Tekmovanja

51. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – Izbirno tekmovanje

1. letnik

1. Na ravnini sta narisani koncentrični krožnici s polmeroma 7 cm in 11 cm. Manjša krožnica razdeli tetivo večje krožnice na 3 enako dolge dele. Koliko je dolga ta tetiva?

2. Tine je bil na tekmovanju, na katerem bi moral rešiti 20 nalog. Za vsako pravilno rešeno nalogo je prejel 8 točk, za napačno rešitev pa so mu odšteli 5 točk. Za nalogo, ki je ni reševal, je prejel 0 točk. Izvedel je, da je zbral 13 točk. Koliko nalog je reševal?

3. Hipotenuza AB pravokotnega trikotnika ABC s pravim kotom pri C je dolga 1 dm, kot BAC pa je velik 30°. V notranjosti trikotnika je točka D, da velja $\sphericalangle BDC = 90°$ in $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DBA$. Naj bo E presečišče stranice AB in premice CD. Izračunaj dolžino daljice AE.

4. Dokaži neenakost
$$(ab+1)(a+b) \geq 4ab$$
za poljubni nenegativni realni števili a in b. Kdaj velja enakost?

5. Dolžina roba lesene kocke je naravno število, večje od 2. Kocko pobarvamo in jo nato razrežemo na enotske kocke. Število enotskih kock, ki imajo natanko dve pobarvani mejni ploskvi, je delitelj števila enotskih kock, ki nimajo nobene mejne ploskve pobarvane. Določi najmanjše naravno število, ki je lahko dolžina roba prvotne kocke.

□ 2. letnik

1. Dokaži, da vsota nobenih dveh naravnih števil ni enaka najmanjšemu skupnemu večkratniku teh dveh števil.

2. Reši sistem enačb

$$\begin{aligned} x + y^2 &= 1, \\ x^2 + y^3 &= 1. \end{aligned}$$

3. Kateta AC pravokotnega trikotnika ABC s pravim kotom pri C je dolga 1 dm, kot BAC pa je velik 30°. V notranjosti trikotnika je točka D, da velja $\sphericalangle BDC = 90°$ in $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DBA$. Naj bo F presečišče stranice AC in premice BD. Izračunaj dolžino daljice AF.

4. Naj bo a pozitivno realno število. Katero število je večje,

$$\sqrt{a+2007} - \sqrt{a+1004} \quad \text{ali} \quad \sqrt{a+1003} - \sqrt{a}?$$

5. Žan je sklenil, da bo vsakemu dvomestnemu številu priredil enomestno, in sicer le z množenjem števk. Za števili 91 in 66 je tako zapisal:

$$91 \xrightarrow{9\cdot 1} 9$$
$$66 \xrightarrow{6\cdot 6} 36 \xrightarrow{3\cdot 6} 18 \xrightarrow{1\cdot 8} 8$$

Kolikim dvomestnim številom je priredil število 0?

□ 3. letnik

1. Poišči vsa taka realna števila a, da je $\sqrt{7-a} + \sqrt{7+a}$ celo število.

2. Ploščina pravilnega večkotnika, ki je včrtan krogu s polmerom r, je enaka $3r^2$. Kateri pravilni večkotnik je to?

3. Naj bo E taka točka na stranici AB kvadrata $ABCD$, da je $|AE| = 3|EB|$, F pa taka točka na stranici DA, da je $|AF| = 5|FD|$. Označimo presečišče daljic DE in FC s K, presečišče DE in BF z L ter presečišče FB in EC z M. Naj bo p_1 vsota ploščin trikotnikov EML in DKC, p_2 pa vsota ploščin trikotnikov FLK in MBC. Določi razmerje $p_1 : p_2$.

4. Naj bodo a, b, c in d realna števila, večja od 1. Izračunaj vrednost izraza

$$a^{(\log_b c)-1}\, b^{(\log_c d)-1}\, c^{(\log_d a)-1}\, d^{(\log_a b)-1},$$

če veš, da je $\log_b a \cdot \log_d c = 1$.

5. Dolžine a, b in c robov lesenega kvadra so naravna števila, večja od 2, velja pa še $a = b$. Kvader pobarvamo in ga nato razrežemo na enotske kocke. Število enotskih kock, ki imajo natanko dve pobarvani mejni ploskvi, je za 16 večje od števila enotskih kock, ki nimajo nobene mejne ploskve pobarvane. Določi dolžine robov kvadra.

□ 4. letnik

1. Prvi člen neskončnega geometrijskega zaporedja z vsoto 3 je naravno število, količnik pa je enak obratni vrednosti celega števila. Poišči prvi člen in količnik tega zaporedja.

2. Za vsako naravno število n zapišemo vsoto $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ kot število v desetiškem sestavu. Z največ koliko ničlami se lahko končajo ta števila?

3. Naj bosta M in N presečišči simetral kotov $\sphericalangle ACB$ in $\sphericalangle CBA$ trikotnika ABC s trikotniku očrtano krožnico, E in F pa presečišči premice MN s stranico AB oziroma AC. Dokaži: če je $|ME| = |EF| = |FN|$, je trikotnik ABC enakostraničen.

4. Poišči vsa realna števila x, za katera je vrednost izraza

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} + \frac{2}{\pi} \cdot \arcsin \frac{x+1}{2}$$

celo število.

5. Vrtnar je gredico pravokotne oblike z diagonalama razdelil na 4 trikotnike. Na vsakem trikotniku bo posadil eno vrsto cvetlic, tako da bosta na trikotnikih, ki imata skupno stranico, posajeni različni vrsti cvetlic. Na voljo ima gerbere, hortenzije, lampijončke, perunike in žametnice. Na koliko načinov lahko posadi cvetlice?

■ 51. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

□ 1. letnik

1. Poišči vsa realna števila x, za katera velja

$$\left|\left|\left||x|-2\right|-20\right|-200\right|=2007.$$

2. Poišči vse pare naravnih števil m in n, katerih vsota je 2007, njun zmnožek pa je deljiv z 2007.

3. Označimo z D razpolovišče stranice AB ostrokotnega trikotnika ABC. Naj bosta A' in B' taki točki na daljicah AC in BC, da sta trikotnika ADA' in DBB' enakokraka s skupnim vrhom v D. Pokaži: če je premica CD pravokotna na premico $A'B'$, je trikotnik ABC enakokrak.

4. Poišči najmanjše naravno število n, za katero lahko brez prekrivanja pokrijemo tabelo razsežnosti $n \times n$ z enakim številom ploščic

 in .

□ 2. letnik

1. Poišči vse pare naravnih števil m in n, za katere ima kvadratna enačba

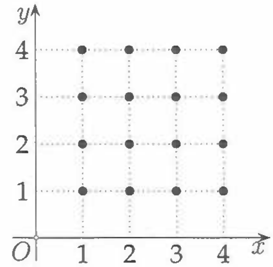
$$2007x^2+mnx+n=0$$

samo eno rešitev. Za vsak tak par rešitev tudi zapiši.

2. V trimestnem številu so stotice večje od desetic in desetice večje od enic. Če števke tega trimestnega števila zapišemo v obratnem vrstem redu in dobljeno število prištejemo prvotnemu, dobimo število, ki vsebuje samo lihe števke. Določi vsa trimestna števila, za katera to velja.

3. Dan je ostrokotni trikotnik ABC in središče njemu očrtane krožnice O. Naj bo O_1 točka na simetrali daljice AB, ki leži na nasprotnem bregu premice AB kot točka O. Označimo krožnico s središčem O_1 in polmerom AO_1 s $\mathcal{K}$. Naj premici CA in CB sekata krožnico $\mathcal{K}$ še v točkah A_1 in B_1. Pokaži: če se daljici A_1B in AB_1 sekata na trikotniku ABC očrtani krožnici, je štirikotnik AO_1BO tetiven.

4. V ravnini leži 16 črnih točk, kot prikazuje slika. Najmanj koliko izmed teh točk moramo pobarvati rdeče, da ne bo obstajal kvadrat z oglišči v preostalih črnih točkah in s stranicami, vzporednimi koordinatnima osema? Odgovor utemelji.



□ 3. letnik

1. Poišči vsa praštevila p, za katera je število $7^{p-2} + 9p^4$ popoln kvadrat.

2. Dokaži, da za nobeno realno število x ne velja

$$\frac{1}{9} < \frac{\tan 3x}{\tan 2x} \leq \frac{3}{2}.$$

3. Dan je paralelogram $ABCD$. Naj bo E razpolovišče daljice CD, F razpolovišče DA ter G razpolovišče AB. Trikotniku DFE očrtana krožnica se dotika daljice AB v točki G. Dokaži, da je $|AB| = \sqrt{2}|AD|$.

4. Poišči najmanjše naravno število n, za katero lahko brez prekrivanja pokrijemo tabelo razsežnosti $n \times n$ z enakim številom ploščic

 in .

□ 4. letnik

1. Dokaži, da za vsa realna števila x in y velja neenakost

$$\cos(x^2) + \cos(y^2) - \cos(xy) < 3.$$

2. Za celo število x velja

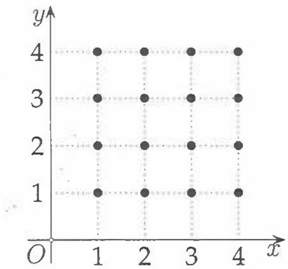
$$\left|\dots\left|\left|\,|x-1|-10\right|-10^2\right|-\dots-10^{2006}\right| = 10^{2007}.$$

Poišči stoto števko števila $|x|$.

3. Krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ s središčema O_1 in O_2 se sekata v točkah A in B. Razdalja med središčema je večja od polmerov obeh krožnic. Naj bosta C_1 in C_2 tisti presečišči premice O_1O_2 s krožnicama $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$, ki ne ležita na daljici O_1O_2. Označimo drugo presečišče premice C_2A in krožnice $\mathcal{K}_1$ z D_1, drugo presečišče premice C_1A in krožnice $\mathcal{K}_2$ pa z D_2.

Premici D_1B in D_2A se sekata v E, premici D_1A in D_2B pa v F. Pokaži: če je štirikotnik AO_1BO_2 tetiven, je tetiven tudi štirikotnik $AEBF$.

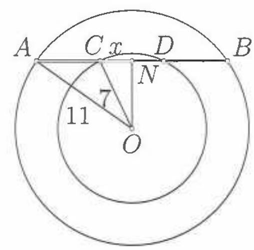
4. V ravnini leži 16 črnih točk, kot prikazuje slika. Najmanj koliko izmed teh točk moramo pobarvati rdeče, da ne bo obstajal kvadrat z oglišči v preostalih črnih točkah in s stranicami, katerih dolžine so naravna števila ali $\sqrt{2}$? Odgovor utemelji.



Rešitve nalog z 51. matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije – izbirno tekmovanje

1. letnik

I/1. Označimo krajišči tetive z A in B, presečišči tetive z manjšo krožnico pa s C in D. Povežimo točki A in C s središčem O krožnic. Narišimo še pravokotnico iz središča O na tetivo in označimo z N njeno nožišče. Vemo, da je $|AC| = |CD| = |DB|$ in da točka N razpolavlja daljico CD. Naj bo $|CN| = x$. Tedaj je $|AC| = 2x$. Po Pitagorovem izreku je $11^2 - (3x)^2 = 7^2 - x^2$, od tod pa dobimo $8x^2 = 72$. Ker nas zanima pozitivna rešitev, izberemo $x = 3$. Tetiva AB je dolga 18 cm.



Vpeljava 2 pravokotnih trikotnikov s skupno kateto (npr. AON in CON) po 1 točka
Zapisan pogoj $|AC| = |CD| = |DB|$ (ali ekvivalenten) .... 1 točka
Izražava dolžine $|ON|$ s pomočjo Pitagorovega izreka v AON ali CON ...... 1 točka
Enačba $11^2 - (3x)^2 = 7^2 - x^2$ in rešitev $x = 3$ .... 2 točki
Rešitev $|AB| = 18$ cm .... 1 točka

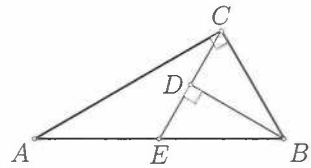
I/2. Denimo, da je pravilno rešil p nalog, napačno pa n nalog. Tedaj je $8p - 5n = 13$ in očitno mora biti n liho število. Ker je reševal 20 nalog, velja $p+n \leq 20$. Enačbo $8p-5n = 13$ lahko zapišemo v obliki $8p - 8 = 5 + 5n$ oz. $8(p-1) = 5(n+1)$. Torej mora biti število $n+1$ deljivo z 8 in je lahko zato le $n = 7$, saj mora biti $n \leq 20$ liho število. Pri $n = 7$ dobimo še $p = 6$.
Tine je na tekmovanju reševal 13 nalog, 6 jih je rešil pravilno, 7 pa napačno.

Zapis $8p - 5n = 13$ .... 2 točki
Ocena $p + n \leq 20$ (ali npr. $p + n + s = 20$, pri čemer s označuje število nalog, ki jih ni reševal) .... 1 točka

Ugotovitev, da $n = 7$ in $p = 6$ ustrezata dobljeni enačbi .... 1 točka
Preverjanje oziroma izločitev ostalih možnosti .... 2 točki
Odgovor 13 nalog .... 1 točka

I/3. Trikotnik ABC je polovica enakostraničnega trikotnika, zato v njem velja $|BC| = \frac{1}{2}|AB|$. Označimo $\sphericalangle ACD = \varphi$. Tedaj je $\sphericalangle DCB = \sphericalangle ACB - \sphericalangle ACD = \frac{\pi}{2} - \varphi$ in zato je

$$\sphericalangle CBD = \pi - \sphericalangle BDC - \sphericalangle DCB = \pi - \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \varphi) = \varphi.$$



Zaradi $\sphericalangle DBA = \sphericalangle ACD = \varphi$ je $60° = \sphericalangle CBA = \sphericalangle DBA + \sphericalangle CBD = 2\varphi$ in od tod $\varphi = 30°$. Ker je $\sphericalangle CBE = 60°$ in $\sphericalangle ECB = \sphericalangle DCB = \frac{\pi}{2} - \varphi = 60°$, je trikotnik EBC enakostraničen. Sledi $|EB| = |BC| = \frac{1}{2}|AB|$ in $|AE| = |AB| - |EB| = \frac{1}{2}|AB| = 5$ cm.

Ugotovitev $|BC| = \frac{1}{2}|AB|$ .... 2 točki
Izračun, da sta kota $\sphericalangle CBD$ in $\sphericalangle DBA$ enaka ter zato oba $30°$ .... 2 točki
Sklep, da je trikotnik EBC enakostraničen .... 2 točki
Sklep $|AE| = 5$ cm .... 1 točka

I/4.

1. način Dana neenakost je ekvivalentna neenakosti $a^2b + a + b + ab^2 - 4ab \geq 0$. Ker je

$$\begin{aligned} a^2b + a + b + ab^2 - 4ab &= a^2b - 2ab + b + ab^2 - 2ab + a = \\ &= b(a^2 - 2a + 1) + a(b^2 - 2b + 1) = b(a-1)^2 + a(b-1)^2 \end{aligned}$$

in sta $b(a-1)^2$ ter $a(b-1)^2$ nenegativna, je res $a^2b + a + b + ab^2 - 4ab \geq 0$.

Enakost velja natanko takrat, ko je $b(a-1)^2 = 0$ in $a(b-1)^2 = 0$, torej mora veljati $a = b = 0$ ali pa $a = b = 1$.

Ugotovitev, da neenakost velja za poseben primer (npr. $a = 0$ ali $b = 0$) ..... 1 točka
Zapis $a^2b + a + b + ab^2 - 4ab \geq 0$ .... 1 točka
Preoblikovanje izraza v $b(a-1)^2 + a(b-1)^2$ .... 2 točki
Sklep, da sta $b(a-1)^2$ in $a(b-1)^2$ nenegativna .... 1 točka
Enakost velja pri $a = b = 0$ in $a = b = 1$ .... po 1 točka

2. način Aritmetično geometrijska neenakost (na kratko: A-G neenakost) pove, da za nenegativni realni števili x in y velja neenakost $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ oziroma $x + y \geq 2\sqrt{xy}$. Če jo uporabimo za $x = a$ in $x = b$, dobimo

$$(ab + 1)(a + b) \geq (ab + 1) \cdot 2\sqrt{ab}. \qquad (1)$$

Ponovno uporabimo A-G neenakost za števili $x = ab$ in $y = 1$ ter dobimo

$$(ab + 1) \cdot 2\sqrt{ab} \geq 2\sqrt{ab \cdot 1} \cdot 2\sqrt{ab} = 4ab, \qquad (2)$$

kar je bilo potrebno dokazati.

Enačaj v A-G neenakosti velja natanko tedaj, ko sta števili x in y enaki. Torej v (1) velja enačaj za $a = b$. Če je $a = b = 0$, v (2) očitno velja enakost. Če pa je $a = b \neq 0$, bo v enakost (2) veljala le še za $ab = 1$, torej $a = b = 1$.

Ugotovitev, da neenakost velja za poseben primer (npr. $a=0$ **ali** $b=0$**) ..... 1 točka**
Sklep $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ **.......... 2 točki**
Sklep $ab+1 \geq 2\sqrt{ab}$ **.......... 2 točki**
Enakost velja pri $a=b=0$ **in** $a=b=1$ **.......... po 1 točka**

I/5. Enotske kocke, ki imajo pobarvani natanko dve mejni ploskvi, se nahajajo vzdolž robov, a ne ob ogliščih prvotne kocke. Vzdolž vsakega roba jih je $a-2$. Vseh robov je 12, torej jih je skupaj $12 \cdot (a-2)$.

Preštejmo še enotske kocke, ki nimajo pobarvane nobene mejne ploskve. V prvotni kocki se te nahajajo v notranjosti, torej tvorijo kocko z robom, dolgim $a-2$. Teh je $(a-2)^3$.

Ker število $12 \cdot (a-2)$ deli $(a-2)^3$, od tod sledi, da $12 = 2^2 \cdot 3$ deli $(a-2)^2$. Torej 6 deli $a-2$. Najmanjše število, za katero to velja, je $6 = a-2$, to je $a=8$.

Preštevanje kock z dvema pobarvanima ploskvama .... 1 točka
Preštevanje kock brez pobarvanih ploskev .... 1 točka
Sklep, da 12 **deli** $(a-2)^2$ **.......... 2 točki**
Sklep, da 6 **deli** $a-2$ **.......... 2 točki**
Sklep $a=8$ **.......... 1 točka**

□ 2. letnik

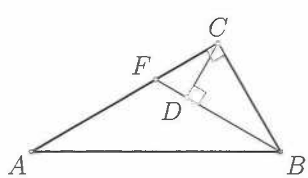
II/1. Recimo, da taki dve števili obstajata. Označimo ju z a in b. Označimo z d največji skupni delitelj števil a in b. Potem je $a = nd$ in $b = md$, pri čemer sta si števili n in m tuji. Iz pogoja naloge sledi $d(n+m) = dnm$. Torej bi moralo veljati $n+m = nm$. Ker pa sta si števili n in m tuji, sta si tuji tudi števili $n+m$ in nm. Torej mora veljati $n+m = nm = 1$, kar pa ni možno. Torej števili a in b ne obstajata.

Zapis $a = dn$ **in** $b = dm$ **(ali enakovreden z vpeljavo** d**) .... 1 točka**
Ugotovitev, da je najmanjši skupni večkratnik števil a **in** b **enak** dmn **.......... 1 točka**
Preoblikovanje enačbe v $m+n = mn$ **(ali enakovredne brez** d**) .... 1 točka**
Sklep, da sta si $m+n$ **in** mn **tuji (ali pa, da** m **deli** n **ali obratno) .... 2 točki**
Sklep $m+n = mn = 1$ **(ali** $m=1$ **ali** $n=1$**) .... 1 točka**
Eksplicitno zapisano, da taki števili a **in** b **ne obstajata .... 1 točka**

II/2. Ker je $x = 1-y^2$, sledi $(1-y^2)^2 + y^3 = 1$. Torej je $1 - 2y^2 + y^4 + y^3 = 1$, kar nam da $y^2(y^2+y-2) = y^2(y+2)(y-1) = 0$. Rešitve so $y=0$, $y=-2$ in $y=1$, pripadajoči x pa $x=1$, $x=-3$ in $x=0$.

Zapis $x = 1-y^2$ **in vstavljanje v drugo enačbo .... 2 točki**
Razcep na $y^2(y+2)(y-1)=0$ **.......... 2 točki**
Vsak par rešitev $(x,y) \in \{(1,0),\ (-3,-2),\ (0,1)\}$ **.......... po 1 točka**

II/3. Trikotnik ABC je polovica enakostraničnega trikotnika, zato v njem velja $|AC| = |AB|\frac{\sqrt{3}}{2}$, kar nam da $|AB| = \frac{2}{\sqrt{3}}|AC|$ in $|BC| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{\sqrt{3}}{3}|AC|$.
Označimo $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DBA = \varphi$. Tedaj je $\sphericalangle DCB = \sphericalangle ACB - \sphericalangle ACD = \frac{\pi}{2} - \varphi$ in zato je



$$\sphericalangle DBC = \pi - \sphericalangle BDC - \sphericalangle DCB = \pi - \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \varphi) = \varphi.$$

Torej velja $60° = \sphericalangle CBA = \sphericalangle CBD + \sphericalangle DBA = 2\varphi$, zato je $\varphi = 30°$.
Ker je $\sphericalangle FBC = \sphericalangle DBC = 30°$, je trikotnik BFC podoben trikotniku ABC. Torej velja $|CF| : |BC| = |BC| : |AC|$, od koder sledi

$$|CF| = \frac{|BC|^2}{|AC|} = \frac{\frac{1}{3}|AC|^2}{|AC|} = \frac{1}{3}|AC|.$$

Torej je $|AF| = |AC| - |CF| = \frac{2}{3}|AC| = \frac{2}{3}$ dm.

Izračun $|BC| = \frac{\sqrt{3}}{3}|AC|$ (ali v obliki $\frac{1}{\sqrt{3}}|AC|$) .... 1 točka
Izračun, da sta kota $\sphericalangle CBD$ in $\sphericalangle DBA$ enaka ter zato oba $30°$ ....2 točki
Omenjena podobnost trikotnikov BFC in ABC .... 1 točka
Izračun $|CF| = \frac{1}{3}|AC|$ .... 2 točki
Sklep $|AF| = \frac{2}{3}$ dm... 1 točka

II/4. 1. način Pokažimo, da je razlika $(\sqrt{a+2007} - \sqrt{a+1004}) - (\sqrt{a+1003} - \sqrt{a})$ negativna, kar je enakovredno neenakosti

$$\sqrt{a+2007} + \sqrt{a} < \sqrt{a+1004} + \sqrt{a+1003}.$$

Ker sta izraza na obeh straneh neenakosti pozitivna, jo lahko kvadriramo in dobimo

$$a + 2007 + 2\sqrt{(a+2007)a} + a < a + 1004 + 2\sqrt{(a+1004)(a+1003)} + a + 1003$$

oziroma

$$\sqrt{a^2 + 2007a} < \sqrt{a^2 + 2007a + 1004 \cdot 1003}.$$

Ker je število a pozitivno, dobljena neenakost res velja. Torej je $\sqrt{a+1003} - \sqrt{a}$ večje od $\sqrt{a+2007} - \sqrt{a+1004}$ za vsako pozitivno število a.

Predpostavka, da je $\sqrt{a+1003} - \sqrt{a} > \sqrt{a+2007} - \sqrt{a+1004}$ ....1 točka
Kvadriranje $\sqrt{a+2007} - \sqrt{a+1004} < \sqrt{a+1003} - \sqrt{a}$ (oziroma enakovrednega izraza, v katerem na obeh straneh nastopajo pozitivne količine) .... 2 točki
Preoblikovanje na enakovredno neenakost, ki velja za vsak a ....3 točke
Sklep $\sqrt{a+2007} - \sqrt{a+1004} < \sqrt{a+1003} - \sqrt{a}$............................1 točka
(Če tekmovalec na nekem mestu kvadrira negativne količine in dobi obratno neenakost, lahko prejme skupaj največ 4 točke.)

2. način Izraza najprej preoblikujemo

$$\begin{aligned}
\sqrt{a+2007} - \sqrt{a+1004} &= \frac{(\sqrt{a+2007} - \sqrt{a+1004})(\sqrt{a+2007} + \sqrt{a+1004})}{\sqrt{a+2007} + \sqrt{a+1004}} = \\
&= \frac{(a+2007) - (a+1004)}{\sqrt{a+2007} + \sqrt{a+1004}} = \frac{1003}{\sqrt{a+2007} + \sqrt{a+1004}}, \\
\sqrt{a+1003} - \sqrt{a} &= \frac{(\sqrt{a+1003} - \sqrt{a})(\sqrt{a+1003} + \sqrt{a})}{\sqrt{a+1003} + \sqrt{a}} = \\
&= \frac{(a+1003) - a}{\sqrt{a+1003} + \sqrt{a}} = \frac{1003}{\sqrt{a+1003} + \sqrt{a}}.
\end{aligned}$$

Ker za imenovalce dobljenih ulomkov velja $\sqrt{a+2007} + \sqrt{a+1004} > \sqrt{a+1003} + \sqrt{a}$, je seveda

$$\sqrt{a+2007}-\sqrt{a+1004}<\sqrt{a+1003}-\sqrt{a}.$$

Predpostavka, da je $\sqrt{a+1003}-\sqrt{a}>\sqrt{a+2007}-\sqrt{a+1004}$ **.............. 1 točka**
Zapis $\sqrt{a+2007}-\sqrt{a+1004}=\frac{1003}{\sqrt{a+2007}+\sqrt{a+1004}}$ **............................. 2 točki**
Zapis $\sqrt{a+1003}-\sqrt{a}=\frac{1003}{\sqrt{a+1003}+\sqrt{a}}$ **.................................. 2 točki**
Primerjava imenovalcev $\sqrt{a+2007}+\sqrt{a+1004}>\sqrt{a+1003}+\sqrt{a}$ **in zaključek 2 točki**

II/5. Število 0 je gotovo priredil vsem dvomestnim številom, ki imajo eno števko enako 0 (to so 10, 20 ... 90). Teh je 9.

Število 0 je priredil tudi tistim številom, ki se po enem koraku spremenijo v dvomestno število s števko 0. V $10=2\cdot 5$ se spremenita števili 25 in 52, v $20=4\cdot 5$ se spremenita 45 in 54, v $30=6\cdot 5$ se spremenita 65 in 56, v $40=8\cdot 5$ pa se spremenita števili 85 in 58. Teh števil je 8. Drugih dvomestnih števil, deljivih z 10, ne moremo dobiti kot zmnožek dveh števk.

Število 0 je priredil tudi vsem tistim dvomestnim številom, ki imajo zmnožek števk enak 25, 45, 52, 54, 56, 58, 65 ali 85. Prav hitro uvidimo, da je nemogoče dobiti zmnožek 52, 58, 65 in 85, druge vrednosti pa dobimo s števili 55, 59, 69, 78, 87, 95 oziroma 96. Teh števil je 7.

Ker nobenega izmed števil 55, 59, 69, 78, 87, 95 in 96 ni možno dobiti kot zmnožek dveh števk, ni drugih dvomestnih števil, ki bi jim Žan lahko priredil število 0. Ugotovili smo, da je $9+8+7=24$ dvomestnih števil, ki jim lahko priredi število 0.

Takšna so števila $10, 20, \ldots, 90$ **... 1 točka**
Sklep, da so takšna še števila, ki se spremenijo v $10, 20, \ldots, 90$ **............. 1 točka**
Sklep, da so taka števila 25, 52, 45, 54, 65, 56, 85 **in** 58 **...................... 1 točka**
Število 0 **je priredil tudi tistim, katerih zmnožek števk je enak enemu izmed zgornjih števil .... 1 točka**
Takšna so števila 55, 59, 69, 78, 87, 95, 96 **.............................. 1 točka**
Sklep, da ostalih števil ni možno dobiti na tak način .... 1 točka
Odgovor 24 **števil .... 1 točka**
(Če tekmovalec nalogo pravilno reši tako, da za vsa dvomestna števila izračuna ustrezna prirejena enomestna števila, priznajte 7 točk. Če pri tej metodi reševanja ne najde vseh rešitev ali ne preveri vseh dvomestnih števil, za vsako manjkajočo rešitev ali nepreverjeno dvomestno število odbijte 1 točko.)

□ 3. letnik

III/1. Naj bo $\sqrt{7-a}+\sqrt{7+a}=n$, $n\in\mathbb{N}$. Enačbo kvadriramo: $14+2\sqrt{49-a^2}=n^2$ in preoblikujemo v

$$\sqrt{49-a^2}=\frac{n^2}{2}-7. \tag{3}$$

Ker je $\sqrt{49-a^2}\geq 0$, iz enačbe (3) sledi, da je $\frac{n^2}{2}-7\geq 0$ in $n>3$. Ker pa je $\sqrt{49-a^2}\leq 7$, iz enačbe (3) sledi tudi, da je $\frac{n^2}{2}-7\leq 7$, kar nam da $n<6$. Torej je lahko le $n=4$ in $a=\pm 4\sqrt{3}$ ali $n=5$ in $a=\pm\frac{5}{2}\sqrt{3}$.

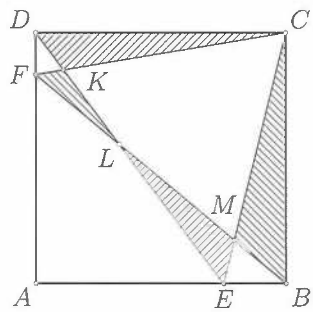
Zapis brez korenov $a^2=7n^2-\frac{n^4}{4}$ **(ali enakovreden) .... 2 točki**
Sklep $n<6$ **... 2 točki**
Rešitvi $n=4$ **in** $a=\pm 4\sqrt{3}$ **ali** $n=5$ **in** $a=\pm\frac{5}{2}\sqrt{3}$ **...................... po 1 točka**

(Če tekmovalec navede le obe pozitivni rešitvi, priznajte 1 točko.)
Sklep ali preizkus, da ostala števila $n < 6$ ne ustrezajo .... 1 točka

III/2. Mislimo si, da smo pravilni n-kotnik razdelili na skladne enakokrake trikotnike, ki imajo osnovnico enako stranici večkotnika, kraka pa sta enako dolga kot polmer kroga in oklepata kot $\frac{2\pi}{n}$. Ploščina posameznega trikotnika je $\frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$, ploščina n-kotnika pa $\frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$. Tako imamo $3 \cdot r^2 = \frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$, kar preuredimo v $\frac{6}{n} = \sin\frac{2\pi}{n}$, od tod pa sklepamo $n = 12$. Pravilni dvanajstkotnik, ki ga včrtamo krogu s polmerom r ima res ploščino $3r^2$. Opomniti velja, da je to res edina rešitev. Včrtani večkotnik, ki bi imel večje število stranic, bi imel tudi večjo ploščino.

Razdelitev n-kotnika na skladne trikotnike .... 1 točka
Ploščina trikotnika je $\frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$ .... 1 točka
Ploščina n-kotnika je $\frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$ .... 1 točka
Zapis enačbe $\frac{6}{n} = \sin\frac{2\pi}{n}$ (ali podobne) .... 1 točka
Rešitev $n = 12$ .... 2 točki
Sklep, da je rešitev največ ena .... 1 točka

III/3. Naj bo p ploščina štirikotnika $CKLM$. Tedaj je $p_2 + p$ enako ploščini trikotnika FBC. Dolžina višine na stranico BC v trikotniku FBC je enaka $|AB|$, torej je ploščina trikotnika enaka $\frac{|AB| \cdot |BC|}{2} = \frac{|AB|^2}{2}$. Zato je



$$p_2 = \frac{|AB|^2}{2} - p.$$

Podobno sklepamo, da je $p_1 + p$ enako ploščini trikotnika DEC, le-ta pa je enaka $\frac{|DC| \cdot |CB|}{2} = \frac{|AB|^2}{2}$. Torej je tudi

$$p_1 = \frac{|AB|^2}{2} - p$$

in je tako razmerje $p_1 : p_2$ enako 1.

Vpeljava ploščine štirikotnika $CKLM$ .... 3 točke
Zapis $p_1 = \frac{|AB|^2}{2} - p$ (ali podoben) .... 1 točka
Zapis $p_2 = \frac{|AB|^2}{2} - p$ (ali podoben) .... 1 točka
Sklep $p_1 : p_2 = 1$ .... 2 točki

III/4. Označimo $S = a^{(\log_b c)-1} b^{(\log_c d)-1} c^{(\log_d a)-1} d^{(\log_a b)-1}$. Zapišimo $1 = \log_b a \cdot \log_d c = \frac{\log a \cdot \log c}{\log b \cdot \log d}$. S pomočjo tega izračunamo

$$\begin{aligned}
\log(abcdS) &= \log\left(a^{\log_b c} b^{\log_c d} c^{\log_d a} d^{\log_a b}\right) = \\
&= \log a^{\log_b c} + \log b^{\log_c d} + \log c^{\log_d a} + \log d^{\log_a b} = \\
&= \log_b c \cdot \log a + \log_c d \cdot \log b + \log_d a \cdot \log c + \log_a b \cdot \log d = \\
&= \frac{\log c \cdot \log a}{\log b} + \frac{\log d \cdot \log b}{\log c} + \frac{\log a \cdot \log c}{\log d} + \frac{\log b \cdot \log d}{\log a} = \\
&= \frac{\log a \cdot \log c \cdot (\log b + \log d)}{\log b \cdot \log d} + \frac{\log b \cdot \log d \cdot (\log a + \log c)}{\log a \cdot \log c} = \\
&= \log a + \log b + \log c + \log d = \log(abcd)
\end{aligned}$$

od koder sledi $abcdS = abcd$ oziroma $S = 1$.

Sklep $\frac{\log a \cdot \log c}{\log b \cdot \log d} = 1$ .... **1 točka**
Logaritmiranje izraza S **ali** $abcdS$ .... **2 točki**
Zapis vseh logaritmov na enako osnovo .... **2 točki**
Rešitev $S = 1$ .... **2 točki**

III/5. Na robu kvadra dolžine a je $a - 2$ enotskih kock, ki imajo pobarvani natanko dve ploskvi, na robu dolžine c pa jih je $c - 2$. Ker je v kvadru 8 robov dolžine a in 4 robovi dolžine c, je število vseh kock z dvema pobarvanima ploskvama enako $8(a - 2) + 4(c - 2)$. Kocke, ki nimajo pobarvanih stranic, se nahajajo v notranjosti in jih je $(a-2)(a-2)(c-2)$. Veljati mora

$$8(a - 2) + 4(c - 2) = 16 + (a - 2)^2(c - 2). \tag{4}$$

Izraz lahko poenostavimo v $0 = 32 + a^2c - 4ac - 2a^2$. Od tod lahko izrazimo $ac(a - 4) = 2(a^2 - 16) = 2(a - 4)(a + 4)$. Če je $a = 4$, izraz velja za vsako naravno število c. Sicer pa lahko z $a - 4$ delimo in dobimo $ac = 2a + 8$ oziroma $c = 2 + \frac{8}{a}$. Torej je a delitelj števila 8 in ker je $a \geq 3$ in $a \neq 4$, je zato lahko le $a = 8$ in $c = 3$.

Enačbo (4) lahko uženemo tudi drugače, če označimo $x = a - 2$ in $y = c - 2$. Tedaj dobimo $8x + 4y = 16 + x^2y$ oziroma

$$0 = x^2y - 4y + 16 - 8x = y(x - 2)(x + 2) + 8(2 - x) = (x - 2)(y(x + 2) - 8).$$

Tedaj je bodisi $x = 2$ in y poljuben ali pa je $y(x + 2) = 8$. Od tod sledi, da je za $x \neq 2$ izraz $x + 2$ lahko 8, pri tem pa je $y = 1$.

Za robove kvadra velja bodisi $a = 4$ in c poljubno število ali pa $a = 8$ in $c = 3$.

Zapis števila kock z dvema in brez pobarvanih ploskev .... **1 točka**
Enačba (4) (ali enakovredna) .... **1 točka**
Razcep $ac(a - 4) = 2(a - 4)(a + 4)$ **oz.** $(x - 2)(y(x + 2) - 8) = 0$ **(ali podoben)** . **2 točki**
Rešitev $a = 4$, c **poljuben** .... **1 točka**
Sklep, da je a **(ali** $c - 2$ **ali** $x + 2$ **ali** y**) delitelj števila** 8 .... **1 točka**
Rešitev $a = 8$, $c = 3$ .... **1 točka**
(Če tekmovalec vpelje x **in** y **(ali podobno) in v celoti reši nalogo, a ne zapiše rezultata za** a **in** c**, dodelite 6 točk.)**

□ 4. letnik

IV/1. Naj bo prvi člen $a_1 = n$ in količnik $q = \frac{1}{m}$. Ker je vsota geometrijskega zaporedja končna, je $|q| < 1$ oziroma $|m| > 1$. Tedaj je $n + nq + nq^2 + \cdots = \frac{n}{1-q} = \frac{n}{1-\frac{1}{m}} = 3$. Od tod dobimo $n = 3(1 - \frac{1}{m}) = 3 - \frac{3}{m}$. Ker je n naravno število, sta le dve možnosti za m, in sicer $m_1 = 3$ in $m_2 = -3$. Imamo torej dve rešitvi naloge: zaporedje, ki ima prvi člen $a_1 = 2$ in količnik $q = \frac{1}{3}$, ali zaporedje, ki ima prvi člen $a_1 = 4$ in količnik $q = -\frac{1}{3}$.

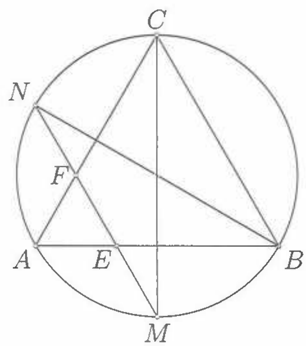
Zapis $q = \frac{1}{m}$ .... **1 točka**
Sklep $|m| > 1$ .... **1 točka**
Zapis $n = 3 - \frac{3}{m}$ **(ali podoben)** .... **2 točki**
Sklep, da je m **lahko le** 3 **ali** -3 .... **1 točka**
Rešitvi $a_1 = 2$, $q = \frac{1}{3}$ **in** $a_1 = 4$, $q = -\frac{1}{3}$ .... **po 1 točka**

IV/2. Najprej je $1+2+3+4=10$, $1^2+2^2+3^2+4^2=30$ in $1^3+2^3+3^3+4^3=100$. Denimo, da bi pri nekem naravnem številu $n>3$ izrazili vsoto $1^n+2^n+3^n+4^n$ kot število, ki bi se končalo s tremi ničlami. To število bi bilo deljivo s $1000=8\cdot 125$. Oglejmo si ostanek posameznega seštevanca v omenjeni vsoti pri deljenju z 8. Seštevanec 1^n da ostanek 1, seštevanca 2^n in 4^n pa dasta ostanek 0, saj je $n>3$. Zapišimo $3^n=(2+1)^n=2^n+n\cdot 2^{n-1}+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2^3+\frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot 1}\cdot 2^2+n\cdot 2+1$. Od tod sklepamo, da bo ostanek seštevanca 3^n pri deljenju z 8 enak ostanku izraza $\frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot 1}\cdot 2^2+n\cdot 2+1=2n^2+1$ pri deljenju z 8. Hitro uvidimo, da ima izraz $2n^2+1$ ostanek 1, če je n sodo število, saj je v tem primeru $2n^2$ deljivo z 8. Če je n liho število, zapišemo $n=2k+1$ in je $2\cdot(2k+1)^2+1=8k^2+8k+3$, od koder vidimo, da je ostanek enak 3.

Ugotovili smo: če vsoto $1^n+2^n+3^n+4^n$ pri poljubnem $n>3$ delimo z 8, dobimo ostanek 2 ali 4. Ker ta vsota ni deljiva z 8, je ne moremo pri nobenem naravnem številu n zapisati kot število, ki bi se končalo z več kot dvema ničlama. Torej se število oblike $1^n+2^n+3^n+4^n$ lahko konča z največ dvema ničlama.

Izračun $1^3+2^3+3^3+4^3=100$ .... **1 točka**
Opazovanje ostankov izraza pri deljenju z 8, 125 **ali** 1000 .... **1 točka**
Sklep, da je za $n>3$ **število** 2^n+4^n **deljivo z** 8 .... **1 točka**
Sklep, da je ostanek števila 3^n **pri deljenju z** 8 **bodisi** 1 **bodisi** 3 .... **1 točka**
Sklep, da je ostanek števila $1^n+2^n+3^n+4^n$ **pri deljenju z** 8 **bodisi** 2 **bodisi** 4. **1 točka**
Sklep, da zato nobeno število oblike $1^n+2^n+3^n+4^n$ **ni deljivo s** 1000 .... **1 točka**
Eksplicitno zapisano, da se število oblike $1^n+2^n+3^n+4^n$ **lahko konča z največ dvema ničlama** .... **1 točka**

IV/3. Označimo kote trikotnika ABC na običajen način z α, β in γ. Po izreku o obodnih kotih je $\sphericalangle ANM=\sphericalangle ACM=\frac{\gamma}{2}$ in $\sphericalangle NMA=\sphericalangle NBA=\frac{\beta}{2}$. Prav tako velja $\sphericalangle CAN=\sphericalangle CBN=\frac{\beta}{2}$ in $\sphericalangle BAM=\sphericalangle BCM=\frac{\gamma}{2}$. Zato so si trikotniki AME, NAF in NMA podobni.
Po drugi strani pa je $\sphericalangle AFN=\sphericalangle MEA$, zato je $\sphericalangle AFE=\pi-\sphericalangle AFN=\pi-\sphericalangle MEA=AEF$, torej je trikotnik AFE enakokrak ter velja $|AE|=|AF|$.
Iz podobnosti trikotnikov AME in NAF sledi, $\frac{|AE|}{|EM|}=\frac{|NF|}{|FA|}$, od koder z upoštevanjem $|NF|=|ME|$ in $|AE|=|AF|$ dobimo $|AE|=|EM|=|FE|$. Trikotnik AEM je zato enakokrak z vrhom pri E, od koder sledi, da je $\beta=\gamma$. Trikotnik AFE pa je enakostraničen, torej je $\alpha=\frac{\pi}{3}$, kar pravzaprav pomeni, da je trikotnik ABC enakostraničen.

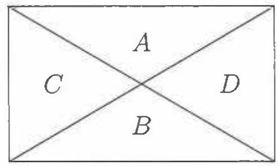


Izračun $\sphericalangle ANM=\frac{\gamma}{2}$, $\sphericalangle NMA=\frac{\beta}{2}$, $\sphericalangle CAN=\frac{\beta}{2}$, $\sphericalangle BAM=\frac{\gamma}{2}$ .... **2 točki**
(Za izračun le 2 ali 3 izmed zgoraj naštetih kotov dodelite 1 točko)
Omenjena podobnost dveh izmed trikotnikov AME, NAF **in** NMA .... **1 točka**
Izpeljava $|AE|=|AF|$ **(ali** $|AN|=|AM|$**)** .... **1 točka**
Sklep $\gamma=\beta$ .... **1 točka**
Sklep, da je trikotnik AEF **enakostraničen** .... **1 točka**
Sklep, da je trikotnik ABC **enakostraničen** .... **1 točka**

IV/4. Označimo $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}+\frac{2}{\pi}\cdot\arcsin\frac{x+1}{2}$. Najprej si oglejmo, za katere x je funkcija f sploh definirana. Veljati mora $x^2+2x-3\geq 0$ in $-1\leq\frac{x+1}{2}\leq 1$. Prvi pogoj lahko zapišemo kot $(x+3)(x-1) \geq 0$, od koder sledi $x \leq -3$ ali $x \geq 1$. Drugi pogoj lahko preoblikujemo v $-2 \leq x+1 \leq 2$ oziroma $-3 \leq x \leq 1$. Torej je funkcija definirana pri $x = -3$ in $x = 1$. V prvem primeru je $f(-3) = 0 + \frac{2}{\pi} \cdot (-\frac{\pi}{2}) = -1$, v drugem pa $f(1) = 0 + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1$. Edini realni števili, kjer je vrednost funkcije celo število, sta torej $x = -3$ in $x = 1$.

Pogoj $x^2 + 2x - 3 \geq 0$ .... **1 točka**
Sklep $x \leq -3$ **ali** $x \geq 1$ .... **1 točka**
Pogoj $-1 \leq \frac{x+1}{2} \leq 1$ .... **1 točka**
Sklep $-3 \leq x \leq 1$ .... **1 točka**
Funkcija f **(oz. izraz) je definirana le za** $x = 1$ **in** $x = -3$ .... **1 točka**
Vrednost funkcije f **(oz. izraza) je celo število pri** $x = 1$ **in** $x = -3$ .... **po 1 točka**

IV/5. Na trikotnika A in B, ki imata skupno le oglišče, lahko vrtnar posadi katerikoli vrsti cvetlic. Denimo najprej, da bo na ta dva trikotnika posadil isto vrsto cvetlic. Ker ima na voljo 5 vrst cvetlic, lahko to naredi na 5 načinov. Pri tem ostaneta še druga dva trikotnika, ki imata skupno le oglišče, in 4 vrste cvetlic, ki jih lahko uporabi. Če bi tudi na ta trikotnika posadil isto vrsto cvetlic, lahko to napravi na 4 načine, sicer pa lahko napravi na $4 \cdot 3 = 12$ načinov. To pomeni, da ima v tem primeru $5 \cdot (4 + 12) = 80$ možnosti izbire.



Preostane nam še premislek, ko vrtnar posadi različni vrsti cvetlic na trikotnikih A in B. Za to ima $5 \cdot 4 = 20$ možnosti. Ostaneta trikotnika C in D, ki imata skupno le oglišče, in 3 vrste cvetlic. Če posadi na oba isto vrsto cvetlic, ima 3 možnosti, sicer pa $3 \cdot 2 = 6$ možnosti. V tem primeru ima vrtnar $20 \cdot (3 + 6) = 180$ možnosti izbire. Vrtnar lahko posadi cvetlice na $80 + 180 = 260$ načinov.
Preštete možnosti za enaki vrsti cvetlic na obeh parih trikotnikov .... **2 točki**
Preštete možnosti, če sta na A **in** B **enaki, na** C **in** D **pa različni vrsti** .... **1 točka**
Preštete možnosti, če sta na A **in** B **različni, na** C **in** D **pa enaki vrsti** .... **1 točka**
Preštete možnosti za 4 **različne vrste cvetlic** .... **1 točka**
Rešitev 260 **načinov** .... **2 točki**

Rešitve nalog z 51. matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije

1. letnik

I/1. Vrednost izraza $\Big|\big|\,|x|-2\big|-20\Big|-200$ je lahko enaka 2007 ali -2007. Ker je $\Big|\big|\,|x|-2\big|-20\Big|-200 \geq -200$, mora biti $\Big|\big|\,|x|-2\big|-20\Big|-200 = 2007$ in zato je

$$\Big|\big|\,|x|-2\big|-20\Big| = 2207.$$

Od tod sledi, da je $\big|\,|x|-2\big|-20$ enako bodisi 2207 bodisi -2207. Toda ker je $\big|\,|x|-2\big|-20 \geq -20$, mora biti $\big|\,|x|-2\big|-20 = 2207$ in zato je

$$\big|\,|x|-2\big| = 2227.$$

Ker pa $|x|-2$ ne more biti enako -2227, je $|x|-2 = 2227$. Tako dobimo $|x| = 2229$. Rešitvi sta $x = 2229$ in $x = -2229$.

Vrednost izraza $\Big|\,\big|\,|x|-2\big|-20\Big|-200$ **je lahko enaka** 2007 **ali** -2007 .... 1 točka

Velja $\Big|\,\big|\,|x|-2\big|-20\Big|-200 \geq -200$ .... 1 točka

Sklep $\Big|\,\big|\,|x|-2\big|-20\Big| = 2207$. .... 1 točka

Velja $\big|\,|x|-2\big|-20 \geq -20$ .... 1 točka

Sklep $\big|\,|x|-2\big| = 2227$. .... 1 točka

Rešitvi sta $x = 2229$ **in** $x = -2229$ .... 1 + 1 točka

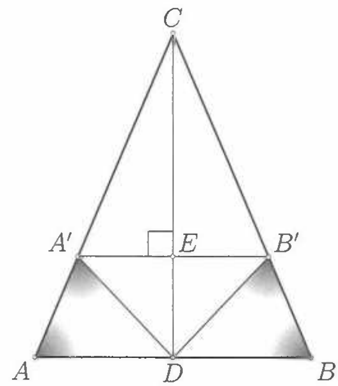
Za reševanje "od znotraj": 2 točki rešitev; 1 točka za obravnavo še kakšnega primera poleg $x = \pm(2+20+200+2007)$**; 2 točki za popolno obravnavo vseh 16 možnosti; 2 točki za preverjanje, da dobljeni** x **ustreza vsem pogojem.**

I/2. Zapišemo lahko enačbi $m+n = 2007$ in $mn = 2007a$, kjer je a neko naravno število. Tedaj je $n = 2007-m$ in dobimo $m(2007-m) = 2007a$ oziroma $2007(m-a) = m^2$. Torej je število m^2 deljivo s številom $2007 = 3^2 \cdot 223$. Od tod sledi, da je m deljivo s $3 \cdot 223$. Zapišimo $m = 3 \cdot 223 \cdot k$, kjer je k neko naravno število. Ker je $m < 2007 = 3 \cdot 3 \cdot 223$, je $k < 3$. Torej je bodisi $m = 3 \cdot 223 \cdot 1 = 669$ bodisi $m = 3 \cdot 223 \cdot 2 = 1338$. V prvem primeru je $n = 1338$, v drugem pa $n = 669$.

Zapis enačb $m+n = 2007$ **in** $mn = 2007a$ **(ali enakovrednih)** .... 1 točka
Izražava $m(2007-m) = 2007a$ **in zapis** $2007(m-a) = m^2$ .... 1 točka
Ugotovitev $2007 \mid m^2$ **(ali** $m - a = 223b^2$**)** .... 1 točka
Sklep $m = 3 \cdot 223$ .... 1 točka
Ugotovitev $b < 3$ .... 1 točka
Rešitvi $m = 669$ **in** $n = 1338$ **ter** $m = 1338$ **in** $n = 669$. .... 1 + 1 točka

I/3. Ker je D razpolovišče stranice AB, velja $|AD| = |DB|$. Trikotnika ADA' in DBB' sta enakokraka z vrhom D, zato je $|A'D| = |AD| = |BD| = |B'D|$ in je trikotnik $A'DB'$ enakokrak z vrhom D. Označimo z E presečišče $A'B'$ in CD. Če je DE pravokotna na $A'B'$, velja $|A'E| = |EB'|$, saj je trikotnik $A'DB'$ enakokrak. V trikotniku $A'B'C$ je CE višina, hkrati pa točka E razpolavlja $A'B'$, zato je ta trikotnik enakokrak. Velja

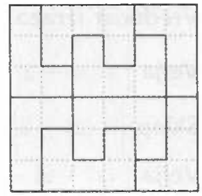
$$\begin{aligned}
\sphericalangle BAC &= \sphericalangle DA'A = \pi - \sphericalangle DA'B' - \sphericalangle B'A'C = \\
&= \pi - \sphericalangle DB'A' - \sphericalangle A'B'C = \\
&= \sphericalangle DB'B = \sphericalangle ABC,
\end{aligned}$$



zato je trikotnik ABC res enakokrak.

Sklep $|AD| = |DB|$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je $|A'D| = |AD| = |BD| = |B'D|$ .... 1 točka
Sklep, da je trikotnik $A'DB'$ **enakokrak** .... 1 točka
Sklep $|A'E| = |EB'|$ .... 1 točka
Ugotovitev, da je trikotnik enakokrak $A'B'C$ .... 1 točka
Izračun kotov in sklep, da je trikotnik ABC **enakokrak** .... 1 točka

I/4. Denimo, da porabimo k vsakih ploščic. Tedaj pokrijemo $4k + 5k = 9k$ polj, torej mora veljati $n^2 = 9k$. Od tod sledi, da je n^2 deljivo z 9 oziroma n je deljivo s 3. Če je $n = 3$, imamo tabelo velikosti 3×3, na katero očitno ne moremo postaviti obeh ploščic, da se ne bi prekrivali. Torej je $n \geq 2 \cdot 3 = 6$. Ker pa kvadrat velikosti 6×6 lahko pokrijemo z uporabo po štirih ploščic vsake oblike (kot prikazuje slika), je $n = 6$ najmanjše tako število.



Ugotovitev $n^2 = 9k$ .... **1 točka**
Sklep $n = 3\ell$ (ali k je popoln kvadrat) .... **2 točki**
Dokaz, da $n = 3$ ne ustreza .... **1 točka**
Sklep, da je $n \geq 6$ .... **1 točka**
Dokaz, da $n = 6$ ustreza (npr. s sliko) .... **2 točki**

□ 2. letnik

II/1. Enačba ima dvojno ničlo natanko tedaj, ko je diskriminanta enaka 0, torej

$$0 = (mn)^2 - 4 \cdot n \cdot 2007 = n(m^2 n - 4 \cdot 2007).$$

Od tod sledi $m^2 n = 4 \cdot 2007 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 223$. Ker je 223 praštevilo, mora biti delitelj števila n. Pišimo $n = 223n'$. Tedaj velja

$$m^2 n' = (2 \cdot 3)^2.$$

Ločimo štiri možnosti. Število m je namreč lahko enako 1, 2, 3 ali 6. V prvem primeru je $n = 4 \cdot 2007$, enačba pa $2007(x^2 + 4x + 4) = 0$ z dvojno ničlo $x = -2$. Pri $m = 2$ sledi $n = 2007$ ter $2007(x^2 + 2x + 1) = 0$, tu dobimo $x = -1$. Pri $m = 3$ je $n = 4 \cdot 223$ ter enačba $223(9x^2 + 12x + 4) = 0$, torej $x = -\frac{2}{3}$. Nazadnje imamo še $m = 6$, $n = 223$ ter $223(9x^2 + 6x + 1) = 0$ in torej $x = -\frac{1}{3}$.

Zapis, da je diskriminanta enaka 0 .... **1 točka**
Razcep na prafaktorje .... **1 točka**
Sklep, da je 233 delitelj števila n .... **1 točka**
Obravnavanje možnosti $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$ in $m = 6$ ter izračun pripadajočih rešitev -2, -1, $-\frac{2}{3}$ in $-\frac{1}{3}$ .... **1 točka**

II/2. Označimo trimestno število z $\overline{abc}$. Veljati mora $a > b > c$, poleg tega pa je število $\overline{abc} + \overline{cba} = 10^2(a + c) + 10(2b) + (a + c)$ sestavljeno iz samih lihih števk. Če je $a + c < 10$, je števka na mestu desetic soda, kar ni možno. Zato mora biti $a + c \geq 10$. Ker je še število $a + c$ liho, je torej $a + c \geq 11$. Pišimo $a + c = 10 + l$, kjer je l liho število. Tedaj je

$$\overline{abc} + \overline{cba} = 10^3 + 10^2 l + 10(2b + 1) + l.$$

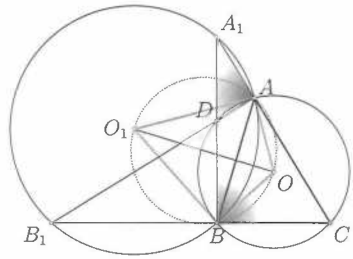
Od tod sledi, da je $2b + 1 < 10$, saj bo nasprotnem primeru števka na mestu stotic soda. Torej je $2b < 9$ in zato $b \leq 4$.

Zaradi $c < b \leq 4$ sledi $c \leq 3$. Torej je $a + c \leq 9 + 3 = 12$. Pokazali pa smo že, da je $a + c$ liho in vsaj 11, torej je $a + c = 11$. Če je $c = 2$ in $a = 9$, je b lahko 3 ali 4, pri $c = 3$ in $a = 8$ pa je možno le $b = 4$.

Vsa takšna števila so 843, 932 in 942.

Ugotovitev, da sta a in c različnih parnosti .... 1 točka
Ugotovitev $a+c \geq 10$ .... 1 točka
Ugotovitev $b \leq 4$ .... 1 točka
Ugotovitev $c \leq 3$ .... 1 točka
Posamezna rešitev .... 1 + 1 + 1 točka

II/3. Naj bo D presečišče premic A_1B in AB_1 ter označimo $\sphericalangle A_1AB_1 = \alpha$. Tedaj je $\sphericalangle CAD = \pi - \sphericalangle DAA_1 = \pi - \alpha$. Ker so točke A, C, B in D konciklične, je $\sphericalangle CBD = \pi - \sphericalangle CAD = \pi - (\pi - \alpha) = \alpha$. Zato je $\sphericalangle A_1BB_1 = \pi - \sphericalangle DBC = \pi - \alpha$.



Obodna kota $\sphericalangle A_1AB_1$ in $\sphericalangle A_1BB_1$ nad tetivo A_1B_1 v krožnici $\mathcal{K}$ sta enaka, zato je $\pi - \alpha = \sphericalangle A_1BB_1 = \sphericalangle A_1AB_1 = \alpha$, od koder sledi $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
Označimo še $\sphericalangle ACB = \gamma$. Tedaj je $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB = 2\gamma$. Po drugi strani pa je $\sphericalangle AB_1C = \pi - \sphericalangle B_1AC - \sphericalangle ACB_1 = \pi - \frac{\pi}{2} - \gamma = \frac{\pi}{2} - \gamma$, zato je $\sphericalangle AO_1B = 2\sphericalangle AB_1B = 2\sphericalangle AB_1C = 2(\frac{\pi}{2} - \gamma) = \pi - 2\gamma$. Od tod sledi

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle BO_1A = 2\gamma + (\pi - 2\gamma) = \pi,$$

torej je štirikotnik $AOBO_1$ res tetiven.

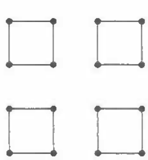
Vsaj ena izmed enakosti $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle AO_1B = 2\sphericalangle AB_1B$ .... 1 točka
V1: Dokaz tetivnosti $ACBD$ in enakost $\sphericalangle CBD + \sphericalangle CAD = \pi$ .... 1 točka
V1: Sklep $\sphericalangle A_1BB_1 + \sphericalangle A_1AB_1 = \pi$ .... 1 točka
V1: Dokaz tetivnosti A_1ABB_1 in enakost $\sphericalangle A_1BB_1 = \sphericalangle A_1AB_1$ .... 1 točka
V2: Dokaz tetivnosti A_1ABB_1 in enakost $\sphericalangle A_1BB_1 = \sphericalangle A_1AB_1$ .... 1 točka
V2: Sklep $\sphericalangle CBD = \sphericalangle DAC$ .... 1 točka
V2: Dokaz tetivnosti $ACBD$ in enakost $\sphericalangle CBD + \sphericalangle CAD = \pi$ .... 1 točka
Sklep $\sphericalangle A_1AB_1 = \sphericalangle A_1BB_1 = \frac{\pi}{2}$ .... 1 točka
Izračun $\sphericalangle AB_1C = \frac{\pi}{2} - \gamma$ .... 1 točka
Izračun $\sphericalangle AO_1B = \pi - 2\gamma$ in ugotovitev, da je $\sphericalangle AO_1B + \sphericalangle AOB = \pi$ .... 1 točka

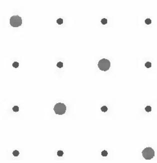
II/4.

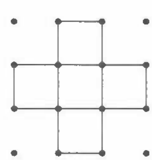
1. način Pobarvati moramo najmanj štiri točke. V mrežo namreč lahko vrišemo štiri disjunktne kvadrate kot na prvi sliki. Ker mora biti v vsakem vsaj eno oglišče pobarvano z rdečo, potrebujemo vsaj 4 rdeče točke.

Pokažimo, da je to tudi dovolj. Pobarvajmo točke kot prikazuje druga slika. V mreži imamo en sam kvadrat velikosti 3×3, ki ima očitno rdeči dve oglišči. Poleg tega imamo štiri kvadrate velikosti 2×2 in vsak ima natanko eno oglišče rdeče.

Ostane še 9 kvadratov velikosti 1×1. Štiri smo narisali že na prvi sliki in izmed teh ima jasno vsak vsaj eno oglišče rdeče. Ostalih 5 je narisanih na tretji sliki in vsi imajo vsaj eno rdeče oglišče.







Dokaz, da potrebujemo vsaj 4 rdeče točke .... 4 točke
Zapisana pravilna konfiguracije 4 rdečih točk .... 2 točki
Dokaz, da ta konfiguracija ustreza (zapsis: 'konfiguracija ustreza' NE zadošča) ... 1 točka
Opomba: Na drugi sliki je narisana ena izmed možnosti, kako lahko pobarvamo točke rdeče. Tekmovalec lahko nariše tudi kakšno drugo konfiguracijo in dokaz prilagodi tej konfiguraciji.

2. način Najprej vsaki točki priredimo **potencial**, ki naj bo število kvadratov, ki imajo eno od oglišč v tej točki. Zunanjih dvanajst točk ima potencial 3, notranje štiri pa 5:

3	3	3	3
3	5	5	3
3	5	5	3
3	3	3	3

Da je potrebno pobarvati vsaj 4 točke, sedaj s pomočjo potencialov vidimo takole. Z barvanjem treh točk (ali manj) bi izločili kvečjemu

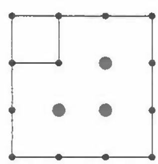
(a) 3+3+3=9

(b) 3+3+5=11

(c) 3+5+5=13

(č) 5+5+5=15

kvadratov. Vseh kvadratov je $1 + 4 + 9 = 14$, zato lahko možnosti (a), (b) in (c) takoj izločimo, možnost (č) pa je tudi neustrezna, saj nam pri barvanju treh notranjih točk ostane največji kvadrat in še en najmanjši kvadrat:



Torej moramo pobarvati vsaj 4 točke. Dokaz sklenemo kot v prvem načinu.

Vpeljava potenciala .... 1 točka
Utemeljitev, da barvanje treh (ali manj) točk ne zadošča .... 3 točke
Zapisana pravilna konfiguracije 4 rdečih točk .... 2 točki
Dokaz, da ta konfiguracija ustreza (zapsis: 'konfiguracija ustreza' NE zadošča) ... 1 točka
Opomba: Na drugi sliki je narisana ena izmed možnosti, kako lahko pobarvamo točke rdeče. Tekmovalec lahko nariše tudi kakšno drugo konfiguracijo in dokaz prilagodi tej konfiguraciji.

□ 3. letnik

III/1. Naj bo $7^{p-2} + 9p^4 = m^2$. Potem je $7^{p-2} = m^2 - 9p^4 = (m - 3p^2)(m + 3p^2)$. Torej je $m - 3p^2 = 7^r$ in $m + 3p^2 = 7^{p-r-2}$ za nek $r \geq 0$ in velja $p - r - 2 > r$. Enakosti odštejemo in dobimo $6p^2 = 7^r(7^{p-2r-2} - 1)$. Torej je $p = 7$ ali $r = 0$. Prvi primer je res rešitev, saj dobimo $m = 196$.

V drugem primeru pa je $6p^2 + 1 = 7^{p-2}$. Očitno $p = 2$, $p = 3$ in $p = 5$ niso rešitve, zato naj bo $p > 7$. Ker je $6p^2 = 7^{p-2} - 1 = (7 - 1)(7^{p-3} + 7^{p-4} + \ldots + 7^1 + 1)$, mora veljati $p^2 = 7^{p-3} + 7^{p-4} + \ldots + 7^1 + 1$. Vemo, da se premica z enačbo $y = x$ in eksponentna funkcija 7^{x-1} sekata pri $x = 1$. Za $x > 1$ pa eksponentna funkcija narašča hitreje. Torej je $7^{x-1} \geq x$ oziroma $7^x \geq 7x$. Zato lahko za $p > 7$ ocenimo

$$\begin{aligned}
p^2 &= 7^{p-3} + 7^{p-4} + \ldots + 7^1 + 1 \geq \\
&\geq 7(p-3) + 7(p-4) + \ldots + 7 \cdot 1 + 1 = \\
&= 7((p-3) + (p-4) + \ldots + 1) + 1 = \\
&= 7\frac{(p-3)(p-2)}{2} + 1 > p^2 + \frac{5(p^2 - 7p)}{2} = \\
&= p^2 + \frac{5p(p-7)}{2} > p^2.
\end{aligned}$$

V tem primeru ni rešitev, torej je $p = 7$ edino praštevilo, pri katerem je število $7^{p-2} + 9p^4$ popoln kvadrat.

Zapis $7^{p-2} = (m - 3p^2)(m + 3p^2)$ .... **1 točka**
Ugotovitev $m - 3p^2 = 7^r$ **in** $m + 3p^2 = 7^{p-r-2}$ **in sklep** $6p^2 = 7^r(7^{p-2r-2} - 1)$ .... **2 točki**
Sklep $p = 7$ **ali** $r = 0$ .... **1 točka**
Sklep $m = 196$ .... **1 točka**
Ocena $7^x \geq 7x$ .... **1 točka**
Izpeljava protislovja za $p > 7$. .... **1 točka**

III/2. 1. način Uvedimo novo spremenljivko $a = \tan^2 x$. Ker je $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ in $\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$, je $\frac{\tan 3x}{\tan 2x} = \frac{(3-a)(1-a)}{2(1-3a)}$, zato lahko neenakost prepišemo v

$$\frac{1}{9} < \frac{(3-a)(1-a)}{2(1-3a)} \leq \frac{3}{2}. \qquad (1)$$

Denimo najprej, da je $1 - 3a > 0$. Tedaj iz neenakosti (1) sledi

$$(3-a)(1-a) \leq 3(1-3a)$$

oziroma $a(a+5) \leq 0$. Ker je $a = \tan^2 x$, velja $a \geq 0$ ter $a + 5 > 0$. Zato bi moralo veljati $a = 0$, kar pa ni možno, saj je v tem primeru $\tan 2x = 0$ in izraz $\frac{\tan 3x}{\tan 2x}$ sploh ni definiran. Torej neenakost (1) ne more biti izpolnjena, ko je $1 - 3a > 0$, zato naj bo $1 - 3a < 0$. Tedaj dobimo

$$\frac{2(1-3a)}{9} > (3-a)(1-a),$$

kar je enakovredno $0 > (5 - 3a)^2$. Tudi ta neenakost ni izpolnjena za nobeno število a, torej ne obstaja tak x, da bi veljalo

$$\frac{1}{9} < \frac{\tan 3x}{\tan 2x} \leq \frac{3}{2}.$$

2. način S pomočjo adicijskih izrekov lahko zapišemo $\tan 3x = \frac{\sin x(3\cos^2 x - \sin^2 x)}{\cos x(\cos^2 x - 3\sin^2 x)}$ in $\tan 2x = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$. Torej je

$$\frac{\tan 3x}{\tan 2x} = \frac{(2\cos^2 x - 1)(4\cos^2 x - 1)\sin x}{2\cos^2 x(4\cos^2 x - 1)\sin x}.$$

Če je $\sin x = 0$, izraz ni definiran, sicer pa lahko $\sin x$ okrajšamo. Uvedimo novo spremenljivko $a = \cos^2 x$. Zaradi $\sin x \neq 0$ sledi $a < 1$. Neenakost lahko prepišemo v

$$\frac{1}{9} < \frac{(2a-1)(4a-1)}{2a(4a-3)} \leq \frac{3}{2}. \tag{2}$$

Če je $4a - 3 > 0$, iz neenakosti (2) sledi

$$(2a-1)(4a-1) \leq 3a(4a-3)$$

oziroma $0 \leq (4a+1)(a-1)$. Očitno je a pozitivno število, ki je manjše od 1, zato je $4a+1$ pozitivno, $a-1$ pa negativno število, torej dobljena neenakost ne drži.

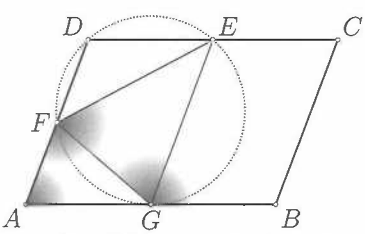
Ostane le še primer, ko je $4a - 3 < 0$. Tedaj iz (2) dobimo neenakost

$$\frac{1}{9} 2a(4a-3) > (2a-1)(4a-1),$$

ki jo lahko preoblikujemo v $0 > (8a-3)^2$, kar pa seveda ni možno. Torej neenakost (2) ni izpolnjena za nobeno število a.

Prevedba $\tan 2x$ oz. $\tan 3x$, $\sin 3x$, ..., na enostavne kote .... **1 točka**
Okrajšanje ulomka do oblike $\frac{(\tan x - 3)(1 - \tan x)}{2(1 - 3\tan x)}$ oz. $\frac{8\cos^4 x - 6\cos^2 x + 1}{8\cos^4 x - 4\cos^2 x}$ .... **1 točka**
Vpeljava nove spremenljivke .... **1 točka**
Pravilno obravnava zgornje ocene .... **2 točki**
Pravilno obravnava spodnje ocene .... **2 točki**

III/3. **1. način** Označimo $\sphericalangle BAD = \alpha$. Potem je $\sphericalangle EGB = \alpha$ ter $\sphericalangle ADE = \pi - \alpha$. Ker je štirikotnik $DEFG$ tetiven, je $\sphericalangle FGE = \alpha$. Zato je $\sphericalangle FGA = \pi - \sphericalangle FGE - \sphericalangle EGB = \pi - 2\alpha$ in $\sphericalangle GFA = \pi - \sphericalangle GAF - \sphericalangle FGA = \pi - \alpha - (\pi - 2\alpha) = \alpha$. Torej je trikotnik AGF enakokrak z vrhom pri G.



Vemo, da je kot med tetivo EG in tangento AB enak obodnemu kotu nad to tetivo. To pomeni, da je $\sphericalangle GFE = \sphericalangle BGE = \alpha$. Zato je tudi trikotnik EFG enakokrak z vrhom pri E. Trikotnika EFG in GAF sta si podobna, zato je $\frac{|EG|}{|FG|} = \frac{|AG|}{|AF|}$. Če označimo $|AB| = a$ in $|AD| = b$, dobimo torej $\frac{b}{a/2} = \frac{a/2}{b/2}$, od koder sledi $2b^2 = a^2$ oziroma $a = \sqrt{2}b$.

Smiselna uporaba tetivnosti $DEFG$ .... **1 točka**
Trikotnik AGF enakokrak .... **1 točka**

Kot med tetivo in tangento v točki G .... **1 točka**
Trikotnik FGE enakokrak .... **2 točki**
Podobnost EFG in GAF .... **1 točka**
Zaključni sklep .... **1 točka**

2. način Nalogo lahko na kratko rešimo s pomočjo potence točke na krožnico (s katero so zagotovo seznanjeni udeleženci priprav na MMO in bralci elektronske revije Brihtnež). Če jo zapišemo za točko A in trikotniku DEF očrtano krožnico, dobimo

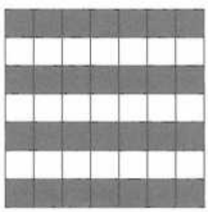
$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AD}.$$

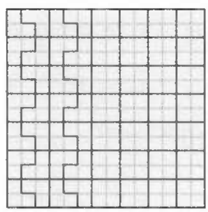
Torej velja $|AG|^2 = |AF| \cdot |AD|$, od koder po definiciji točk G in F sledi, da je

$$\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 = \frac{|AD|}{2} \cdot |AD|$$

oziroma $|AB| = \sqrt{2}|AD|$.

III/4. Denimo, da porabimo k vsakih ploščic. Potem pokrijemo $4k + 3k = 7k$ polj, torej mora veljati $n^2 = 7k$. Od tod sledi, da je n^2 deljivo s 7 oziroma n je deljivo s 7. Če je $n = 7$, imamo tabelo velikosti 7×7, ki je ne moremo pokriti na predpisan način. Recimo, da to lahko naredimo. Pobarvajmo tabelo z dvema barvama kot prikazuje slika. Vsaka ploščica pokrije dve črni in dve beli polji, zato 7 takih ploščic pokrije 14 črnih in 14 belih polj. Torej mora 7 ploščic pokriti $28 - 14 = 14$ črnih in $21 - 14 = 7$ belih polj, zato vsaka ploščica pokrije sodo število črnih polj. Slednje pa očitno ni možno, saj je v vsaki vrstici liho črnih polj.





Torej je $n \geq 2 \cdot 7 = 14$. Ker pa kvadrat velikosti 14×14 lahko pokrijemo z uporabo po 28 ploščic vsake oblike (kot prikazuje slika), je $n = 14$ najmanjše tako število.

Ugotovitev $n^2 = 7k$ .... **1 točka**
Utemeljitev $n = 7\ell$ .... **1 točka**
Domneva $n = 14$ .... **1 točka**
Dokaz, da $n = 14$ ustreza (npr. s sliko) .... **1 točka**
Uvedba pasovnega barvanja .... **2 točki**
Sklep, da $n = 7$ ne ustreza .... **1 točka**

□ 4. letnik

IV/1. Ker za vsako realno število α velja $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$, je $\cos x^2 \leq 1$, $\cos y^2 \leq 1$ in $-\cos xy \leq 1$. Sledi

$$\cos x^2 + \cos y^2 - \cos xy \leq 3.$$

Pokazati moramo, da ne more veljati enačaj. Denimo, da velja. Potem je $\cos x^2 = 1$, $\cos y^2 = 1$ in $\cos xy = -1$, zato je $x^2 = 2k\pi$, $y^2 = 2l\pi$ in $xy = \pi + 2m\pi$ za neka cela števila k, l in m. Potem pa velja

$$(\pi + 2m\pi)^2 = (xy)^2 = x^2y^2 = 2k\pi \cdot 2l\pi,$$

torej je $(1 + 2m)^2 = 4kl$. V tej enačbi je leva stran liho število, desna pa sodo. Dobili smo protislovno enačbo, kar pomeni, da enačaj ne more veljati.

Ugotovitev $-1 \le \cos\alpha \le 1$ .... **1 točka**
Sklep $\cos x^2 + \cos y^2 - \cos xy \le 3$. .... **1 točka**
Sklep $\cos x^2 = 1$, $\cos y^2 = 1$ **in** $\cos xy = -1$ .... **1 točka**
Sklep $x^2 = 2k\pi$, $y^2 = 2l\pi$ **in** $xy = \pi + 2m\pi$ .... **1 točka**
Sklep $(\pi + 2m\pi)^2 = (xy)^2 = x^2y^2 = 2k\pi \cdot 2l\pi$ .... **2 točki**
Poenostavitev $(1 + 2m)^2 = 4kl$ **in sklep, da je ta enačba protislovna** .... **1 točka**

IV/2. Označimo

$$x_n = |\ldots|\,|\,|\,x - 1\,| - 10\,| - 10^2\,| - \ldots - 10^{n-1}| - 10^n.$$

Enačba iz naloge nam torej pove, da velja $|x_{2006}| = 10^{2007}$, torej je $x_{2006} = \pm 10^{2007}$. Ker pa lahko ocenimo

$$x_{2006} = |x_{2005}| - 10^{2006} \ge -10^{2006},$$

od tod sledi, da je $x_{2006} = 10^{2007}$, torej je $|x_{2005}| = 10^{2006} + 10^{2007}$. Nadalje iz $x_{2006} = |x_{2004}| - 10^{2005} \ge 10^{2005}$ sledi $x_{2006} = 10^{2006} + 10^{2007}$ in je zato

$$|x_{2004}| = 10^{2005} + 10^{2006} + 10^{2007}.$$

Podobno sklepamo naprej. Če že vemo, da je

$$x_n = 10^{n+1} + 10^{n+2} + \ldots + 10^{2007},$$

sledi $x_{n-1} = \pm(10^{n+1} + 10^{2007-n+1} + \ldots + 10^{2007})$. Zaradi $x_{n-1} = |x_n| - 10^n \ge -10^n$ dobimo, da je

$$x_{n-1} = 10^n + 10^{n+1} + \ldots + 10^{2007}.$$

Torej je $|x - 1| = 10 + 10^2 + \ldots + 10^{2007}$, od koder sledi

$$x = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{2007} = \underbrace{11\ldots1}_{2008}$$

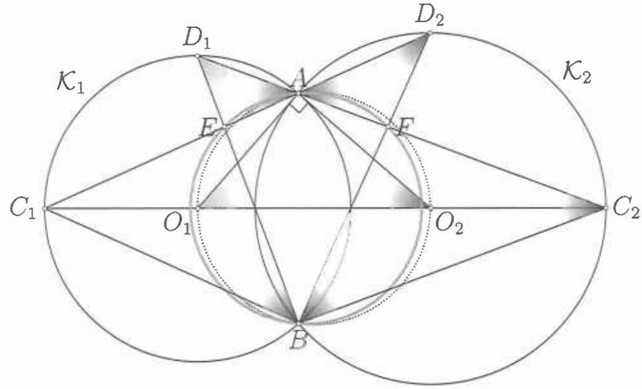
ali

$$x = 1 - 10 - 10^2 - \ldots - 10^{2007} = -(\underbrace{11\ldots1}_{2007}0 - 1) = -\underbrace{11\ldots1}_{2006}09.$$

Stota števka števila $|x|$ je v obeh primerih enaka 1.

Vpeljava $x_n = |\ldots|\,|\,|\,x - 1\,| - 10\,| - 10^2\,| - \ldots - 10^{n-1}| - 10^n$. .... **1 točka**
Dokaz $x_{2006} = 10^{2007}$ .... **2 točki**
Induktivni sklep $|x - 1| = 10 + 10^2 + \ldots + 10^{2007}$ .... **2 točki**
Rešitev $x = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{2007} = \underbrace{11\ldots1}_{2008}$ .... **1 točka**
Rešitev $x = 1 - 10 - 10^2 - \ldots - 10^{2007} = -\underbrace{11\ldots1}_{2006}09$. .... **1 točka**

IV/3. Ker je štirikotnik AO_1BO_2 tetiven in leži središče njemu očrtane krožnice na simetrali tetive AB, torej na daljici O_1O_2, po Talesovem izreku sledi $\sphericalangle O_1AO_2 = \sphericalangle O_2BO_1 = \frac{\pi}{2}$.



Naj bo $\sphericalangle AO_2O_1 = \alpha$. Potem je $\sphericalangle AO_2B = 2\alpha$. To pa je središčni kot nad tetivo AB v krožnici $\mathcal{K}_2$, zato je enak dvakratniku obodnega kota $\sphericalangle AD_2B$ oziroma $\sphericalangle AC_2B$ nad to tetivo. Torej je $\sphericalangle AD_2B = \sphericalangle AC_2B = \alpha$.

Velja še $\sphericalangle AO_1O_2 = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle O_1O_2A = \frac{\pi}{2} - \alpha$, zato je $\sphericalangle AO_1B = 2\sphericalangle AO_1O_2 = \pi - 2\alpha$ in $\sphericalangle BC_1A = \sphericalangle BD_1A = \frac{1}{2}\sphericalangle AO_1B = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

V deltoidu AC_1BC_2 poznamo $\sphericalangle AC_1B = \frac{\pi}{2} - \alpha$ in $\sphericalangle AC_2B = \alpha$, zato lahko izračunamo

$$\sphericalangle C_2AC_1 = \sphericalangle C_2BC_1 = \frac{2\pi - \sphericalangle AC_1B - \sphericalangle AC_2B}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

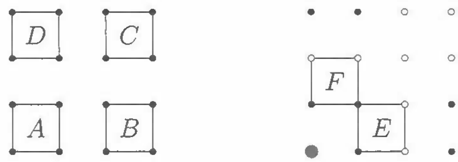
Zato je $\sphericalangle D_1AC_1 = \pi - \sphericalangle C_1AC_2 = \frac{\pi}{4}$ in prav tako $\sphericalangle C_2AD_2 = \sphericalangle D_1AC_1 = \frac{\pi}{4}$. Z upoštevanjem enakosti obodnih kotov dobimo še $\sphericalangle C_2BD_2 = \sphericalangle C_2AD_2 = \frac{\pi}{4}$ in $\sphericalangle D_1BC_1 = \sphericalangle D_1AC_1 = \frac{\pi}{4}$, zato je

$$\sphericalangle FBE = \sphericalangle C_2BC_1 - \sphericalangle C_2BD_2 - \sphericalangle D_1BC_1 = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

torej je $\sphericalangle EAF + \sphericalangle FBE = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi$, zato točke A, E, B in F res ležijo na skupni krožnici.

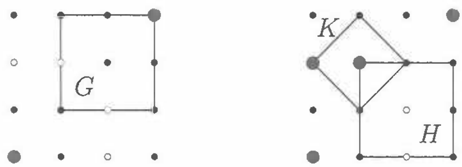
Sklep $\sphericalangle O_1AO_2 = \sphericalangle O_2BO_1 = \frac{\pi}{2}$ .... **1 točka**
Sklep $\sphericalangle AD_2B = \sphericalangle AC_2B = \alpha$ .... **1 točka**
Sklep $\sphericalangle BC_1A = \sphericalangle BD_1A = \frac{1}{2}\sphericalangle AO_1B = \frac{\pi}{2} - \alpha$ .... **1 točka**
Sklep AC_1C_2 **je deltoid in** $\sphericalangle C_2AC_1 = \frac{3\pi}{4}$. .... **1 točka**
Sklep $\sphericalangle C_2BD_2 = \sphericalangle C_2AD_2 = \frac{\pi}{4}$ **in** $\sphericalangle D_1BC_1 = \sphericalangle D_1AC_1 = \frac{\pi}{4}$ .... **1 točka**
Sklep $\sphericalangle FBE = \frac{\pi}{4}$ .... **1 točka**
Sklep $\sphericalangle EAF + \sphericalangle FBE = \pi$ **in zato je** $BFAE$ **tetiven** .... **1 točka**

IV/4. Dokazali bomo, da moramo pobarvati pet točk.



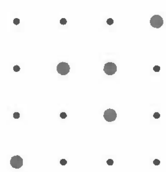
Ker mora biti v vsakem izmed 4 kvadratkov A, B, C, D, označenih na prvi sliki, vsaj eno oglišče rdeče, potrebujemo vsaj 4 rdeče točke. Denimo, da je to že dovolj. Kvadrat velikosti 3×3 ima vsaj eno rdeče oglišče. Predpostavimo lahko, da je to oglišče $(1, 1)$. Torej so preostala oglišča kvadrata A črna. Oglejmo si kvadratek E. Ker sta oglišči, ki sta skupni A in E, črni, mora biti rdeče eno od oglišč, skupno B in E. Preostali oglišči v B sta tako črni. Podobno sklepamo še za kvadratka F in D.

Kvadrat G, ki ga prikazuje tretja skica, ima že 3 črna oglišča, zato mora biti oglišče $(4, 4)$ rdeče.



Kvadrata H in K že imata tri črna oglišča, tako morata biti preostali rdeči. To pa je v nasprotju s predpostavko, da je v D le eno rdeče oglišče.

Dokazali smo torej, da mora biti vsaj 5 točk pobarvanih rdeče. Kot kaže spodnja slika, pa 5 rdečih točk tudi zadošča.



Utemeljitev, da potrebujemo vsaj 4 rdeče točke .... 1 točka
Skica ali konstrukcija, da 5 rdečih točk zadošča .... 3 točke
Popolna obravnava vseh primerov in sklep, da 4 rdeče točke niso dovolj .... 3 točke
Opomba: Za vsak izpuščen primer ali sklep "točka je v največjem številu kvadratov, zato jo je najbolje pobarvarti" se odbije po ena točka. Na zadnji sliki je narisana ena izmed možnosti, kako lahko pobarvamo točke rdeče. Tekmovalec lahko nariše tudi kakšno drugo konfiguracijo in dokaz prilagodi tej konfiguraciji.