Tekmovanja

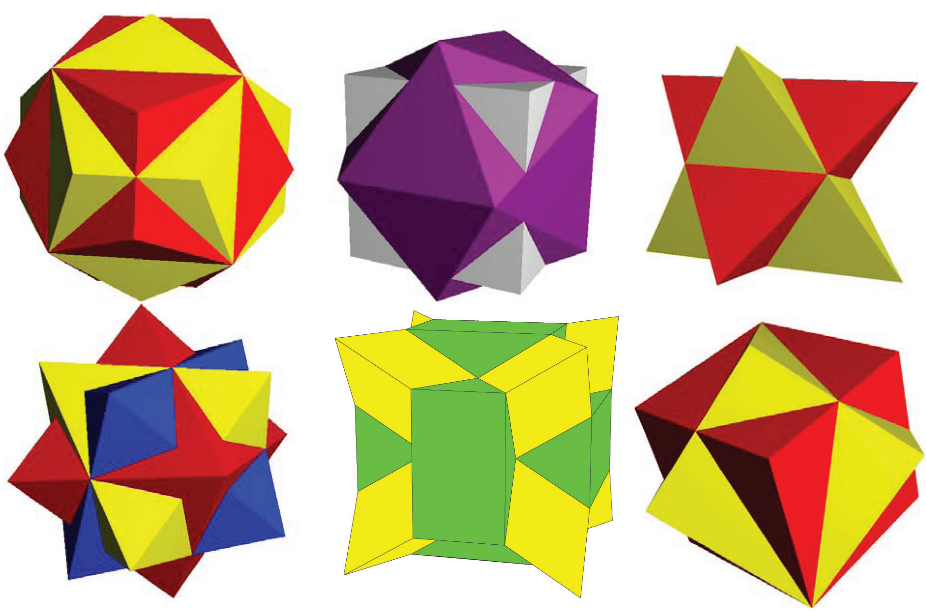
■ Tekmujmo v razvedrilni matematiki

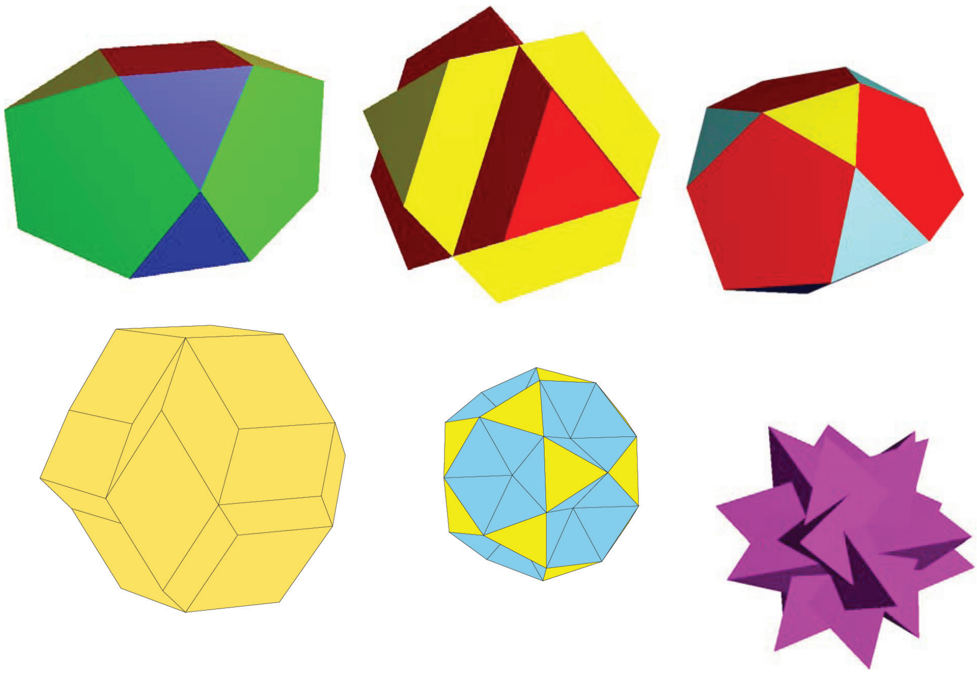
18. državno tekmovanje iz razvedrilne matematike bo potekalo
v soboto, 29. septembra 2007,
na Fakulteti za elektrotehniko v Ljubljani.

Na tekmovanje se lahko učenci 6., 7., 8. in 9. razreda devetletne OŠ, dijaki in študentje (oz. odrasli) se lahko bralci Preseka prijavijo takole:

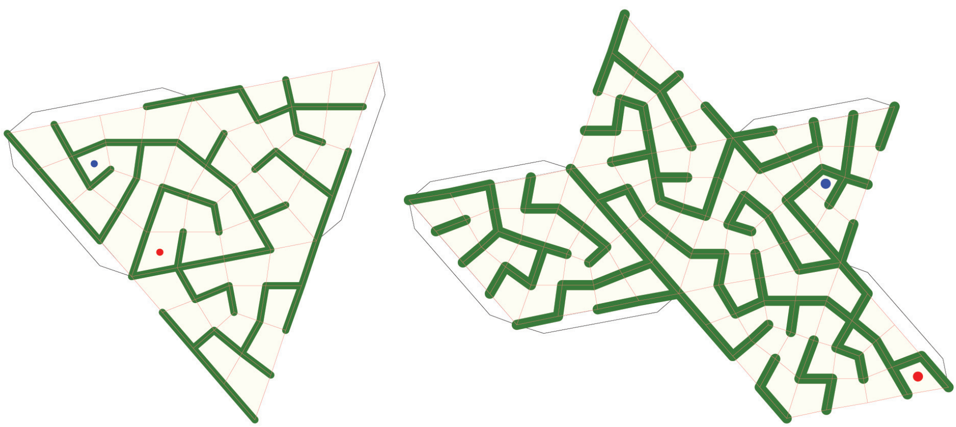
Rešiti morajo čim več nalog iz rubrike *Tekmujmo v razvedrilni matematiki* iz te številke. Rešitve nalog morajo poslati do 28. avgusta na naslov Presek, Jadranska 19., 1000 Ljubljana, s pripisom **"Za 18. tekmovanje iz razvedrilne matematike"** v navadni **(nepriporočeni)** pošiljki. Učenci, študentje in dijaki morajo pripisati razred oz. letnik, ki ga bodo jeseni obiskovali. Te podatke navedite tudi na kuverti. Na tekmovanje bo povabljenih 5 tekmovalcev za vsako skupino. Pri tem bo odločilno število pravilnih odgovorov. V primeru večjega števila prijav pa bo odločal žreb. Tekmovalci bodo o uvrstitvi na tekmovanje obveščeni po internetu na strani http://matematika.fe.uni-lj.si/people/izidor/homepage/RM/ do 14. septembra 2007.

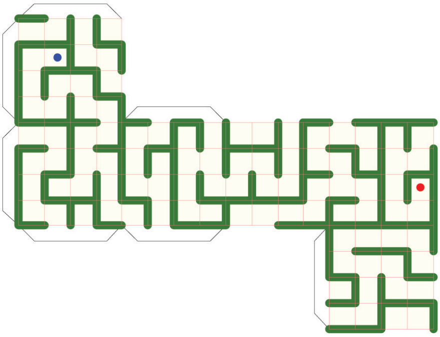
a) Telesom določi tip rotacijske simetrije, opiši ravnine zrcaljenja in določi morebitno inverzijo. Pri tem razlikuj dva primera, pri prvem upoštevaj barve, pri drugem pa predpostavi, da je telo obarvano z eno samo barvo.

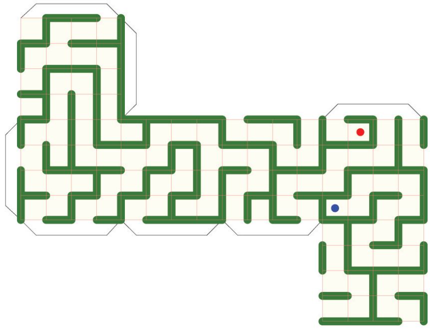


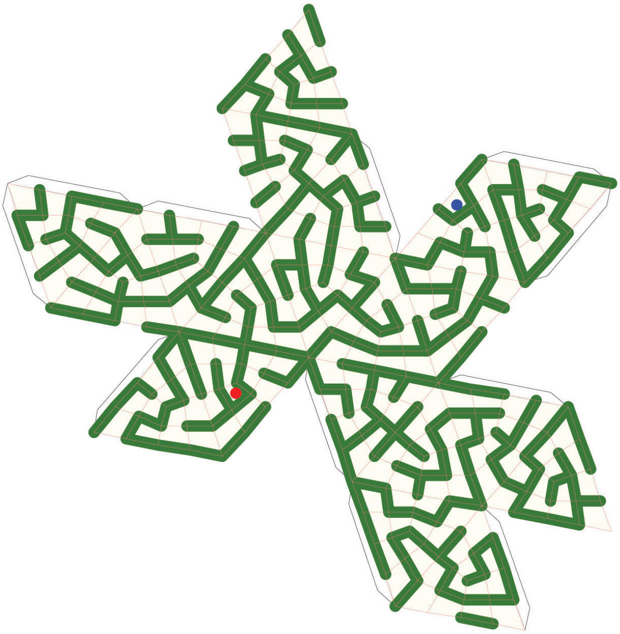


b)
Poišči pot od rdeče do modre pike v labirintu.



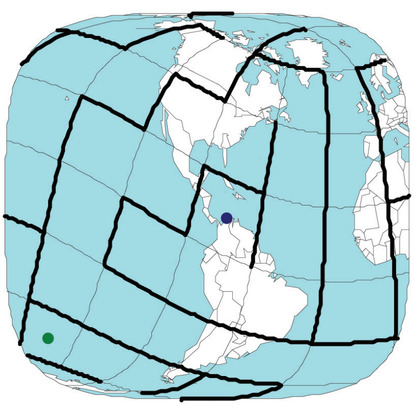


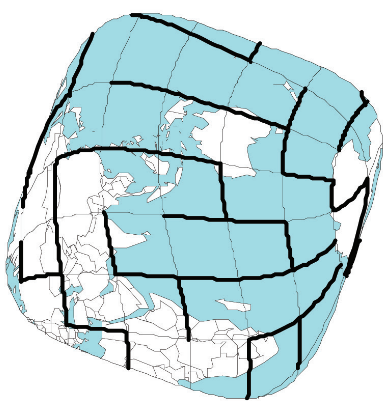


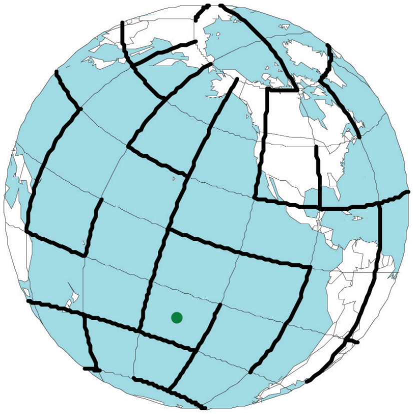


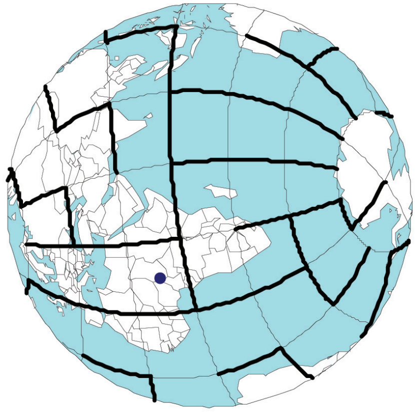
c)

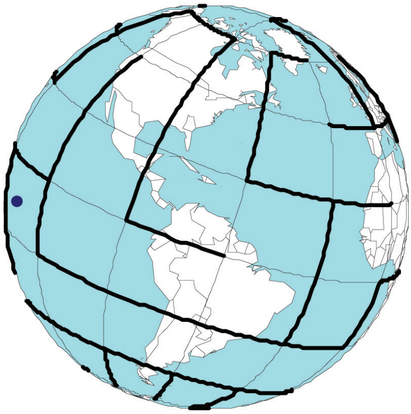
Poveži zeleno in modro piko na zemeljskem labirintu.

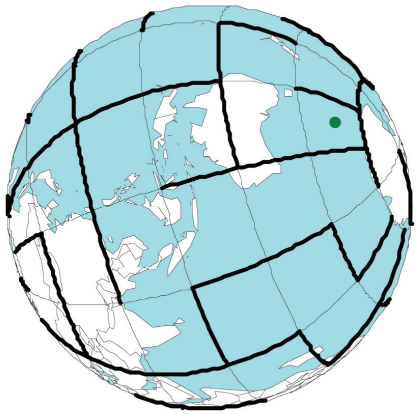


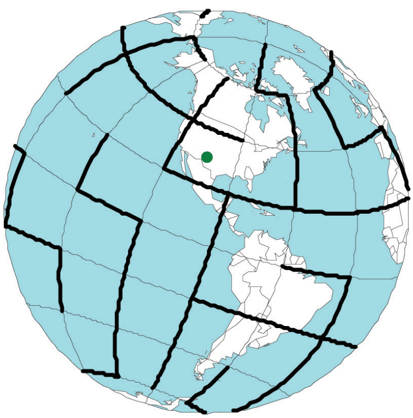


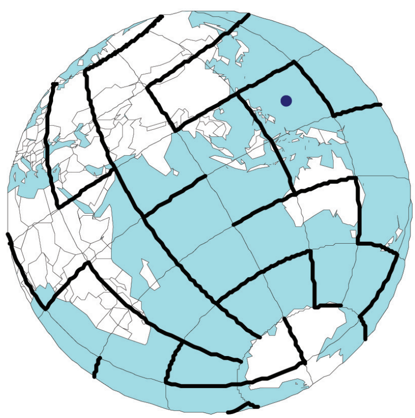




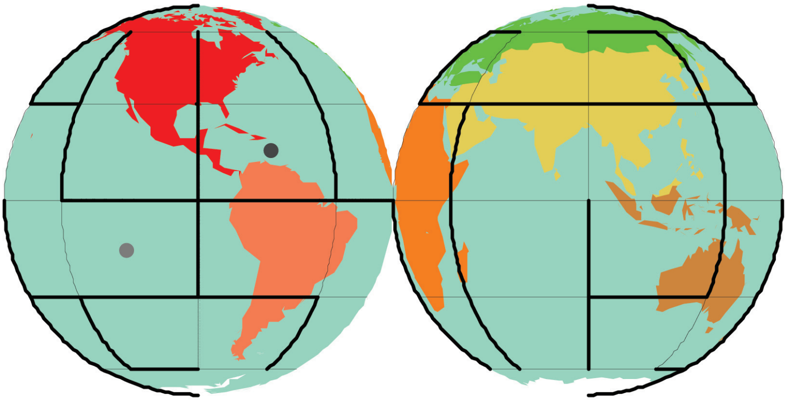


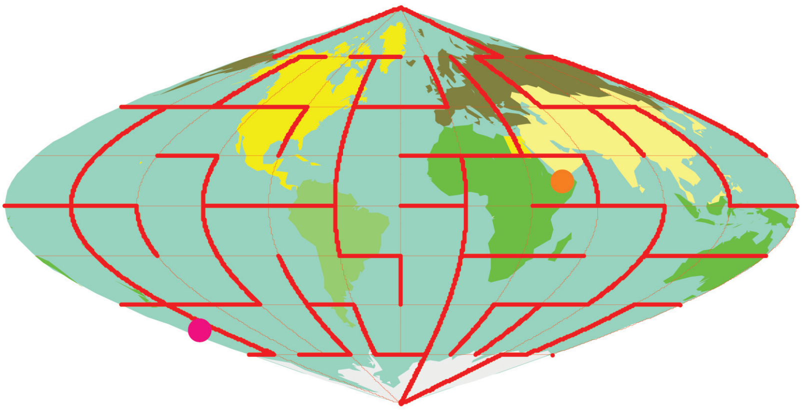


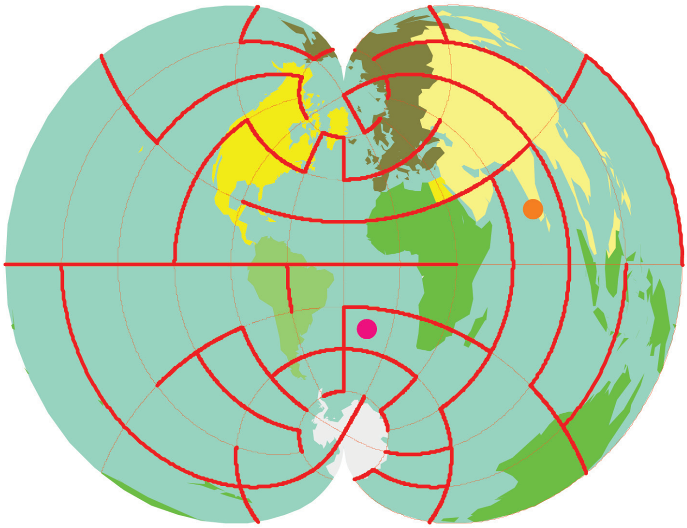




d)
Poveži točki na zemljevidu.



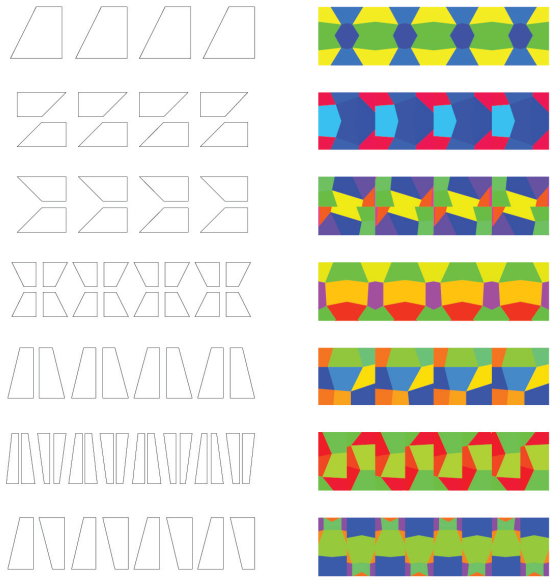




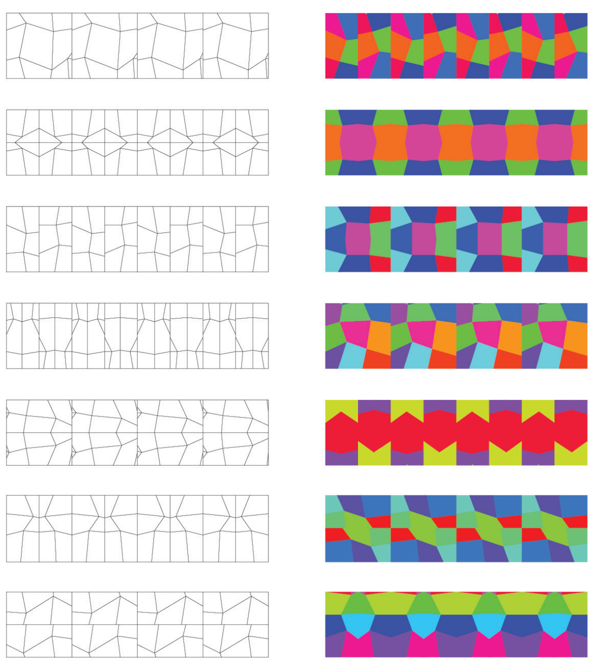
e)

S črto poveži vsako sliko iz levega stolpca s tisto sliko desnega stolpca, ki ustreza isti grupi.

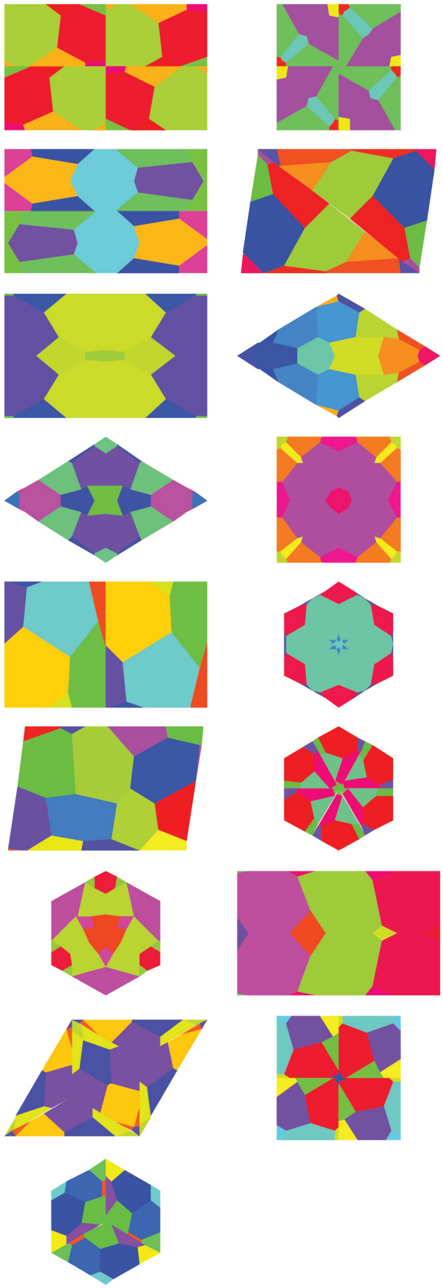
1.

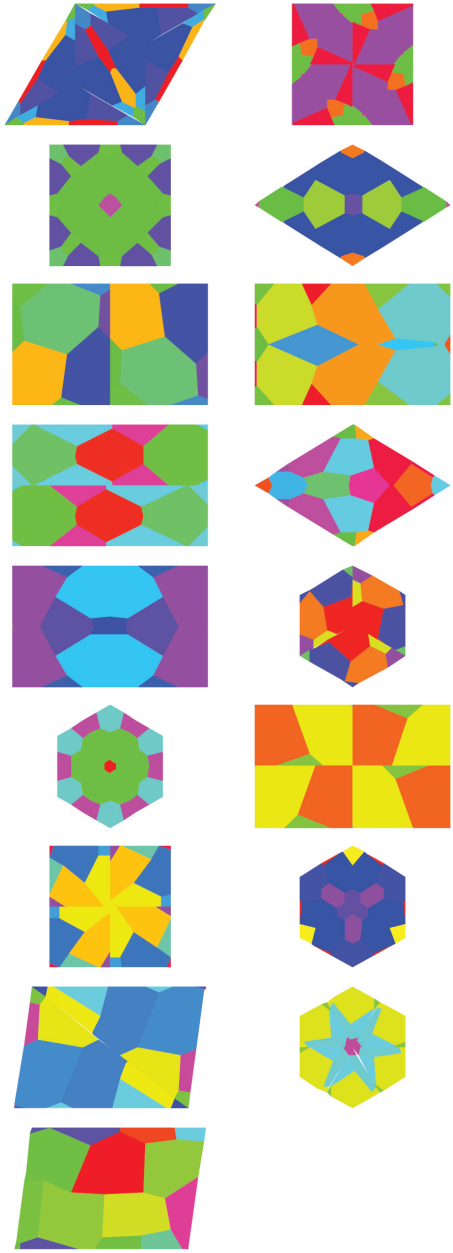


2.

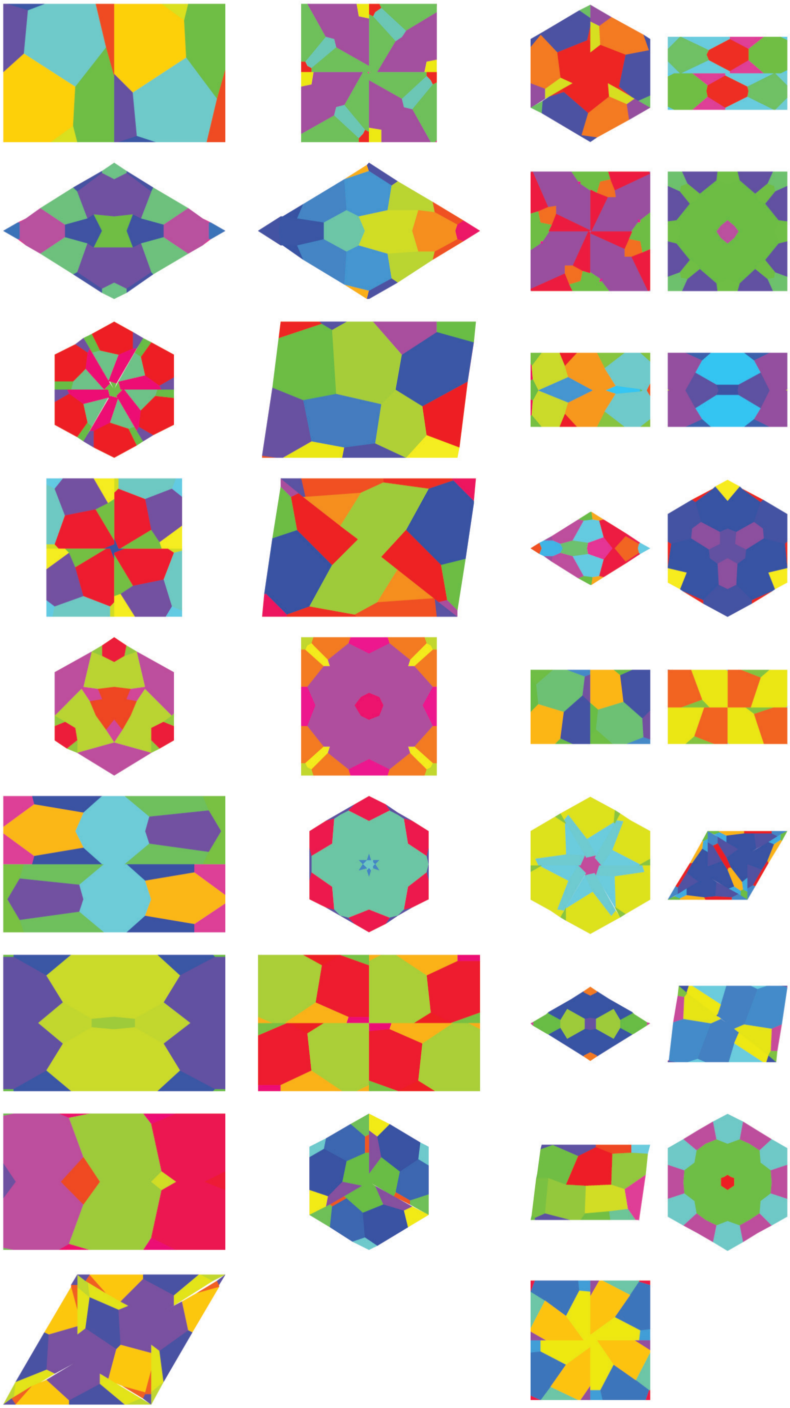


f) Oštevilči sličice na levi polovici z 1 do 17. Nato zaznamuj z isto številko sličico na desni strani, ki ustreza isti grupi.
1.





2.



g)

Sudoku

1.

	1							
	3					2		
		4						
						4	1	
				2			3	
5								
		3						

2.

						4		
	2							
			4				5	
								1
					1		4	
							3	
		4						

3.

						4		
	2							
3						2		1
							4	
	5							
							2	
					3			

4.

			1			4		
	2							
			4					1
				3				
					5	2	1	

5.

		6				5		
			1					
								2
			5			4		
			6					
				1	3		6	
								4
		5						

6.

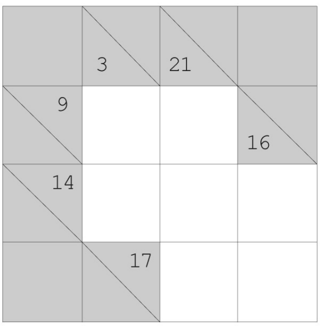
		6				5		
			1					
								2
			5			4		
			6					
				1	3		6	
								4
		5						

h)
Križne vsote

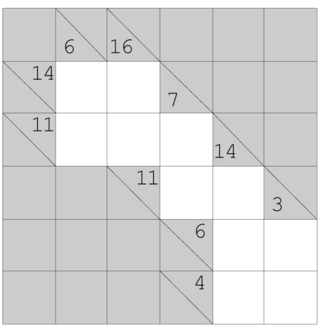
NALOGE

Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da je vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in stolpcih enaka številu, ki je zapisano v črnem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo.Pri tem pa morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

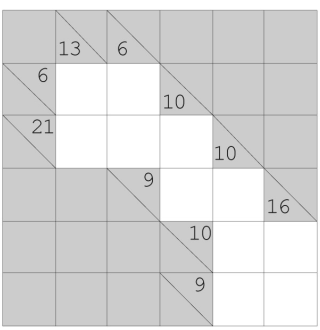
1.



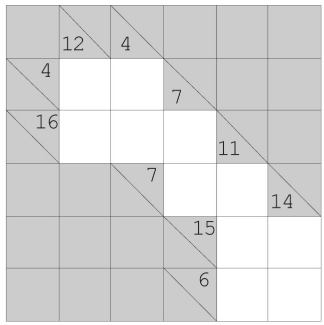
2.



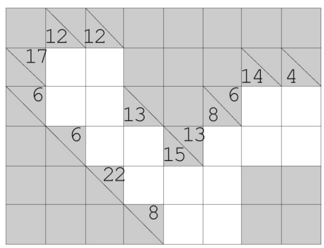
3.



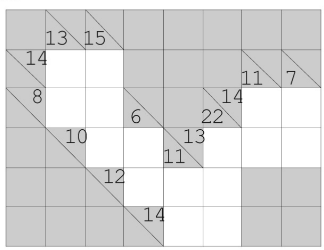
4.



5.



6.



■ Naloge z državnega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2005/06

□ Skupina 1

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

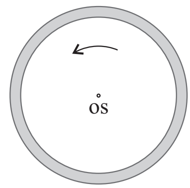
1. Z levega zgornjega roba kanala, ki ima v prečnem prerezu obliko kvadrata s stranico 2 m, frcnemo v vodoravni smeri, pravokotno na rob kanala, majhno gumijasto žogico.

   a) Čez koliko časa se žogica prvič vrne na začetno višino?

   b) Kolikšna mora biti začetna hitrost žogice, da se bo od vsake notranje stene kanala in od dna kanala odbila po enkrat ter dosegla desni zgornji rob kanala?

   Odboji žogice so prožni.

2. Po načrtih Hermana Potočnika bi zgradili mednarodno vesoljsko postajo v obliki bivalnega obroča, ki bi z vrtenjem omogočal občutek težnosti. Skico postaje kaže slika. Polmer obroča je 50 m, širina obroča pa je zanemarljiva v primerjavi s polmerom. Postaja se vrti okoli glavne geometrijske osi skozi središče obroča.



   a) S kolikšno kotno hitrostjo se mora vrteti kolo, da bodo telesa na tleh postaje čutila enako silo podlage kot na Zemlji?

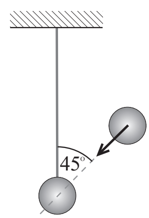
   b) Kolikšna je razlika pospeškov med nogami in glavo 2 m visokega astronavta?

   c) Izračunaj polmer postaje in kotno hitrost vrtenja, da bo razlika pospeškov iz primera b) ena tisočinka težnega pospeška, telo pa bo čutilo enako silo podlage kot na Zemlji.

   d) Astronavt se na obodu postaje rahlo odrine (z zanemarljivo majhno hitrostjo) navzven od postaje pri vrtenju postaje kot v primeru a). Koliko bo oddaljen od središča postaje po 5 s?

3. V mirujočo kroglico z maso m, ki visi na neraztegljivi močni vrvici, se zaleti kroglica z enako maso in s hitrostjo v. Kot med navpično vrvico in smerjo gibajoče kroglice je 45° (glej sliko). Trk med kroglicama je popolnoma prožen in centralen. Poišči izraz za hitrost proste kroglice po trku?

   Namig: Če je trk centralen, ima sila med kroglicama smer zveznice med središčema kroglic, iz česar lahko sklepaš na smer, ki jo ima prosta kroglica po trku.

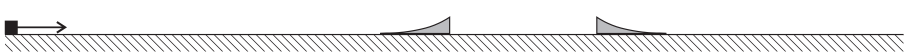


4. Majhno ploščico ledu poženemo z začetno hitrostjo 7 m/s preko starta proti 15 m oddaljenemu cilju kot prikazuje slika (na sliki sta odskočišče in doskočišče zaradi nazornosti povečani).

   a) Na razdalji 9 m od starta pritrdimo na poti majhno odskočišče z naklonskim kotom 20° in z zanemarljivo dolžino in višino. Kam moramo pri tem pritrditi doskočišče (enako kot odskočišče, samo nasprotno obrnjeno), da bo ploščica ledu gladko pristala in v nadaljevanju poti drsela po podlagi?

   b) V kolikšnem času pride ploščica ledu na cilj?

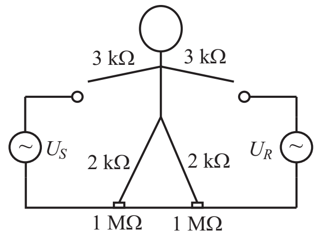
   Koeficient trenja med podlago in ploščico ledu je 0,15.



□ Skupina 2

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Elektroinštalater opravlja delo na prevodni podlagi v bližini dveh žic večfazne sinusne izmenične napeljave, ki sta pod napetostima U_R in U_S kot to prikazuje slika.



   a) Določi efektivni tok, ki steče preko elektroinštalaterjevega trupa, ko se ta z eno roko dotakne samo ene izmed obeh žic.

   b) Elektroinštalater se hkrati dotakne obeh žic, in sicer z eno roko ene, z drugo roko pa še druge žice. Kje teče največji tok skozi elektroinštalaterja in kolikšen je?

   Predpostavi, da je upor roke 3 kΩ, upor noge 2 kΩ, upor trupa lahko zanemariš. Upoštevaj, da je elektroinštalater obut in se z obema nogama dotika tal, vsak izmed obeh čevljev pa ima upor 1 MΩ. Amplitudi napetosti U_R in U_S sta 320 V, medfazna napetost $U_R - U_S$ pa ima amplitudo 550 V.

2. Za merjenje spreminjanja vodne gladine v jezeru uporabimo ploščati kondenzator iz dveh kvadratnih plošč s stranico po 50 cm, med katerima je razdalja 1,0 cm. Kondenzator deloma potopimo v vodo, tako da sta plošči pravokotni na vodno gladino, spodnja in zgornja stranica posamezne plošče pa sta vzporedni z vodno gladino. Nato kondenzator vežemo v krog z izvirom konstantne napetosti 280 V in občutljivim merilnikom toka. Kolikšen tok kaže merilnik, če se gladina dviga s hitrostjo 1 mm/s?

   Influenčna konstanta je $\varepsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12}$ As/Vm, dielektričnost vode pa je $\varepsilon = 81$. Če prazen kondenzator s kapaciteto C_0 v celoti zapolnimo s snovjo z dielektričnostjo ε, se mu kapaciteta poveča na εC_0.

3. Kartezijev plavač je navzdol obrnjena epruveta, v kateri je ujetega nekaj zraka. V odvisnosti od prostornine zraka plavač lahko plava na površju, lebdi v vodi na določeni globini ali pa je potopljen na dnu posode. V posodi, ki je do višine 1 m napolnjena z vodo, so trije plavači, ki jih uporabimo za prikazovalnik temperature.

   a) Koliko miligramov zraka naj bo v prvi, drugi, tretji epruveti, da se prvi plavač dvigne z dna pri 10 °C, drugi pri 20 °C in tretji pri 30 °C?

   b) Ali se plavač ponovno spusti na dno posode, ko temperatura pade pod temperaturo, pri kateri se je dvignil? Če ne, pri kolikšni temperaturi bi ponovno potonil prvi, drugi in tretji plavač? Bi res lahko vsi potonili na tak način?

   Pri poskusu zrak ne uhaja iz epruvet. Masa posamezne epruvete je 5 g. Teža zraka v epruveti je zanemarljiva v primerjavi s težo stekla. Zunanji zračni tlak je 100 kPa, gostota vode je 1000 kg/m^3, gostota stekla, iz katerega je epruveta, pa 2500 kg/m^3; privzamemo, da se obe gostoti s temperaturo ne spreminjata. Kilomolska masa zraka je $M = 29$ kg/kmol, splošna plinska konstanta $R = 8300$ J/kmol K.

4. V vodo spustimo štiri drobne nabite steklene kroglice. Če skozi stekleno kroglico posvetimo z močnim curkom laserske svetlobe, je kroglica zaradi prečnih sil svetlobe na kroglico prosto gibljiva le vzdolž curka laserske svetlobe. Če stekleno kroglico ujamemo v presečišče dveh curkov laserske svetlobe, jo s tem fiksiramo.

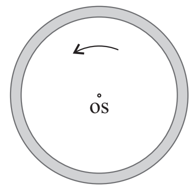
   Dve izmed štirih steklenih kroglic na opisani način fiksiramo, tako da je razdalja med njima 100 μm. Preostali kroglici s curkom laserske svetlobe omejimo na premico, ki poteka skozi središče zveznice fiksiranih kroglic in je nanjo pravokotna. Vsaka izmed fiksiranih kroglic nosi negativni naboj, ki je po absolutni vrednosti dvakrat manjši od pozitivnega naboja, ki ga nosi vsaka izmed nefiksiranih kroglic. Kolikšna je v ravnovesnem stanju razdalja med nefiksiranima kroglicama?

Nabite kroglice obravnavaj kot točkaste naboje. Teže kroglic so zanemarljivo majhne v primerjavi z elektrostatskimi silami med kroglicami.

□ Skupina 3

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Po načrtih Hermana Potočnika bi zgradili mednarodno vesoljsko postajo v obliki bivalnega obroča, ki bi z vrtenjem omogočal občutek težnosti. Skico postaje kaže slika. Obroč ima polmer 50 m in se vrti s kotno hitrostjo $0,45\ \mathrm{s}^{-1}$ okrog glavne geometrijske osi. Širina obroča je zanemarljiva v primerjavi s polmerom. Skupna masa postaje je 10 ton in je razporejena enakomerno po obroču. Po posebnih ceveh se iz središča postaje v obroč vkrca 100 ljudi s povprečno maso 80 kg. Ljudje se enakomerno razporedijo po obroču, dimenzije ljudi so zanemarljive v primerjavi s polmerom obroča.



   a) Za koliko se spremeni kotna hitrost vrtenja postaje, ko se vsi ljudje enakomerno razporedijo po obroču? Mase delov postaje med osjo in obročem so zanemarljivo majhne.
   b) Na obroču so štirje motorji z močjo vsak po 10 kW, razporejeni enakomerno po krogu in tako usmerjeni, da ga vsi vrtijo v isti smer, pri čemer delujejo na obroč s silo v tangentni smeri. Koliko časa morajo delovati motorji s konstantno močjo, da se bo postaja vrtela s prvotno kotno hitrostjo?
   c) Pri prvotni kotni hitrosti vrtenja postaje se astronavt na obodu postaje rahlo odrine (z zanemarljivo majhno hitrostjo) navzven od postaje. Koliko bo oddaljen od središča postaje po 5 s?

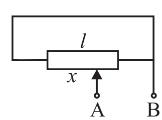
2. Na prvo krajišče vzmeti s prožnostnim koeficientom 100 N/m pričvrstimo utež z maso 1 kg in damo utež na tla, drugo krajišče pa primemo in dvignemo do višine, da je vzmet navpična in nenapeta. Drugo krajišče pričnemo vleči s stalno hitrostjo 40 cm/s navpično navzgor.

   a) V kolikšnem času po začetku vlečenja se utež odlepi od tal?
   b) V kolikšnem času, po tem ko se odlepi, doseže utež hitrost roke?
   c) Kolikšna je navečja hitrost uteži?
   d) Na kolikšni višini doseže telo največjo hitrost? Ali je rešitev enolična?
   e) Kolikšen je največji raztezek vzmeti?

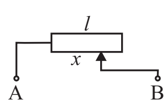
   Namig: Razmisli, kako opiše gibanje uteži opazovalec, ki se giblje skupaj z roko.

3. Enaka drsna upornika sta vezana na dva načina kot kažeta skici a) in b). Polni upor posameznega drsnega upornika je 10 kΩ. Dolžina l je 5 cm. Drsna upornika uporabljamo v vezju, v katerem z odmikom x nastavljamo upora med točkama A in B in tako reguliramo tok skozi del vezja.

a)



b)



   i) Prostoročno skiciraj v istem koordinatnem sistemu graf, ki kaže upor vezja med priključkoma A in B v odvisnosti od odmika x za obe vezavi.

ii) Med točki A in B priključimo 12 V baterijo z zanemarljivim notranjim uporom in konstantno napetostjo. Skiciraj v istem koordinatnem sistemu grafa, kako se moč, ki jo trošita drsna upornika, spreminja z odmikom x.

4. Enaka naloga kot II/4.

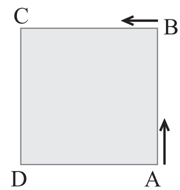
Ciril Dominko

■ Naloge z regijskega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2005/06

□ 1. skupina

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Deček in deklica enakomerno tečeta okoli hiše, ki ima v tlorisu obliko kvadrata. Oba tečeta tik ob stenah hiše, in sicer v nasprotni smeri urinega kazalca. Deček začne v vogalu A in teče s hitrostjo 2,5 m/s, deklica pa začne istočasno v vogalu B in teče s hitrostjo 2,3 m/s. Izračunaj, ob kateri steni hiše (stranici kvadrata) deček ujame deklico.



2. V prazno valjasto posodo s polmerom 8 cm stresemo 3000 lesenih kroglic s polmerom 4 mm. Nato zlijemo v posodo 2 litra vode.

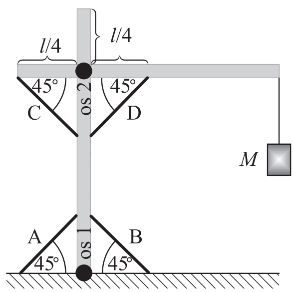
   a) Približno izračunaj (oceni) število potopljenih kroglic.

   b) Na kateri višini nad dnom posode je vodna gladina?

   Gostota lesa je 700 kg/m^3, vode 1000 kg/m^3. Lesene kroglice ne vpijajo vode.

3. Model žerjava sestavljata navpična palica z dolžino 50 cm in maso 2 kg in enaka vodoravna palica, ter štiri enake vrvice A, B, C in D (glej sliko). Navpična palica je vrtljivo vpeta v tla v osi 1, vodoravna palica pa je vrtljivo vpeta v navpično palico v osi 2. Na krajišče vodoravne palice obesimo utež z maso $M = 3$ kg. Vse vrvice in palice so v isti navpični ravnini. Ostali podatki so na sliki.

   S kolikšnima najmanjšima silama sta v ravnovesju napeti vrvici A in B, s kolikšnima pa vrvici C in D?



4. Stoječ cirkuški artist priveže en konec lahke prožne vrvi na pritrjen navpični drog, drugi konec pa si priklene ob pas. Od droga se odmakne toliko, da je vrv vodoravna, a še nenapeta. Nato se začne v smeri vrvi počasi po prstih oddaljevati od droga in na tak način napenjati vrv. V trenutku, ko je raztezek vrvi 2,0 m, artistu zaradi neprevidnosti zdrsne. Vrv ga potegne, tako da začne po podplatih drseti proti drogu, pri čemer se tal ves čas dotika s podplati in je vzravnan. Ustavi se ravno v točki, ko postane vrv spet nenapeta.

Artistovi copati so izdelani tako, da je koeficient lepenja med prsti in tlemi veliko večji od koeficienta trenja med podplati in tlemi. Vrv je ves čas vodoravna.

a) Izračunaj koeficient trenja med artistovimi podplati in tlemi.

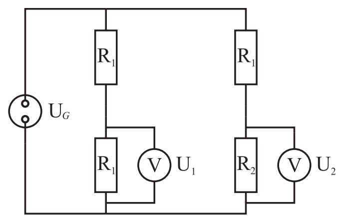
b) V kateri točki med drsenjem proti drogu ima artist največjo hitrost? Kolikšen del največje prožnostne energije vrvi je tedaj kinetična energija artista?

Masa artista je 70 kg, prožnostni koeficient vrvi pa je 140 N/m.

□ 2. skupina

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Z voltmetrom z neznanim notranjim uporom najprej pomerimo napetost U_1, nato pa še napetost U_2, kot to prikazuje slika. Izmerimo $U_1 = 4{,}9$ V in $U_2 = 3{,}0$ V.

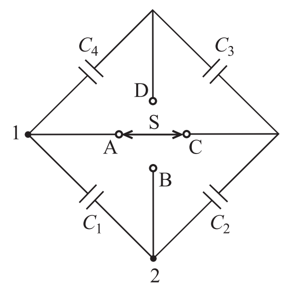


   a) Določi notranji upor voltmetra R_V.

   b) Kolikšna je vrednost upora R_2?

   Upor $R_1 = 10$ kΩ, gonilna napetost vira je $U_G = 10$ V, notranji upor vira pa je zanemarljivo majhen.

2. Električno vezje sestavljajo štirje kondenzatorji s kapacitetami $C_1 = 100$ μF, $C_2 = 3C_1$, $C_3 = 6C_1$ ter $C_4 = C_1$. Stikalo S je na začetku v legi AC, kot je prikazano na sliki.



   a) Kolikšni naboji so na posameznih kondenzatorjih, ko med točki 1 in 2 priključimo napetost 9 V?

   b) Pri vključenem viru preklopimo stikalo v lego BD. Kolikšni so po tem naboji na posameznih kondenzatorjih?

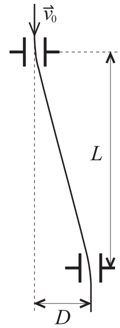
3. V posodi, ki je napolnjena z vodo pri 24 °C, plava navzdol obrnjena epruveta, v kateri je 1,00 cm^3 zraka. Masa epruvete je 1,6 g. Na kolikšno temperaturo moramo segreti ali ohladiti vodo v posodi, da epruveta ravno potone?

   Pri poskusu zrak ne uhaja iz epruvete. Gostota vode je 1000 kg/m^3, gostota stekla, iz katerega je epruveta, pa 2500 kg/m^3; privzamemo, da se obe gostoti s temperaturo ne spreminjata. Težo zraka v epruveti lahko zanemariš.

4. Curek hitrih elektronov s hitrostjo $v_0 = 2000$ km/s vzporedno premaknemo za $D = 20$ cm z dvema enakima ploščatima kondenzatorjema, kot kaže slika.

   a) Kolikšna je napetost na posameznem kondenzatorju, če je razdalja $L =$ 150 cm? Kondenzator sestavljata dve vzporedni kvadratni plošči s stranico 1 cm in razmikom med ploščama 3 mm. Pri računanju upoštevaj, da so dimenzije kondenzatorja mnogo manjše od razdalje med obema kondenzatorjema.

b) Napetost na kondenzatorjih izključimo, vključimo pa dve tuljavi, ki znotraj obeh kondenzatorjev ustvarita homogeno magnetno polje. Zunaj kondenzatorjev magnetnega polja ni. Kolikšna naj bo gostota magnetnega polja in smer v posamezni tuljavi, da se bo tudi v tem primeru curek elektronov vzporedno premaknil v isto smer in za enako razdaljo. Upoštevaj, da so dimenzije tuljave mnogo manjše od razdalje med tuljavama.



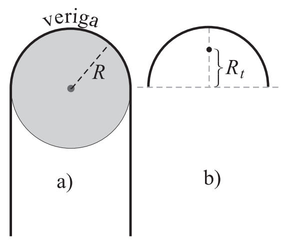
Masa elektrona je $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, naboj pa $-1{,}6 \cdot 10^{-19}$ As.

□ 3. skupina

Kjer je potrebno, vzemi za težni pospešek vrednost 9,8 m/s^2.

1. Enaka naloga kot II/3.

2. Na prostovrteči verižnik (valj, ki se vrti okrog središča) z vztrajnostnim momentom $J = 0{,}01$ kgm^2 in polmerom $R = 10$ cm je obešena veriga z maso $m = 0{,}5$ kg in dolžino $l = 1$ m, kot prikazuje slika a). Oba dela verige, ki visita z verižnika, sta na začetku enako dolga. Verigo na enem krajišču rahlo potegnemo, da se začne premikati z zanemarljivo hitrostjo.

   a) Kolikšna je hitrost verige v trenutku, ko zdrsne z verižnika, če med verigo in verižnikom ni trenja?

   b) S kolikšno kotno hitrostjo pa se vrti verižnik v trenutku, ko z njega pade veriga, če veriga ne podrsava po obodu verižnika.

   Težišče polkrožnice (slika b)) je na višini $R_t = 2R/\pi$.

3. S stropa visi dolga lahka vzmet. Vzmet primemo za prosti konec, jo raztegnemo za 10 cm in jo v raztegnjenem stanju zadržujemo. Na prosti konec vzmeti pritrdimo utež in nato vzmet izpustimo. Utež se začne spuščati in doseže točko, ki je 29 cm pod lego, kjer smo obesili utež, preden se začne spet dvigati.

   a) Razmisli, do katere višine se utež ponovno dvigne, če je vzmet idealno prožna, in na podlagi tega določi mirovno lego uteži in raztezek vzmeti v mirovni legi.

   b) V kolikšnem času se utež spusti iz lege, kjer smo obesili utež, do najnižje točke?

4. Enaka naloga kot II/4, dodatno še vprašanje:

   c) Ali sta časa potovanj elektrona med kondenzatorjema oziroma tuljavama enaka v primerih a) in b)? Če nista, za koliko se razlikujeta? Kateri čas je manjši?

Ciril Dominko

■ Rešitve nalog z državnega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2005/06

□ 1. skupina

1. *Podatki:* $a = 2$ m.

a) Pri odbojih od sten se ne spremeni navpična komponenta hitrosti, zato se v navpični smeri žogica giblje tako kot pri prostem padu. Iskani čas je dvakratni čas padanja z višine a

$$t = 2\sqrt{\frac{2a}{g}} = 1{,}28\ \mathrm{s}\,.$$

b) Pri odbojih se ohranja velikost vodoravne komponente hitrosti. Ko doseže nasprotni rob, prepotuje v vodoravni smeri tri širine kanala: $v_x t = 3a$. Pri tem je čas enak času padanja, ki smo ga izračunali pri a). Začetna hitrost mora torej biti enaka

$$v = v_x = \frac{3a}{t} = \frac{3a}{2}\sqrt{\frac{g}{2a}} = \sqrt{\frac{9ag}{8}} = 4{,}7\ \mathrm{m/s}\,.$$

2. *Podatki:* $r = 50$ m, $h = 2$ m, $t = 5$ s.

a) Iz zahteve, da je radialni pospešek pri r enak težnemu, $\omega^2 r = g$, sledi

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}} = 0{,}44\ \mathrm{s}^{-1}\,.$$

b) Razlika pospeškov med nogami in glavo astronavta je enaka

$$\Delta a = \omega^2 r - \omega^2(r-h) = \omega^2 h = g\,\frac{h}{r} = 0{,}4\ \mathrm{m/s}^2\,.$$

c) Iz zahteve

$$\Delta a' = g\,\frac{h}{r'} = \frac{g}{1000}\,,$$

dobimo za radij postaje

$$r' = 1000h = 2000\ \mathrm{m}\,, \qquad \omega' = \sqrt{\frac{g}{r'}} = 0{,}070\ \mathrm{s}^{-1}\,.$$

d) Ko se astronavt spusti, nadaljuje pot premo enakomerno z obodno hitrostjo $v = \omega r$ v tangentni smeri glede na postajo. Oddaljenost od središča postaje po času t dobimo kar iz Pitagorovega trikotnika:

$$s = \sqrt{r^2 + (vt)^2} = r\sqrt{1+\omega^2 t^2} = \sqrt{r(r+gt^2)} = 121\ \mathrm{m}\,.$$

3. *Podatki:* m, v, $\varphi = 45°$.

Ker je trk centralen, prosta kroglica odleti pod enakim kotom, kot je priletela. Na sistem ne deluje nobena sila v vodoravni smeri, zato se ohranja skupna gibalna količina v tej smeri. Ker je vrvica neraztegljiva, je delo sile vrvice enako 0, in ker je trk tudi popolnoma prožen, se ohranja tudi skupna kinetična energija. Velja torej:

$$mv\sin 45^\circ = mv_2 - mv_1\sin 45^\circ\,,$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}\,.$$

Iz prve enačbe izrazimo v_2, iz druge pa v^2:

$$v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(v + v_1\Big)\,,$$

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2\,,$$

Prvo enačbo vstavimo v drugo. Za v_1 dobimo kvadratno enačbo:

$$v^2 = v_1^2 + \frac{1}{2}\Big(v^2 + v_1^2 + 2vv_1\Big)$$

in po preureditvi

$$\frac{3}{2}\,v_1^2 + vv_1 - \frac{1}{2}\,v^2 = 0\,.$$

Smiselna rešitev enačbe je

$$v_1 = \frac{-v + \sqrt{v^2(1+3)}}{3} = \frac{-v + 2v}{3} = \frac{1}{3}\,v\,.$$

4. *Podatki:* $s_0 = 15$ m, $v_0 = 7$ m/s, $s_1 = 9$ m, $k_{\mathrm{tr}} = 0{,}15$, $\varphi = 20^\circ$.

a) Pojemek pri drsenju je

$$a = \frac{F_{\mathrm{tr}}}{m} = k_{\mathrm{tr}}g = 1{,}47\ \mathrm{m/s^2}\,.$$

Hitrost pri odskočišču najlažje izračunamo iz enačbe $v^2 = v_0^2 - 2as_1$:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2k_{\mathrm{tr}}gs_1} = 4{,}75\ \mathrm{m/s}\,.$$

Glede na odskočišče moramo doskočišče postaviti na oddaljenosti, ki je enaka dometu pri poševnem metu z naklonskim kotom φ:

$$\Delta s = \frac{v^2}{g}\,\sin 2\varphi = 1{,}48\ \mathrm{m}\,.$$

b) Po doskoku nadaljuje pot z enako hitrostjo, kot je odskočil. Celotna pot, na kateri drsi, je enaka $s = s_0 - \Delta s$. Čas, ki ga potebuje za to pot, izračunamo iz enačbe za pot pri enakomerno pojemajočem gibanju:

$$s_0 - \Delta s = v_0 t - \tfrac{1}{2}at^2\,.$$

Smiselna rešitev kvadratne enačbe za t je

$$t = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2a(s_0 - \Delta s)}}{a} = 2{,}69 \text{ s} .$$

Temu času moramo prišteti še čas prebit v zraku:

$$t' = 2\,\frac{v}{g}\sin\varphi = 0{,}33 \text{ s} ,$$

skupaj torej 3,02 s.

□ 2. skupina

1. *Podatki:* $U_{S0} = U_{R0} = 320$ V, $R_{\text{roke}} = 3$ kΩ, $R_{\text{noge}} = 2$ kΩ, $R_{\text{obutve}} = 1$ MΩ, $U_{RS0} = 550$ V.

   a) Zaradi simetrije je rezultat neodvisen od tega, katere žice se elektroinštalater dotakne. Tok steče preko roke in obeh nog (vezavo prikazuje slika pri besedilu naloge). Nadomestni upor nog in obutve je $R' = (R_{\text{noge}} + R_{\text{obutve}})/2$. Velja

$$I(t) = \frac{U_R(t)}{R_{\text{roke}} + \frac{1}{2}(R_{\text{noge}} + R_{\text{obutve}})} ,$$

$$I_{\text{ef}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{U_{R0}}{R_{\text{roke}} + \frac{1}{2}(R_{\text{noge}} + R_{\text{obutve}})} = 450\ \mu\text{A} .$$

   b) V tem primeru steče največji tok preko obeh rok:

$$I(t) = \frac{U_R(t) - U_S(t)}{2R_{\text{roke}}} , \qquad I_{\text{ef}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{U_{RS0}}{2R_{\text{roke}}} = 65 \text{ mA} .$$

2. *Podatki:* $a = 50$ cm, $l = 1{,}0$ cm, $\varepsilon = 81$, $U = 280$ V, $v = 1$ mm/s.

   Kondenzator obravnavamo kot dva vzporedno vezana kondenzatorja: prvega s površino plošč $S = ha$, napolnjenega z vodo z dielektričnostjo ε, in drugega s površino $S = (a - h)a$, ki je prazen. Skupna kapaciteta je enaka

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 ha}{l} + \frac{\varepsilon_0(a-h)a}{l} = \frac{\varepsilon_0 a}{l}\big(a + (\varepsilon - 1)h\big).$$

   Če se gladina vode zviša za Δh, se kapaciteta poveča za ΔC. Iz prejšnje enačbe sledi

$$\Delta C = \frac{\varepsilon_0 a}{l}(\varepsilon - 1)\Delta h.$$

   Naboj na kondenzatorju se spremeni za $\Delta e = U\Delta C$; med spreminjanjem teče skozi kondenzator tok

$$I = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{U\Delta C}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_0 Ua}{l}(\varepsilon - 1)\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_0 Ua}{l}(\varepsilon - 1)\,v = 10 \text{ nA} .$$

3. *Podatki:* $T_1 = 10$ °C, $T_2 = 20$ °C, $T_3 = 30$ °C, $m_e = 5$ g, $M = 29$ kg/kmol, $p_0 = 100$ kPa, $\rho_s = 2500$ kg/m^3, $\rho_v = 1000$ kg/m^3, $p_0' = 98$ kPa.

   a) Epruveta lebdi v vodi, če je njena teža enaka vzgonu:

$$m_e g = \rho_v (V_s + V) g \,.$$

   Prostornino stekla, V_s, izrazimo z maso in gostoto, $V_s = m_e/\rho_s$, prostornina zraka, V, pa je odvisna od temperature, tlaka in mase zraka, m_z, v epruveti, tako kot to narekuje splošna plinska enačba

$$pV = \frac{m_z}{M} RT \,.$$

   V enačbo za ravnovesje vstavimo izraz za V_s in jo preuredimo

$$m_e \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_s}\right) = \rho_v V \,.$$

   Od tod izrazimo V in vstavimo v splošno plinsko enačbo. Za maso zraka sledi

$$m_z = \frac{(p_0 + \rho_v g h) M}{RT} \frac{m_e(\rho_s - \rho_v)}{\rho_s \rho_v} \,.$$

   Ko vstavimo po vrsti dane temperature, dobimo

$$m_z(1) = 4{,}07 \text{ mg} \,, \qquad m_z(2) = 3{,}93 \text{ mg} \,, \qquad m_z(3) = 3{,}80 \text{ mg} \,.$$

   Ko se epruveta malo dvigne, se zmanjša hidrostatični tlak, prostornina zraka pa poveča. S tem se poveča tudi vzgon in epruveta priplava na gladino.

   b) Plavač ne potone, saj je tlak na gladini manjši kot na dnu, prostornina zraka v epruveti pa večja. Da prostornina doseže mejno vrednost, enako kot pri a), se mora znižati temperatura. Pri nespremenjeni vrednosti prostornine velja:

$$\frac{T}{p_0 + \rho_v g h} = \frac{T''}{p_0} \,, \qquad T'' = T \frac{p_0}{p_0 + \rho_v g h} \,.$$

   Dobimo

$$T''(1) = -16 \text{ °C} \,, \qquad T''(2) = -7 \text{ °C} \,, \qquad T''(3) = 2 \text{ °C} \,.$$

   Potone le pri zadnji vrednosti; pri drugih dveh voda zmrzne.

4. *Podatki:* $2a = 100$ μm, $e_2 = 2e_1$.

   V ravnovesnem stanju prosti kroglici zavzameta takšni legi, da se štiri kroglice nahajajo v ogliščih romba. Razdaljo med pričvrščenima kroglicama z nabojema po $-e_1$ označimo z $2a$, razdaljo med prostima kroglicama z nabojema po $+e_2$ pa z $2x$. Na eno izmed prostih kroglic delujejo tri preostale kroglice, in sicer vsaka izmed pričvrščenih kroglic s silo

$$F_{12} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{e_1 e_2}{x^2 + a^2} \,,$$

   preostala prosta kroglica pa s silo

$$F_{22} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{e_2^2}{4x^2}\,,$$

kjer je ε dielektričnost vode. Tri sile na prosto kroglico so v ravnovesju. Ravnovesje zapišimo za smer, ki jo določa zveznica prostih kroglic: $-2(F_{12})_x = F_{22}$, ali

$$2\frac{e_1 e_2}{x^2+a^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{e_2^2}{4x^2}\,.$$

Dielektričnost vode ε se pokrajša, torej pri nalogi ni pomembna. Enačbo preuredimo

$$8\,\frac{e_1}{e_2}x^3 = \sqrt{x^2+a^2}^{\,3}\,.$$

Najprej na obeh straneh poiščemo tretji koren, nato pa obe strani kvadriramo:

$$\left(2\sqrt[3]{\frac{e_1}{e_2}}\right)^2 x^2 = x^2 + a^2\,.$$

Enačbo prepišemo v preglednejšo obliko:

$$(\alpha-1)x^2 = a^2\,, \qquad \alpha = \left(2\sqrt[3]{\frac{e_1}{e_2}}\right)^2 = \sqrt[3]{16}\,,$$

od koder sledi za razdaljo med prostima kroglicama

$$d = 2x = \frac{2a}{\sqrt{\alpha-1}} = 81\ \mu\mathrm{m}\,.$$

□ 3. skupina

1. *Podatki:* $r = 50$ m, $\omega = 0{,}45\ \mathrm{s}^{-1}$, $P_1 = 10$ kW, $m = 10$ t, $N = 100$, $m_1 = 80$ kg, $t = 5$ s.

   a) Vztrajnostni moment postaje z ljudmi se poveča z $J = mr^2$ na $J' = mr^2 + Nm_1r^2$. Ker se vrtilna količina ohrani, $J\omega = J'\omega'$, se zmanjša kotna hitrost z ω na ω':

$$\omega' = \frac{J}{J'}\,\omega = \frac{m}{m+Nm_1}\,\omega = 0{,}25\ \mathrm{s}^{-1}\,.$$

   Kotna hitrost se zmanjša za $0{,}20\ \mathrm{s}^{-1}$.

   b) Dovedeno delo štirih motorjev v času t je enako spremembi rotacijske kinetične energije: $A = 4P_1t = \frac{1}{2}J'(\omega^2 - \omega'^2)$. Za iskani čas dobimo

$$t = \frac{(m+Nm_1)r^2}{8P_1}\,(\omega^2 - \omega'^2) = 79\ \mathrm{s}\,.$$

c) Glej rešitev pri nalogi 2 d) v skupini 1.

2. *Podatki:* $m = 1$ kg, $k = 100$ N/m, $v = 40$ cm/s.

a) Uteže se odlepi, ko je sila vzmeti ravno enaka teži uteži

$$kx_0 = mg\,, \qquad x_0 = \frac{mg}{k} = 9{,}8 \text{ cm}\,.$$

Ker je gibanje enakomerno, porabi za razdaljo x_0 čas

$$t_1 = \frac{x_0}{v} = 0{,}245 \text{ s}\,.$$

Preostala vprašanja najlažje rešimo tako, da se postavimo na stališče opazovalca – imenujmo ga notranji opazovalec –, ki se giblje skupaj z roko. V trenutku, ko se utež odlepi, gre utež zanj skozi ravnovesno lego in se giblje navzdol s hitrostjo v. Po tem utež niha okoli ravnovesne lege, ki je določena z raztezkom x_0.

b) Ko ima utež enako hitrost kot roka, za notranjega opazovalca miruje. Tedaj je utež v skrajni legi. Skrajno lego najprej doseže čez četrt nihaja:

$$t = \frac{1}{4}\,t_0 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} = 0{,}16 \text{ s}\,.$$

c) Največja hitrost uteži za zunanjega opazovalca je takrat, ko gre utež skozi mirovno lego in se giblje navzgor, torej najprej po pol nihaja. Za notranjega opazovalca ima tedaj hitrost v navzgor, torej ima za zunanjega opazovalca hitrost

$$v_{\text{max}} = v + v = 2v = 80 \text{ cm/s}\,.$$

d) Ker doseže največjo hitrost v ravnovesni legi, se vzmet glede na začetno lego ni ne skrčila ne raztegnila. Višina je kar enaka poti, ki jo je v tem času prepotovala roka, torej

$$h = vt = \tfrac{1}{2}vt_0 = 12{,}5 \text{ cm}\,.$$

Največjo hitrost doseže vsakič, ko gre skozi ravnovesno lego navzgor, torej na višinah $(n = 1, 2, 3\ldots)$:

$$h_n = \tfrac{1}{2}vt_0 + nvt_0 = 12{,}5 \text{ cm}, 38 \text{ cm}, 63 \text{ cm}, \ldots$$

e) Amplituda nihanja je povezana s hitrostjo v ravnovesni legi z $v = \omega s_0$. Od tod sledi

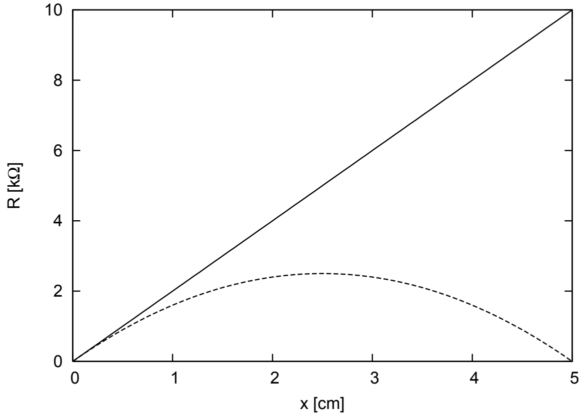
$$s_0 = \frac{v}{\omega} = v\sqrt{\frac{m}{k}} = 4 \text{ cm}\,,$$

torej je največji raztezek vzmeti

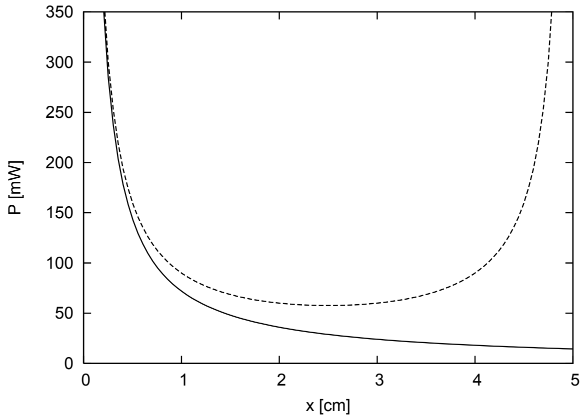
$$s_{\text{max}} = x_0 + s_0 = 13{,}8 \text{ cm}\,.$$

3. *Podatki:* $R_0 = 10$ kΩ, $U = 12$ V, $l = 5$ cm.

i) Polna črta kaže spreminjanje upora med A in B za potenciometer a), črtkana za potenciometer b):



ii) Polna črta kaže spreminjanje moči med A in B za potenciometer a), črtkana za potenciometer b):



V krajiščih ($x = 0$ in $x = l$) gre moč pri a) proti neskončnosti, zato vrednosti v bližini teh točk niso prikazane na grafu.

Glej rešitev naloge 4 v skupini 2.

Bojan Golli

■ Rešitve nalog z regijskega fizikalnega tekmovanja srednješolcev Slovenije v šolskem letu 2005/06

□ 1. skupina

1. *Podatki:* $v_A = 2{,}5$ m/s, $v_B = 2{,}3$ m/s.

   Če z s označimo pot, ki jo potrebuje deček do srečanja z deklico, in z a stranico kvadrata, porabi deček do srečanja čas $t = s/v_A$; deklica pa naredi v enakem času pot $s - a$. Izenačimo izraza za oba časa

$$\frac{s}{v_A} = \frac{s-a}{v_B}$$

in dobimo enačbo $s(v_A - v_B) = av_A$ z rešitvijo

$$s = \frac{v_A}{v_A - v_B}\, a = 12{,}5\ a\,.$$

Deček ujame deklico na poti, ki je za pol stranice večja od treh obsegov kvadrata, torej ob stranici AB.

2. *Podatki:* $\rho_l = 700\ \mathrm{kg/m^3}$, $\rho_v = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$, $R = 8$ cm, $r = 4$ mm, $V = 2$ l. $N_0 = 3000$.

   a) Ker je kroglic zelo veliko, si lahko množico kroglic predstavljamo kot telo z gostoto lesa. Takšno telo bi segalo do 7/10 v vodo, torej je potopljenih približno

   $$N \approx \frac{7}{10} N_0 = 2100 \text{ kroglic.}$$

   b) Prostornina dela posode do višine, do katere sega gladina vode, je enaka prostornini vode in prostornini N potopljenih kroglic:

   $$\pi R^2 h = V + \frac{4\pi r^3}{3} N\,.$$

   Za iskano višino gladine sledi

   $$h = \frac{V + \frac{4\pi r^3}{3} N}{\pi R^2} = 12{,}7\ \mathrm{cm}\,.$$

3. *Podatki:* $l = 50$ cm, $m = 2$ kg, $M = 3$ kg.

   Najmanjše sile so takrat, ko sta vrvici B in D nenapeti, torej ko sta sili v vrvicah B in D sta enaki 0.

   Na vodoravno palico delujejo sila uteži, Mg, teža palice, mg, sila vrvice C z vodoravno komponento $F_C/\sqrt{2}$, ki kaže v desno (glej sliko v besedilu), in sila osi z vodoravno komponento F_2. Ravnovesje navorov zapišemo za os 2:

   $$\frac{3}{4}\, l\, Mg + \frac{1}{4}\, l\, mg = \frac{1}{4}\, l\, \frac{F_C}{\sqrt{2}}\,,$$

   od koder sledi

   $$F_C = \sqrt{2}\,(3M + m)g = 152\ \mathrm{N}\,.$$

   Iz ravnovesja sil v vodoravni smeri $F_C/\sqrt{2} = F_2$ dobimo še

   $$F_2 = \frac{F_C}{\sqrt{2}} = 108\ \mathrm{N}\,,$$

   ki kaže v levo.

   Silo v vrvici A dobimo iz pogoja za ravnovesje navorov na navpično palico. Nanjo delujejo sila vrvice A in sila vrvice C, katerih vodoravni komponenti kažeta v levo, sila v osi 1, ki za rešitev naloge ni pomembna, in sila vodoravne palice, ki je po

3. Newtonovem zakonu nasprotno enaka sili, s katero deluje navpična palica na vodoravno. Njena vodoravna komponenta je torej po velikosti enaka F_2 in kaže v desno. Ravnovesje navorov zapišemo za os 1. Ker so vrvice enake, je prijemališče sile vrvice A za $\frac{1}{4}l$ oddaljeno od osi, prijemališče sile vrvice C pa za $\frac{1}{2}l$. Ravnovesje navorov zahteva:

$$\frac{1}{4}\,l\,\frac{F_A}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\,l\,\frac{F_C}{\sqrt{2}}=\frac{3}{4}\,l\,F_2\,.$$

Dobimo

$$F_A=3\sqrt{2}F_2-2F_C=F_C=152\ \mathrm{N}\,.$$

4. *Podatki:* $x_0=2{,}0$ m, $m=70$ kg, $k=140$ N/m.

Nalogo najlažje rešujemo z energijskim izrekom: sprememba mehanske energije (v našem primeru kinetične in prožnostne energije artista in vrvice) je enaka delu trenja.

a) Tik preden zdrsne ima artist z vzmetjo prožnostno energijo $\frac{1}{2}kx_0^2$ in kinetično energijo 0, ko se ustavi pa sta obe energiji enaki 0. Razlika energij je enaka delu trenja na razdalji x_0:

$$0-\tfrac{1}{2}kx_0^2=-mgk_{\mathrm{tr}}x_0\,.$$

(Trenje kaže v nasprotno smer kot premik, zato je delo trenja negativno.) Od tod izluščimo

$$k_{\mathrm{tr}}=\frac{kx_0}{2mg}=0{,}2\,.$$

b) Raztezek vrvice v trenutku, ko je hitrost največja, označimo z x. V tej točki ima prožnostno energijo $\frac{1}{2}kx^2$ in kinetično $\frac{1}{2}mv^2$. Artist je predrsal razdaljo x_0-x, zato je delo trenja enako $-mgk_{\mathrm{tr}}(x_0-x)$. Velja

$$\tfrac{1}{2}kx^2+\tfrac{1}{2}mv^2-\tfrac{1}{2}kx_0^2=-mgk_{\mathrm{tr}}(x_0-x)=-\tfrac{1}{2}kx_0(x_0-x)\,,$$

kjer smo v zadnji enakosti vstavili rezultat za k_{tr} iz primera a). Enačbo preuredimo v obliko:

$$\tfrac{1}{2}mv^2=\tfrac{1}{8}kx_0^2-\tfrac{1}{2}k(x-\tfrac{1}{2}x_0)^2\,,$$

Kinetična energija in s tem hitrost je največja, ko je drugi člen na desni najmanjši, torej pri

$$x=\tfrac{1}{2}x_0=1{,}0\ \mathrm{m}\,.$$

V tej točki je kinetična energija enaka

$$\tfrac{1}{2}mv^2=\tfrac{1}{8}kx_0^2\,,\qquad \text{(maksimum)}$$

torej četrtino največje prožnostne energije.

□ 2. skupina

1. *Podatki:* $U_1=4{,}9$ V, $U_2=3{,}0$ V, $U_G=10$ V, $R_1=10$ kΩ.

Pri reševanju naloge je bistvena ugotovitev, da sta obe veji neodvisni in ne vplivata druga na drugo, saj je notranji upor vira zanemarljiv. Lahko si mislimo, da sta obe veji priključeni vsaka na svoj vir napetosti.

a) Za nadomestni upor vzporedno vezanega upornika R_1 in voltmetra velja

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_V}\,, \qquad R' = \frac{R_V R_1}{R_V + R_1}\,.$$

Za napetost na voltmetru sledi

$$U_1 = IR' = \frac{R'}{R_1 + R'}U_G \qquad \text{ali} \qquad \frac{U_1}{U_G} = \frac{R_V}{R_1 + 2R_V}\,,$$

od koder izluščimo

$$R_V = \frac{U_1}{U_G - 2U_1}R_1 = 240\ \mathrm{k}\Omega\,.$$

b) V tem primeru je nadomestni upor vzporedno vezanega upornika R_2 in voltmetra enak

$$R'' = \frac{R_V R_2}{R_V + R_2}\,.$$

Velja

$$U_2 = \frac{R''}{R_1 + R''}U_G = \frac{R_V R_2}{R_1 R_2 + R_V(R_1 + R_2)}U_G\,,$$

od koder dobimo

$$R_2 = \frac{U_2}{U_G - U_2 - \frac{R_1}{R_V}U_2}R_1 = 4{,}4\ \mathrm{k}\Omega\,.$$

(Opomba: Če ne bi upoštevali končnega notranjega upora voltmetra, bi dobili rezultat 4,3 kΩ, zato numerični rezultat ni merodajen za oceno pravilnosti postopka.)

2. *Podatki:* $C_1 = 100\ \mu\mathrm{F}$, $C_2 = 3C_1$, $C_3 = 6C_1$, $C_4 = C_1$, $U_0 = 9$ V.

a) Kondenzatorja 1 in 2 sta vzporedno priključena na vir napetosti, na kondenzatorjih 3 in 4 pa ni napetosti, za naboje na kondenzatorjih torej velja

$$e_1 = C_1 U_0 = 9 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{As}\,, \quad e_2 = C_2 U_0 = 27 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{As}\,, \quad e_3 = 0\,, \quad e_4 = 0\,.$$

b) Sedaj sta na vir priključena kondenzatorja 1 in 4 in naboja na njih sta

$$e_1' = C_1 U_0 = 9 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{As}\,, \quad e_4' = C_4 U_0 = 9 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{As}\,.$$

Kondenzatorja 2 in 3 nista priključena na napetost; naboj na kondenzatorju 2 se porazdeli med kondenzatorja 2 in 3 tako, da je napetost na njih enaka:

$$\frac{e_2'}{C_2} = \frac{e_3'}{C_3}\,.$$

Upoštevamo še ohranitev naboja, $e_2 = e_2' + e_3'$, in dobimo:

$$e_2' = \frac{C_2}{C_2 + C_3} e_2 = 9 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{As}\,, \quad e_3' = \frac{C_3}{C_2 + C_3} e_2 = 18 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{As}\,.$$

3. *Podatki:* $T_0 = 24\ ^\circ\mathrm{C}$, $V_0 = 1{,}00\ \mathrm{cm}^3$, $m = 1{,}6\ \mathrm{g}$, $\rho_s = 2500\ \mathrm{kg/m^3}$, $\rho_v = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$.

Tik preden epruveta z zrakom potone, je teža stekla enaka vzgonu:

$$mg = \rho_v (V_s + V) g\,.$$

Prostornino stekla izrazimo z maso in gostoto, $V_s = m/\rho_s$, prostornina zraka, V, pa je odvisna od temperature

$$\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0}\,.$$

Enačbo za ravnovesje preuredimo

$$m\left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_s}\right) = \rho_v V = \rho_v \frac{V_0}{T_0} T\,.$$

Od tod razberemo temperaturo, pri kateri epruveta ravno še plava:

$$T = \frac{m(\rho_s - \rho_v)}{V_0 \rho_v \rho_s} T_0 = 277\ \mathrm{K} = 12\ ^\circ\mathrm{C}\,.$$

Ko se temperatura vode spusti pod to temperaturo, se prostornina zraka zmanjša in s tem tudi vzgon. Epruveta se prične potapljati. V večji globini se prostornina zraka še dodatno zmanjša zaradi večjega tlaka in epruveta tone vse hitreje, dokler ne doseže dno posode.

4. *Podatki:* $v_0 = 2000\ \mathrm{km/s}$, $D = 20\ \mathrm{cm}$, $L = 150\ \mathrm{cm}$, $s = 1\ \mathrm{cm}$, $d = 3\ \mathrm{mm}$, $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$, $e_0 = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{As}$.

a) Gibanje elektrona v kondenzatorju je podobno gibanju telesa pri vodoravnem metu. V prečni smeri (v smeri osi y) deluje nanj konstantna sila $F = e_0 E$, zato se v tej smeri elektron giblje enakomerno pospešeno:

$$a_y = \frac{e_0 E}{m_0} = \frac{e_0 U}{m_0 d}\,, \qquad v_y = a_y t\,.$$

V vzdolžni smeri (smeri osi y) je gibanje enakomerno, vzdolžna komponenta hitrosti je zato enaka začetni hitrosti elektrona, $v_x = v_0$. Elektron preleti kondenzator v času $t = s/v_0$. Za smerni kot, ki ga tvori hitrost pri izhodu iz kondenzatorja s prvotno smerjo, velja

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{a_y t}{v_0} = \frac{e_0 U s}{m_0 d v_0^2}\,.$$

Iz zahteve

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{D}{L}\,,$$

dobimo za iskano napetost na kondenzatorju

$$U = \frac{m_0 v_0^2 D d}{e_0 L s} = 0{,}91 \text{ V}\,.$$

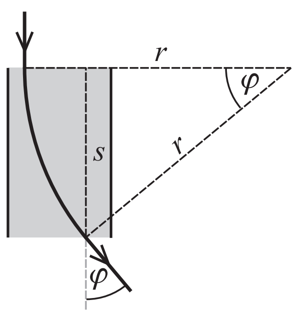
Pozitivni priključek mora biti na desni plošči kondenzatorja (glej sliko pri besedilu naloge).

Da se tir elektrona ponovno vrne v prvotno smer, mora biti na drugem kondenzatorju enaka napetost, le polariteta mora biti zamenjana.

b) V magnetnem polju se elektron giblje po krožnici z radijem r. Pri tem deluje nanj konstantna sila $F' = e_0 v_0 B$, ki kaže proti središču kroženja. Velikost hitrosti elektrona zato ostaja konstantna. Iz Newtonovega zakona za kroženje sledi

$$m_0 \frac{v_0^2}{r} = e_0 v_0 B \qquad \text{in od tod} \qquad r = \frac{m_0 v_0}{e_0 B}\,.$$

Zvezo med radijem krožnice r, dolžino kondenzatorja s in kotom, pod katerim zapusti elektron kondenzator, razberemo iz slike:



$$\sin\varphi = \frac{s}{r}$$

Če naj elektron doseže drugi kondenzator, pa mora veljati (glej sliko pri besedilu naloge):

$$\sin\varphi = \frac{D}{\sqrt{L^2 + D^2}}\,.$$

Izraza za $\sin\varphi$ izenačimo, za r upoštevamo izraz, ki smo ga izpeljali na začetku, in dobimo:

$$B = \frac{m_0 v_0}{e_0 r} = \frac{m_0 v_0 D}{e_0 s \sqrt{L^2 + D^2}} = 1{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ T}\,.$$

Magnetno polje kaže iz lista (na sliki pri besedilu naloge); v drugi tuljavi je polje po velikosti enako, ima pa nasprotno smer.

□ 3. skupina

1. Glej rešitev naloge 3 v skupini 2.

2. *Podatki:* $J = 0{,}01\ \mathrm{kgm}^2$, $R = 10$ cm, $m = 0{,}5$ kg, $l = 1$ m.

   a) Ohrani se vsota kinetične in potencialne energije verige. Na začetku ima veriga le potencialno energijo. Maso dela verige z dolžino s lahko zapišemo kot $m' = sm/l$. Pri tem za del verige na verižniku vzamemo $s = \pi R$, za oba prosto viseča dela pa $s = (l - \pi R)/2$. Če potencialno energijo štejemo od osi valja, je višina težišča dela verige na verižniku $2R/\pi$, prosto visečega dela pa $-(l - \pi R)/4$. Energijo verige na začetku potem lahko zapišemo kot

$$W' = \frac{\pi R m}{l}\,\frac{2R}{\pi}\,g - \frac{(l-\pi R)m}{l}\,\frac{(l-\pi R)}{4}\,g\,.$$

   Na koncu ima veriga kinetično in potencialno energijo:

$$W = \tfrac{1}{2}mv^2 - m\,\frac{l}{2}\,g\,.$$

   Ko izenačimo začetno in končno energijo, dobimo

$$v = \sqrt{\left(l + \frac{4R^2}{l} - \frac{(l-\pi R)^2}{2l}\right)g} = 2{,}8\ \mathrm{m/s}\,.$$

   b) V tem primeru se na koncu vrti tudi verižnik; ker veriga ne spodrsava, je obodna hitrost verižnika enaka hitrosti verige, njegova kotna hitrost pa je $\omega = v/R$.

   Začetna energija sistema je enaka tisti pri a), saj je težišče verižnika v njegovi osi. Pri končni energiji sistema pa moramo poleg energij pri a) upoštevati tudi rotacijsko kinetično energijo verižnika:

$$W = \tfrac{1}{2}J\omega^2 + \tfrac{1}{2}mv^2 - m\,\frac{l}{2}\,g = \tfrac{1}{2}\left(\frac{J}{R^2} + m\right)v^2 - m\,\frac{l}{2}\,g\,.$$

   Po izenačitvi energij dobimo

$$v = \sqrt{\frac{\left(l + \frac{4R^2}{l} - \frac{(l-\pi R)^2}{2l}\right)mg}{\frac{J}{R^2} + m}} = 1{,}6\ \mathrm{m/s}\,,$$

$$\omega = \frac{v}{R} = 16\ \mathrm{s}^{-1}\,.$$

3. *Podatki:* $s_1 = 10$ cm, $s_2 = 29$ cm.

a) Utež se ponovno dvigne do višine, na kateri smo jo pritrdili. Utež torej niha okoli ravnovesne lege, ki je $\frac{1}{2}s_2$ pod točko, na kateri smo jo pritrdili. Celoten raztezek do mirovne lege je

$$s_0 = s_1 + \tfrac{1}{2}s_2 = 24{,}5 \text{ cm}.$$

b) Utež niha s krožno frekvenco

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

Iz enačbe za raztezek vzmeti v ravnovesni legi:

$$s_0 = \frac{mg}{k}\,, \qquad \text{sledi} \qquad \frac{k}{m} = \frac{g}{s_0}\,.$$

Za pot od začetne lege do najnižje točke porabi utež pol nihajnega časa:

$$t = \tfrac{1}{2}t_0 = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{g}{s_0}} = \pi\sqrt{\frac{g}{s_1 + \frac{1}{2}s_2}} = 0{,}5 \text{ s}\,.$$

4. Za primera a) in b) glej rešitev naloge 4 v skupini 2.

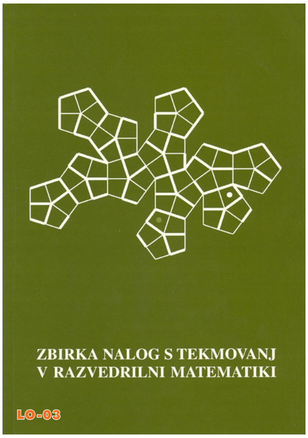
   c) V prvem primeru zadošča, da prepotuje elektron razdaljo L v času $t_a = L/v_x = L/v_0$, v drugem delu pa v času $t_b = \sqrt{L^2 + D^2}/v_0$. Prej pride torej v primeru a). Razlika časov je

$$t_b - t_a = \frac{1}{v_0}\left(\sqrt{L^2 + D^2} - L\right) = 6{,}6 \text{ ns}\,.$$

Bojan Golli

Zbirke nalog s tekmovanj

Vsako šolsko leto na šolah potekajo različna tekmovanja v znanju. Za lažjo pripravo vam ponujamo več zbirk tekmovalnih nalog z rešitvami.



Izidor Hafner s sodelavci:

ZBIRKA NALOG S TEKMOVANJ V RAZVEDRILNI MATEMATIKI

168 strani
format 16,5 × 23,5 cm
mehka vezava

11,48 EUR
(2.751,07 SIT)

Ciril Dominko in Bojan Golli:

REŠENE NALOGE IZ FIZIKE Z DRŽAVNIH TEKMOVANJ – 3. del

Prva knjiga: VADEMEKUM IN NALOGE
Druga knjiga: NAMIGI IN REŠITVE

skupaj 424 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

20,86 EUR
(4.998,89 SIT)

Poleg omenjenih dveh lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog različnih zahtevnosti za osnovnošolce in srednješolce s tekmovanj v znanju matematike, fizike, logike in računalništva. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite s popustom:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/tekmovanja/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.