Tekmovanja

50. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

Naloge za prvi letnik

1. Poišči vsa realna števila x, ki zadoščajo enačbi

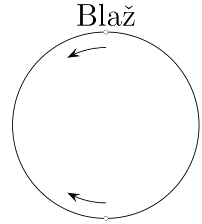
$$|2006 - |206 - x|| = 26.$$

2. Jana in Žana sta zapisali svoji starosti. Uporabili sta isti števki, le v nasprotnem vrstnem redu. Čez 5 let bo Jana dvakrat toliko stara, kot bo tedaj stara Žana. Koliko let je Jana starejša od Žane?

3. V pravokotnem trikotniku ABC s pravim kotom pri C velja $|AC| = 4$ in $|BC| = 8$. Na stranici BC izberemo točko D, da je $|CD| = 5$. Koliko je točka D oddaljena od stranice AB?

4. Včrtana krožnica trikotnika ABC se dotika stranic AB in AC v točkah D in E. Naj bo F poljubna točka na stranici AB med A in D, G pa poljubna točka na stranici AC med E in C. Na daljici FG izberimo točko T, tako da je trikotnik EGT enakokrak z vrhom G. Dokaži, da središče očrtane krožnice trikotnika DET sovpada s središčem včrtane krožnice trikotnika AFG.

5. Andrej in Blaž sta na dvorišču zarisala krožnico in na njej označila diametralno nasprotni točki. Postavila sta se vsak na eno izmed teh točk in istočasno začela hoditi v nasprotnih smereh, vsak z enakomerno hitrostjo. Do tedaj, ko sta se prvič srečala, je Andrej prehodil 60 m. Od tedaj, ko sta se prvič srečala, do tedaj, ko sta se drugič srečala, je Blaž prehodil 90 m. Koliko meri obseg zarisane krožnice?



□ Naloge za drugi letnik

1. Poišči najmanjše naravno število n, za katero je število $10 \cdot n$ popoln kvadrat, število $12 \cdot n$ pa popoln kub.

2. Poišči vsa realna števila a in b, za katera velja

$$a + b = ab = \frac{a}{b} \ .$$

3. Naj bo AB premer krožnice $\mathcal{K}$ s središčem O in naj bo C poljubna točka na simetrali daljice AB. Dokaži, da premica BC poteka skozi presečišče krožnice $\mathcal{K}$ in krožnice, očrtane trikotniku AOC.

4. Dan je kvadrat $ABCD$ s stranico dolžine 2 in središčem O. Označimo z E razpolovišče stranice AB. Izračunaj polmer trikotniku EOC očrtane krožnice.

5. Različne črke v računu predstavljajo različne števke. Katere števke so predstavljene s črkami G, L in O?

$$\begin{array}{rccccc} & & G & G & G & G \\ + & & O & O & O & O \\ + & & L & L & L & L \\ \hline & G & O & O & O & L \end{array}$$

□ Naloge za tretji letnik

1. Mateja je eno za drugim zapisala sto naravnih števil. O njih je povedala: *"Na petdesetem mestu je število 50, na stotem mestu pa število 100. Če seštejem katerakoli tri števila, ki si sledijo eno za drugim, dobim vsoto 2006."* Katero število je na prvem mestu? Katero pa na devetindevetdesetem?

2. Poišči vse pare naravnih števil m in n, da je

$$3m - 9 + 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m = n^3.$$

3. Dokaži, da za kote α, β in γ poljubnega trikotnika velja

$$\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\beta \cdot \cos\beta + \sin\gamma \cdot \cos\gamma = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma.$$

4. V trapezu $ABCD$ z osnovnicama AB in CD velja $|AB| > |CD|$ in $\angle ADC = 90°$. Naj bo E pravokotna projekcija oglišča A na premico BC. Dokaži, da se premici AC in DE sekata pravokotno natanko tedaj, ko je trikotnik ABC enakokrak z vrhom B.

5. Ko smo polinom p stopnje 2006 delili z $x-1$, smo dobili ostanek 3, ko pa smo ga delili z $x-3$, smo dobili ostanek 5. Kolikšen ostanek dobimo, ko polinom p delimo z $(x-1)(x-3)$?

□ Naloge za četrti letnik

1. Koliko je vseh petmestnih števil, ki imajo prvo števko enako zadnji, števko na mestu tisočic enako števki na mestu desetic, zmnožek vseh števk pa enak kvadratu naravnega števila?

2. Poišči vsa realna števila x, za katera je

$$(x^2 - 7x + 11)^{x^2+5x-6} = 1.$$

3. Zaporedji (x_n) in (y_n) sta podani z začetnima členoma $x_1 = 1$ in $y_1 = 2$ ter predpisoma

$$x_n = y_{n-1} + x_{n-1} \quad \text{in} \quad y_n = y_{n-1} - x_{n-1} \quad \text{za vsak } n \geq 2.$$

   (a) Dokaži, da je $y_n \neq 0$ za vsako naravno število n.

   (b) Označimo $a_n = \dfrac{x_n}{y_n}$. Izračunaj vsoto vseh različnih števil, ki so členi zaporedja (a_n).

4. Naj bo ABC ostrokotni trikotnik, $\mathcal{K}$ krožnica s premerom AB, E in F presečišči krožnice s stranicama AC in BC, P pa presečišče tangent na krožnico $\mathcal{K}$ v točkah E in F. Izračunaj razmerje med polmeroma očrtanih krožnic trikotnikov ABC in EFP.

5. Matija je v vrsto zapisal vsa naravna števila od 1 do 2006. Nato je v drugo vrsto pod vsako število zapisal vsoto njegovih števk. Koliko je vsota števil v drugi vrsti?

■ 6. regijsko tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

□ Naloge za prvi letnik

I. DEL

A1. Če je $\frac{5}{6}$ nekega števila enako 25, je $\frac{6}{5}$ istega števila enako:

(**A**) 3,5 (**B**) 11 (**C**) 30 (**D**) 36 (**E**) 49

A2. Izraz $(a^2-4)\cdot(a-2)^{-1}$ je enak izrazu:

(**A**) $a-2$ (**B**) $(a-2)^2$ (**C**) $a+2$ (**D**) $(a+2)^2$ (**E**) $a-4$

A3. Koliko deliteljev ima število 152?

(**A**) 7 (**B**) 8 (**C**) 9 (**D**) 10
(**E**) Noben predhodni odgovor ni pravilen.

A4. Rešitev nenenačbe $a+1>2-3a$ je:

(**A**) $a>-2$ (**B**) $a>4$ (**C**) $a<0{,}25$ (**D**) $a>0{,}25$ (**E**) $a<-1$

A5. Ceno računalnika so s 100 000 SIT znižali za 20 %, čez en mesec pa so ceno povišali za 20 %. Kolikšna je končna cena računalnika?

(**A**) 80 000 SIT (**B**) 96 000 SIT (**C**) 100 000 SIT (**D**) 110 000 SIT (**E**) 120 000 SIT

A6. Vrednost izraza $|-1^{-1}|^{-1}-|-2^{-2}|^{-1}-|-3^{-1}|^{-2}$ je:

(**A**) -13 (**B**) $\frac{23}{36}$ (**C**) 13 (**D**) 14
(**E**) Noben predhodni odgovor ni pravilen.

II. DEL

B1. Poenostavi izraz: $\dfrac{2-x}{x^3-x^2-x+1}:\left(\dfrac{1}{x-1}\cdot\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2}{x+1}\right)$.

B2. Vsota dveh števil je 42. Če večje število delimo z manjšim, dobimo količnik 3 in ostanek 2. Kateri števili sta to? Zapiši odgovor.

B3. Na postaji se je zbralo 70 dijakov. Bili so iz Ljubljane, Celja in Maribora. Iz Maribora in Ljubljane skupaj jih je bilo toliko kot iz Celja, iz Celja in Maribora skupaj pa jih je bilo šestkrat toliko kot iz Ljubljane. Koliko dijakov je bilo iz posameznih mest? Zapiši odgovor.

B4. Dokaži izjavo: Če produktu treh zaporednih celih števil prištejemo srednje izmed teh števil, dobimo kub tega srednjega števila.

□ Naloge za drugi letnik

I. DEL

A1. Za točke $A(1,4)$, $B(2,7)$ in $C(-1,2)$ velja ena izmed naslednjih trditev. Katera?

(**A**) Točke A, B in C so kolinearne.
(**B**) Točka A je razpolovišče daljice BC.
(**C**) $d(A,B)=d(A,C)$
(**D**) Točke A, B in C so oglišča trikotnika.
(**E**) Točka C leži med točkama A in B.

A2. Katera enačba predstavlja premico?

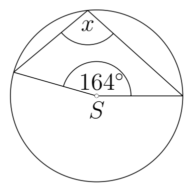
(**A**) $xy=5$
(**B**) $\frac{2x}{3}-1=3y$
(**C**) $y=x^2-3$
(**D**) $3x-y^2-1=0$
(**E**) $y=x^{\frac{1}{2}}$

A3. Katera izmed trditev je pravilna?

(**A**) Presečišče simetral kotov poljubnega trikotnika je središče temu trikotniku očrtane krožnice.
(**B**) Presečišče simetral stranic poljubnega trikotnika je središče temu trikotniku včrtane krožnice.
(**C**) Težišče poljubnega trikotnika sovpada s središčem temu trikotniku včrtane krožnice.
(**D**) Središči očrtane in včrtane krožnice poljubnega trikotnika ležita v njegovi notranjosti.
(**E**) Višinska točka trikotnika lahko leži izven trikotnika.

A4. Koliko meri kot x?

(**A**) 16°
(**B**) 82°
(**C**) 98°
(**D**) 164°
(**E**) 328°



A5. Vrednost izraza $\left(\sqrt{\left(\sqrt{(\sqrt{2})^2}\right)^2}\right)^2$ je enaka:

(**A**) 1
(**B**) $\sqrt[4]{2}$
(**C**) $\sqrt{2}$
(**D**) 2
(**E**) 4

A6. Vrednost izraza $\dfrac{7^{2n+3}\cdot 7^{3n+2}}{49\cdot 7^{5n}}$ je enaka:

(**A**) $\frac{1}{343}$
(**B**) $\frac{1}{7}$
(**C**) 49
(**D**) 343
(**E**) 2401

II. DEL

B1. Točki $A(3,y)$ in $B(x,9)$ ležita na premici $4x-3y+27=0$. Izračunaj razdaljo med njima.

B2. Dva kota trikotnika sta v razmerju $1:2$. Tretji notranji kot je enak aritmetični sredini prvih dveh. Določi velikosti notranjih kotov tega trikotnika.

B3. Brez uporabe žepnega računala natančno izračunaj vrednost izraza

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{8}+\sqrt{12}}\right):\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

B4. Dana sta izraza $A=\sqrt[3]{\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}}}$ in $B=\sqrt{\sqrt[3]{11-\sqrt{57}}\cdot\sqrt[3]{11+\sqrt{57}}}$. Brez uporabe žepnega računala dokaži, da sta vrednosti izrazov A in B enaki celi števili.

□ Naloge za tretji letnik

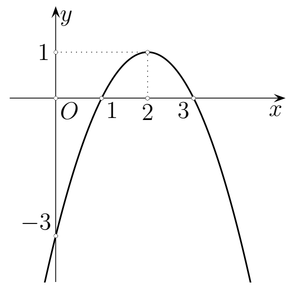
I. DEL

A1. Za katere vrednosti m se graf funkcije $f(x) = x^2 + mx + 4$ dotika abscisne osi?

(**A**) $m = 0$ (**B**) $m = \pm 4$ (**C**) $m = \pm 2$

(**D**) $m = 1$ in $m = 5$ (**E**) $m = -1$ in $m = -5$

A2. Kateri predpis ustreza grafu funkcije na sliki?



(**A**) $f(x) = (x+2)^2 + 1$ (**B**) $f(x) = -(x-1)^2 + 2$

(**C**) $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ (**D**) $f(x) = -(x-2)^2 + 1$

(**E**) $f(x) = -x^2 + 4x - 5$

A3. Krogu s polmerom r včrtamo kvadrat. Dolžina stranice kvadrata je:

(**A**) $2r\sqrt{2}$ (**B**) $r\sqrt[3]{3}$ (**C**) $\frac{r}{\sqrt{2}}$ (**D**) $\frac{r}{2}$

(**E**) Noben predhodni odgovor ni pravilen.

A4. Dve krogli in stožec skupaj tehtajo enako kot kocka. Tri krogle tehtajo enako kot stožec in kocka. Koliko stožcev tehta enako kot ena krogla?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

A5. Eksponentna funkcija s predpisom $f(x) = -2 \cdot 2^{3x-1} + 4$ ima začetno vrednost

(**A**) -2 (**B**) $\frac{2}{3}$ (**C**) 3 (**D**) 4

(**E**) Noben predhodni odgovor ni pravilen.

A6. Za katero vrednost števila a ima funkcija $f(x) = \log_4(x^2 + a) - 2$ ničlo pri $x = 5$?

(**A**) -9 (**B**) 0 (**C**) 2 (**D**) 5 (**E**) 9

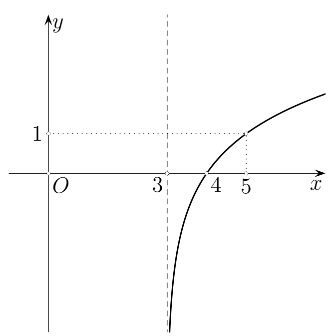
II. DEL

B1. Reši neenačbo $-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{15}{2} \leq 0$.

B2. Diagonali romba sta dolgi 10 cm in 24 cm. Kolikšna je dolžina polmera rombu včrtanega kroga?

B3. Reši enačbo $0{,}125 \cdot 4^{2x-3} = (\frac{\sqrt{2}}{8})^{-x}$.

B4. Zapiši predpis logaritemske funkcije, katere graf je na sliki. Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti.



□ Naloge za četrti letnik

I. DEL

A1. Kateri polinom moraš deliti s polinomom $q(x) = 3x - 5$, da dobiš količnik $k(x) = x^2 - 2x + 7$ in ostanek $r(x) = 2$?

(**A**) $p(x) = 3x^3 - 2x + 7$ (**B**) $p(x) = 3x^3 - 11x - 33$
(**C**) $p(x) = 3x^3 - 11x^2 + 31x - 33$ (**D**) $p(x) = 3x^3 + 11x^2 + 31x - 33$
(**E**) Noben predhodni odgovor ni pravilen.

A2. Kateri izmed navedenih polinomov je največje stopnje?

(**A**) $p(x) = (1 - x^2)^3$ (**B**) $p(x) = (2 + 3x^4)(4 + x^2)$ (**C**) $p(x) = (2 - x^3)^2$
(**D**) $p(x) = (2 - x^2)^2(1 - x^3)$ (**E**) $p(x) = (7 + 4x + 7x^7) - (7x^7 - 3x^6 + x^2)$

A3. Dana je neenačba $\dfrac{10}{x^2 + 4} \leq 0$. Katera števila jo rešijo?

(**A**) $x \in [-2, 2]$ (**B**) $x_1 = 2,\ x_2 = -2$ (**C**) $x \in (-\infty, 2)$ (**D**) $x \in (0, 5)$
(**E**) Neenačba nima rešitev.

A4. Vrednost izraza $\dfrac{(1 - \sin 30^0)(1 + \cos 60^0)}{(1 + \cos 30^0)(1 - \sin 60^0)} : (2 + \tan 45^0)^2$ je enaka:

(**A**) $\frac{1}{9}$ (**B**) $\frac{1}{4}$ (**C**) $\frac{1}{3}$ (**D**) $\frac{1}{2}$ (**E**) 1

A5. Največja vrednost funkcije $f(x) = \pi \sin 4x$ je:

(**A**) 1 (**B**) π (**C**) 4 (**D**) 2π (**E**) 4π

A6. Prvi člen geometrijskega zaporedja s samimi pozitvnimi členi je enak 27, sedmi člen pa $\frac{1}{27}$. Dvanajsti člen je enak:

(**A**) $\frac{1}{3^8}$ (**B**) $\pm\frac{1}{3^9}$ (**C**) $-\frac{1}{6561}$ (**D**) 1 (**E**) 10

II. DEL

B1. Dana je funkcija s predpisom $f(x) = 1 + x^{-1}$. Določi definicijsko območje, izračunaj ničle, zapiši enačbe asimptot, če le-te obstajajo, in nariši graf funkcije.

B2. Izračunaj vsoto ničel polinoma $p(x) = 4x^3 - 8x^2 + x + 3$.

B3. Notranji koti konveksnega šestkotnika merijo celo število stopinj in tvorijo aritmetično zaporedje. Naj bo α največji kot tega šestkotnika. Kolikšna je največja možna velikost kota α?

B4. Dan je funkcijski predpis $f(x) = \dfrac{\sin x - \sin^3 x}{\cos^3 x}$, $\cos x \neq 0$.

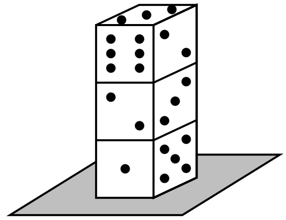
a) Poenostavi izraz $\dfrac{\sin x - \sin^3 x}{\cos^3 x}$, $\cos x \neq 0$.

b) Izračunaj $f(\frac{4\pi}{3})$.

c) Izračunaj ničle funkcije f.

■ 6. regijsko tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol

□ I. del: kratke naloge



A1. Na mizi so postavljene tri kocke, kot kaže slika. Na nasprotnih ploskvah posamezne kocke je skupaj sedem pik. Koliko je vseh pik na tistih mejnih ploskvah, ki jih ne vidimo, a bi jih videli, če bi se postavili na nasprotno stran mize?

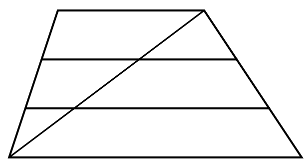
(**A**) 9 (**B**) 19 (**C**) 22
(**D**) 23 (**E**) 27

A2. Avtomobilski števec kilometrov kaže 13 833. Marko je premislil, najmanj kolikšno število kilometrov mora prevoziti, da bodo na števcu ponovno tri enake števke. Med katerima številoma leži to število?

(**A**) med 1 in 30 (**B**) med 31 in 70 (**C**) med 71 in 120
(**D**) med 121 in 500 (**E**) med 501 in 1000

A3. Na strokovno ekskurzijo je odšlo 85 % dijakov zaključnih letnikov šole. Katerega izmed naslednjih podatkov potrebujete, da bi izračunali, koliko dijakov zaključnih letnikov ni odšlo na strokovno ekskurzijo?

(**A**) število zaključnih letnikov
(**B**) število dijakov na šoli
(**C**) število dijakov zaključnih letnikov
(**D**) število spremljevalcev in vodičev
(**E**) Dodatnih podatkov ne potrebujemo.



A4. Koliko je vseh trikotnikov in štirikotnikov skupaj na sliki?

(**A**) 9 (**B**) 12 (**C**) 15 (**D**) 18 (**E**) 25

A5. Lana se odpravlja na izlet v London. Iz Kopra do Ljubljane lahko potuje z avtobusom ali vlakom, iz Ljubljane do Londona pa lahko potuje z avtobusom, vlakom ali letalom. Na koliko načinov lahko Lana pripotuje iz Kopra preko Ljubljane v London?

(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6 (**E**) Nemogoče je določiti.

A6. Letnice pred našim štetjem označujemo z negativnimi števili, letnice našega štetja pa s pozitivnimi števili. Grški matematik Pitagora je živel od leta -582 do leta -497, rimski cesar Avgust pa od leta -63 do leta $+14$. Koliko let je minilo od smrti Pitagore do rojstva Avgusta?

(**A**) -560 (**B**) 434 (**C**) 511 (**D**) 568 (**E**) 596

A7. Če bi odplačali četrtino dolga, nato polovico ostanka in še 5400 evrov, bi bil ves dolg poravnan. Koliko evrov smo dolžni?

(**A**) 5 400 (**B**) 9 450 (**C**) 10 800 (**D**) 14 400 (**E**) 21 600

A8. Prijatelja Miha in Janez se odpravita na kolesarjenje iz Maribora proti Ljubljani. Miha krene na pot ob 13. uri in kolesari s konstantno hitrostjo 18 km/h. Janez se odpravi na pot eno uro kasneje in kolesari s konstantno hitrostjo 24 km/h. Ob kateri uri bo Janez dohitel svojega prijatelja?

(**A**) Ob 14. uri (**B**) Ob 15. uri (**C**) Ob 17. uri (**D**) Ob 19. uri
(**E**) Nemogoče je določiti

A9. Jožko načrtuje tlakovanje dvorišča, ki je dolgo 5,5 m in široko 4,5 m. Na tla bo položil ploščice velikosti 20 cm $\times$ 20 cm, ki so pakirane v škatlah po 20 ploščic. Najmanj koliko škatel ploščic bo potreboval?

(**A**) 30 (**B**) 31 (**C**) 32 (**D**) 62 (**E**) 619

A10. Kako visoko sega sadjarska lestev, ki ima obliko črke A, če je vsak krak dolg 2,5 m in je največji razmik med krakoma 1,4 m?

(**A**) 2,0 m (**B**) 2,1 m (**C**) 2,2 m (**D**) 2,3 m (**E**) 2,4 m

□ II. del: daljše naloge

B1. Plesnega tečaja se udeležujejo učenci v starosti od 12 do 16 let. Starostno sestavo prikazuje diagram.

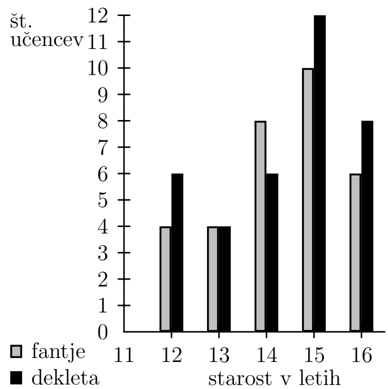
a) Koliko je vseh udeležencev plesnega tečaja?

b) V kateri starostni skupini je več fantov kot deklet?

c) Koliko odstotkov vseh udeležencev predstavljajo dekleta?

d) Kakšno je razmerje med številom fantov in številom deklet?

e) Kolikšna je povprečna starost deklet? Rezultate zaokrožite na eno decimalko.



B2. Leon iz Sydneya in Johann iz Berlina komunicirata preko internetne klepetalnice. Da bi lahko klepetala, se morata istočasno prijaviti na internet. Ko je v Sydneyu 10.00 dopoldne, je v Berlinu ura 1.00 zjutraj.

a) Koliko je ura v Berlinu, ko je v Sydneyu ura 19.00?

b) Koliko je ura v Sydneyu, ko je v Berlinu 19.50?

c) Leon in Johann ne moreta klepetati med 9.00 in 16.30 po njunih krajevnih časih, ker sta v šoli. Tudi od 23.00 do 7.00 po njunih krajevnih časih ne bosta klepetala, ker bosta spala. V katerih časovnih intervalih bi lahko klepetala Leon in Johann po internetu?

B3. Kmet Jože ima pred hlevom zelenico kvadratne oblike, dolgo 10 metrov. Ker se mu ne ljubi kositi trave, je na zelenico privezal kozo.

a) Kam in na kako dolgo vrv je privezal kozo, da je popasla največ trave in ni prekoračila meje? Označite na skici v merilu 1 : 200.

b) Koliko kvadratnih metrov trave je popasla koza? Rezultat zaokrožite na eno decimalko.

c) Koliko odstotkov zelenice koza ni mogla popasti? Rezultat zaokrožite na eno decimalko.

B4. **a)** Koliko različnih pic lahko naredite, če imate na voljo štiri različne nadeve in mora vsaka pica imeti najmanj dva nadeva?

b) Sladolednica ponuja 9 različnih okusov sladoleda. Na sladoled je prišla skupina otrok in vsak izmed njih je kupil dve kepici. Noben otrok ni izbral kepici istega okusa, izbrane so bile vse kombinacije okusov, ki jih ponujajo. Koliko otrok je kupilo sladoled?

c) Jana je v božičnem času pojedla 100 piškotov v petih dneh. Vsak dan je pojedla 6 piškotov več kot prejšnji dan. Koliko piškotov je pojedla prvi dan?

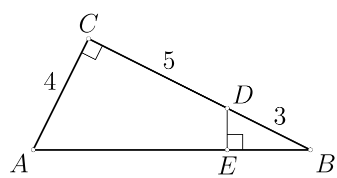
■ Rešitve nalog 50. matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije

I/1. Ker je $|2006-|206-x||=26$, mora biti $2006-|206-x|=\pm 26$. Če je $2006-|206-x|=26$, je $|206-x|=1980$, kar nam da $x=206\pm 1980$. Če pa je $2006-|206-x|=-26$, je $|206-x|=2032$, kar nam da $x=206\pm 2032$. Torej so vse rešitve -1774, 2186, -1826 in 2238.

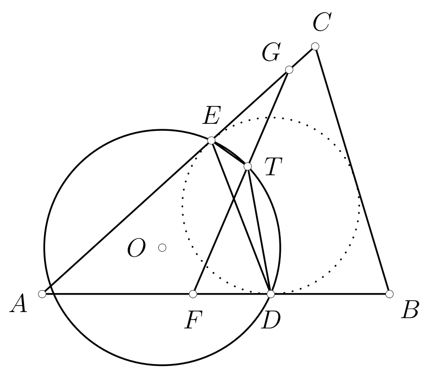
I/2. Denimo, da je Jana stara $10a+b$ let, Žana pa $10b+a$ let. Čez 5 let bo Jana dvakrat toliko stara kot Žana, zato velja $10a+b+5=2\cdot(10b+a+5)$, od koder dobimo $8a=19b+5$. Ker je vrednost leve strani največ 72, je b lahko 1, 2 ali 3. Toda v upoštev pride le $b=1$, ko dobimo $a=3$. Jana je stara 31 let, Žana pa 13. Jana je 18 let starejša od Žane.

I/3. Po Pitagorovem izreku je $|AB|=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$. Iz podobnosti trikotnikov ABC in DBE sledi $\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|DB|}{|DE|}$. Torej je

$$|DE|=\frac{|DB|\cdot|AC|}{|AB|}=\frac{3\cdot 4}{4\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$



I/4. Naj bo O središče očrtane krožnice trikotnika DET. Označimo središče včrtane krožnice trikotnika AGF z I. Ker sta D in E dotikališči trikotniku ABC včrtane krožnice, velja $|AD|=|AE|$ in je zato trikotnik ADE enakokrak z vrhom A. Simetrala daljice DE je simetrala kota $\angle BAC=\angle FAG$, torej I leži na premici AO. Ker je trikotnik EGT enakokrak, je simetrala kota $\angle AGF=\angle EGT$ tudi simetrala daljice TE, zato I leži na premici GO. Tako smo pokazali, da točka I leži hkrati na premicah AO in GO. Točka I je torej presečišče premic AO in GO ter sovpada s točko O, oziroma $O=I$.



I/5. Do trenutka, ko sta se prvič srečala, sta Andrej in Blaž skupaj prehodila polovico krožne poti, saj sta začela hoditi v diametralno nasprotnih točkah. Od tedaj, ko sta se prvič srečala, do tedaj, ko sta se drugič srečala, sta prehodila celotno krožno pot. Ker sta hodila z enakomernima hitrostima, je Andrej v tem času prehodil 120 m, to je dvakrat toliko kot do prvega srečanja. Krožna pot je bila dolga $120 + 90 = 210$ m.

II/1. Iz besedila naloge razberemo, da obstajata taki naravni števili a in b, da je $10n = a^2$ in $12n = b^3$. Torej je $\frac{10}{12} = \frac{a^2}{b^3}$ oziroma

$$6a^2 = 5b^3.$$

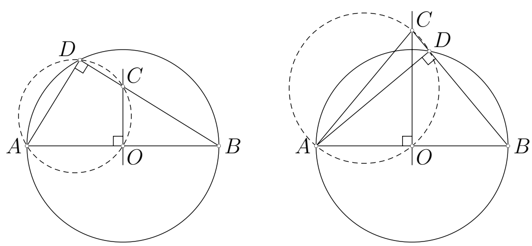
Torej $6 \mid b^3$, zato $6 \mid b$, $6^3 \mid b^3$ in od tod $6^2 \mid a^2$ oziroma $6 \mid a$. Podobno sklepamo, da $5 \mid a^2$, torej $5 \mid a$, $5^2 \mid a^2$ in od tod $5 \mid b^3$ ter $5 \mid b$. Tako je število $5b^3$ deljivo s 5^4 in zato $5^2 \mid a$.

Število a mora biti deljivo vsaj s $25 \cdot 6$, število b pa s $5 \cdot 6$. Torej je $a \geq 150$ in $b \geq 30$. Preverimo lahko, da $a = 150$ in $b = 30$ ustrezata pogojem naloge, kar nam da $n = \frac{a^2}{10} = 2250$.

II/2. Oglejmo si najprej enačbo $a \cdot b = \frac{a}{b}$. Število b ne sme biti enako 0, zato lahko enačbo pomnožimo z b in dobimo $ab^2 = a$ oziroma $ab^2 - a = 0$, kar lahko zapišemo v obliki $a(b^2 - 1) = 0$ ali $a(b-1)(b+1) = 0$. Rešitve te enačbe so $a = 0$, $b = 1$ in $b = -1$.

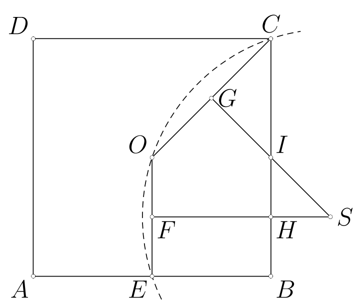
Če rešitev $a = 0$ upoštevamo v $a + b = ab$, dobimo $b = 0$, kar ni mogoče. Podobno nas rešitev $b = 1$ privede do $a + 1 = a$, ki je protislovna enačba. Rešitev $b = -1$ prinese $a - 1 = -a$ oziroma $a = \frac{1}{2}$. Iskani števili sta $\frac{1}{2}$ in -1.

II/3. Naj bo D presečišče krožnice $\mathcal{K}$ in krožnice, očrtane trikotniku AOC. Ker je AB premer krožnice $\mathcal{K}$, je po Talesovem izreku $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$. Ker je $\angle COA$ v tetivnem štirikotniku $AOCD$ enak $\frac{\pi}{2}$, je AC premer tetivnemu štirikotniku očrtane krožnice in je tudi $\angle ADC = \frac{\pi}{2}$. Torej so točke B, C in D kolinearne, D res leži na premici BC.



Če točka C ne leži znoter krožnice $\mathcal{K}$, je sklep podoben. Ker je AB premer krožnice $\mathcal{K}$, je po Talesovem izreku $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$. Obodna kota $\angle COA$ in $\angle CDA$ sta nad istim lokom. Ker je $\angle COA = \frac{\pi}{2}$, je tudi $\angle CDA = \frac{\pi}{2}$. Torej so točke B, C in D kolinearne, D leži na premici BC.

II/4. Označimo z F razpolovišče OE in z G razpolovišče OC. Središče S trikotniku EOC očrtane krožnice je presečišče simetral daljic EO in OC. Naj bo H presečišče FS in BC ter I presečišče GS in BC. Očitno je I razpolovišče BC Trikotnik IHS je enakokrak pravokotni trikotnik, zato je $|HS| = |HI| = \frac{1}{2}|BI| = \frac{1}{4}|BC| = \frac{1}{2}$. Tako je $|OS|^2 = |FS|^2 + |FO|^2 = (\frac{3}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{10}{4}$, torej je $|OS| = \frac{\sqrt{10}}{2}$.



II/5. Ker je vsota treh štirimestnih števil petmestno število, je G enak 1 ali 2. Ko seštevamo enice G, O in L, je njihova vsota za L večja od 10, saj je na mestu enic v vsoti števka L. To pomeni, da je $G+O=10$, O pa je lahko 9 ali 8.
Ko seštevamo desetice, moramo upoštevati, da je bila vsota enic večja od 10, zato imamo $1+G+O+L=1+10+L=11+L$. Ker je na mestih desetic, stotic in tisočic števila $GOOOL$ ista števka, je $11+L<20$, kar pomeni, da je na mestu desettisočic tega števila števka 1. Imamo torej $G=1$ in zato $O=9$. Potem pa je $11+L=19$ in $L=8$.
Račun je $1111+9999+8888=19998$.

III/1. Označimo z x število, ki je na 51. mestu. Tedaj je na 52. mestu število $1956-x$, saj mora biti vsota $50+x+(1956-x)$ enaka 2006. Na 53. mestu je spet število 50, na 54. mestu je x, na 55. mestu je $1956-x$ ..., na 99. mestu je število x, na 100. mestu pa $1956-x$. Tako je $1956-x=100$, od koder izračunamo $x=1856$. Mateja je zapisala po vrsti števila 100, 50, 1856, 100, 50, 1856 ..., 50, 1856, 100. Na prvem mestu je zapisala število 100, na 99. mestu pa število 1856.

III/2. Označimo $m!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m$. Naj a pomeni vrednost izraza $m!+3m-9$. Če je $m=1$ ali $m=2$, je a negativen in zato n ni naravno število. Pri $m=3$ in $m=5$ je a enako 6 oziroma 126 in ni popolni kub. Pri $m=4$ dobimo $n=3$, pri $m=6$ pa $n=9$. Če je $m=7$ ali $m=8$, je a deljiv s 3, a ne z 9, zato ne more biti popoln kub.

Dokažimo sedaj, da za noben $m\geq 9$ enačba $m!+3(m-3)=n^3$ ni rešljiva. Pri $m\geq 9$ je število $m!$ deljivo (vsaj) s 3^4, zato $3\mid n^3$, $3\mid n$ in $3^3\mid n^3$. Torej je število $m-3$ deljivo z 9. Pišimo $m-3=9k$. Naj bo 3^α najvišja potenca števila 3, ki deli k. Potem je število $m!=(9k+3)!$ deljivo z vsaj $3^{\max\{9\alpha+1,4\}}$, število $3(m-3)$ pa z natančno $3^{\alpha+3}$. Torej je tudi n^3 deljivo s $3^{\alpha+3}$. Število n^3 ni deljivo s $3^{\alpha+4}$, saj $3^{\alpha+4}\mid m!$, število $3(m-3)$ pa ni deljivo s $3^{\alpha+4}$. Dokazali smo torej, da sta najvišji potenci števila 3, ki delita števili $3(m-3)$ in n^3, enaki.

Recimo, da je število k deljivo še s kakšnim praštevilom p, $p\neq 3$. Naj bo p^β, $\beta>0$, najvišja potenca tega praštevila, ki deli k. Potem je število $m!=(9k+3)!$ deljivo z vsaj $p^{9\beta}$. Sledi $p^\beta\mid n^3$. Seveda pa število $p^{\beta+1}$ ne deli n^3, saj bi potem zaradi $p^{\beta+1}\mid m!$ imeli tudi $p^{\beta+1}\mid k$.

Skratka, dokazali smo, da imata števili n^3 in $3(m-3)$ povsem enake delitelje in sta zato enaki. Slednje pa zaradi zveze $m!+3(m-3)=n^3$ seveda ni možno.

Edina para (m,n) naravnih števil, ki ustrezata enačbi, sta tako $(4,3)$ in $(6,9)$.

III/3. Za vsaka x in y veljata enačbi

$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right), \tag{1}$$
$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y)+\sin(x-y)\right). \tag{2}$$

Z upoštevanjem enačbe (1) dobimo

$$\begin{aligned}2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma &= 2\cdot\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}\cdot(\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma))\\ &= \sin\alpha\cos(\beta-\gamma)-\sin\alpha\cos(\beta+\gamma)\end{aligned}$$

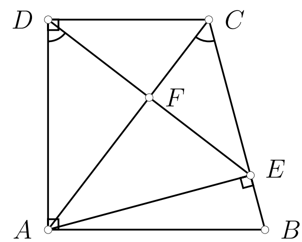
in zaradi (2) je to naprej enako

$$\frac{1}{2}\cdot(\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\alpha-\beta+\gamma))-\frac{1}{2}\cdot(\sin(\alpha+\beta+\gamma)-\sin(\alpha-\beta-\gamma))\,.$$

Z upoštevanjem $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, $\sin(\pi-x)=\sin x$ in zveze za dvojne kote, dobimo nato

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\cdot\sin(\pi-2\gamma)+\frac{1}{2}\cdot\sin(\pi-2\beta)-\frac{1}{2}\cdot\sin\pi-\frac{1}{2}\cdot\sin(2\alpha-\pi)\\
=\;&\frac{1}{2}\cdot\sin(2\gamma)+\frac{1}{2}\cdot\sin(2\beta)+\frac{1}{2}\cdot\sin(2\alpha)\\
=\;&\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\beta\cdot\cos\beta+\sin\gamma\cdot\cos\gamma.
\end{aligned}$$

III/4. Označimo kote v trikotniku ABC z α, β in γ, presečišče AC in DE pa z F. Tedaj je $\angle CAD=\frac{\pi}{2}-\alpha$. Ker je $\angle CEA=\frac{\pi}{2}=\angle ADC$, je štirikotnik $AECD$ tetiven, zato je $\gamma=\angle ACE=\angle ADE$. Potem pa je AC pravokotna na ED natanko tedaj, ko je $\angle DFA=\frac{\pi}{2}$ in to je natanko tedaj, ko je $\frac{\pi}{2}-\alpha=\angle FAD=\pi-\angle ADF-\angle AFD=\pi-\gamma-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-\gamma$, torej natanko tedaj, ko je $\alpha=\gamma$.



III/5. Denimo, da imamo polinom $p(x)$. Če ga delimo z $(x-1)(x-3)$, imamo $p(x)=(x-1)(x-3)\cdot q(x)+r(x)$, kjer je ostanek $r(x)$ stopnje 1 ali manj. Pišimo $r(x)=ax+b$. Ker je ostanek pri deljenju polinoma $p(x)$ z $x-\alpha$ enak $p(\alpha)$, velja:

$$\begin{aligned}
3 &= p(1)=(1-1)(1-3)\cdot q(1)+a+b=a+b \quad \text{in}\\
5 &= p(3)=(3-1)(3-3)\cdot q(3)+3a+b=3a+b.
\end{aligned}$$

Iz prve enakosti dobimo $a=3-b$. To vstavimo v drugo: $5=9-2b$, od koder izrazimo $b=2$. Končno dobimo še $a=1$. Iskani ostanek je $r(x)=x+2$.

IV/1. Zmnožek števk petmestnega števila oblike $\overline{abcba}$ je $a^2\cdot b^2\cdot c$. Števka c mora zato biti popolni kvadrat, torej je lahko 1, 4 ali 9. Ostali števki sta poljubni neničelni, zato imamo 9 možnosti za a in 9 možnosti za b. Skupaj je tako $9\cdot 9\cdot 3=243$ takih števil.

IV/2. Spomnimo se, da je $a^b=1$, če je $a=1$ ali $a=-1$ in b sodo število ali pa $b=0$ in $a\neq 0$.

Najprej predpostavimo, da je osnova $x^2-7x+11$ enaka 1. Enačbo $x^2-7x+11=1$ zapišemo v obliki $x^2-7x+10=0$ ter poiščemo rešitvi $x_1=2$ in $x_2=5$.
Poiščemo tisti vrednosti x, pri katerih je osnova $x^2-7x+11$ enaka -1: enačbo $x^2-7x+11=-1$ preoblikujemo v $x^2-7x+12=0$, ki ima rešitvi $x_3=3$ in $x_4=4$. Eksponent x^2+5x-6 je pri obeh teh vrednostih sod: pri x_3 je enak $9+15-6=18$, pri x_4 pa $16+20-6=30$. To pomeni, da za $x=3$ in $x=4$ velja $(x^2-7x+11)^{x^2+5x-6}=1$.
Končno poiščemo še vrednosti, pri katerih je eksponent x^2+5x-6 enak 0. Enačba $x^2+5x-6=0$ ima rešitvi $x_5=1$ in $x_6=-6$. Obe rešitvi ustrezata, saj tedaj osnova ni enaka 0.
Izraz $(x^2-7x+11)^{x^2+5x-6}$ ima vrednost 1, če je x enak 1, 2, 3, 4, 5 ali -6.

IV/3. Ker velja

$$x_n = y_{n-1} + x_{n-1} = y_{n-2} - x_{n-2} + y_{n-2} + x_{n-2} = 2y_{n-2} \quad \text{in}$$

$$y_n = y_{n-1} - x_{n-1} = y_{n-2} - x_{n-2} - y_{n-2} - x_{n-2} = -2x_{n-2}\,,$$

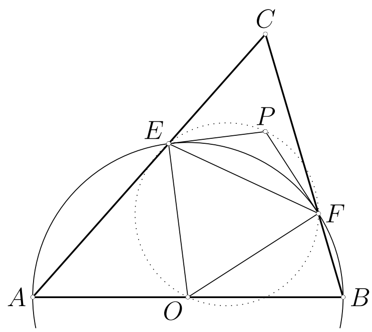
sledi $y_n = -2x_{n-2} = -2(2y_{n-4}) = -4y_{n-2}$ za $n \geq 5$. Po vrsti izračunamo $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = -2$ in $y_4 = -6$, zato je $y_n \neq 0$ za vsako naravno število n. Podobno izračunamo, da je $x_n = 2y_{n-2} = 2(-2y_{n-4}) = -4x_{n-4}$.
Ker velja

$$a_{n+4} = \frac{x_{n+4}}{y_{n+4}} = \frac{2y_{n+2}}{-2x_{n+2}} = \frac{-4x_n}{-4y_n} = a_n\,,$$

so v zaporedju le 4 različni členi. Ti členi so $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 3$, $a_3 = -2$ in $a_4 = -\frac{1}{3}$, njihova vsota pa je

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{2} + 3 - 2 - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}\,.$$

IV/4. Označimo dolžine stranic in velikosti kotov trikotnika kot običajno. Polmer krožnice, očrtane trikotniku ABC, je $\frac{c}{2\sin\gamma}$, polmer druge krožnice pa $\frac{|EF|}{2\sin\angle EPF}$.



Trikotnik AOE je enakokrak z vrhom O, zato je $\angle AEO = \alpha$, zunanji kot $\angle BOE$ pa je enak 2α. Trikotnik OBF je enakokrak z vrhom O, zato je $\angle OFB = \beta$, zunanji kot $\angle FOA$ pa je enak 2β. Tako pridemo do $\angle FOE = 2\alpha + 2\beta - \pi$ in $\angle EPF = \pi - (2\alpha + 2\beta - \pi) = 2(\pi - \alpha - \beta) = 2\gamma$.
Trikotnik OEF je enakokrak, $|OF| = |OE| = \frac{c}{2}$ in kot ob vrhu $2\alpha + 2\beta - \pi$. Tako je $\frac{|EF|}{2} = \frac{c}{2}\sin(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2})$, od tod pa dobimo $|EF| = c\sin(\alpha + \beta - \frac{\pi}{2}) = -c\cos(\alpha + \beta) = c\cos\gamma$.
Končno lahko izračunamo polmer trikotniku EPF očrtane krožnice: $\frac{|EF|}{2\sin\angle EPF} = \frac{c\cos\gamma}{2\sin(2\gamma)} = \frac{c\cos\gamma}{4\sin\gamma\cos\gamma} = \frac{c}{4\sin\gamma}$. Iskano razmerje je torej 2.

IV/5. Oglejmo si, kolikokrat se v prvi vrsti pojavi posamezna števka. Preštejmo najprej, koliko je devetic v številih od 1 do 999. To najlažje storimo tako, da preštejemo, koliko je števil z natanko eno devetico, z natanko dvema in z natanko tremi.
Če imamo natanko eno devetico, jo lahko postavimo na prvo, drugo ali tretje mesto. Na preostali dve mesti lahko postavimo poljubno števko od 0 do 8, kar nam da za vsako števko 9 možnosti. Tako imamo 3 možne izbire mest za devetico, ko pa jo postavimo na določeno mesto, imamo še $9 \cdot 9$ možnosti za ostale števke. Skupaj je tako $3 \cdot 9 \cdot 9 = 243$ devetic.
Dve devetici lahko na tri mesta razporedimo na 3 načine, na preostali prostor pa lahko postavimo katerokoli števko od 0 do 8, zato je v takih številih $2 \cdot 3 \cdot 9 = 54$ devetic. Ostane še število 999, ki ima tri devetice.
Tako je v številih od 1 do 999 natanko $243 + 54 + 3 = 300$ devetic in prav tolikokrat nastopa vsaka druga števka. V številih od 1000 do 1999 je prav tako 300 dvojk, trojk, …, enic pa je 1000 več. Vsota števk, ki nastopajo v številih od 1 do 1999, je tako

$$1000 + 2 \cdot 300 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 28000,$$

vsota števk od števila 2000 do 2006 pa je $2+3+4+5+6+7+8 = 35$. Vsota števil v drugi vrsti je 28035.

Druga rešitev. Naj $S(n)$ označuje vsoto števk števila n. Opazimo: če je $m+n = 1999$, potem je $S(m)+S(n) = 1+9+9+9 = 28$. Pokažimo, da je to res. Privzamemo lahko, da je m trimestno in n štirimestno. Zapišimo m kot $m = \overline{m_1 m_2 m_3}$. Tedaj je $n = 1999 - \overline{m_1 m_2 m_3} = 1000 + (9 - m_1) \cdot 100 + (9 - m_2) \cdot 10 + (9 - m_3)$. Ker je $0 \leq 9 - m_i \leq 9$, so števke števila n kar 1, $9 - m_1$, $9 - m_2$ in $9 - m_3$, zato je $S(m) + S(n)$ res enako 28.
Različnih parov števil m in n, katerih vsota je 1999, je $\frac{1998}{2} + 1 = 1000$ (število 1999 je v paru z 0), torej je iskana vsota enaka

$$100 \cdot 28 + S(2000) + S(2001) + S(2002) + S(2003) + S(2004) + S(2005) + S(2006)$$

$$= 28000 + 35 = 28035.$$

Rešitve nalog 6. regijskega tekmovanja v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Prvi letnik

I. DEL

Naloga	1	2	3	4	5	6
Odgovor	D	C	B	D	B	E

A1. Iskano število označimo z x in zapišemo zvezo $\frac{5}{6} \cdot x = 25$, od koder dobimo $x = 30$. Uporabimo še zvezo $\frac{6}{5} \cdot x = y$. Izračunamo $y = 36$.

A2. Izraz $a^2 - 4$ razstavimo $(a+2)(a-2)$. Celoten izraz zapišemo v obliki ulomka $\frac{(a+2)(a-2)}{a-2}$, ga okrajšamo in dobimo $a + 2$.

A3. Število 152 zapišemo v obliki razcepa na praštevila: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 19$, od koder ugotovimo, da so njegovi delitelji: 1, 2, 4, 8, 19, 38, 76 in 152. Število 152 ima 8 deliteljev.

A4. Neenačbo zapišemo v obliki $4a > 1$, njena rešitev je $a > \frac{1}{4}$ ali $a > 0{,}25$.

A5. Cena računalnika, znižana za 20 %, znaša 80 000 SIT. Če to ceno povečamo za 20 %, dobimo 96 000 SIT.

A6. Če dani izraz poenostavimo, dobimo $1 - (\frac{1}{4})^{-1} - (\frac{1}{3})^{-2} = 1 - 4 - 9 = -12$, pravilen odgovor je E.

II. DEL

B1. Najprej razstavimo imenovalec prvega ulomka $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$, nato poenostavimo izraz v oklepaju: $\frac{-x+2}{(x+1)(x-1)}$. Končno izvedemo deljenje ulomkov kot množenje z nasprotno vrednostjo $\frac{-x+2}{(x-1)^2(x+1)} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{-x+2}$, po krajšanju pa dobimo $\frac{1}{x-1}$.

B2. Naj bosta iskani števili a in b. Tedaj je $a + b = 42$, po osnovnem izreku o deljenju pa še $a = 3b + 2$. Iz prve enačbe izrazimo $a = 42 - b$ in to upoštevamo v drugi: $42 - b = 3b + 2$. Od tod dobimo $b = 10$. Izračunamo še $a = 32$. Iskani števili sta 32 in 10.

B2. Naj bosta iskani števili a in b. Tedaj je $a + b = 42$, po osnovnem izreku o deljenju pa še $a = 3b + 2$. Iz prve enačbe izrazimo $a = 42 - b$ in to upoštevamo v drugi: $42 - b = 3b + 2$. Od tod dobimo $b = 10$. Izračunamo še $a = 32$. Iskani števili sta 32 in 10.

B3. Naj bo x število dijakov iz Ljubljane, y število dijakov iz Celja, z pa število dijakov iz Maribora. Tedaj velja $x + y + z = 70$, $x + z = y$ in $y + z = 6x$. Rešitev sistema je $x = 10$, $y = 35$, $z = 25$. Iz Ljubljane je bilo 10 dijakov, iz Celja 35 dijakov, iz Maribora pa 25 dijakov.

B4. Naj bodo x, $x + 1$, $x + 2$ zaporedna cela števila. Upoštevamo besedilo naloge in zapišemo $x(x + 1)(x + 2) + (x + 1)$. Izpostavimo skupni faktor $(x + 1)(x^2 + 2x + 1)$ in poenostavimo izraz. Dobimo $(x + 1)^3$.

Drugi letnik

I. DEL

Naloga	1	2	3	4	5	6
Odgovor	D	B	E	C	D	D

A1. Preverimo, da točke A, B in C ne ležijo na isti premici, prav tako pa $d(A, B) \neq d(A, C)$. Te točke so oglišča trikotnika.

A2. Izmed danih enačb je le enačba $\frac{2x}{3} - 1 = 3y$ linearna in predstavlja premico.

A3. Presečišče kotnih simetral trikotnika je središče včrtane krožnice, presečišče simetral stranic pa središče očrtane krožnice trikotnika, ki lahko leži v zunanjosti trikotnika. Središče trikotniku včrtane krožnice ni nujno težišče tega trikotnika. Višinska točka trikotnika je lahko v zunanjosti trikotnika (topokotni trikotnik).

A4. Kot x je obodni kot nad lokom, katerega središčni kot meri $360^\circ - 164^\circ$, zato meri polovico kota 196°, kar je 98°.

A5. Izračunamo: $\left(\sqrt{\left(\sqrt{(\sqrt{2})^2}\right)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$.

A6. Izraz uredimo: $\dfrac{7^{2n+3+3n+2}}{7^{2+5n}} = \dfrac{7^{5n+5}}{7^{5n+2}} = 7^3 = 343$.

II. DEL

B1. Izračunamo neznano koordinato točke A tako, da vstavimo znano koordinato v enačbo premice $4x - 3y + 27 = 0$. Neznana koordinata ima vrednost $y = 13$. Podobno izračunamo neznano koordinato točke B: $x = 0$. Uporabimo obrazec za razdaljo med točkama, vstavimo podatke $\sqrt{(0 - 3)^2 + (9 - 13)^2}$ in izračunamo razdaljo 5 enot.

B2. Iz razmerja $\alpha : \beta = 1 : 2$ izrazimo $\alpha = t$ in $\beta = 2t$. Upoštevamo, da je tretji kot enak aritmetični sredini: $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{3t}{2}$. Ker je vsota notranjih kotov trikotnika enaka 180°, zapišemo enačbo $t + 2t + \frac{3t}{2} = 180^\circ$. Rešitev enačbe je $t = 40^\circ$. Tako je $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 80^\circ$ in $\gamma = 60^\circ$.

B3. Racionaliziramo imenovalec prvega ulomka v oklepaju $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ in delno korenimo imenovalec drugega ulomka $\sqrt{8} + \sqrt{12} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$. Izpostavimo skupni faktor v imenovalcu drugega ulomka in krajšamo. Drugi ulomek racionaliziramo $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{2}-\sqrt{3})} =$

$\sqrt{3}-\sqrt{2}$. Končno seštejemo $\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}=2\sqrt{3}$ in delimo $2\sqrt{3}:\frac{1}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$. Dobimo rezultat 6.

B4. V izrazu A zmnožimo notranja korena, da dobimo $\sqrt[3]{\sqrt{81-17}}$, nato pa nadaljujemo z računanjem: $\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[3]{8}=2$. Podobno naredimo v izrazu B. Dobimo: $\sqrt{\sqrt[3]{121-57}}=\sqrt{\sqrt[3]{64}}=2$. Izraza imata res enaki celi vrednosti.

Tretji letnik

I. DEL

Naloga	1	2	3	4	5	6
Odgovor	B	D	E	B	C	A

A1. Da bi se graf kvadratne funkcije dotikal abscisne osi, mora veljati $D=0$. Vstavimo podatke v obrazec za D in dobimo $D=m^2-16$. Enačimo z 0 in dobimo rešitev $m=\pm 4$.

A2. Upoštevamo ničelno obliko kvadratne funkcije. Iz slike odčitamo ničli in začetno vrednost. Vstavimo podatke in izračunamo $a=-1$. Ustrezen predpis narisane funkcije je $f(x)=-(x-1)(x-3)=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1$. Pravilni odgovor je torej D.

A3. Narišimo skico. Iz skice je razvidno, da je diagonala kvadrata $d=2r$ oziroma $d=a\sqrt{2}$. Od tod imamo $2r=a\sqrt{2}$. Izrazimo dolžino stranice $a=r\sqrt{2}$. Pravilen je odgovor E.

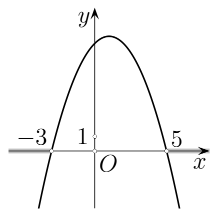
A4. Denimo, da krogla tehta k, stožec s in kocka k_o. Tedaj velja $2k+s=k_o$ in $3k=s+k_o$. Odštejemo enačbi, pa imamo $s-k=-s$. Iz te zveze izrazimo $2s=k$, kar pomeni, da 2 stožca tehtata enako kot krogla.

A5. Funkcija doseže začetno vrednost pri $x=0$, imamo torej $f(0)=-2\cdot 2^{3\cdot 0-1}+4=-2\cdot\frac{1}{2}+4=3$.

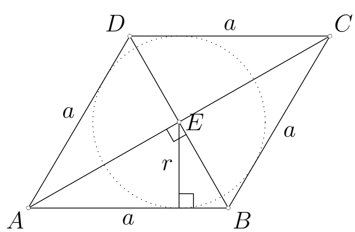
A6. Upoštevamo $0=\log_4(25+a)-2$. To poenostavimo v $2=\log_4(25+a)$, od koder dobimo $16=25+a$ in končno $a=-9$.

II. DEL

B1. Kvadratno neenačbo rešimo grafično. Poiščemo ničli $x_1=5, x_2=-3$, rešitev pa predstavimo grafično. Odčitamo ustrezna intervala in zapišemo $(-\infty,-3]\bigcup[5,\infty)$.



B2. Na skici romba označimo točko E, ki je presečišče diagonal. Diagonali se pravokotno sekata in razpolavljata. Trikotnik ABE je pravokotni trikotnik z dolžinami stranic 5 cm, 12 cm in 13 cm. Ploščina tega trikotnika je 30 cm^2. Sklepamo, da višina na stranico AB v tem trikotniku meri $\frac{60}{13}$ cm in da je ta višina tudi polmer včrtanega kroga.



B3. Upoštevamo $0{,}125=2^{-3}$, $4^{2x-3}=2^{4x-6}$ in $(\frac{\sqrt{2}}{8})^{-x}=2^{\frac{5x}{2}}$ ter enačbo preoblikujemo: $2^{4x-9}=2^{\frac{5x}{2}}$. Odtod sklepamo $4x-9=\frac{5x}{2}$. Rešitev je $x=6$.

B4. Z grafa funkcije odčitamo ničlo $x=4$, navpično asimptoto $x=3$, definicijsko območje $D_f=(3,\infty)$ in zalogo vrednosti $Z_f=\mathbb{R}$. Imamo torej predpis $f(x)=\log_2(x-3)$.

Četrti letnik

I. DEL

Naloga	1	2	3	4	5	6
Odgovor	C	D	E	C	B	A

A1. Upoštevamo osnovni izrek o deljenju polinomov: $p(x) = k(x) \cdot q(x) + r(x)$. Vstavimo $k(x)$, $q(x)$ in $r(x)$, pomnožimo in seštejemo ter dobimo $p(x) = 3x^3 - 11x^2 + 31x - 33$.

A2. V vseh ponujenih odgovorih so polinomi stopnje 6, razen v odgovoru C, kjer je stopnje 7.

A3. Za vsako realno število x je $x^2 + 4 \geq 4 > 0$, zato ima dani ulomek za vsak x pozitivno vrednost. Za nobeno realno število x nima vrednosti, manjše ali enake 0.

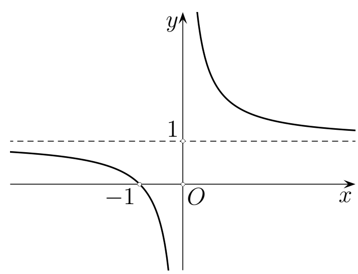
A4. Izračunamo: $\dfrac{(1-\sin 30°)(1+\cos 60°)}{(1+\cos 30°)(1-\sin 60°)} : (2+\tan 45°)^2 = \dfrac{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})}{(1+\frac{\sqrt{3}}{2})(1-\frac{\sqrt{3}}{2})} : (2+1)^2 = \dfrac{1-\frac{1}{4}}{1-\frac{3}{4}} : 9 = \dfrac{3 \cdot 4}{4 \cdot 1 \cdot 9} = \dfrac{1}{3}.$

A5. Največja vrednost funkcije $\sin x$ je 1, zato je največja vrednost zmnožka $\pi \cdot \sin 4x$ enaka $\pi \cdot 1 = \pi$.

A6. Upoštevamo, da je $a_7 = a_1 \cdot q^6$, pa imamo $\frac{1}{27} = 27 \cdot q^6$, od koder dobimo, da je $q = \pm\frac{1}{3}$. Ker ima zaporedje same pozitivne člene, je dvanajsti člen enak $a_{12} = a_1 \cdot q^{11} = 27 \cdot (\frac{1}{3})^{11} = (\frac{1}{3})^8 = \frac{1}{3^8}$.

II. DEL

B1. Predpis funkcije preoblikujemo v obliko $f(x) = \frac{x+1}{x}$. Iz števca razberemo ničlo $x = -1$, iz imenovalca pol $x = 0$ ter iz količnika vodilnih koeficientov števca in imenovalca vodoravno asimptoto $y = 1$. Upoštevamo, da funkcija ni definirana v polu, pa imamo $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



B2. Prvo ničlo $x_1 = 1$ lahko uganemo in jo preverimo s Hornerjevim algoritmom. Količnik danega polinoma in linearnega polinoma $x - 1$ je polinom druge stopnje, ničli lahko izračunamo z uporabo obrazca za iskanje ničel kvadratne funkcije. Iskane ničle so $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$ in $x_3 = -\frac{1}{2}$, vsota ničel pa $x_1 + x_2 + x_3 = 2$.

B3. Upoštevamo, da velikosti kotov tvorijo aritmetično zaporedje. Naj bo a_1 najmanjši kot in uporabimo zvezo za vsoto 6 členov aritmetičnega zaporedja $s_6 = \frac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}$ ter podatek o vsoti notranjih kotov šestkotnika $6 \cdot 180° - 360° = 720°$. Zapišemo enačbo $\frac{6(2a_1+5d)}{2} = 720$, od koder dobimo $2a_1 + 5d = 240$ in še $a_1 = \dfrac{240-5d}{2} = 120 - \dfrac{5d}{2}$. Število d je pozitivno, zaradi zadnje zveze med a_1 in d pa sklepamo, da je sodo. Največji kot šestkotnika je $a_6 = a_1 + 5d$. S poskušanjem in preverjanjem ugotovimo, da lahko največji kot takega šestkotnika meri 175°.

Nalogo lahko rešimo drugače. Pri pravilnem šestkotniku so vsi koti veliki 120°. Če naj vsak kot šestkotnika meri celo število stopinj in naj koti tvorijo aritmetično zaporedje, merita srednja kota po velikosti $(120-a)^\circ$ in $(120+a)^\circ$, kjer je a naravno število. Tedaj je razlika med velikostima teh dveh kotov $(2a)^\circ$, kar je ravno *diferenca* aritmetičnega zaporedja. To pomeni, da največji kot meri $(120+a+2a+2a)^\circ = (120+5a)^\circ$. Ker je vsak kot konveksnega večkotnika manjši od 180°, meri največji kot takega šestkotnika 175°.

B4. Funkcijski predpis uredimo, tako da najprej izpostavimo skupni faktor $f(x) = \frac{\sin x(1-\sin^2 x)}{\cos^3 x}$. Upoštevamo $1-\sin^2 x = \cos^2 x$. Zapišemo $f(x) = \tan x$. Vrednost funkcije izračunamo: $f(\frac{4\pi}{3}) = \tan\frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$. Ničle izračunamo iz $\tan x = 0$ oziroma $\sin x = 0$. Dobimo rešitev $x_k = k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Rešitve nalog 6. regijskega tekmovanja v znanju matematike za dijake poklicnih šol

I. DEL

V preglednici so zapisani pravilni odgovori. Pravilni odgovor tekmovalca se točkuje z 2 točkama, nepravilni z -1 točko, prazno polje preglednice pa z 0 točkami.

Naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
Odgovor	D	B	C	D	D	B	D	C	B	E

A1. Če bi se postavili na nasprotno stran mize, bi na ustreznih ploskvah zgornje kocke videli $1+5=6$ pik, na ploskvah srednje $5+4=9$ pik, na ploskvah spodnje pa $6+2=8$ pik, skupaj torej 23 pik.

A2. Marko mora prevoziti 55 km, tedaj bo na števcu število 13888. Število 55 leži med številoma 31 in 70.

A3. Da bi lahko izračunali število dijakov, ki niso odšli na ekskurzijo, potrebujemo število vseh dijakov v zaključnih letnikih.

A4. Na sliki preštejemo 6 trikotnikov in 12 štirikotnikov, pravilni odgovor je torej 18.

A5. Iz Kopra v Ljubljano lahko prepotuje na 2 načina, iz Ljubljane v London na tri načine, iz Kopra v London preko Ljubljane pa na $2\cdot 3 = 6$ načinov.

A6. Pitagora je umrl leta 497 pred našim štetjem, Avgust pa se je rodil leta 63 pred našim štetjem. Razlika je $497-63=434$ let.

A7. Dolg označimo z x in napišemo enačbo $x = \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}x + 5\,400$. Dolžni smo $x = 14\,400$ evrov. Sklepamo lahko drugače: če bi plačali četrtino dolga in nato polovico ostanka, bi znesek 5 400 evrov predstavljal ravno polovico ostanka, $5400+5400=10800$ evrov pa tri četrtine celotnega dolga. Celoten dolg je $10800+\frac{1}{3}\cdot 10800 = 10800+3600 = 14400$ evrov.

A8. Miha bo vsako uro prevozil 18 km, Janez pa vsako uro 24 km. Janez bo dohitel Miha, ko bo vsak izmed njiju prekolesaril 72 km. Janez bo toliko prevozil po treh urah, kar pomeni, da se bosta srečala ob 17. uri.

A9. Dvorišče, ki ga bo Jožko tlakoval, ima ploščino $5{,}5 \cdot 4{,}5 = 24{,}75\ \text{m}^2$. Vsaka ploščica ima ploščino $0{,}2^2 = 0{,}04\ \text{m}^2$. Z eno škatlo ploščic bo prekril $0{,}8\ \text{m}^2$ tal. Za tlakovanje celotnih tal bo potreboval $24{,}75 : 0{,}8 = 30{,}9375$ oziroma najmanj 31 škatel ploščic.

A10. Lestev je visoka $v = \sqrt{2{,}5^2 - 0{,}7^2} = 2{,}4$ m.

II. DEL

B1. **a)** Iz histograma preštejemo dekleta in fante vseh starosti: $4+6+4+4+8+6+10+12+6+8 = 68$ udeležencev.

b) V starostni skupini 14-letnikov je več fantov kot deklet.

c) Izmed vseh 68 udeležencev je 36 deklet, to je 53 %.

d) Fantov je 32, deklet je 36. Razmerje med številom fantov in deklet je $32 : 36 = 8 : 9$.

e) Dekleta so v povprečju stara $\frac{6\cdot 12+4\cdot 13+6\cdot 14+12\cdot 15+8\cdot 16}{36} = 14{,}3$ leta.

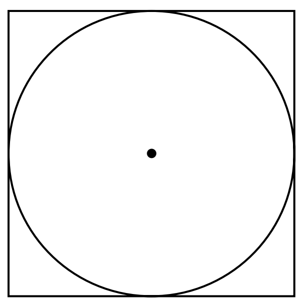
B2. Časovna razlika med Sydneyem in Berlinom je 9 ur.

a) Ko je v Sydneyu ura 19.00, je v Berlinu 10.00.

b) Ko je v Berlinu ura 19.50, je v Sydneyu 4.50.

c) Johann iz Berlina bo lahko klepetal med 7.30 in 9.00 ter med 22.00 in 23.00, tedaj bo pri Leonu v Sydneyu ura med 16.30 in 18.00 ter med 7.00 in 8.00.

B3. **a)** Skica zelenice je kvadrat s stranico 5 cm. Vrv s kozo je kmet privezal v razpolovišče diagonal kvadrata. Vrv je dolga 5 m.



b) Koza je popasla $S = \pi \cdot 5^2 = 78{,}5\ \text{m}^2$ zelenice.

c) Koza ni popasla $10^2 - \pi \cdot 5^2 = 21{,}5\ \text{m}^2$ zelenice, kar predstavlja 21,5 % celotne zelenice s površino $100\ \text{m}^2$.

B4. **a)** Sestavimo lahko 6 pic z dvema nadevoma, 4 pice s tremi nadevi in 1 pico s štirimi nadevi, skupaj torej 11 pic.

b) Ko izberemo prvi okus sladoleda, lahko izbiramo še med ostalimi osmimi okusi, ko izberemo drugi okus sladoleda, nam ostane na izbiro še sedem okusov .... V skupini je bilo $8+7+6+5+4+3+2+1 = 36$ otrok.

c) Z neznanko x označimo število piškotov, ki jih je pojedla Jana prvi dan. Zapišemo enačbo $x + (x+6) + (x+12) + (x+18) + (x+24) = 100$ in jo rešimo. Jana je prvi dan pojedla $x = 8$ piškotov.