PRILOGA K REVIJI **PRESEK**, LETNIK 34 (2006/2007) ŠTEVILKA **5**

Tekmovanja

50. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

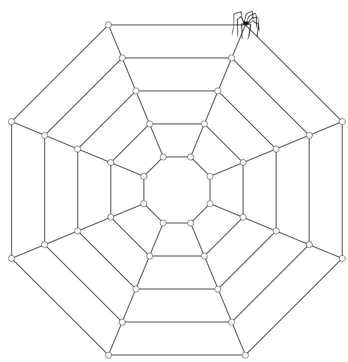
Naloge za 1. letnik

1. Naj bosta a in b realni števili, za kateri velja $\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}=1$. Dokaži, da je
$$\frac{a}{1+b^2}-\frac{b}{1+a^2}=a-b.$$

2. Določi vse pare tujih si naravnih števil m in n, za katere je $\dfrac{5m-n}{m+n}$ naravno število.

3. Naj bo I središče včrtane krožnice trikotnika ABC, A_1, B_1 in C_1 pa pravokotne projekcije točke I na stranice BC, AC in AB. Premica skozi razpolovišči daljic AC_1 in AB_1 ter premica skozi razpolovišči daljic CB_1 in CA_1 se sekata v točki D. Dokaži, da pravokotna projekcija točke D na stranico AC razpolavlja to stranico.

4. Pajek je spletel mrežo, sestavljeno iz oglišč in daljic, ter se postavil v oglišče na zunanjem robu mreže (glej sliko). Počakal bo, da se bo v vsa druga oglišča ujela po 1 muha. Nato se bo odpravil na prav poseben sprehod: šel bo mimo 25 oglišč in v 26. oglišču pojedel muho, če je do tedaj še ni pojedel, nato bo šel spet mimo 25 oglišč in v 26. pojedel muho, če je do tedaj še ni pojedel, itd. Največ koliko muh bo lahko pajek pojedel?



□ Naloge za 2. letnik

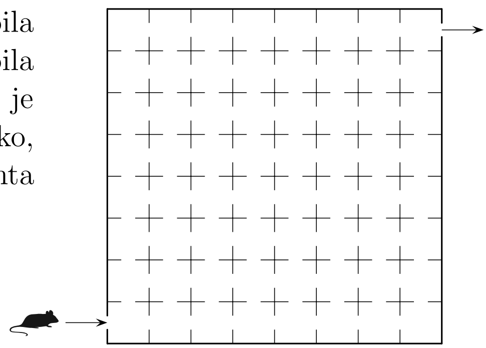
1. Za koliko naravnih števil n, manjših od 2006, je število $n^4 - 1$ deljivo z 9?

2. Reši sistem enačb

$$x^2 + 4xy + 4y^2 = 16,$$
$$x^2 - 2xy + 4y^2 = 52.$$

3. Krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ s središčema S_1 in S_2 se sekata v točkah A in B. Premica S_1A seka krožnico $\mathcal{K}_2$ še v točki C_1 in krožnico $\mathcal{K}_1$ še v točki D_1, premica S_2A pa seka krožnico $\mathcal{K}_1$ še v točki C_2 in krožnico $\mathcal{K}_2$ še v točki D_2. Označimo razpolovišče daljice D_1D_2 z E. Dokaži, da točke S_1, S_2, C_1, C_2, B in E ležijo na isti krožnici.

4. Miška je skozi označeni vhod vstopila v labirint razsežnosti 8×8, izstopila pa skozi označeni izhod. Ali se je lahko sprehodila skozi labirint tako, da je šla skozi vsako polje labirinta natanko enkrat?



□ Naloge za 3. letnik

1. Dokaži, da enačba $x^4 + ax^2 + a^3 = 1$ nima samih realnih rešitev za nobeno vrednost realnega parametra a.

2. Poišči vsa taka naravna števila a, b in c, da je $a \geq b \geq c$, število a deli $b + c$, število b deli $c + a$, število c pa deli $a + b$.

3. V trikotniku ABC je $\angle BAC > \angle CBA$. Naj bo D presečišče simetrale kota ACB s stranico AB, O_1 in O_2 pa središči trikotnikoma ADC in BCD očrtanih krožnic. Označimo z E presečišče premice O_1O_2 s stranico AC, s F pa točko na stranici BC, da je $|CF| = |AE|$. Dokaži, da točke A, B, O_2, E in F ležijo na isti krožnici.

4. Dana je kvadratna tabela velikosti $n \times n$, pri čemer je n liho število. V vsakem polju tabele je napisano število, katerega absolutna vrednost je manjša od 1. Vsota števil v vsakem kvadratu velikosti 2×2 je enaka 0. Dokaži, da absolutna vrednost vsote vseh števil v tabeli ni večja od n.

□ Naloge za 4. letnik

1. Dokaži, da je
$$1+\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^3+(\sqrt{2})^4+\ldots+(\sqrt{2})^n > 2\sqrt[4]{2}\cdot(\sqrt{2^{n+1}}-1).$$

2. Naj bo I središče včrtane krožnice trikotnika ABC, M pa razpolovišče njegove stranice AB. Poišči najmanjšo možno velikost kota $\angle CIM$, če je $|CI| = |MI|$.

3. Jernej je zapisal neko trimestno število. Nato je izbrisal eno izmed njegovih števk in na to mesto zapisal poljubno števko, da je dobil drugo število. Poišči vsa trimestna števila, za katera s takšno menjavo števke ni možno dobiti trimestnega števila, deljivega s 7.

4. Ali obstaja takih pet točk v prostoru, da sta za vsako naravno število n, $n \in \{1,\ldots,10\}$, dve izmed njih med seboj oddaljeni n enot?

■ Šolsko tekmovanje iz znanja poslovne matematike za bronasto priznanje

□ 1. skupina (nižja stopnja zahtevnosti)

1. 50 šivilj sešije v 4 dneh, če delajo po 8 ur dnevno, 2600 zaves dolžine 2,4 m in širine 2 m. Novo naročilo pa zahteva 3800 zaves, ki so dolge 3m in široke 2,3 m

   a) Približno koliko šivilj bo potrebno še dodatno zaposliti, da bo delo končano v 5 dneh, če bodo delale po 8 ur dnevno?

   b) V koliko dneh bi novo naročilo končalo 38 šivilj, ki bi bile za 10 % bolj produktivne in bi delale dnevno po 9 ur?

   c) Za koliko odstotkov več dni bi delalo teh 38 šivilj kot pa 50 šivilj, ki smo jih imeli v začetku?

2. Francoski trgovec je v ZDA kupil 120 galon javorovega sirupa po ceni 8,5 USD za liter (1gl = 4,405 litra, 1 EUR = 239,3452 SIT, 1 USD = 198,7725 SIT).

   a) Koliko EUR potrebuje francoski trgovec za sklenitev tega posla ?

   b) Koliko EUR je francoskega trgovca stal 1 liter sirupa, če je imel pri sklenitvi posla naslednje stroške: 5 % provizijo, ki jo je plačal ameriškemu posredniku, ter 20 % uvozno carino ?

3. Štirje tekmovalci so pri reševanju kviza dosegli glavno nagrado 24 000 EUR: Prosijo te za pomoč pri njeni razdelitvi. Ključ razdelitve nagrade je sestavljen iz treh delov:

   25 % nagrade razdeli na enake dele, $\frac{2}{5}$ nagrade v razmerju osvojenih točk, teh pa so dosegli: tekmovalec A 15, tekmovalec B 9, tekmovalec C 6, tekmovalec D pa 0 točk. Ostanek nagrade razdeli tako, da dobi vsak naslednji tekmovalec po 20 EUR manj kot njegov predhodnik. Koliko EUR nagrade dobi posamezni tekmovalec?

4. a) Pomešati nameravamo 200 kg blaga po 150 SIT in 500 kg blaga po 120 SIT. Koliko in kakšno blago moramo dodati, da bomo dobili 1 tono mešanice po 114 SIT? **(3 točke)**

   b) Koliko blaga po 120 SIT in po 150 SIT bi morali dodati k 105 kg blaga po 80 SIT, če želimo mešanico prodajati po 114 SIT?

   c) V kakšnem razmerju bi morali mešati blago po 150, po 120 in po 80 SIT, če želimo mešanico prodajati po 100 SIT?

□ 2. skupina (višja stopnja zahtevnosti)

1. naloga

Položnico za dobavljeno pohištvo smo založili in nismo poravnali svojih obveznosti v roku, zato nam je dobavitelj poslal opomin, z zamudnimi obrestmi (17 % p.a.) in stroški opominjanja (1.000,00 SIT) v višini 129.871,42 SIT.

a) Koliko je znašal prvotni račun, če smo zamudili s plačilom 18 dni, obresti pa se obračunajo po **navadnem obrestnem računu**?

b) Po kakšni obrestni meri so zaračunali obresti, če smo račun plačali 30 dni po roku?

c) Koliko SIT obresti smo plačali za zamudo 30-ih dni, če je bila obrestna mera 17 % p.a.?

2. naloga

Na banko smo 30. 6. 2000 položili 250.000,00 SIT, ki jih je banka obrestovala po letni obrestni meri 4,75 %, dekurzivnem obrestovanju in s kvartalno kapitalizacijo z relativno obrestno mero. 31. 3. 2003 smo dvignili polovico privarčevanega zneska. Preostanek je banka obrestovala po 0,5 odstotne točke manjši letni obrestni meri pri enakih pogojih obrestovanja.

a) Koliko bomo imeli na računu ob koncu leta 2006?

b) Koliko obresti bi se nabralo do konca leta 2006, če bi banka ob dvigu (31.3.2003) spremenila kapitalizacijo v mesečno pri relativni obrestni meri, ki je na letni ravni ostala ista?

c) Za koliko % se razlikuje končna vrednost glavnice iz primera b) od končne vrednosti glavnice iz primera a)?

3. naloga

Mladoporočenca Tine in Jasna sta želela na svoje, zato sta v začetku leta 2002 kupila majhno stanovanje v znesku 14.000.000,00 SIT. Denar zanj sta si sposodila, in sicer: 4 mio. pri starših (brezobrestno!), za ostalih 10 mio. pa sta najela posojilo, ki je bilo izplačano v tem znesku dne 31. 12. 2001. Posojilo je bilo obrestovano po 7,2 % letni anticipativni obrestni meri pri polletni kapitalizaciji in relativnem izračunu. Ker je Tine v letu 2004 zadel na lotu 10,5 mio. SIT, sta se odločila, da bosta 2 mio. vrnila staršem, 8,5 mio. pa sta namenila za delno poplačilo svojega dolga banki dne 30. 6. istega leta.

a) Po kolikšnem času sta banki v celoti poplačala svoj dolg, če sta na dan vračila morala vrniti še 4.539.558,11 SIT?

b) Določi datum vračila!

c) Koliko bi znašala letna anticipativna obrestna mera po delnem poplačilu dolga, če bi bilo končno poplačilo dolga dne 30. 6. 2006 v višini 4.400.000,00 SIT, pri nespremenjenih pogojih obrestovanja?

4. naloga

Gospa Novak ima tri majhne otroke, ki jim želi zagotoviti čim boljše možnosti za študij na fakulteti. Trenutno ima dobro službo, zato se je odločila, da bo začela varčevati. Proučiti želi različne možnosti varčevanja. Pomagajte ji izračunati, kolikšno bo njeno stanje na bančnem računu na začetku leta 2015 v naslednjih primerih.

a) Na bančni račun vlaga šest let ob koncu vsakega polletja (postnumerandno) po 100.000 SIT s pričetkom v letu 2006. Obrestna mera je 7 % p.a. in kapitalizacija mesečna. Upoštevati je potrebno relativno dekurzivno obrestovanje.

b) Na začetku vsakega leta je v šestletnem obdobju priliv na njen varčevalni račun v višini 150.000 SIT s pričetkom v letu 2007. Upoštevati je potrebno 7 % letno obrestno mero in navadni obrestni račun!

■ Državno tekmovanje v poslovni matematiki 2006

□ 1. skupina (nižja stopnja zahtevnosti)

1. a.) V neki tovarni je skupina 270 delavcev v 90 dneh predelalo 1500 ton materiala. Koliko materiala predela skupina delavcev, ki je za eno devetino manj številna, če namerava delati 20 % več časa kot prva skupina?

   b.) Za koliko odstotkov večjo (manjšo) delovno storilnost bi morali imeti delavci druge skupine, če bi želeli pri enakih podatkih kot v prejšnji točki izdelati 1792 ton blaga?

2. a.) Slovenski uvoznik uvozi iz Velike Britanije 20 000 yardov tekstila po ceni 500 GBP za eno balo, na vsaki bali pa je navitih 200 yardov tkanine. Po čem bo v Sloveniji prodajal 1 meter te tkanine, če mora ob uvozu plačati 20 % carine, z uvozom pa želi ustvariti še 16 % razlike v ceni? (1 GBP = 347,4720 SIT, 1yd = 0,9144m)

   b.) Koliko bi iztržil angleški izvoznik za celotno količino v prejšnji točki omenjenega blaga, če ima v zvezi z izvozom 10 % transportne stroške, hkrati pa mora plačati še 4 ‰ izvozne takse? Plačilo bo v USD. Oba stroška obračunaj od iste osnove! (1 USD = 198,1258 SIT, 1 GBP = 347,4720 SIT)

3. a.) Projekt, ki ga bodo sofinancirali štirje investitorji, je ovrednoten z 1.200.000 EUR. Prva dva investitorja bosta plačala dve tretjini investicijske vrednosti, ki si jo delita v razmerju 3 : 2. Preostala dva investitorja pa si ostanek razdelita tako, da plača četrti dve petini manj kot tretji investitor.

   b.) Po drugem načrtu si razdelijo investicijsko vrednost tako, da plača prvi 39 % vrednosti, preostali trije investitorji pa si razdelijo ostanek tako, da plača vsak naslednji po 20 % manj od predhodnika. Koliko plačajo v tem primeru?

4. a.) Če bi se neko blago dvakrat podražilo za po 5 %, bi stalo 8 808,98 SIT. Namesto tega se je podražilo enkrat za 10 %. Koliko sedaj stane to blago?

b.) Na ceno 8 808,98 SIT nam je prodajalec priznal 25 % sezonskega popusta in 5 % dijaškega popusta (oba popusta sta od maloprodajne cene). Koliko smo plačali za blago v tem primeru?

c.) Koliko SIT bi plačali, če bi nam prodajalec dijaški popust obračunal na ceno z že vključenim sezonskim popustom?

□ 2. skupina (višja stopnja zahtevnosti)

1. naloga

Azil za živali je ob svoji 3. obletnici delovanja 27. 3. 2005 dobil donatorska sredstva v višini 250.000,00 SIT. Istega dne so sredstva vezali v banki. Odločili so se, da bodo sredstva porabili za financiranje nove kletke za živali. Predračun za izdelavo nove kletke je znašal po predračunu 389.158,00 SIT z valuto plačila 25. 9. 2005. S prostovoljnimi prispevki ob dnevu odprtih vrat so dne 30. 6. 2005 zbrali še 120.000,00 SIT, ki so jih (istega dne) naložili v banko, kjer so varčevali prvotno zbrana sredstva od 27. 3. 2005.

a) Po kakšni letni obrestni meri jim je morala banka obračunavati obresti, da bi lahko dne 25. 9. 2005 plačali predračun za postavitev nove kletke, če so obresti obračunane po navadnem obrestnem računu za dneve?

b) Koliko denarja bi jim manjkalo ob dnevu zapadlosti predračuna, če bi banka priznavala obresti po 6,2 % letni obrestni meri in navadnem obrestnem računu?

2. naloga

Nina in Sonja sta sestri. Leta 2000 sta od babice v zapuščini podedovali nepremičnino in gotovino v znesku 62.000,00 EUR. Gotovino so njuni starši dne 31. 3. 2000 naložili v banko, ki priznava 6,7% letne dekurzivne obresti. Nepremičnino so prodali ob polletju 2003 za 110.000,00 EUR in jih vložili na njun varčevalni račun. Ob koncu leta 2005 so starši dvignili njuna privarčevana sredstva in jih prenesli na drugo banko, ki je ponujala poldrugo odstotno točko večjo letno obrestno mero.
Nina bo dne 28.02.2007 postala polnoletna in ji bodo izplačali 135.000,00 EUR, ostalo bo prejela ob svoji polnoletnosti Sonja, ki je od svoje sestre mlajša natanko 3 leta.

a) Koliko bo prejela mlajša sestra ob polnoletnosti, če se obresti obračunavajo po dekurzivnem, konformnem načinu, prva banka uporablja četrtletno kapitalizacijo, druga pa mesečno kapitalizacijo?

b) Za koliko % bi se Sonjin prejemek razlikoval, če bi banka po izplačilu Nini obračunala vlogo po relativnem obračunu?

3. naloga

Zaradi nepredvidenih stroškov smo vzeli posojilo v višini 500.000 SIT pri banki, ki uporablja anticipativno obrestovanje.

a) Koliko bi morali vrniti čez 20 let v enkratnem znesku, če je prvih 5 let obrestna mera 3% p.a. in mesečna kapitalizacija, naslednjih 9 let za 2/5 višja letna obrestna mera in četrtletna kapitalizacija, preostalo obdobje obrestna mera 1,5 % p.s. in pripis obresti dvakrat na leto? Uporablja se relativni način obrestovanja!

b) Posojilo bomo vrnili v treh obrokih. Kolikšni bi morali biti posamezni obroki, če bi prvi obrok plačali čez štiri leta, drugi obrok čez sedem let (od danes) in tretji obrok čez enajst let (od danes)? Vsak naslednji obrok je za 10 % višji od predhodnega. Celotno obdobje je letna obrestna mera 9 % in letna kapitalizacija.

c) Čez 20 mesecev bomo vrnili 200000 SIT in čez 50 mesecev (šteto od najema posojila) še 400.000 SIT. Prvi dve leti je letna obrestna mera 9 %, ostalo obdobje za 20 % nižja obrestna mera. Obrestovanje je konformno in kapitalizacija mesečna. Kolikšen je ostanek dolga po plačilu drugega obroka?

4. naloga

Miha je še osnovnošolec, vendar so mu starši za čas študija že zagotovili letno rento v višini 70.000,00 SIT, ki naj bi jo začel prejemati čez 7 let in jo bo dobival 1-krat letno v razdobju šestih let. Ker si Miha zelo želi računalnik, je pripravljen zanj nekaj prispevati. V dogovoru s starši je dosegel, da bi danes na konto te rente dvignil 100.000,00 SIT (za računalnik torej), spremenil pa bi tudi način prejemanja rente: renta bi se začela izplačevati že čez pet let, čas prejemanja pa bi se podaljšal na devet let (izplačilo rente bi bilo enkrat letno).

a) Kolikšna bi bila ta nova renta, če so sredstva naložena v banki, ki priznava 5 % letne dekurzivne obresti pri letni kapitalizaciji?

b) Kakšno rento bi prejemal, če bi banka spremenila obrestovalne pogoje tako, da bi priznavala 6 % obresti na letni ravni, vendar bi obračun naredili po polletni kapitalizaciji, dekurzivnem načinu in relativni obrestni meri?

c) Kolikšna sredstva bi morali starši danes vložiti v banko, da bi lahko Miha čez 7 let začel prejemati 6-letno rento v isti višini (70.000,00 sit), vendar bi rento prejemal 2-krat letno, torej vsak začetek polletja, pri letni obrestni meri 5% ter polletni kapitalizaciji? Obračun je po relativni obrestni meri.

■ 27. mednarodno matematično tekmovanje mest (Pomladanski krog)

□ 1. skupina (prvi del)

1. Dan je trikotnik ABC, v katerem kot pri oglišču A meri $60°$. Simetrala stranice AB seka stranico AC v točki N, simetrala stranice AC pa seka stranico AB v točki M. Dokaži, da je $|BC| = |MN|$.

2. Dana je tabela velikosti $n \times n$. V poljih prvega stolpca je zapisano število 1, v poljih drugega stolpca je zapisano število 2 in tako dalje. Zatem zbrišemo vsa števila z diagonale, ki povezuje levi zgornji in desni spodnji vogal tabele. Dokaži, da je vsota števil, ki ostanejo nad diagonalo, dvakrat večja od vsote števil, ki so ostala pod diagonalo.

3. Izberimo tako število $a > 0$, da ima neenačba $1 < xa < 2$ natanko tri cele rešitve. Koliko

celih rešitev ima tedaj lahko neenačba $2 < xa < 3$?

4. Ana, Borut in Vita sedijo za okroglo mizo, na kateri so vsaj štirje lešniki. Na začetku so vsi lešniki na mizi Anini. Če je število Aninih lešnikov sodo, jih polovico da Borutu, polovico pa Viti. V nasprotnem primeru Ana poje en lešnik in preostale lešnike razdeli kot prej. Nato naslednji otrok v krožnem vrstnem redu deli svoje lešnike na enak način in pri tem poje en lešnik, če je to potrebno. Otroci s postopkom nadaljujejo. Dokaži, da

   a) otroci pojedo vsaj en lešnik.

   b) otroci ne pojedo vseh lešnikov.

5. Peter ima n^3 belih kockic velikosti $1 \times 1 \times 1$. Določi najmanjše število stranskih ploskev teh kockic, ki jih mora počrniti Vasja, da Peter ne bo mogel sestaviti kocke velikosti $n \times n \times n$ s povsem belim površjem, če je

   a) $n = 2$.

   b) $n = 3$.

□ 2. skupina (prvi del)

1. Dan je konveksen polieder s 100 robovi. Vsako izmed oglišč poliedra odrežemo z neko ravnino, pri čemer se te ravnine med seboj ne sekajo ne znotraj ne na robu poliedra. Za tako nastali prisekani polieder določi

   a) število njegovih oglišč.

   b) število njegovih robov.

2. Ali obstajata taki neničelni funkciji p in q, da je p soda funkcija, $p \circ q$ pa liha funkcija?

3. Izberimo tako število $a > 0$, da ima neenačba $10 < a^x < 100$ natanko pet rešitev v množici naravnih števil. Koliko rešitev ima v množici naravnih števil tedaj lahko neenačba $100 < a^x < 1000$?

4. Dan je tetivni štirikotnik $ABCD$, za katerega velja $|AB| = |AD|$. Točka M leži na stranici BC, točka N pa na stranici CD. Denimo, da velja $\angle BAD = 2 \cdot \angle MAN$. Dokaži, da je tedaj $|MN| = |BM| + |ND|$.

5. Peter ima n^3 belih kockic velikosti $1 \times 1 \times 1$. Določi najmanjše število stranskih ploskev teh kockic, ki jih mora počrniti Vasja, da Peter ne bo mogel sestaviti kocke velikosti $n \times n \times n$ s povsem belim površjem, če je

   a) $n = 3$.

   b) $n = 1000$.

□ 1. skupina (drugi del)

1. Bilijardna miza velikosti 2×1 ima luknje v vogalih in na sredini obeh daljših stranic. Najmanj koliko krogel moramo postaviti na mizo, da bi za vsaki dve luknji obstajal par krogel, ki bi ležal na zveznici izbranih lukenj?

2. Dokaži, da obstaja 100 parov celih števil, katerih števke so vsaj 6, poleg tega pa so tudi števke produkta števil iz vsakega para vsaj 6.

3. Nad stranici AB in BC ostrokotnega trikotnika ABC z zunanje strani načrtamo pravokotnika $ABMN$ in $LBCK$, tako da velja $|AB| = |LB|$. Dokaži, da se premice AL, CM in KN sekajo v skupni točki.

4. Ali obstaja tako naravno število n, da se število 2^n v desetiškem zapisu začne s števko 5, število 5^n pa se v desetiškem zapisu začne s števko 2?

5. V poljih tabele velikosti 2005×2006 so zapisana števila 0, 1 in 2, tako da je vsota števil v poljubnem stolpcu in poljubni vrstici tabele deljiva s 3. Pri danih predpostavkah določi največje možno število polj, v katerih je zapisano število 1.

6. Lik, katerega stranice so krožni loki, imenujmo *krivočrtni večkotnik*. Ali obstaja krivočrtni mnogokotnik P, ki premore tako točko A na svojem robu, da vsaka premica skozi točko A razdeli obseg mnogokotnika P na dva enako dolga dela?

7. Jure in Jaša imata dve enaki tabeli velikosti 5×5, v katerih je zapisano 25 različnih števil. Jure v svoji tabeli izbere največje število in prečrta stolpec in vrstico tabele, v katerih se nahaja izbrano število. Nato v preostanku tabele znova izbere največje število in prečrta pripadajoča stolpec in vrstico, ter postopek ponavlja do konca. Jaša s svojo tabelo naredi enako, le s to razliko, da v vsakem koraku namesto največjega števila v tabeli izbere najmanjše število. Ali je lahko vsota števil, ki jih izbere Jaša

   a) večja od vsote števil, ki jih izbere Jure?

   b) večja od vsote poljubnih drugih petih števil iz tabele, med katerimi noben par ne leži niti v skupni vrstici, niti v skupnem stolpcu?

□ 2. skupina (drugi del)

1. Dokaži, da lahko v notranjosti poljubnega konveksnega 100-kotnika P izberemo 50 točk, tako da za vsako oglišče A_i večkotnika P obstajata dve izmed izbranih 50 točk par teh točk, tako da oglišče A_i leži na premici skozi ti dve točki.

2. Ali obstajata taki naravni števili k in n, da se število 2^n v desetiškem zapisu začne s številom 5^k, število 5^n pa se v desetiškem zapisu začne s številom 2^k?

3. Naj bo $p(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2$. Dokaži, da ima za vsako naravno število polinom $(p(x))^n$ vsaj en negativni koeficient.

4. Naj bo AA' težiščnica trikotnika ABC in X izbrana točka v notranjosti daljice AA'. Presečišče premice BX in stranice AC označimo z B', presečišče premice CX in stranice AB pa s C'. Daljici $A'B'$ in CC' naj se sekata v točki P, daljici $A'C'$ in BB' pa v točki Q. Dokaži, da velja $\angle PAC = \angle QAB$

5. Dokaži, da obstaja neskončno parov celih števil, katerih števke so vsaj 7, poleg tega pa so tudi števke produkta števil iz poljubnega para vsaj 7.

6. Na krožnici je nanizano 12 majhnih kroglic, ki krožnico razdelijo na 12 krožnih lokov. V enem koraku vse kroglice v smeri urinega kazalca premaknemo iz krajišča v sredino pripadajočega loka. Opisani postopek zatem ponavljamo. Ali je možno, da se katera od kroglic vrne v svoj izhodiščni položaj

   a) po 12 korakih? b) po 13 korakih?

7. Mravlja leze po robovih dodekaedra in napravi obhod vseh njegovih robov, tako da v notranjosti roba ne spremeni smeri in vse robove prehodi natanko dvakrat. Dokaži, da obstaja rob, po katerem je mravlja obakrat lezla v isto smer.

   (Dodekaeder ima 12 stranskih ploskev, ki imajo obliko petkotnika, 30 robov in 20 oglišč, v katerih se stikajo po tri stranske ploskve.)

Gregor Cigler

■ Rešitve nalog 50. matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije

I/1. Če v prvi enačbi odpravimo ulomke, dobimo $ab + a + ab + b = a + b + ab + 1$ in od tod $ab = 1$. Sledi

$$\begin{aligned}\frac{a}{1+b^2} - \frac{b}{1+a^2} &= \frac{a + a^3 - b - b^3}{(1+a^2)(1+b^2)} = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2+1)}{1+a^2+b^2+a^2b^2} = \\ &= \frac{(a-b)(a^2+b^2+2)}{a^2+b^2+2} = a - b.\end{aligned}$$

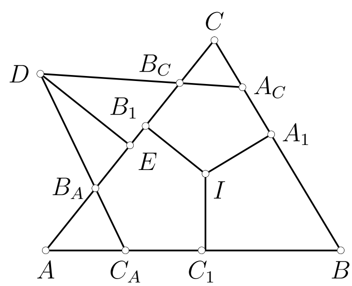
I/2. Veljati mora $\frac{5m-n}{m+n} = k$ za neko naravno število k, torej je

$$(5-k)m = (k+1)n.$$

Desna stran enačbe je naravno število, zato je naravno število tudi leva stran, kar pomeni, da je $5 > k$. Če je $k = 4$, dobimo $m = 5n$ in ker sta m in n tuji, sledi $m = 5$, $n = 1$. Pri $k = 3$ dobimo $m = 2n$ in od tod $m = 2$, $n = 1$. Če je $k = 2$, sledi $m = n$ in potem $m = 1$, $n = 1$. Ostane le še možnost, da je $k = 1$. Tedaj je $4m = 2n$ in zato $m = 1$, $n = 2$.

Nalogo torej rešijo štirje pari naravnih števil (m, n), in sicer $(5, 1)$, $(2, 1)$, $(1, 1)$ ter $(1, 2)$.

I/3. Označimo z B_A, B_C, A_C in C_A razpolovišča daljic AB_1, CB_1, CA_1 in AC_1, z E pa pravokotno projekcijo točke D na AC. Naj bo r polmer včrtane krožnice trikotnika ABC, $b = |AC|$ in $x = |AB_1|$. Ker je $\angle AIB_1 = \angle C_A B_A A = \angle DB_A E$ in $\angle AB_1 I = \angle DEB_A = \frac{\pi}{2}$, sta si trikotnika AIB_1 in DB_AE podobna. Zato velja



$$\frac{|DE|}{|EB_A|} = \frac{|AB_1|}{|B_1 I|} = \frac{x}{r}.$$

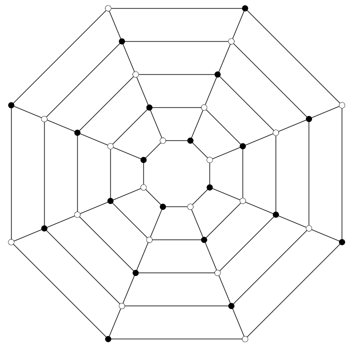
Podobno sledi, da sta si tudi trikotnika CIB_1 in DB_CE podobna, od koder dobimo

$$\frac{|DE|}{|EB_C|} = \frac{|CB_1|}{|B_1 I|} = \frac{b-x}{r}.$$

Če ti dve enačbi delimo, dobimo $\frac{|EB_A|}{|EB_C|} = \frac{b-x}{x}$ oziroma $|EB_A| = \frac{b-x}{x}|EB_C|$. Ker je $|EB_A| + |EB_C| = |B_A B_C| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{b}{2}$, dobimo $\frac{b-x}{x}|EB_C| + |EB_C| = \frac{b}{2}$ in od tod $|EB_C| = \frac{x}{2}$. Torej je res

$$|CE| = |CB_C| + |B_C E| = \frac{1}{2}|CB_1| + \frac{x}{2} = \frac{b-x}{2} + \frac{x}{2} = \frac{b}{2}.$$

I/4. Pobarvajmo oglišča mreže izmenično z belo in črno barvo (glej sliko). Katerikoli sosednji oglišči sta različnih barv. Ker gre pajek mimo 25 oglišč in pride v 26. oglišče, je le-to iste barve, kot je bilo oglišče, iz katerega se je napotil. Torej ne more pojesti nobene muhe na belem oglišču. Iz poljubnega črnega oglišča se lahko pajek premakne na sosednje črno oglišče tako, da gre najprej mimo vmesnega belega oglišča do tega črnega, nato pa iz tega oglišča dvanajstkrat v sosednje belo oglišče in nazaj. Tako pride iz črnega oglišča mimo 25 oglišč do poljubnega sosednjega črnega oglišča in postopoma obišče vsa črna oglišča. Pajek torej poje največ 19 muh, saj se je na začetku sam nahajal na črnem oglišču, v katerega se ni ujela nobena muha.



II/1. Zapišimo $n^4-1=(n^2-1)(n^2+1)=(n-1)(n+1)(n^2+1)$. Ker so ostanki števila n^2 pri deljenju z 9 le 0, 1, 4 in 7, število n^2+1 ne more biti deljivo z 9. Števili $n-1$ in $n+1$ se razlikujeta za 2, zato je lahko le eno izmed njiju deljivo s 3. Ker pa je njun produkt deljiv z 9, je torej z 9 deljivo natanko eno izmed števil $n-1$ in $n+1$. Če je to $n-1$, je $n=9k+1$ za nek $k\geq 0$, sicer pa je $n=9l-1$ za nek $l\geq 1$. Veljati mora še $n<2006$, kar v prvem primeru pomeni $9k+1<2006$ oziroma $k<222+\frac{7}{9}$, v drugem pa $l<223$. Tako imamo $0\leq k\leq 222$ in $1\leq l<223$, zato je skupno 445 takšnih števil.

II/2. Iz razlike enačb dobimo $6xy=-36$ oziroma $xy=-6$. Zato je

$$x^2+4y^2=16-4xy=16-4\cdot(-6)=40.$$

Če izrazimo $x=-\frac{6}{y}$ in vstavimo v pravkar dobljeno enačbo, dobimo $\frac{36}{y^2}+4y^2=40$ oziroma

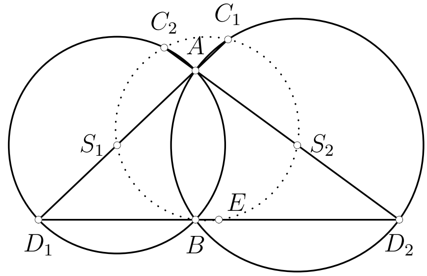
$$y^4-10y^2+9=0.$$

Dobili smo kvadratno enačbo za y^2, ki jo lahko razcepimo kot $(y^2-9)(y^2-1)=0$ oziroma

$$(y-3)(y+3)(y-1)(y+1)=0.$$

Torej je y enak enemu izmed števil $-3,-1,1,3$, x pa izračunamo iz $x=-\frac{6}{y}$. Pari rešitev so tako $(2,-3),(-2,3),(6,-1)$ in $(-6,1)$.

II/3. Po Talesovem izreku o kotu v polkrogu vemo, da so točke C_1, C_2 in B nožišča višin trikotnika D_1D_2A. Torej ležijo točke C_1, C_2, D_1 in D_2 na isti krožnici s središčem v točki E. Zaradi zveze med obodnim in središčnim kotom v tej krožnici velja



$$2\angle C_2D_1C_1=\angle C_2EC_1=2\angle C_2D_2C_1.$$

Podobno v $\mathcal{K}_1$ velja

$$\frac{1}{2}\angle C_2S_1A=\angle C_2BA,$$

v $\mathcal{K}_2$ pa

$$\frac{1}{2}\angle AS_2C_1 = \angle ABC_1.$$

Poleg tega dobimo še

$$\angle C_2S_1C_1 = \angle C_2S_1A = 2\angle C_2D_1A = 2\angle C_2D_1C_1 = \angle C_2EC_1$$

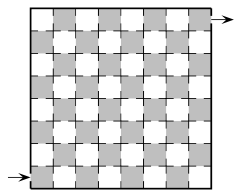
in analogno

$$\angle C_2S_2C_1 = \angle C_2EC_1.$$

Sedaj izračunamo še

$$\begin{aligned}\angle C_2BC_1 &= \angle C_2BA + \angle ABC_1 = \\ &= \frac{1}{2}(\angle C_2S_1A + \angle AS_2C_1) = \frac{1}{2}(\angle C_2S_1C_2 + \angle C_2S_2C_1) = \\ &= \frac{1}{2}(2\angle C_2EC_1) = \angle C_2EC_1)\end{aligned}$$

Torej so točke S_1, S_2, C_1, C_2, B in E res konciklične.



II/4. Pobarvajmo labirint z dvema barvama, kot kaže slika. Miška v 1. koraku stopi na osenčeno polje. Ker miška stopi na osenčeno polje na vsakem lihem koraku, na 64. koraku ne more stopiti na osenčeno polje tik pred izhodom iz labirinta. Miška se torej ne more sprehoditi skozi labirint na predpisan način.

III/1. Označimo $y = x^2$ in enačbo prepišimo v obliko $y^2 + ay + a^3 - 1 = 0$. Če naj ima enačba $x^4 + ax^2 + a^3 = 1$ štiri realne rešitve, mora imeti enačba $y^2 + ay + a^3 - 1 = 0$ dve nenegativni realni rešitvi: y_1 in y_2. Po Vietovih pravilih dobimo $y_1 + y_2 = -a$ in $y_1y_2 = a^3 - 1$. Torej mora veljati $-a \geq 0$ in $a^3 - 1 \geq 0$, od koder dobimo protislovje $1 \leq a \leq 0$. Enačba torej v nobenem primeru nima štirih realnih rešitev.

2. Rešitev Označimo $y = x^2$. Ničli enačbe $y^2 + ay + a^3 - 1 = 0$ sta

$$y_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4(a^3 - 1)}}{2}, \quad y_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4(a^3 - 1)}}{2}.$$

Da bo imela prvotna enačba štiri realne rešitve, mora biti $y_1 \geq 0$ in $y_2 \geq 0$. Ker je $\sqrt{a^2 - 4(a^3 - 1)} \geq 0$, iz pogoja $y_2 \geq 0$ sledi $-a \geq 0$ oziroma $a \leq 0$. Iz $y_2 \geq 0$ pa sledi $-a \geq \sqrt{a^2 - 4(a^3 - 1)}$, od koder s kvadriranjem dobimo še $a^2 \geq a^2 - 4a^3 + 4$ oziroma $4a^3 \geq 4$. Torej mora biti $a \geq 1$, kar nas skupaj z $a \leq 0$ vodi v protislovje.

III/2. Ker a deli $b + c$, b deli $c + a$ in c deli $a + b$, lahko zapišemo $b + c = ka$, $c + a = lb$ in $a + b = mc$ za neka naravna števila k, l, m. Iz pogoja $a \geq b \geq c$ sledi $ka = b + c \leq 2a$, zato $k \in \{1, 2\}$.

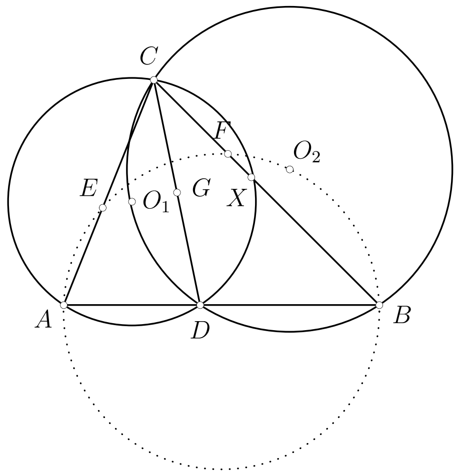
Če je $k = 2$, je $a = b = c$.

Če je $k = 1$, je $b + c = a$. Zaradi $c + a = lb$ velja $c + b + c = lb$ oziroma $2c = (l - 1)b$. Ker pa je $b \geq c$, sledi $2c = (l - 1)b \geq (l - 1)c$, torej je $2 \geq l - 1$ in zato $l \in \{1, 2, 3\}$.

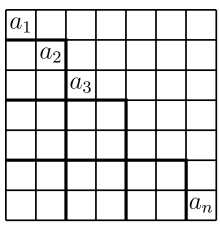
Iz $l = 1$ sledi $c = 0$, kar ni možno. Pri $l = 2$ dobimo $b = 2c$ in $a = 3c$. Če pa je $l = 3$, sledi $b = c$ in $a = 2b$.

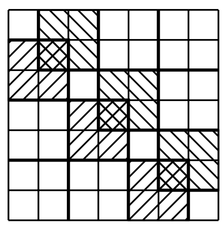
Vse rešitve so trojice (c, c, c), $(3c, 2c, c)$ in $(2c, c, c)$, kjer je c poljubno naravno število.

III/3. Naj bo G razpolovišče daljice CD. Trikotnika EGC in EGD sta pravokotna s pravim kotom pri G in imata para skladnih stranic, to je $|EG| = |EG|$ in $|GC| = |GD|$, zato sta skladna. Torej je $|ED| = |EC|$. Ker je $\angle DCE = \frac{\gamma}{2}$, velja $\angle DEC = \pi - \gamma$, zato je $\angle AED = \gamma$. Torej se trikotnika AED in FCE ujemata v kotu $\angle AED = \gamma = \angle FCE$ in v priležnih stranicah, zato sta skladna. Tako je $\angle CFE = \alpha$, zato je $\angle EFB = \pi - \alpha$. Potem velja $\angle EFB + \angle EAB = \pi - \alpha + \alpha = \pi$, zato je $ABEF$ tetivni štirikotnik. Pokažimo, da tudi O_2 leži na tej krožnici. Po izreku o središčnem in obodnem kotu sledi $\angle DO_2B = 2\angle DCB = 2\frac{\gamma}{2} = \gamma$ in $\angle DO_2G = \frac{\angle DO_2C}{2} = \frac{2\angle DBC}{2} = \beta$, zato je $\angle BO_2E = \angle BO_2D + \angle DO_2G = \gamma + \beta = \pi - \alpha = \angle BFE$ in tudi O_2 leži na krožnici, očrtani štirikotniku $ABEF$.



III/4. Označimo diagonalne elemente od levega zgornjega do desnega spodnjega kota po vrsti z a_1, a_2, ..., a_n. Tabelo pokrijmo z 2×2 kvadrati na naslednji način. Najprej $\frac{n-1}{2}$ kvadratov postavimo v prva dva stolpca tako, da pokrijejo vsa polja od druge do zadnje vrstice, nato v sosednja dva stolpca postavimo $\frac{n-1}{2} - 1$ kvadratov, da pokrijejo vsa polja od tretje do zadnje vrstice in tako nadaljujemo. Nato 2×2 kvadrate na enak način postavimo še v desni zgornji kot.





Tako so vsa polja pokrita natanko enkrat, razen polj na diagonali. Polja označena z $a_1, a_3, \ldots, a_n$ niso pokrita, polja označena z $a_2, a_4, \ldots, a_{n-1}$ pa so pokrita dvakrat. Označimo vsoto vseh števil v tabeli s S. Torej je $S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_n$ in velja

$$|S| = |a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + \ldots + |a_n| \leq n.$$

IV/1. Leva stran enačbe je vsota končne geometrijske vrste in je zato

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{8} + \sqrt{16} + \ldots + \sqrt{2^n} = \frac{\sqrt{2^{n+1}} - 1}{\sqrt{2} - 1}.$$

Če ulomek racionaliziramo, dobimo

$$\frac{\sqrt{2^{n+1}} - 1}{\sqrt{2} - 1} = (\sqrt{2^{n+1}} - 1)(\sqrt{2} + 1).$$

Neenakost med aritmetično in geometrijsko sredino, ki se za pozitivni števili a in b glasi $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, nam da

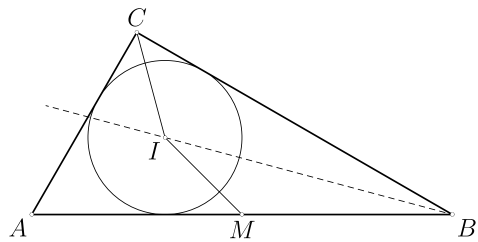
$$\frac{1+\sqrt{2}}{2} > \sqrt[4]{2}$$

oziroma $1+\sqrt{2} > 2 \cdot \sqrt[4]{2}$. Torej je

$$(\sqrt{2^{n+1}}-1)(\sqrt{2}+1) > 2 \cdot \sqrt[4]{2}(\sqrt{2^{n+1}}-1),$$

kar je bilo potrebno dokazati.

IV/2. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da je $|AC| < |BC|$. Ker sta $\angle ACI$ in $\angle AMI$ ostra kota ter sta dve stranici in en kot skladna, sta trikotnika ACI in AMI skladna. Torej je $|AC| = |AM|$ in $\angle ACI = \angle IMA$. Zato je



$$\begin{aligned} \angle CIM &= 2\pi - (\angle CIA + \angle AIM) = \\ &= \angle BAC + \angle IMA + \angle ACI = \\ &= \angle BAC + \angle ACB = \\ &= \pi - \angle CBA. \end{aligned}$$

Ker BC seka krožnico s središčem A in polmerom $|AM|$ v C, je kot $\angle CBA$ največji, ko je BC tangenta na to krožnico. Tedaj je ABC pravokotni trikotnik s pravim kotom v C in $|AB| = 2|AC|$, torej je $\angle CBA = \frac{\pi}{6}$. Najmanjša možna vrednost kota $\angle CIM$ je torej $\frac{5\pi}{6}$.

IV/3. Denimo najprej, da trimestno število $\overline{abc}$ ni deljivo s 7. Potem da pri deljenju s 7 ostanek k. Če je $c \geq k$, zamenjamo enice s števko $c-k$. Število $\overline{ab(c-k)} = \overline{abc} - k$ je potem deljivo s 7. Če pa je $c < k$, zamenjamo števko c s števko $c+7-k$. Res je $c+7-k$ število med 0 in 9, saj je $0 \leq c < c+7-k < k+7-k = 7$. Menjava je torej možna za vsa števila, ki niso deljiva s 7.

Oglejmo si sedaj trimestna števila $\overline{abc}$, deljiva s 7. Če števko a zamenjamo z $a \pm k$, $k \neq 0$, je število $\overline{(a \pm k)bc} = \overline{abc} \pm k \cdot 100$ deljivo s 7 natanko tedaj, ko je k deljivo s 7. Enako sklepamo, če menjamo števki b in c. Iz trimestnega števila, deljivega s 7, dobimo po menjavi trimestno število, deljivo s 7, natanko takrat, ko eni izmed števk prištejemo ali odštejemo 7. Če menjava ni možna, imamo torej trimestno število $\overline{abc}$, deljivo s 7, kjer je $3 \leq a \leq 7$ in $3 \leq b, c \leq 6$. Takšna števila med 333 in 366 so 336, 343 in 364, med 433 in 466 sta taki števili 434 in 455, med 533 in 566 sta to 546 in 553, med števili 633 in 666 sta takšni 644 in 665, med 733 in 766 pa so iskana števila 735, 756 in 763.

IV/4. Odgovor je ne. Denimo, da takih pet točk obstaja. Vseh različnih parov točk je natanko 10 in ravno toliko je vseh dolžin, zato za vsako celo število med 1 in 10 obstaja natanko en par točk, ki sta oddaljeni za to dolžino.

Označimo s P in R točki, ki sta med seboj oddaljeni 1 enoto. Naj bo X ena izmed ostalih treh točk. Privzamemo lahko $|PX| < |RX|$, torej $|PX|+1 \leq |RX|$. Po trikotniški neenakosti pa velja $|PX| + |PR| \geq |RX|$, torej $|PX| + 1 \geq |RX|$. Zato mora veljati $|PX| + 1 = |RX|$ in so točke P, R in X kolinearne. Torej je vseh 5 točk kolinearnih.

Naj bosta sedaj A in B točki, ki sta med seboj oddaljeni 10 enot. Postavimo številsko premico tako, da bo točka A ležala na koordinati 0, točka B pa na koordinati 10. Vemo že, da vse ostale točke ležijo na celoštevilskih koordinatah med A in B. Naj bo C točka, ki tvori par z razdaljo 9 enot. Točka C leži na koordinati 1 ali 9. Privzamemo lahko, da leži na koordinati 1. Ker razdalja 1 pripada paru točk (A, C) in ni nobenega drugega para z razdaljo 1, nobena izmed preostalih točk ne more ležati na koordinatah 2 in 9. Tedaj točka D, ki tvori par z razdaljo 8, leži le na koordinati 8. Ker nobena izmed točk ne more ležati na koordinatah, ki so od že postavljenih točk oddaljene za 1 ali 2, leži zadnja točka E na koordinati 4. Pri tej postavitvi noben par točk ne tvori razdalje 5 enot, zato takih 5 točk ne obstaja.

■ Rešitve nalog šolskega tekmovanja iz znanja poslovne matematike za bronasto priznanje

□ 1. skupina (nižja stopnja zahtevnosti)

1. a)

50 šivilj …	4 dni …	2600 zaves …	2,4 m D …	2 m Š
x šivilj …	5 dni …	3800 zaves ….	3 m D …	2,3 m Š

$x : 50 = 4 : 5$

$3800 : 2600$

$3 : 2,4$

$2,3 : 2$

$$x = \frac{50 \cdot 4 \cdot 3800 \cdot 3 \cdot 2,3}{5 \cdot 2600 \cdot 2,4 \cdot 2}$$

$x = 84,04$ $\qquad 84 - 50 = 34$

Odg.: Dodatno bo potrebno zaposliti približno 34 šivilj.

b)

4 dni …	50 šivilj…	8 h…	2600 zaves…	2,4 m D…	2 m Š …	100 % prod.
x dni…	38 šivilj …	9 h …	3800 zaves …	3 m D…	2,3 m Š…	110 % prod.

$x : 4 = 50 : 38$

$8 : 9$

$3800 : 2600$

$3 : 2,4$

$2,3 : 2$

$100 : 110$

$$x = \frac{4 \cdot 50 \cdot 8 \cdot 3800 \cdot 3 \cdot 2,3 \cdot 100}{38 \cdot 9 \cdot 2600 \cdot 2,4 \cdot 2 \cdot 110} \qquad x = 8,94$$

Odg.: Naročilo bo končano v 9 dneh.

c)

4 dni	100 %
9 dni	x %

$x : 100 = 9 : 4$ $\qquad 4 \cdot x = 9 \cdot 100$ $\qquad x = 225\,\%$

Odg.: Za 125 % več dni.

2. a)

x EUR	120 gl
1 gl	4,405 litra
1 liter	8,5 USD
1 USD	198,7725 SIT
239,3452 SIT	1 EUR

$$x = \frac{120 \cdot 4,405 \cdot 8,5 \cdot 198,7725}{239,3452}$$

$$x = 3\ 731,45 \text{ EUR}$$

Odg.: Za sklenitev tega posla potrebuje 3731,45 EUR.

b)

x EUR	1 liter
1 liter	8,5 USD
1 USD	198,7725 SIT
239,3452 SIT	1 EUR
100 EUR	105 EUR
100 EUR	120 EUR

$$x = \frac{8,5 \cdot 198,7725 \cdot 105 \cdot 120}{239,3452 \cdot 100 \cdot 100}$$

$$x = 8,89 \text{ EUR}$$

Odg.: 1 liter javorovega sirupa bo stal francoskega trgovca 8,89 EUR.

3. Razdelitev:

$$24000 \cdot \frac{1}{4} = 6000 \quad \text{enaki deli}$$

$$24000 \cdot \frac{2}{5} = 9600 \quad \text{razmerje osvojenih točk}$$

$$24000 - 15600 = 8400 \text{ ostanek - delitev z razlikami}$$

Tekmovalec	**Enaki deli**	**Delež**	**Osvojene točke**	**Delitveno razmerje**	**DELEŽ**	**Razlike**	**Delež**	**SKUPAJ**
A	x	1500	15	5 y	4800	z	2130	8430
B	x	1500	9	3 y	2880	z - 20	2110	6490
C	x	1500	6	2 y	1920	z - 40	2090	5510
D	x	1500	0	-	-	z - 60	2070	3570
SKUPAJ	4x	6000	30	10 y	9600	4z -120	8400	24000

Stranski računi:

4x = 6000 x = 1500
10y = 9600 y = 960
4z – 120 = 8400 z = 2130

Odg.: Tekmovalec A prejme 8430 EUR, B prejme 6490 EUR, C dobi 5510 EUR, tekmovalec D pa 3570 EUR nagrade.

4. a) $200 \cdot 150 + 500 \cdot 120 + (1000 - 700) \cdot x = 1000 \cdot 114$

$x = 80\ SIT$

Dodati moramo 300 kg blaga po 80 SIT.

b)

	Razmerje	Razmerje	Delitveno razmerje	**DELEŽ**
80	6+36	42	21 x	105
114				
120	34	34	17 x	85
150	34	34	17 x	85
Skupaj			55 x	275

21 x = 105 kg, x = 5 kg

Odg.: V mešanico bomo morali dodati 85 kg blaga po120 SIT in prav tako 85 kg blaga po 150 SIT.

c)

80	20 + 50	70	7 x
100			
120	20	20	2 x
150	20	20	2 x

Odg.: V tem primeru bi morali mešanico sestaviti s sedmimi deli blaga po 80 SIT ter s po dvema deloma blaga po 120 SIT in po 150 SIT.

□ 2. skupina (višja stopnja zahtevnosti)

1. NALOGA

Stroški 1.000,00 SIT
G+o = 128.871,42
p = 17%
d = 18

a)

$$G + \frac{G \cdot p \cdot d}{36.600} = 128.871,42$$

G = 127.800,00

b)

G = 127.800,00
d = 30
G + o = 128.871,42
o = 1.071,42

$$p = \frac{o \cdot 36500}{G \cdot d}$$

p = 10,20% p.a.

c)

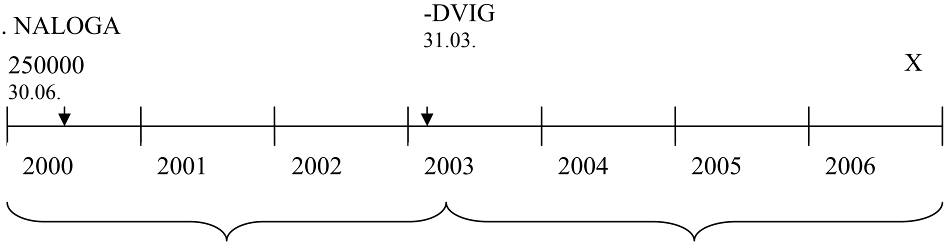
G = 127.800,00
p = 17 %
d = 30

o = ?

$$o = \frac{G \cdot p \cdot d}{36500}$$

o= 1.785,70

2. NALOGA



p = 4,75 % p.a.
m = 4
p = 1,1875 % p.q.

p = 4,25 % p.a.
m = 4
p = 1,0625 % p.q.

a) Gn (31.3.2003) = 250.000 * $1,011875^{(2.75*4)}$ = 284.665,96 * 0,5 = **142.332,98 SIT**

Gn(31.12.2006) = 142.332,98 * $1,010625^{(3,75*4)}$ = **166.784,66 SIT**

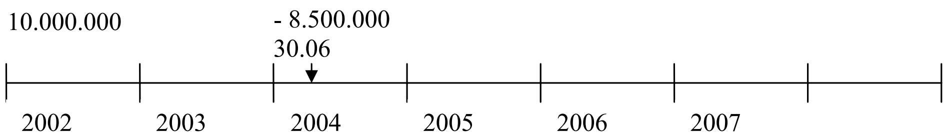
b)

Gn = 142.332,98 * $1,003542^{(3,75*12)}$ = **166.877,94 SIT**
O = 166.877,94 – 142.332,98 = **24.544,96 SIT**

c)

Razlikujeta se za **0,056%**

3. NALOGA



$\pi = 7{,}2\% \, p.a.$

$m = 2$

$\pi = 3{,}6\% \, p.s.$

a)

10.000.000 * $\rho^{(2,5*2}$) – 8.500.000 = 3.511.986,34 SIT

3.511.986,34 * ρ^{n} = 4.539.558,11 SIT /log
n = 3,5 let

b)

Preostanek bo vrnila po treh letih in pol, **31.12.2007**.

c)

$$p = \left(1 - \sqrt[4]{\frac{3511986{,}34}{4400000}}\right) \cdot 100 \cdot 2 = 10{,}96\%$$

4. NALOGA

a)

$$r = 1 + \tfrac{7}{1200} = 1{,}005833333$$

$$Sn = \frac{100000 * r^{36} * (r^{72} - 1)}{r^{6} - 1} = 1805609{,}31 DE$$

b)

$$Sn = 6 * 150000 + \frac{150000 * 7 * (3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)}{100} = 1246500\ DE$$

■ Rešitve nalog državnega tekmovanja v poslovni matematiki 2006

□ 1. skupina (nižja stopnja zahtevnosti)

1. a.) R: 1.600 ton   b.) R: 12%

2. a.) R: 1.322,40 SIT   b.) R: 78.570 USD

3. a.) R: Prvi investitor bo prispeval 480.000 EUR, drugi 320.000 EUR, tretji 250.000 EUR, četrti pa 150.000 EUR .

   b.) R: Prvi investitor bo prispeval 468.000 EUR, drugi 300.000 EUR, tretji 240.000 EUR, četrti pa 192.000 EUR .

4. a.) R: 8.789 SIT   b.) R: 6.166,29 SIT   c.) R: 6.276,40 SIT.

□ 2. skupina (višja stopnja zahtevnosti)

1. naloga

a) R: 12,50% p.a. b) R: 9.655,86 SIT

2. naloga

a) R: 133.649,96 EUR b) R: 0,88%

3. naloga

a) R: 1.018.573,18 SIT b) R: 297.093,33 SIT, 326.802,66 SIT, 359.482,93 SIT

c) R: 67.245,97 SIT

4. naloga

a) R: 28.238,69 SIT b) R: 30.874,79 SIT c) R: 520.883,40 SIT

■ Rešitve nalog 27. mednarodnega matematičnega tekmovanja mest (Pomladanski krog)

□ 1. skupina (prvi del)

1. Velja $|AN| = |BN|$, zato je $\angle NBA = \angle BAN = 60^\circ$, torej je BAN enakostranični trikotnik. Podobno ugotovimo, da je tudi CAM enakostranični trikotnik, zato velja $|BM| = |CN|$. Poleg tega velja tudi $|CM| = |MC|$ in $\angle BMC = 60^\circ = \angle NCM$, kar pomeni, da sta BMC in NCM podobna trikotnika. Od tod sledi $|CB| = |MN|$.

2. Trditev naloge dokažimo z indukcijo. Za $n = 1$ trditev očitno velja, saj sta obe vsoti enaki 0. Denimo sedaj, da trditev velja za nek $n \geq 1$ in opazujmo povečano tabelo velikosti $(n+1) \times (n+1)$. Vsota števil nad diagonalo v povečani tabeli je večja za $n(n+1)$, vsota števil pod diagonalo pa se poveča za $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$. To pomeni, da je tudi v povečani tabeli vsota števil nad diagonalo dvakrat večja od vsote števil pod diagonalo.

3. Naj bodo $n-1, n$ in $n+1$ cele rešitve neenačbe $1 < xa < 2$. Od tod dobimo $(n-2)a \leq 1 < (n-1)a$ in $(n+1)a < 2 \leq (n+2)a$, torej je $a > \frac{1}{n-1}$, $a \geq \frac{2}{n+2}$, $a \leq \frac{1}{n-2}$ in $a < \frac{2}{n+1}$. Ločimo naslednje primere:

   (1) Za $n \leq 3$ iz $\frac{1}{n-1} < a < \frac{2}{n+1}$ sledi $n > 3$, torej v tem primeru ne dobimo rešitev.

   (2) Za $n = 4$ dobimo $\frac{1}{3} < a < \frac{2}{5}$.

(3) Za $n = 5$ dobimo $\frac{2}{7} < a < \frac{1}{3}$.

(4) Za $n = 6$ dobimo $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{4}$, torej je $a = \frac{1}{4}$.

(5) Za $n \geq 7$ iz $\frac{2}{n+2} \leq a \leq \frac{1}{n-2}$ sledi $n \leq 6$, torej v tem primeru ne dobimo rešitev.

Pri določanju števila celih rešitev neenačbe $2 < xa < 3$ ločimo šest primerov:

(1) Če je $a = \frac{1}{4}$, dobimo $8a = 2 < 9a$ in $11a < 3 = 12a$, torej imamo 3 rešitve.

(2) Če je $a = \frac{2}{7}$, dobimo $7a = 2 < 8a$ in $10a < 3 < 11a$, torej imamo 3 rešitve.

(3) Če je $\frac{2}{7} < a < \frac{3}{10}$, dobimo $6a < 2 < 7a$ in $10a < 3 < 11a$, torej imamo 4 rešitve.

(4) Če je $\frac{3}{10} < a < \frac{1}{3}$, dobimo $6a < 2 < 7a$ in $9a < 3 < 10a$, torej imamo 3 rešitve.

(5) Če je $\frac{1}{3} < a < \frac{3}{8}$, dobimo $5a < 2 < 6a$ in $8a < 3 < 9a$, torej imamo 3 rešitve.

(6) Če je $\frac{3}{8} \leq a < \frac{2}{5}$, dobimo $5a < 2 < 6a$ in $7a < 3 \leq 8a$, torej imamo 2 rešitvi.

4. a) Denimo, da ima Ana nazčetku $2^n t$ lešnikov, kjer je n celo nenegativno število in t liho naravno število. Če je $n = 0$, Ana takoj poje en lešnik, zato privzemimo, da je $n \geq 1$. Tedaj da Ana Viti in Borutu po $2^{n-1}t$ lešnikov. Če je $n = 1$, Borut poje en lešnik. Privzemimo torej, da je $n \geq 2$. Tedaj Borut da Ani in Viti po $2^{n-2}t$ lešnikov, kar pomeni, da ima Vita $2^{n-2}3t$ lešnikov. V primeru $n = 2$ Vita poje en lešnik, zato privzemimo, da je $n \geq 3$, torej Vita razdeli svoje lešnike, Ana pa ima tedaj $2^{n-3}5t$ lešnikov. Število lešnikov, ki jih v nekem trenutku deli eden izmed otrok, je vedno oblike $2^x y$, kjer je x nenegativno celo število in y liho naravno število. Vrednost števila x se v vsakem koraku zmanjša za 1, kar pomeni, da v nekem trenutku velja $x = 0$, zato tedaj eden izmed otrok zagotovo poje en lešnik.

   b) Vsakič, ko svoje lešnike deli Ana, Vita nima lešnikov, torej jih ima Borut vsaj toliko kot Vita. Ko lešnike deli Borut ima Vita vsaj toliko lešnikov kot Ana, ko svoje lešnike deli Vita, pa ima Ana vsaj toliko lešnikov kot Borut. Pri opisanem postopku otroci pojedo po en lešnik, pri čemer se postopek začne z vsaj štirimi lešniki. Če predpostavimo, da otroci na koncu pojedo vse lešnike, morajo tako v nekem trenutku na mizi ležati natanko trije lešniki. Predpostavimo lahko, da se to zgodi potem, ko je svoje lešnike razdelila Vita. Pred to delitvijo so na mizi ležali štirje lešniki, Borut ni imel nobenega, Vita pa je imela več lešnikov kot Ana. Ker Vita v tem koraku poje en lešnik, ugotovimo, da ima Vita pred svojo delitvijo tri lešnike, Ana pa en lešnik. Ko Vita razdeli lešnike, ima Ana dva lešnika in Borut enega. Ko lešnike v naslednjem koraku razdeli Ana, ima Borut dva in Vita enega. Borut da tedaj en lešnik Ani in drugega Viti, ki ima tako dva lešnika, torej se zaporedje delitev začne ponavljanti in otroci ne pojedo nobenega lešnika več.

5. Če se neka kockica nahaja v vogalu sestavljene kocke, je črna ploskev te kockice nujno vidna, če Vasja počrni dve nasprotni ploskvi te kockice. Za kockico, ki se nahaja na robu velike kocke, ne pa v njenem vogalu, mora Vasja počrniti dva para nasprotnih ploskvic te kockice. Kockico, ki se nahaja na neki stranski ploskvi in ne na robu sestavljene kocke, mora Vasja počrniti z vseh strani.

   a) V primeru, ko je $n = 2$, se vsaka kockica nahaja v vogalu večje kocke, zato mora Vasja na eni izmed osmih kockic počrniti par nasprotnih stranic, torej je odgovor 2.

   b) Imamo 8 vogalnik kockic, 12 robnih kockic, 6 kockic na sredini stranskih ploskev in eno kockico v notranjosti sestavljene kocke. Če naj se črna ploskvica pojavi v vogalu, mora Vasja počrniti par nasprotnih ploskvic na vsaj $1+6+12+1 = 20$ kockicah, torej mora počrniti 40 stranskih ploskvic. Če naj se črna ploskvica pojavi na robu, mora Vasja počrniti dva para nasprotnih ploskvic na vsaj $1+6+1 = 8$ kockicah, torej mora počrniti 32 stranskih ploskvic. Če naj se črna ploskvica pojavi na sredi stranske ploskve sestavljene kocke, pa mora Vasja počrniti vse ploskvice na vsaj $1 + 1 = 2$ kockicah, torej mora počrniti 12 stranskih ploskvic, kar je hkrati minimalno število v tem primeru.

□ 2. skupina (prvi del)

1. Označimo začetni polieder s P in dobljeni polieder s Q.

   a) Vsa oglišča pliedra P pri danem postopku odstranimo, vsa oglišča poliedra Q pa ležijo na robovih poliedra P, po eno blizu krajišč izbranega roba. Torej ima polieder Q dvakrat toliko oglišč, kot ima polieder P robov, tj. 200 oglišč.

   b) Na vsakem robu poliedra P leži nekoliko krajši rob poliedra Q. Blizu vsakega oglišča poliedra P nastane n-kotnik z n novimi robovi, kar pomeni, da je število vseh robov poliedra Q enako $100 + 200 = 300$.

2. Definirajmo sodo funkcijo p s predpisom $p(x) = 1$ za $x \notin [-1, 1]$, $p(1) = p(-1) = 0$ in $p(x) = -1$ za $x \in (-1, 1)$. Za funkcijo q izberemo predpis $q(x) = e^x$. Tedaj je kompozitum $p \circ q$ neničelna liha funkcija.

3. Naj bodo $n-2, n-1, n, n+1$ in $n+2$ cele rešitve neenačbe $10 < a^x < 100$. Od tod dobimo $a^{n-3} \leq 10 < a^{n-2}$ in $a^{n+2} < 100 \leq a^{n+3}$ torej je $a > 10^{\frac{1}{n-2}}$, $a \geq 10^{\frac{2}{n+3}}$, $a \leq 10^{\frac{1}{n-3}}$ in $a < 10^{\frac{2}{n+2}}$. Ločimo naslednje primere:

   (1) Za $n \leq 6$ iz $10^{\frac{1}{n-2}} < a < 10^{\frac{2}{n+2}}$ sledi $n > 6$, torej v tem primeru ne dobimo rešitev.

   (2) Za $n = 7$, velja $10^{\frac{1}{5}} < a < 10^{\frac{2}{9}}$.

   (3) Za $n = 8$, velja $10^{\frac{2}{11}} \leq a < 10^{\frac{1}{5}}$.

   (4) Za $n = 9$, velja $10^{\frac{1}{6}} \leq a \leq 10^{\frac{1}{6}}$, torej je $a = 10^{\frac{1}{6}}$.

   (5) Za $n \geq 10$ iz $10^{\frac{2}{n+3}} \leq a \leq 10^{\frac{1}{n-3}}$ sledi $n \leq 9$, torej v tem primeru ne dobimo rešitev.

   Za določanje števila celih rešitev neenačbe $100 < a^x < 1000$. ločimo šest primerov:

   (1) Če je $a = 10^{\frac{1}{6}}$, dobimo $a^{12} = 100 < a^{13}$ in $a^{17} < 1000 = a^{18}$, torej imamo 5 rešitev.

   (2) Če je $a = 10^{\frac{2}{11}}$, dobimo $a^{11} = 100 < a^{12}$ in $a^{16} < 1000 < a^{17}$, torej imamo 5 rešitev.

   (3) Če je $10^{\frac{2}{11}} < a < 10^{\frac{3}{16}}$, dobimo $a^{10} < 100 < a^{11}$ in $a^{16} < 1000 < a^{17}$, torej imamo 6 rešitev.

   (4) Če je $10^{\frac{3}{16}} \leq a < 10^{\frac{1}{5}}$, dobimo $a^{10} < 100 < a^{11}$ in $a^{15} < 1000 \leq a^{16}$, torej imamo 5 rešitev.

   (5) Če je $10^{\frac{1}{5}} < a < 10^{\frac{3}{14}}$, dobimo $a^9 < 100 < a^{10}$ in $a^{14} < 1000 < a^{15}$, torej imamo 5 rešitev.

   (6) Če je $10^{\frac{3}{14}} \leq a < 10^{\frac{2}{9}}$, dobimo $a^9 < 100 < a^{10}$ in $a^{13} < 1000 \leq a^{14}$, torej imamo 4 rešitve.

4. Konstruirajmo točko P, za katero velja $|AP| = |AB|$ in $\angle PAM = \angle BAM$. Od tod sledi $|AP| = |AD|$ in $\angle PAN = \angle DAN$. Narišimo še daljici PM in PN. Trikotnika BAM in PAM sta tedaj skladna, enako pa velja tudi za trikotnika DAN in PAN. Od tod sledi, da je $\angle APM = \angle ABM$ in $\angle APN = \angle ADN$. Ker velja $\angle ABM + \angle ADN = 180°$, so točke M, P in N kolinearne, zato velja $|MN| = |MP| + |PN| = |BM| + |DN|$.

5. Če se neka kockica nahaja v vogalu sestavljene kocke, je črna ploskev te kockice nujno vidna, če Vasja počrni dve nasprotni ploskvi te kockice. Za kockico, ki se nahaja na robu velike kocke, ne pa v njenem vogalu, mora Vasja počrniti dva para nasprotnih ploskvic te kockice. Kockico, ki se nahaja na neki stranski ploskvi in ne na robu sestavljene kocke, mora Vasja počrniti z vseh strani.

a) Imamo 8 vogalnih kockic, 12 robnih kockic, 6 kockic na sredini stranskih ploskev in eno kockico v notranjosti sestavljene kocke. Če naj se črna ploskvica pojavi v vogalu, mora Vasja počrniti par nasprotnih ploskvic na vsaj $1+6+12+1=20$ kockicah, torej mora počrniti 40 stranskih ploskvic. Če naj se črna ploskvica pojavi na robu, mora Vasja počrniti dva para nasprotnih ploskvic na vsaj $1+6+1=8$ kockicah, torej mora počrniti 32 stranskih ploskvic. Če naj se črna ploskvica pojavi na sredi stranske ploskve sestavljene kocke, pa mora Vasja počrniti vse ploskvice na vsaj $1+1=2$ kockicah, torej mora počrniti 12 stranskih ploskvic, kar je hkrati minimalno število v tem primeru.

b) Imamo 8 vogalnih kockic, 12×998 robnih kockic, 6×998^2 kockic na sredini stranskih ploskev in 998^3 kockic v notranjosti sestavljene kocke. Če naj se črna ploskvica pojavi v vogalu, mora Vasja počrniti par nasprotnih ploskvic na vsaj $998^3 + 6 \times 998^2 + 12 \times 998 + 1$ kockicah, torej mora počrniti 1999999996 stranskih ploskvic. Če naj se črna ploskvica pojavi na robu, mora Vasja počrniti dva para nasprotnih ploskvic na vsaj $998^3 + 6 \times 998^2 + 1$ kockicah, torej mora počrniti 3999952068 stranskih ploskvic. Če naj se črna ploskvica pojavi na sredi stranske ploskve sestavljene kocke, pa mora Vasja počrniti vse ploskvice na vsaj $998^3 + 1$ kockicah, torej mora počrniti 5964071958 stranskih ploskvic. Vasja mora torej počrniti najmanj 1999999996 stranskih ploskvic.

□ 1. skupina (drugi del)

5. Predpostavimo, da je v tabeli n ničel, in d dvojk. Tabela vsebuje 2005 vrstic dolžine 2006 in 2006 stolpcev dolžine 2005. Če naj bo vsota števil v neki vsrstici deljiva s 3 mora ta vrstica vsebovati vsaj eno dvojko ali vsaj dve ničli, zato je $d + \frac{n}{2} \geq 2005$. Podobno se prepričamo, da mora vsak stolpec vsebovati vsaj eno ničlo ali vsaj dve dvojki, od koder dobimo neenačbo $n + \frac{d}{2} \geq 2006$. Iz vsote dobljenih neenačb sledi $n + d \geq 2674$, kar pomeni, da je v tabeli kvečjemu $2005 \cdot 2006 - 2674$ enk. Naj bo $n = 1338$ in $d = 1336$. Razporedimo 1338 ničel v tabeli (Tabela 1), tako da začnemo s parom ničel v prvi vrstici na mestih 1 in 2, v drugo vrstico postavimo ničli na mesti 3 in 4, v tretjo vrstico postavimo ničli na mesti 5 in 6 ter tako nadaljujemo do 669. vrstice. Zatem zapišemo dvojki v zadnji stolpec na mesti 2005 in 2004, v predzadnji stolpec na mesti 2003 in 2002 in tako naprej postavljamo par sosednjih dvojk v zadnjih 668 stolpcev. Nazadnje na preostala mesta tabele zapišemo enke in s tem dobimo ravno $2005 \cdot 2006 - 2674 = 4022030$ enk.

0	0	1	1	$\cdots$	1	1
1	1	0	0	$\cdots$	1	1
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
1	1	1	1	$\cdots$	2	1
1	1	1	1	$\cdots$	2	1
1	1	1	1	$\cdots$	1	2
1	1	1	1	$\cdots$	1	2

Tabela 1

6. Da, tak krivočrtni mnogokotnik obstaja. Naj bo A razpolovišče vodoravne daljice BC dolžine $4r$, kjer je $r > 0$. Pod daljico načrtamo krožni lok L s premerom BC, nad daljico BC pa dva krožna loka L_B in L_C s premeroma BA in AC. Na ta način dobimo krivočrtni mnogokotnik P. Jasno je, da daljica BC deli obseg mnogokotnika P na dva enako dolga dela. Načrtajmo neko poljubno premico p skozi točko A. Denimo, da premica p oklepa kot $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ z daljico AC. Tedaj premica p od loka L odreže lok dolžine $2r\varphi$. Dokažimo, da premica p tudi od loka L_B odreže lok L' enake dolžine. Po izreku o središčnem in obodnem kotu je središčni kot, ki ga določa lok L' enak 2φ, od koder sledi, da je njegova dolžina $r \cdot 2\varphi = 2r\varphi$, kar je bilo potrebno dokazati.

7. a) Ne! Denimo, da Jure po vrsti izbere števila b_0, b_1, b_2, b_3 in b_4, Jaša pa si izbere zapored števila m_0, m_1, m_2, m_3 in m_4. Dokažimo, da za $i + j \leq 4$ velja $b_i \geq m_j$. Število $k = i + j$ je enako številu izbrisanih vrstic in stolpcev v trenutku ko Jure in Jaša izbirata b_i in m_j. Če je $k \leq 4$, sta v obeh tabelah skupno izbrisala kvečjemu 4 vrstice in 4 stolpce, kar pomeni, da obstaja neko število a, ki ga iz tabele ni izbrisal nobeden od njiju. Sledi $b_i \geq a \geq m_j$, oziroma $b_i \geq m_j$. Od tod sklepamo $b_0 \geq m_4, b_1 \geq m_3, b_2 \geq m_2, b_3 \geq m_1$ in $b_4 \geq m_0$, od koder ugotovimo, da je vsota Juretovih števil vsaj tolikšna kot vsota Jaševih števil.

   b) Opazujmo tabelo 2. Vsota Jaševih števil je 11111. Če ne izberemo števila 10000 bo vsota števil enaka kvečjemu $1008 \cdot 5 = 5040$. To pomeni, da moramo v primeru maksimalne vsote izbrati število 10000. Na podoben način se prepričamo, da moramo zatem izbrati še števila 1000, 100, 10 in 1, kar pomeni, da je Jaševa vsota v tem primeru res večja od vseh preostalih vsot.

10000	1001	1002	1003	1004
1005	**1000**	101	102	103
1006	104	**100**	11	12
1007	105	13	**10**	2
1008	106	14	3	**1**

Tabela 2

□ 2. skupina (drugi del)

5. Primer so pari oblike $(9\ldots98877, 8\ldots87)$, kjer imata obe števili para enako število števk. Lahko se prepričamo, da je produkt števil iz danega para število oblike $8\ldots878887\ldots79899$, ki se začne z k osmicami, ki jim sledi blok 7888 in k sedmic ter blok 9899.

6. Predstavimo si dani problem nekoliko drugače. V koordinatnem sistemu z osjo x vzdolž pozitivnega dela osi x, tj. poltraka z začtekom, O nanizajmo kroglice, tako da dano krožnico prerežemo v izhodiščni točki prve kroglice in jo raztegnemo na izbrani poltrak, pri čemer prvo kroglico postavimo v izhodišče O. Nato na desni strani neskončnokrat dodamo daljico, ki jo določa prerezana krožnica skupaj z označenimi legami kroglic. Tako na izbranem poltraku dobimo neskončno zaporedje točk $O = A_1, A_2, A_3, \ldots$. V novem modelu premik kroglic vzdolž krožnice ustreza premiku oznake kroglice iz točke A_i v razpolovišče dajice A_iA_{i+1}. Označimo binomski koeficient

$$C(k, n) = \binom{n}{k}$$

in dokažimo, da se i-ta kroglica po n korakih nahaja v težišču sistema

$$\{(A_i, C(0,n)), (A_{i+1}, C(1,n)), \ldots, (A_{i+n}, C(n,n))\},$$

kjer par (X, m) predstavlja točkasto telo z maso m, ki se nahaja v točki X. Ker je $C(0,1) = C(1,1)$, ima pri $n = 1$ sistem težišče v razpolovišču, zato trditev drži za $n = 1$. Predpostavimo, da trditev drži za neko naravno število n. Tedaj se i-ta kroglica po n korakih nahaja v težišču sistema

$$\mathcal{S}_i = \{(A_i, C(0,n)), (A_{i+1}, C(1,n)), \ldots, (A_{i+n}, C(n,n))\},$$

$(i+1)$-ta kroglica pa se po n korakih nahaja v težišču sistema

$$\mathcal{S}_{i+1} = \{(A_{i+1}, C(0,n)), (A_{i+2}, C(1,n)), \ldots, (A_{i+n+1}, C(n,n))\}.$$

Ker imata sistema $\mathcal{S}_i$ in $\mathcal{S}_{i+1}$ enako maso, je težišče sistema $\mathcal{S} = \mathcal{S}_i \cup \mathcal{S}_{i+1}$ ravno v razpolovišču M daljice med težiščema obeh sistemov, torej v točki, kjer se po $n+1$ korakih nahaja i-ta kroglica. Ker je $C(0, n+1) = C(0,n)$, $C(n+1, n+1) = C(n,n)$ in za vsako število $0 \leq k \leq n$ velja $C(k,n) + C(k-1,n) = C(k, n+1)$, je točka M težišče sistema

$$\{(A_i, C(0,n+1)), (A_{i+1}, C(1,n+1)), \ldots, (A_{i+n}, C(n,n+1)), (A_{i+n+1}, C(n+1,n+1))\}.$$

S tem je dokazan indukcijski korak.

a) Po 12 korakih se i-ta kroglica nahaja v nahaja v težišču sistema

$$\{(A_i, C(0,12)), (A_{i+1}, C(1,n)), \ldots, (A_{i+12}, C(12,12))\},$$

ki očitno ne sovpada z nobeno od točk A_i in A_{i+12}, kar pomeni, da se i-ta kroglica ne vrne v svojo izhodiščno lego.

b) Po 13 korakih se i-ta kroglica nahaja v nahaja v težišču T sistema

$$\{(A_i, C(0,13)), \ldots, (A_{i+12}, C(12,13)), (A_{i+13}, C(13,13))\},$$

Naj bo T_1 težišče sistema $\{(A_{i+1}, C(1,13)), \ldots, (A_{i+12}, C(12,13))\}$, ki ima skupno maso m_1, točka T_2 pa težišče sistema $\{(A_i, C(0,13)), (A_{i+13}, C(13,13))\}$ s skupno maso m_2. Točka T je tedaj težišče sistema $\{(T_1, m_1), (T_2, m_2)\}$. Točka T_1 leži v notranjosti daljice $A_{i+1}A_{i+12}$, točka T_2, ki razpolavlja daljico A_iA_{i+13}, pa prav tako leži v notranjosti daljice $A_{i+1}A_{i+12}$, saj velja $|A_iA_{i+1}| = |A_{i+12}A_{i+13}|$. Ker točki T_1 in T_2 ležita v notranjosti daljice $A_{i+1}A_{i+12}$, leži v notranjosti daljice $A_{i+1}A_{i+12}$ tudi točka T, zato se tudi po 13 korakih nobena kroglica ne vrne v svojo izhodiščno lego.

7. Predpostavimo, da obstaja sprehod, kjer mravlja prehodi vsak rob prvič v eno in drugič v drugo smer. Izberimo oglišče A s sosednjimi oglišči B, C in D. Denimo, da mravlja pride iz oglišča B v A in nato nadaljuje svojo pot v C ali D. Če se odloči za C, v nekem trenutku iz C prileze v A. Če bi se tedaj obrnila proti B, bi v nekem trenutku morala prelezti rob AD v smeri $D \to A \to D$, ki ni dovoljena. Od tod sledi, da se mravlja obrne proti oglišču D. Ker je mravlja že prelezla povezavo $A \to C$, povezavi $D \to A$ sledi povezava $A \to B$. Od tod ugotovimo, da se mravljine poti v oglišču A sekajo na dva načina in sicer $(B \to A \to C, C \to A \to D, D \to A \to B)$ ali $(B \to A \to D, D \to A \to C, C \to A \to B)$. Ta dva načina križanja lahko opišemo takole: Če se mravlja v nekem križišču prvič obrne 'desno', se 'desno' obrne tudi v vseh nadaljnjih sprehodih skozi izbrano križišče in analogno

zavija 'levo' v primeru, če se prvič obrne 'levo'. Na ta način lahko oglišča označimo kot 'desna' oziroma 'leva'. Iz teh oznak lahko rekonstruiramo pot mravlje, ki začne sprehod v nekem oglišču. Vsak nabor oznak v ogliščih tako ustreza neki uniji cikličnih sprehodov, ki jih imenujmo *trajektorije*, za katere vemo, da se ne sekajo v robovih, tj. nobeni dve ne potekata skozi skupni rob v isti smeri.

Izberimo nek sprehod, ki obide vsak rob natanko v obeh smereh, in nato zapored zamenjujmo oznake 'desno' z 'levo'. Možno je, da po nekaj zamenjavah naša trajektorija razpade na več trajektorij. Pokazali bomo, da lahko po vsaki zamenjavi trajektorije izberemo tako, da njihovo šetvilo ostane liho. Naj bo $(B \to A \to C, C \to A \to D, D \to A \to B)$ neko desno križišče in opazujmo možne nabore trajektorij, ki potekajo skozi A:

a) Imamo tri različne trajektorije $(B \to A \to C \to \cdots \to B)$, $(C \to A \to D \to \cdots \to C)$ in $(D \to A \to B \to \cdots \to D)$. Ko zamenjamo oznako v oglišču A, dobimo eno trajektorijo $(C \to A \to B \to \cdots \to D \to A \to C \to \cdots \to B \to A \to D \to \cdots \to C)$, torej se število zmanjša za dve in ostane liho.

b) Imamo dve različni trajektoriji $(B \to A \to C \to \cdots \to B)$ in $(C \to A \to D \to \cdots \to D \to A \to B \to \cdots \to C)$. Ko zamenjamo oznako v oglišču A, dobimo dve trajektoriji $(C \to A \to B \to \cdots \to C)$ in $(B \to A \to D \to \cdots \to D \to A \to C \to \cdots \to B)$, torej se število ne spremeni, zato ostane liho.

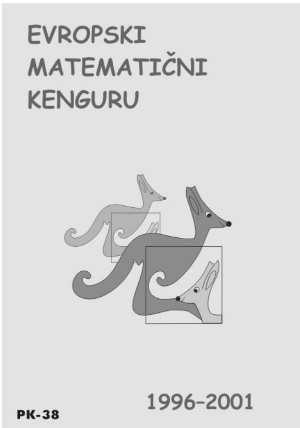
c) Imamo eno trajektorijo $(B \to A \to C \to \cdots \to C \to A \to D \to \cdots \to D \to A \to B \to \cdots \to B)$. Ko zamenjamo oznako v oglišču A, dobimo trajektorijo $(B \to A \to D \to \cdots \to D \to A \to C \to \cdots \to C \to A \to B \to \cdots \to B)$, torej se število ne spremeni, zato ostane liho.

Iz prejšnjih treh primerov dobimo s spremembo vrstnega reda še tri dodatne primere, ostali primeri pa nastanejo le z zamenjavo oznak. S tem smo dokazali, da število trajektorij ostaja liho po vsaki zamenjavi. Ko vsa 'desna' križišča zamenjamo z 'levimi', je edina možna oblika trajektorije, ki v vsakem oglišču upošteva 'levo' pravilo obhod izbrane stranske ploskve dodekaedra. Tako, dobimo 12 trajektorij, kar je v nasprotju z dokazanim, zato ne obstaja sprehod skozi vsa oglišča, ki vsak rob preide v natanko obeh smereh.

Gregor Cigler

Zbirke nalog s tekmovanj

Vsako šolsko leto na šolah potekajo različna tekmovanja v znanju. Za lažjo pripravo vam ponujamo več zbirk tekmovalnih nalog z rešitvami.



EVROPSKI MATEMATIČNI KENGURU

1996–2001

več kot 900 nalog s tekmovanja

+ dodane naloge z dijaških šolskih tekmovanj v matematiki 1993–1995

264 strani
format 16,5 × 23,5 cm
mehka vezava

15,99 EUR
(3.831,84 SIT)

EVROPSKI MATEMATIČNI KENGURU

2002–2004

več kot 500 nalog s tekmovanja

+ dodanih še 160 novih nalog

208 strani
format 16,5 × 23,5 cm
mehka vezava

10,22 EUR
(2.449,12 SIT)

Poleg omenjenih dveh lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog različnih zahtevnosti za osnovnošolce in srednješolce s tekmovanj v znanju matematike, fizike, logike in računalništva. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite s popustom:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/tekmovanja/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553 ali 4232 460.