + \frac{G \cdot p \cdot m}{1200}$; $\quad G^+ = \frac{3320}{2} \cdot \left(1 + \frac{4{,}5 \cdot 8}{1200}\right) = 1.709{,}80$ EUR

b) $d = \frac{36500 \cdot o}{G \cdot p}$; $\quad d = \frac{(1713{,}42 - 1660) \cdot 36500}{1660 \cdot 4{,}5} = 261$ dni

Datum plačila je 19. 3. 2007, kar pomeni 18 dni kasneje od prvotno dogovorjenega roka.

c) $G = \frac{1200 \cdot G^+}{1200 + P \cdot m}$; $\quad G = \frac{3450 \cdot 1200}{1200 + 8 \cdot 5} = 3.338{,}71$ EUR

2. a) $r_1 = 1{,}00327374$, $\quad r_2 = 1{,}003594736$

$$p = \left(\sqrt[\frac{n}{M}]{\frac{G_n}{G_0 \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}} - 1\right) \cdot 100;$$

$$p = \left(\sqrt[\frac{2}{12}]{\frac{1840}{1800 \cdot r_1^2 \cdot r_2^2}} - 1\right) \cdot 100 = 5{,}09\,\%$$

ali

$1800 \cdot \sqrt[12]{1{,}04^2} \cdot \sqrt[12]{1{,}044^2} \cdot \sqrt[12]{r^2} = 1840$; $\quad r = 1{,}05085769$; $\quad p = 5{,}09\,\%$

b) $r = 1{,}015; \quad G_n = 1800 \cdot r^3 = 1.882{,}22$ EUR

c) $r = 1{,}025670512; \quad n = \dfrac{\log \frac{(1800+243{,}20)}{1800}}{2 \cdot \log r} = 2{,}5$ let

ali

$1800 \cdot \sqrt[2]{1{,}052^n} = 2.043{,}20; \quad n = 5$ polletij oz. 2,5 let

3. a) prva 3 leta: $\rho_1 = 1{,}032524522$; naslednjih 5 let: $\rho_2 = 1{,}031991744$

$$G_2 = \frac{5000 - 2000 \cdot \rho_1^3 \cdot \rho_2^5}{\rho_2^5} = 2.070{,}02 \text{ EUR}$$

ali

$$G_3 = 2.000 \cdot 1{,}032524522^3 = 2.201{,}56 \text{ EUR}$$

$$G_0 = \frac{5.000}{1{,}031991744^5} = 4.271{,}58 \text{ EUR}$$

$$\Delta = 2.070{,}02 \text{ EUR}$$

b) prva 3 leta: $r_1 = 1{,}0315$; naslednjih 5 let: $r_2 = 1{,}031$

$$G_2 = \frac{5000 - 2000 \cdot r_1^3 \cdot r_2^5}{r_2^5} = 2.097{,}15 \text{ EUR}$$

ali

$$G_3 = 2.000 \cdot 1{,}0315^3 = 2.195{,}02 \text{ EUR}$$

$$G_0 = \frac{5.000}{1{,}0315^5} = 4.292{,}17 \text{ EUR}$$

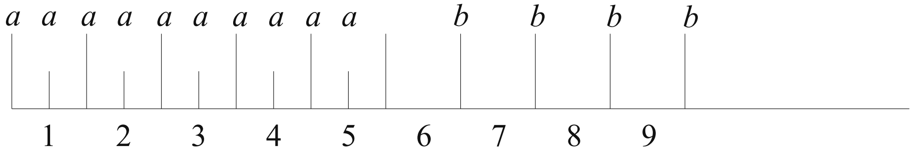
$$\Delta = 2.097{,}15 \text{ EUR}$$

c) $\bar{r} = \sqrt[n]{r_1^3 \cdot r_2^5}; \quad \bar{r} = \sqrt[8]{1{,}0315^3 \cdot 1{,}031^5} = 1{,}03119; \quad \bar{p} = 3{,}119\,\%$

ali

$$\bar{r} = (\sqrt[8]{1{,}0315^3 \cdot 1{,}031^5} - 1) \cdot 100 = 1{,}03119; \quad \bar{p} = 3{,}119\,\%$$

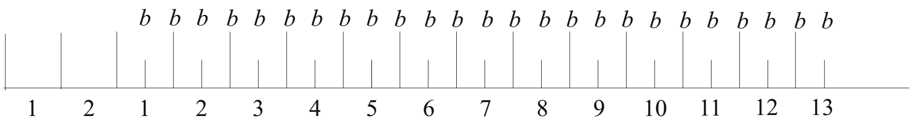
4. a)



$$r = 1{,}002625$$

$$a_1 = \frac{2000 \cdot \frac{1}{r^{48}} \cdot \frac{r^{48}-1}{r^{12}-1}}{r^6 \cdot \frac{r^{60}-1}{r^6-1}} = 677{,}94 \text{ EUR}$$

b)



$$r = 1{,}01106499$$

$$a_1 = \frac{10000}{\frac{1}{r^{58}} \cdot \frac{r^{50}-1}{r^2-1}} = 574{,}24 \text{ EUR}$$

■ Rešitve nalog 28. Mednarodnega matematičnega tekmovanja mest – Jesenski krog

□ Prva skupina (prvi del)

1. Dokažimo, da je vsota števil v Marijini beležnici enaka produktu mn. Dokazujmo z indukcijo na število korakov k, ki jih Marija naredi, preden se na tabli pojavi število 0. Če je $k = 1$, velja $m = n$, zato Marija v beležnico vpiše le število $m^2 = mn$. S tem je trditev dokazana za $k = 1$. Denimo, da trditev velja za nek $k \geq 1$ in naj bo $m < n$. Opazujmo primer, ko Marija v beležnico vpiše $k + 1$ števil. V prvem koraku Marija vpiše število m^2, na tabli pa sta tedaj števili m in $n - m$. Marija naredi do konca še k korakov, zato lahko po indukcijski prepostavki sklepamo, da je vsota števil v zadnjih k korakih enaka $m(n - m)$. Skupno je vsota števil torej enaka $m^2 + m(n - m) = mn$, torej trditev velja tudi za $k + 1$ korakov.

2. a) Vsako od oseb najprej vprašamo ali je omahljivec. Ker bosta resnicoljub in lažnivec odgovorila različno, bomo dobili par enakih odgovorov in en nasprotni odgovor. Če je nasprotni odgovor nikalen, je tako odgovoril resnicoljub, če je pritrdilen, pa je tako odgovoril lažnivec. V obeh primerih lahko iz odgovorov resnicoljuba ali lažnivca odkrijemo identiteto ostalih dveh oseb.

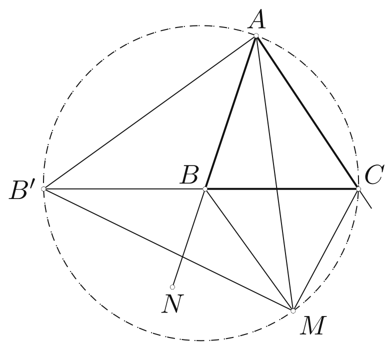
   b) Če prvi omahljivec vsakič pove resnico, drugi omahljivec pa se vsakič zlaže, resnicoljuba ne bomo mogli ločiti od prvega omahljivca, prav tako pa ne bomo razlikovali med drugim omahljivcem in lažnivcem.

3. Denimo, da lahko neko število zapišemo v obliki $k^2 - l^2 = (k + l)(k - l)$, kjer sta k in l naravni števili. Če sta števlili k in l obe lihi ali pa obe sodi, je produkt $(k + l)(k - l)$ deljiv s 4, v nasprotem primeru pa je produkt $(k + l)(k - l)$ liho število. Velja tudi obratno: Vsako število oblike $4p$ lahko zapišemo kot $4p = (p + 1)^2 - (p - 1)^2$, vsako liho število $2p + 1$ pa kot $2p + 1 = (p + 1)^2 - p^2$. Od tod sledi, da naravnega števila ni možno zapisati kot razliko dveh popolnih kvadratov natanko tedaj, ko je oblike $4p - 2$ za neko naravno število p. Produkt dveh naravnih števil je oblike $4p - 2$ natanko tedaj ko je en faktor liho število, drugi faktor pa oblike $4q - 2$.

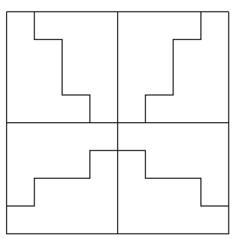
   a) Denimo, da je sodo mnogo števil na tabli oblike $4p - 2$. Potem obstaja vsaj eno število k, ki ni te oblike. Tedaj zbrišimo število k. V primeru, da je na tabli liho mnogo števil oblike $4p - 2$, lahko zbrišemo eno od teh števil. V obeh primerih med preostalimi 2006 števili na tabli ne bo natanko enega števila oblike $4p - 2$, torej bo produkt teh števil možno izraziti v željeni obliki.

b) Če je na tabli poleg števila 2006 še kako število oblike $4p-2$, lahko s table namesto 2006 zbrišemo katerokoli izmed ostalih 2005 števil tako, da produkt števil na tabli ne bo oblike $4q-2$. Od tod sledi, da je 2006 edino število, ki ga v tem primeru lahko zbrišemo s table.

4. Podaljšajmo stranico AB od oglišča B do neke točke N. Velja $\angle NBB' = \angle ABC$ in $\angle B'BM = \angle CBM$. Od tod sledi, da je $\angle BB'M = \angle ABM$. Ker velja $|BB'| = |BA|$ in $|BM| = |BM|$, sta trikotnika $B'BM$ in ABM skladna, torej je $\angle MB'C = \angle MAN$. Točka M je središče pričrtane krožnice trikotnika ABC, zato velja še $\angle MAC = \angle MAN$. Od tod sledi, da je $\angle MB'C = \angle MAC$, torej so točke A, C, M in B' res konciklične.



5. Največje možno število je $n = 8$, saj iz zahteve, da so vse stranice poligonov vzporedne stranicam kvadrata, sledi, da vse kopije poligona dobimo, če izbrani poligon vrtimo (največ štiri možnosti) in zrcalimo (največ štiri možnosti). Iz slike vidimo, da lahko mejo $n = 8$ tudi zares dosežemo.

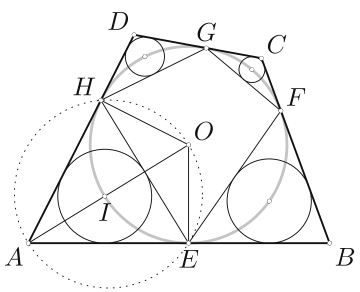


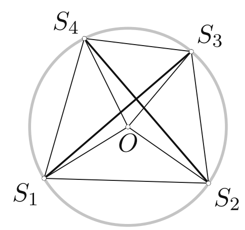
□ Druga skupina (prvi del)

1. Dokažimo, da je vsota števil v Marijini beležnici enaka produktu xyz. Dokazujmo z indukcijo na število korakov k, ki jih Marija porabi, dokler se na tabli ne pojavi število 0. Za $k = 1$, je vsaj eno od števil x, y, z enako 1.

Privzemimo, da je $z = 1$. Tedaj Marija v beležnico zapiše le število $xy = xyz$, torej trditev za $k = 1$ velja. Denimo, da trditev velja za nek $k \geq 1$ in Marija po $k+1$ korakih na tablo zapiše število 0. Zaradi simetrije lahko privzamemo, da Marija v prvem koraku v beležnico zapiše število xy in število z na tabli zamenja s številom $z - 1$. Po indukcijski predpostavki je vsota števil, ki jih Marija zapiše v beležnico v nadaljnjih k korakih enaka $xy(z-1)$, torej je skupna vsota enaka $xy + xy(z-1) = xyz$, s čimer je dokaz končan.

2. Naj bo O središče štirikotniku $ABCD$ včrtane krožnice k in I presečišče daljice AO in krožnice k. Točke, kjer se krožnica k dotika stranic AB, BC, CD in DA, označimo zapored z E, F, G in H ter pišimo $\angle AOH = \angle AOE = 2\alpha$. Ker velja $\angle AH = 90^\circ = \angle AEO$, so točke A, E, O in H konciklične, od koder dobimo $\angle AHE = \angle AOE = 2\alpha$. Velja $\angle OAH = 180^\circ - \angle AOH - \angle AHO = 90^\circ - 2\alpha$, od koder sledi $\angle OIH = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle IOH) = 90^\circ - \alpha$, saj je $|OH| = |OI|$. Sledi $\angle AHI = \angle OIH - \angle OAH = \alpha = \frac{1}{2}\angle AHE$, torej je I središče trikotniku AHE včrtane krožnice. Ugotovili smo, da točke S_1, S_2, S_3 in S_4 ležijo na krožnici k. Naj bo $\angle BOE = \angle BOF = 2\beta$, $\angle COF = \angle COG = 2\gamma$ in $\angle DOG = \angle DOH = 2\delta$. Tedaj velja $\angle S_1OS_2 + \angle S_3OS_4 = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$, kar pomeni $\angle S_1S_4S_2 + \angle S_3S_1S_4 = \frac{1}{2}(\angle S_1OS_2 + \angle S_3OS_4) = 90^\circ$. Torej sta daljici S_1S_3 in S_2S_4 res pravokotni.





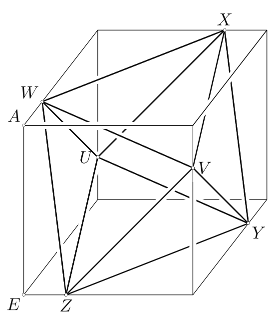
3. Dokazujmo s protislovjem! Denimo, da takega para polj ne moremo najti in vsako izmed števil v tabeli zamenjajmo z njegovim ostankom pri deljenju s 4. Na ta način dobimo tabelo, v kateri se vsako izmed števil $0, 1, 2$ in 3 pojavi na 1003^2 poljih. Razrežimo dano tabelo na 1003^2 kvadratov velikosti 2×2, ki združujejo po 4 polja s skupnim ogliščem. Vsota v nobenem paru polj, ki sta bodisi sosednji, bodisi imata skupno oglišče, ni deljiva s 4. Torej imamo v vsakem kvadratu velikosti 2×2 kvečjemu eno število 0 in kvečjemu na eno število 2. Ker število polj na katerih stoji 0 (oziroma 2) sovpada s številom kvadratov velikosti 2×2, imamo v vsakem kvadratu velikosti 2×2 natanko eno število 0 in natanko eno število 2. Kvadrat Q velikosti 2×2 ne sme vsebovati para $1, 3$, zato je v Q bodisi par $3, 3$, bodisi par $1, 1$. Od tod

sklepamo, da je v celotni tabeli sodo mnogo števil 1, kar pa ni res, saj je v tabeli na natanko 1003^2 poljih zapisano število 1.

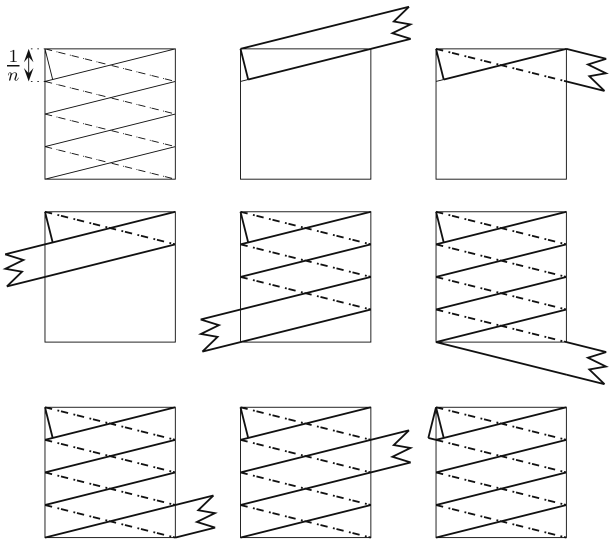
4. Naj bo $a = a_1$ začetni člen in d razlika danega aritmetičnega zaporedja ter $b = b_1$ začetni člen in r kvocient danega geometrijskega zaporedja. Če je $d = 0$, je $r = 1$. Če je $d < 0$, pa so vsi členi aritmetičnega zaporedja od nekega indekas dalje negativni. Ker nobeno geometrijsko zaporedje realnih števil ne more imeti le končno mnogo pozitivnih členov, lahko privzamemo, da je $d > 0$ in zato tudi $r > 1$. Tedaj za neka naravna števila i, j in k velja $b = a + id$, $br = a + jd$ in $br^2 = a + kd$, pri čemer je $0 \leq j < i < k$.

   Od tod sledi $b(r - 1) = (j - i)d$ in $br(r - 1) = (k - j)d$, torej je $r = \frac{k-j}{j-i}$ racionalno število. Če označimo $t = \frac{a}{d}$, iz $a + jd = br = r(a + id)$ dobimo $t + j = rt + ri$, od koder sledi, da je tudi t racionalno število. Delimo vse člene obeh zaporedij z d. Dobljeni zaporedji še vedno ustrezata začetnim zahtevam naloge, pri čemer ima novo aritmetično zaporedje začetni člen t in razliko 1, novo geometrijsko zaporedje pa se začne s členom $\frac{b}{d}$ in ima kvocient r. Naj bo $t = \frac{m}{n}$, kjer sta m in n tuji si naravni števili. Tedaj so vsi členi novega aritmetičnega zaporedja oblike $\frac{m+kn}{n}$ za neko nenegativno celo število k. Denimo, da kvocient r ni celo število in naj bo p neko praštevilo, ki nastopa v imenovalcu okrajšane oblike števila r. Tedaj ima za neko dovolj veliko naravno število l člen geometrijskega zaporedja $\frac{b}{d}r^l$ v imenovalcu okrajšane oblike več prafaktorjev p kot imenovalec poljubnega člena $\frac{m+kn}{n}$ aritmetičnega zaporedja, kar je v nasprotju s predpostavkami.

5. To je možno storiti! Naj ima dana kocka rob dolžine 4. Naj bo vsaka izmed točk U, V, W, X, Y in Z na sliki od najbližjega oglišča kocke oddaljena za 1. Tedaj sta UWX in VYZ enakostranična trikotnika s stranico dolžine $3\sqrt{2}$. Velja $\angle EAW = 90^\circ = \angle WEZ$, od koder dobimo $|WZ| = \sqrt{|EZ|^2 + |EA|^2 + |WA|^2} = 3\sqrt{2}$. Iz simetrije sledi, da imajo vse daljice WV, XV, XY, UY in UZ enako dolžino, kar pomeni, da je $UVWXYZ$ res pravilni oktaeder.



5. Rešitev točke b) seveda zajema tudi rešitev točke a), zato konstruirajmo neskončno družino ovojev. Naj bo n naravno število in O_n pravokotnik velikosti $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \times 2\sqrt{n^2+1}$. Naslednje zaporedje slik prikazuje, kako lahko sliko ovijemo z ovojem oblike O_n



6. Za naravno število n označimo

$$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{a_n}{b_n}.$$

Naj bo $p > 2$ praštevilo in $n = p(p-1)-1$. Dokažimo, da število b_{n+1} tedaj ni deljivo s p. V vsoti S_{n+1} so s p deljivi le imenovalci ulomkov $\frac{1}{p}, \frac{1}{2p}, \ldots \frac{1}{(p-1)p}$, ki jih lahko združimo v pare oblike

$$\frac{1}{kp} + \frac{1}{(p-k)p} = \frac{1}{k(p-k)},$$

kjer je $k = 1, \ldots, \frac{p-1}{2}$. Najmanjši skupni imenovalec vsote S_n tako ne vsebuje prafaktorja p. Če lahko ulomek

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{1}{(p-1)p} = \frac{a_{n+1}(p-1)p - b_{n+1}}{b_{n+1}(p-1)p}$$

krajšamo s faktorjem d, sta z d deljivi števili $a_{n+1}(p-1)p - b_{n+1}$ in $b_{n+1}(p-1)p$. Od tod sledi, da d deli razliko $a_{n+1}(p-1)^2p^2 - b_{n+1}(p-1)p$. Ker je razlika $a_{n+1}(p-1)p - b_{n+1}$ deljiva z d in število b_{n+1} ni deljivo s p, tudi d ni deljivo s p. Števili d in a_{n+1} sta si tuji, saj bi v nasportnem primeru njun skupni faktor delil tudi b_{n+1}, kar pa po predpostavki ni možno, ker je ulomek $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ okrajšan. Ugotovimo torej, da d deli $(p-1)^2$, od koder sledi $d \leq (p-1)^2$ in zato

$$b_n \geq \frac{b_{n+1}(p-1)p}{(p-1)^2} = \frac{b_{n+1}p}{(p-1)} > b_{n+1}.$$

Ker je lihih praštevil neskončno mnogo, je s tem trditev naloge dokazana.

7. Dokažimo, da lahko igralec Niko, ki pozna vrstni red kart, drugim razkrije ta vrstni red že s 34 vprašanji. V prvem vprašanju si Niko izbere zgornjo in spodnjo karto kupčka. Odgovor, ki se seveda glasi '50' ostalim igralcem razkrije kateri karti sta na dnu in vrhu kupčka. Označimo eno izmed teh kart z 1 in drugo z 52 vse ostale karte pa si mislimo označene zapored s preostalimi števili $2, 3, \ldots, 51$. V naslednjem vprašanju se Niko pozanima o karti med kartama 1 in 3. Odgovor tako razkrije karto 3. Karto številka 2 Niko namerno preskoči, tako karto pa bomo v nadaljevanju imenovali *prostor*. V nadaljevanju Niko postavlja pare vprašanj. V prvem vprašanju para se pozanima o kartah, ki ju še ni omenil in sta si najbolj oddaljeni glede na dano oštevilčenje. Prva karta v tem vprašanju je prostor drugo pa imenujmo *antiprostor*. Karto poleg antiprostora definirajmo kot novi prostor. V drugem vprašanju si igralec izbere karti poleg prostora. Tako si igralec v drugem paru vprašanj najprej izbere karti $(2, 51)$, nato pa karti $(49, 51)$. Naslednji dve vprašanji se nanašata na para $(50, 4)$ in $(4, 6)$, zatem na para $(5, 48)$ in $(48, 46)$ in tako dalje. Po prvem paru vprašanj ostali igralci poznajo naslednje karte, ki so krepkeje natisnjene:

$$\mathbf{1}\ 2\ \mathbf{3}\ 4\ 5\ 6\ \ldots\ 48\ 49\ 50\ 51\ \mathbf{52}$$

Prvi par vprašanj nam določi prve tri karte, po drugem paru vprašanj pa sta možni dve razvrstitvi. Pravo razvrstitev imenujmo *glavni primer*, drugo pa *stranski primer*. Po drugem paru vprašanj je položaj eden od naslednjih. Karte, ki jih je Niko omenil, ni pa še enolično določena njihova vrednost, so podčrtane:

$$\mathbf{1}\ \underline{2}\ \mathbf{3}\ 4\ 5\ 6\ \ldots\ 48\ \underline{49}\ 50\ \underline{51}\ \mathbf{52}\ \text{(glavni primer)}$$

$$\mathbf{1}\ \underline{2}\ \mathbf{3}\ \underline{4}\ 5\ 6\ \ldots\ 48\ 49\ 50\ \underline{51}\ \mathbf{52}\ \text{(stranski primer)}$$

Opazimo lahko, da je največja razdalja med neklicanima kartama v stranskem primeru manjša kot v glavnem, odgovor na naseldnje vprašanje pa stranski primer izloči. Peto vprašanje, ki se nanaša na par $(50, 4)$ ima odgovor '45', ki izloči stranski primer, saj bi bil v tem primeru odgovor '44'. Po petih vprašanjih ostali igralci torej poznajo karte kot kaže naslednja shema:

$$\mathbf{1}\ \mathbf{2}\ \mathbf{3}\ \underline{4}\ 5\ 6\ \ldots\ 48\ \mathbf{49}\ \underline{50}\ \mathbf{51}\ \mathbf{52}$$

Lahko se prepričamo, da po 33 vprašanjih ostali igralci poznajo naslednje karte:

$$\mathbf{1}\ldots\mathbf{24}\ \underline{25}\ 26\ 27\ \mathbf{28}\ \underline{29}\ \mathbf{30}\ldots\mathbf{52}$$

Zadnje vprašanje se nanaša na par $(25, 26)$. Odgovor '0' izloči stranski primer, karta 27 pa je določna kot edina preostala karta.

Dokažimo sedaj, da samo s 33 vprašanji ne moremo razkriti vrstnega reda kart. Razdelimo karte na začetku na 52 skupin, ki vsebujejo vsaka po eno karto. Če se Nikovo vprašanje nanaša na karti iz različnih dveh skupin, ti dve skupini združimo v eno skupino. Po vsakem vprašanju se torej število skupin zmanjša kvečjemu za eno, zato je po 33 vprašanjih število skupin vsaj $52 - 33 = 19$. Med temi skupinami je kvečjemu 17 takih, ki vsebujejo vsaj tri karte, kar pomeni, da najdemo bodisi dve skupini z eno samo karto, bodisi obstaja skupina, ki vsebuje natanko dve karti. V obeh primerih lahko zamenjamo karti, ki sta bodisi vsaka v svoji skupini z eno karto, bodisi v skupni skupini z dvema kartama, pa se odgovori delilca kart ne spremenijo. To pomeni, da po 33 vprašanjih vrstni red kart še ni enolično določen.

□ Druga skupina (drugi del)

4. Nobene prizme ne moremo razrezati na opisani način, saj skupna prostornina piramid, ki imajo osnovnico na spodnji osnovnici prizme ne more presegati tretjine prostornine prizme, enako pa velja tudi za piramide, katerih osnovnice ležijo na gornji osnovni ploskvi prizme. Prostornina vseh piramid tako ne more preseči dveh tretjin prostornine prizme, kar pomeni, da piramide ne napolnijo celotne prizme.

5. Glej rešitev 6. naloge za prvo skupino.

6. Karte razvrstimo v tabelo velikosti 4×13, katere vrstice ustrezajo barvi, stolpci pa vrednosti karte. Trdnjava naj začne svoj obhod v spodnjem levem vogalu tabele, ki naj ustreza pikovemu asu, se ustavi na vsakem polju natanko enkrat in se nazadnje vrne v svoje izhodišče. Trdnjava se lahko pomika s polja na polje vodoravno ali navpično. Jasno je, da vsaka pravilna ureditev kompleta kart ustreza natanko enemu takemu obhodu trdnjave in obratno. Obhod trdnjave določimo tako, da v polja zapišemo števila $1, 2, \ldots 52$, pri čemer se trdnjava v k-tem koraku ustavi na polju z oznako k. Vsak obhod se tako začne in konča na polju z oznako 1, polji z oznakama k in $k+1$ pa za vsak k ležita bodisi v skupni vrstici, bodisi v skupnem stolpcu.

a) Opazujmo nek obhod trdnjave in fiksirajmo oznake v prvem stolpcu. Če ostalih 12 stolpcev preuredimo dobimo oznake, ki ustrezajo drugim obhodom. Ker je vseh takih možnih preureditev ravno 12!, je število vseh obhodov deljivo z 12!.

b) Ker sta si števili 12! in 13 tuji, zadošča dokazati, da je število različnih obhodov deljivo s 13. Tabelo zlepimo vzdolž stranic prvega in zadnjega stolpca. Sedaj lahko dobljeni plašč valja zavrtimo v 12 dodatnih položajev, ki vsak ustreza nekemu obhodu z začetkom v polju z oznako $k > 1$. Običajni obhod z začetkom v 1 lahko iz takega obhoda dobimo, če oznake na vseh poljih zmanjšamo za $k-1$, pri čemer negativno oznako $m-k+1$ spremenimo v $m-k+1+52$. Denimo, da pri opisanem postopku po neki rotaciji R_0 dobimo prvotni obhod O_0. Ker je 13 praštevilo, lahko vsako drugo rotacijo dobimo tako, da nakajkrat ponovimo rotacijo R_0. Od tod sledi, da vsaka rotacija ohrani obhod O_0. Izberimo vodoravni premik $m \to m + d$ v obhodu O_0. Iz gornjega sledi, da imamo tem obhodu tudi premike $m+d \to m+2d, m+2d \to m + 3d, \ldots, m + 12d \to m + 13d$ (vse gledamo po modulu 52). Ker je 13 praštevilo, so števila $m, m + d, m + 2d, \ldots, m + 12d$ različna števila v neki vrstici obhoda O_0, torej premiki iz polj te vrstice vodijo v neko polje te vrstice, kar pomeni, da v obhodu O_0 ne zamenjamo vrstice. Dobili smo protislovje, s čimer je dokaz končan.

7. a) Iz neenačb

$$4(x_1^2 + \cdots + x_k^2) < 2(x_1 + ... + x_k) > x_1^3 + ... + x_k^3$$

sledi, da za vsaj en i velja $4x_i^2 < x_i^3$. Predpostavimo, da velja $4x_1^2 < x_1^3$. Od tod sledi $x_1 > 4$, zato je

$$(2x_2^2 - x_2) + \cdots + (2x_k^2 - x_k) < 4 - 2 \cdot 4^2 = -28.$$

Lahko se prepričamo, da je najmanjša vrednost izraza $2x^2 - x$ enaka $-\frac{1}{8}$, od koder sledi $k - 1 > 8 \cdot 28 > 50$.

b) Naj bo $k = 2501$ in $x_1 = 10$ ter $x_2 = x_3 = \cdots = x_{2501} = \frac{1}{10}$. Tedaj je

$$x_1^2 + \cdots + x_{2501}^2 = 100 + 25 = 125,$$

$$x_1 + \cdots + x_{2501} = 10 + 250 = 260$$

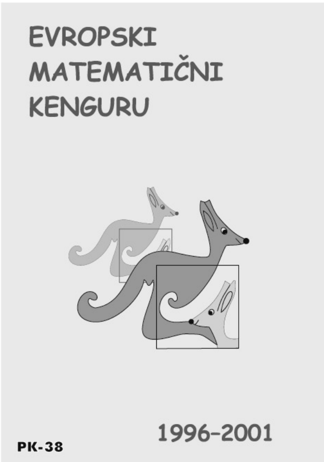
in

$$x_1^3 + \cdots + x_{2501}^3 > 1000.$$

Gregor Cigler

Zbirke nalog s tekmovanj

Vsako šolsko leto na šolah potekajo različna tekmovanja v znanju. Za lažjo pripravo vam ponujamo več zbirk tekmovalnih nalog z rešitvami.



EVROPSKI MATEMATIČNI KENGURU

1996–2001

več kot 900 nalog s tekmovanja

+ dodane naloge z dijaških šolskih tekmovanj v matematiki 1993–1995

264 strani
format 16,5 × 23,5 cm
mehka vezava

15,99 EUR

EVROPSKI MATEMATIČNI KENGURU

2002–2004

več kot 500 nalog s tekmovanja

+ dodanih še 160 novih nalog

208 strani
format 16,5 × 23,5 cm
mehka vezava

10,99 EUR

Poleg omenjenih dveh lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog različnih zahtevnosti za osnovnošolce in srednješolce s tekmovanj v znanju matematike, fizike, logike in računalništva. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite s popustom:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/tekmovanja/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.