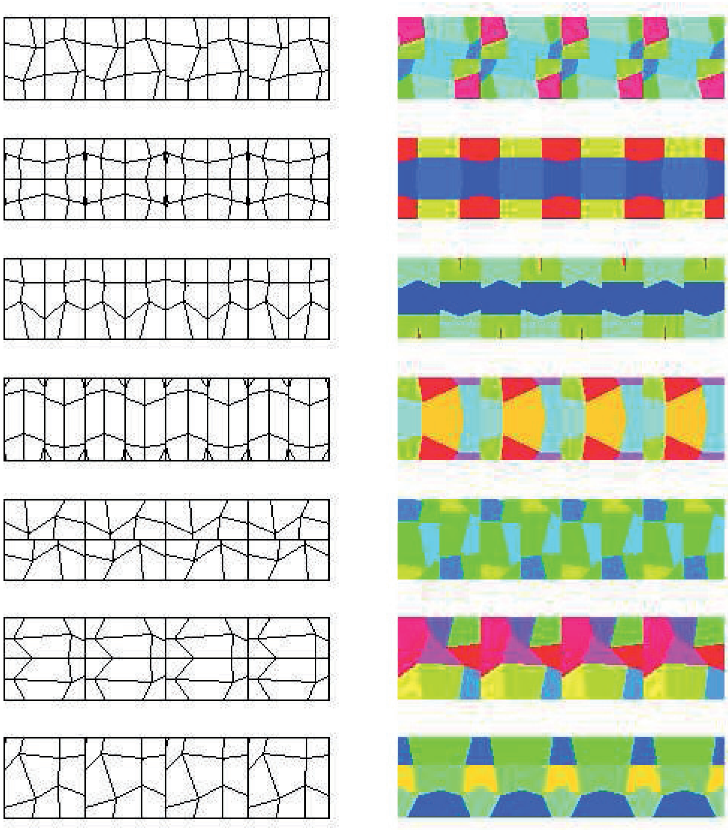
Tekmovanja

■ 17. državno tekmovanje v razvedrilni matematiki

□ 6. in 7. razred osnovne šole

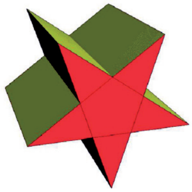
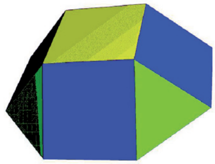
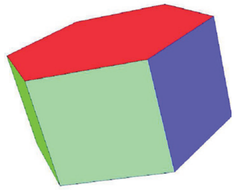
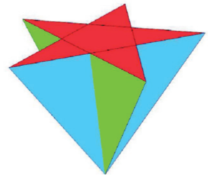
1. Linearne grupe
(razlaga postopka reševanja ni potrebna)

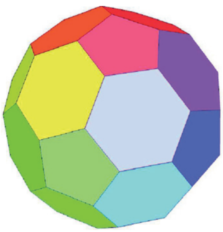
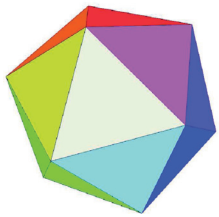
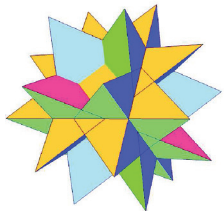
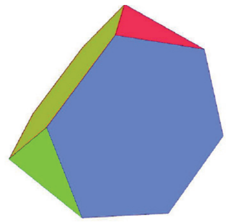
S črto poveži vsako sliko iz levega stolpca s tisto sliko iz desnega stolpca, ki ustreza isti grupi.
Za vsako pravilno povezavo dobiš 2 točki, za vsako nepravilno pa se 2 točki odštejeta (če povezave ni, dobiš 0 točk).



2. Rotacijska simetrija

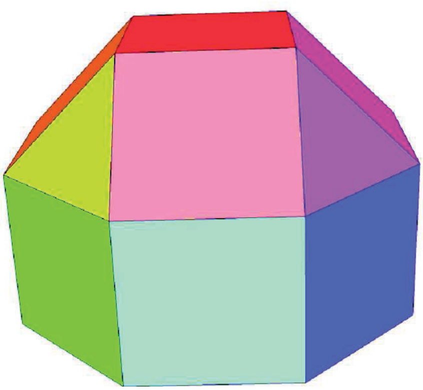
Telesom določi tip rotacijske simetrije. Pod posamezno sliko vpiši C, D, T, O ali I, kjer C pomeni ciklično simetrijo, D diedrsko simetrijo, T simetrijo četverca, O simetrijo osmerca in I simetrijo dvajseterca. Ob črkah C in D mora biti zapisan tudi red glavne rotacijske osi (npr. C2, C3 ... oziroma D2, D3 ...). Za vsak pravilen odgovor dobiš 1 točko, za nepravilnega se 1 točka odšteje.

3. Mejne ploskve (naloga je vredna 30 točk)

a) Koliko mejnih ploskev ima telo na sliki? Upoštevaj simetrijo telesa C4.



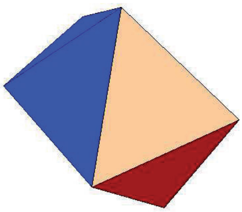
b) Iz koliko pravilnih večkotnikov (mednje štejemo tudi zvezde) sestoji uniformni polieder na sliki?

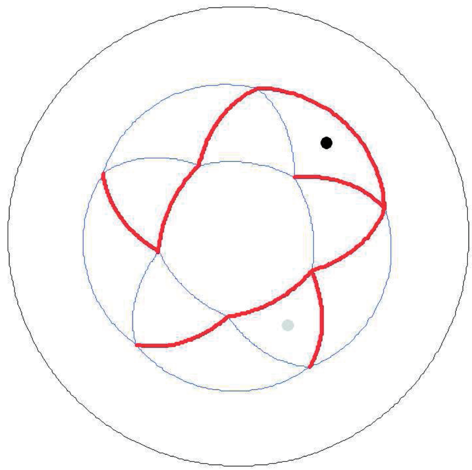
4. Petkotna antiprizma

(razlaga postopka reševanja ni potrebna, naloga je vredna 10 točk)

Telo na levi spodnji sliki najprej projiciramo na očrtano sfero, nato sfero prebodemo v eni izmed točk, ki predstavljajo projekcije središč mejnih ploskev telesa, in raztegnemo v krog. Točka preboda se pri tem raztegne v krožnico – mejo dobljenega kroga.

Črna in siva pika na labirintu sta projekciji središč dveh mejnih ploskev telesa. Poišči najkrajšo pot med njima. Polje, v katerem je črna pika, označi z 1, nato pa označuj z zaporednimi števili vsa polja, preko katerih se po vrsti pomikaš do sive pike. Z enega polja lahko greš neposredno na sosednje polje le, če meja med njima ni označena z odebeljeno črto. Morebitni prehod preko mejne ploskve, katere projekcija središča se je raztegnila v krožnico, označi kjerkoli na krožnici.





5. Sudoku

(za vsako pravilno izpolnjeno polje dobiš 1 točko, za nepravilno se 1 točka odšteje)

V vsako vrstico, v vsak stolpec in v vsak kvadrat 3×3 moraš vpisati vsa števila od 1 do 5.

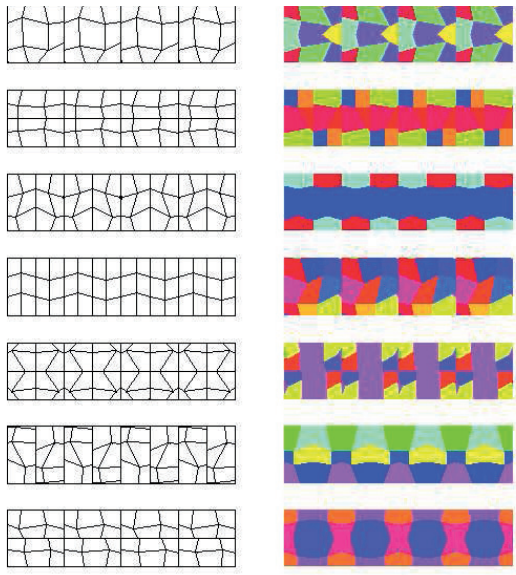
						5		
1							4	
			5		1			
				2			3	
				3				

□ 8. in 9. razred osnovne šole

1. Linearne grupe

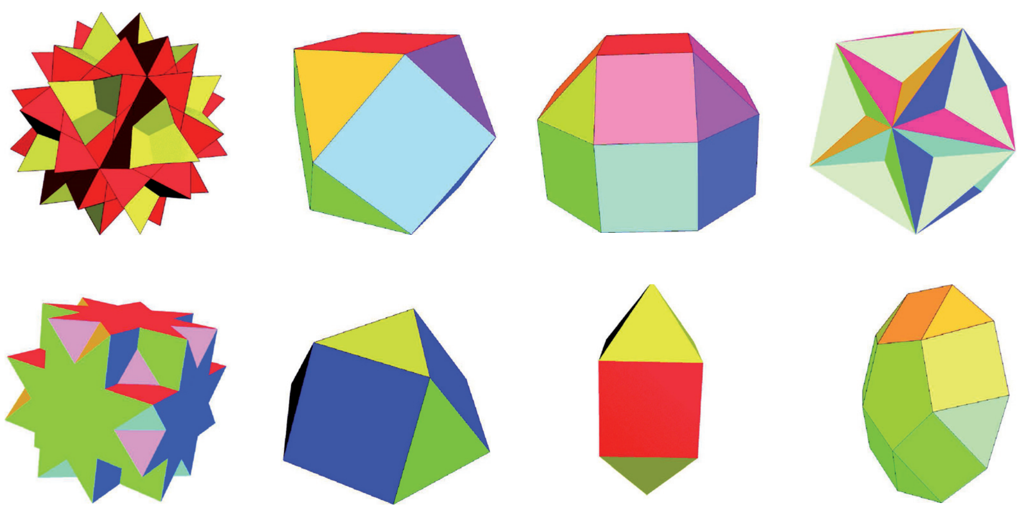
(razlaga postopka reševanja ni potrebna)

S črto poveži vsako sliko iz levega stolpca s tisto sliko iz desnega stolpca, ki ustreza isti grupi.
Za vsako pravilno povezavo dobiš 2 točki, za vsako nepravilno pa se 2 točki odštejeta (če povezave ni, dobiš 0 točk).



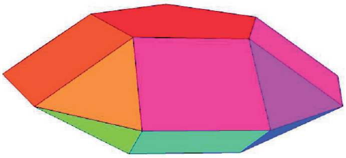
2. Rotacijska simetrija

Telesom določi tip rotacijske simetrije. Pod posamezno sliko vpiši C, D, T, O ali I, kjer C pomeni ciklično simetrijo, D diedrsko simetrijo, T simetrijo četverca, O simetrijo osmerca in I simetrijo dvajseterca. Ob črkah C in D mora biti zapisan tudi red glavne rotacijske osi (npr. C2, C3 ... oziroma D2, D3 ...). Za vsak pravilen odgovor dobiš 1 točko, za nepravilnega se 1 točka odšteje.

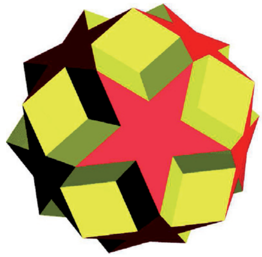


3. Mejne ploskve (naloga je vredna 30 točk)

a) Koliko mejnih ploskev ima telo na sliki? Upoštevaj simetrijo telesa D5.



b) Iz koliko pravilnih večkotnikov (mednje štejemo tudi zvezde) sestoji uniformni polieder na sliki?

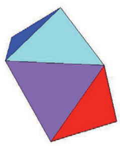


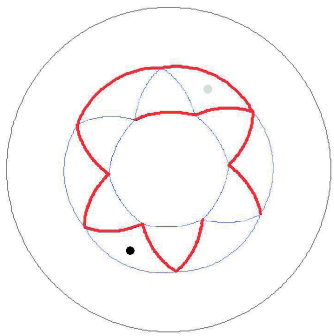
4. a) Petkotna antiprizma

(razlaga postopka reševanja ni potrebna, naloga je vredna 10 točk)

Telo na levi spodnji sliki najprej projiciramo na očrtano sfero, nato sfero prebodemo v eni izmed točk, ki predstavljajo projekcije središč mejnih ploskev telesa, in raztegnemo v krog. Točka preboda se pri tem raztegne v krožnico – mejo dobljenega kroga.

Črna in siva pika na labirintu sta projekciji središč dveh mejnih ploskev telesa. Poišči najkrajšo pot med njima. Polje, v katerem je črna pika, označi z 1, nato pa označuj z zaporednimi števili vsa polja, preko katerih se po vrsti pomikaš do sive pike. Z enega polja lahko greš neposredno na sosednje polje le, če meja med njima ni označena z odebeljeno črto. Morebitni prehod preko mejne ploskve, katere projekcija središča se je raztegnila v krožnico, označi kjerkoli na krožnici.

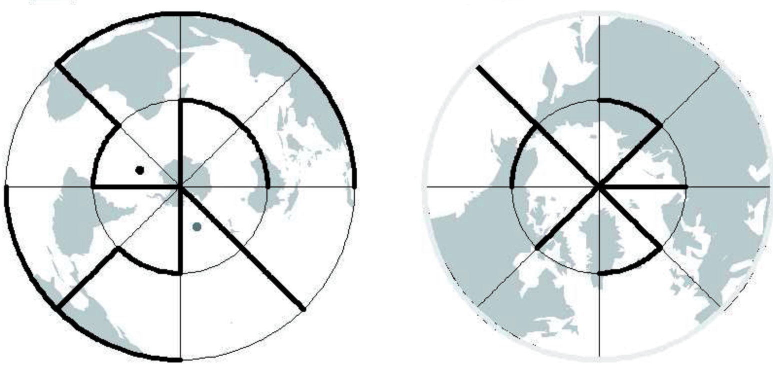




4. b) Geografski labirint

(razlaga postopka reševanja ni potrebna, naloga je vredna 20 točk)

Poišči najkrajšo pot od črne do sive pike na labirintu. Polje, v katerem je črna pika, označi z 1, nato pa označuj z zaporednimi števili vsa polja, preko katerih se po vrsti pomikaš do sive pike. Z enega polja lahko greš neposredno na sosednje polje le, če meja med njima ni označena z odebeljeno črno črto.



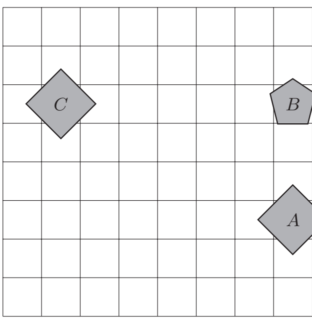
5. Potreben in zadosten pogoj (razlaga postopka reševanja ni potrebna)

Ugotovi resničnostno vrednost posameznega stavka v vsakem izmed dveh danih svetov. V posamezno polje preglednice vpiši R, če je ustrezen stavek resničen, oziroma N, če ni resničen.

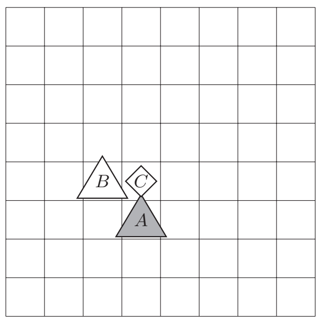
Za vsak pravilen odgovor dobiš 1 točko, za vsak nepravilen pa se 1 točka odšteje (prazno polje prinese 0 točk).

1. Biti trikotnik je zadosten pogoj za biti trikotnik.
2. Biti bel lik je zadosten pogoj za biti majhen lik.
3. Biti petkotnik je samo zadosten pogoj za biti majhen lik.
4. Biti majhen lik je samo zadosten pogoj za biti bel lik.
5. Biti kvadrat je potreben pogoj za biti bel lik.
6. Biti bel lik je potreben pogoj za biti lik srednje velikosti.
7. Biti lik srednje velikosti je samo potreben pogoj za biti petkotnik.
8. Biti lik srednje velikosti je samo potreben pogoj za biti kvadrat.
9. Biti velik lik je potreben in zadosten pogoj za biti siv lik.
10. Biti lik srednje velikosti je potreben in zadosten pogoj za biti trikotnik.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.										
2.										



1. svet

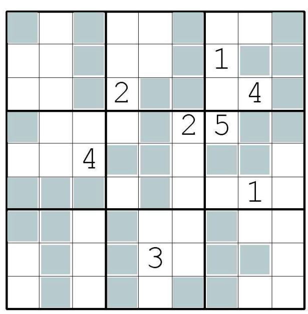


2. svet

6. Sudoku

(za vsako pravilno izpolnjeno polje dobiš 1 točko, za nepravilno se 1 točka odšteje)

V vsako vrstico, v vsak stolpec in v vsak kvadrat 3×3 moraš vpisati vsa števila od 1 do 5.

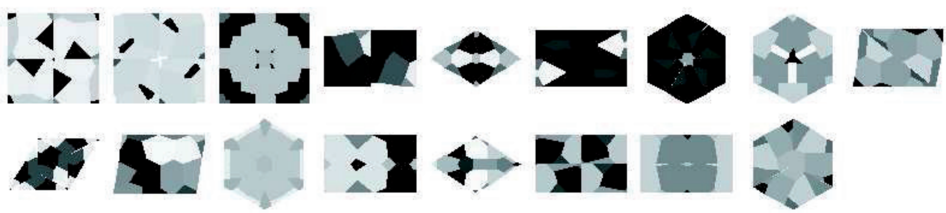


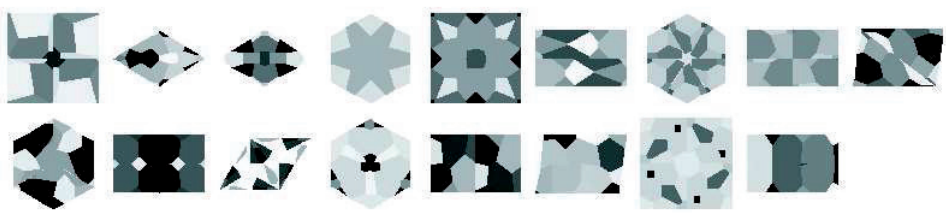
□ 1. in 2. letnik srednje šole

1. Ravninske grupe (razlaga postopka reševanja ni potrebna)

Oštevilči sličice na zgornji sliki od 1 do 17. Nato zaznamuj vsako sličico na spodnji sliki z isto številko, kot je na zgornji sliki označena sličica, ki ustreza isti grupi.

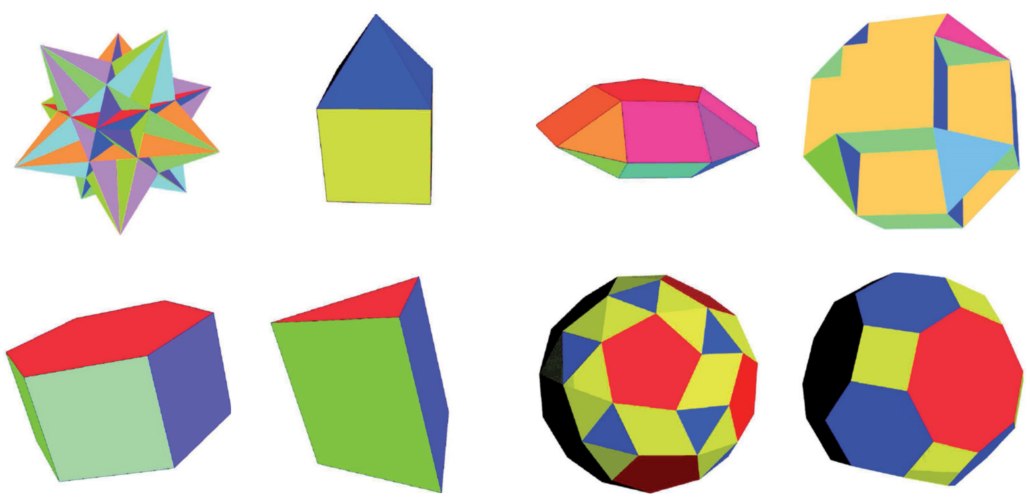
Za vsak pravilen odgovor dobiš 1 točko, za vsak nepravilen pa se 1 točka odšteje (če pri sličici ni številke, to šteje 0 točk).





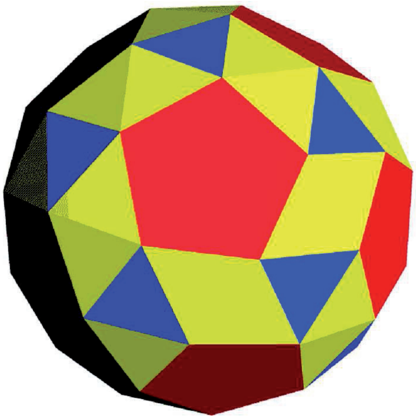
2. Rotacijska simetrija

Telesom določi tip rotacijske simetrije. Pod posamezno sliko vpiši C, D, T, O ali I, kjer C pomeni ciklično simetrijo, D diedrsko simetrijo, T simetrijo četverca, O simetrijo osmerca in I simetrijo dvajseterca. Ob črkah C in D mora biti zapisan tudi red glavne rotacijske osi (npr. C2, C3 ... oziroma D2, D3 ...). Za vsak pravilen odgovor dobiš 1 točko, za nepravilnega se 1 točka odšteje.

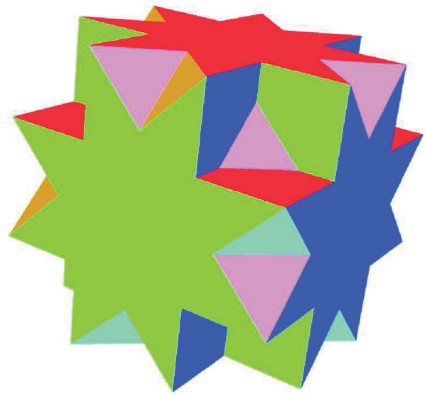


3. Mejne ploskve (naloga je vredna 30 točk)

a) Koliko mejnih ploskev ima telo na sliki? Upoštevaj simetrijo telesa.



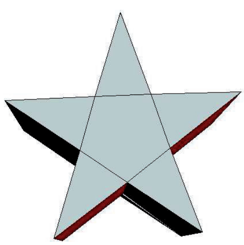
b) Iz koliko pravilnih večkotnikov (mednje štejemo tudi zvezde) sestoji uniformni polieder na sliki?

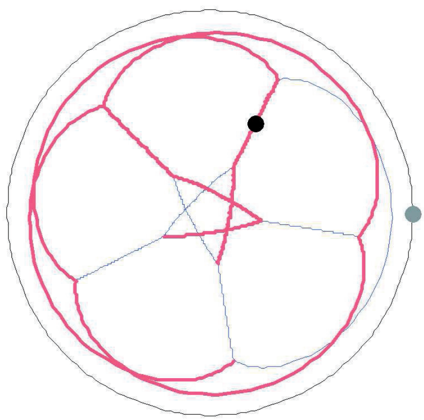


4. a) Pentagramska prizma (osnovni ploskvi sta pentagramski zvezdi, stranske ploskve so kvadrati) (razlaga postopka reševanja ni potrebna, naloga je vredna 10 točk)

Telo na levi spodnji sliki najprej projiciramo na očrtano sfero, nato sfero prebodemo v eni izmed točk, ki predstavljajo projekcije središč mejnih ploskev telesa, in raztegnemo v krog. Točka preboda se pri tem raztegne v krožnico – mejo dobljenega kroga.

Črna in siva pika na labirintu sta projekciji središč dveh mejnih ploskev telesa. Poišči najkrajšo pot med njima. Polje, v katerem je črna pika, označi z 1, nato pa označuj z zaporednimi števili vsa polja, preko katerih se po vrsti pomikaš do sive pike. Z enega polja lahko greš neposredno na sosednje polje le, če meja med njima ni označena z odebeljeno črto. Morebitni prehod preko mejne ploskve, katere projekcija središča se je raztegnila v krožnico, označi kjerkoli na krožnici.

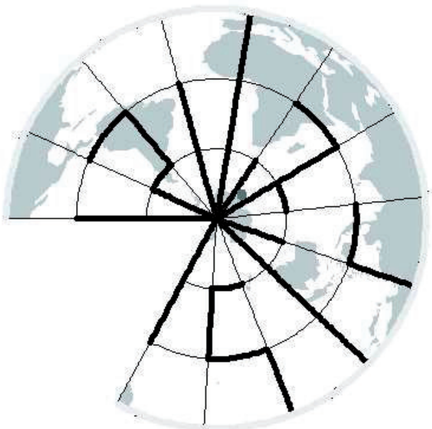


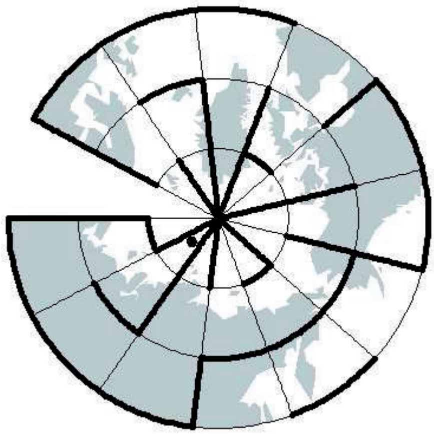


4. b) Geografski labirint

(razlaga postopka reševanja ni potrebna, naloga je vredna 20 točk)

Poišči najkrajšo pot od črne do sive pike na labirintu. Polje, v katerem je črna pika, označi z 1, nato pa označuj z zaporednimi števili vsa polja, preko katerih se po vrsti pomikaš do sive pike. Z enega polja lahko greš neposredno na sosednje polje le, če meja med njima ni označena z odebeljeno črno črto.





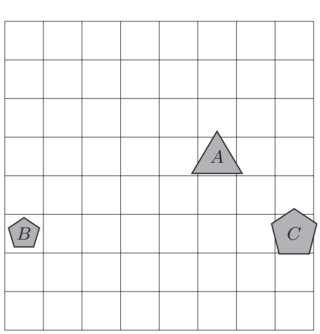
5. Potreben in zadosten pogoj (razlaga postopka reševanja ni potrebna)

Ugotovi resničnostno vrednost posameznega stavka v vsakem izmed dveh danih svetov. V posamezno polje preglednice vpiši R, če je ustrezen stavek resničen, oziroma N, če ni resničen.

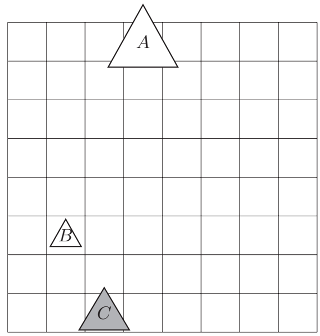
Za vsak pravilen odgovor dobiš 1 točko, za vsak nepravilen pa se 1 točka odšteje (prazno polje prinese 0 točk).

1. Biti lik srednje velikosti je zadosten pogoj za biti petkotnik.
2. Biti bel lik je zadosten pogoj za biti velik lik.
3. Biti velik lik je samo zadosten pogoj za biti velik lik.
4. Biti siv lik je samo zadosten pogoj za biti siv lik.
5. Biti bel lik je potreben pogoj za biti lik srednje velikosti.
6. Biti majhen lik je potreben pogoj za biti petkotnik.
7. Biti velik lik je samo potreben pogoj za biti siv lik.
8. Biti lik srednje velikosti je samo potreben pogoj za biti trikotnik.
9. Biti siv lik je potreben in zadosten pogoj za biti kvadrat.
10. Biti petkotnik je potreben in zadosten pogoj za biti kvadrat.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.										
2.										



1. svet

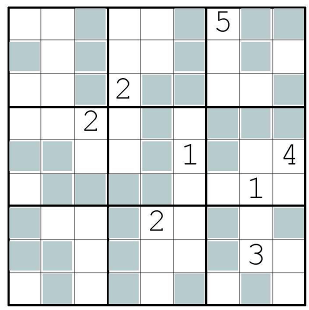


2. svet

6. Sudoku

(za vsako pravilno izpolnjeno polje dobiš 1 točko, za nepravilno se 1 točka odšteje)

V vsako vrstico, v vsak stolpec in v vsak kvadrat 3×3 moraš vpisati vsa števila od 1 do 5.

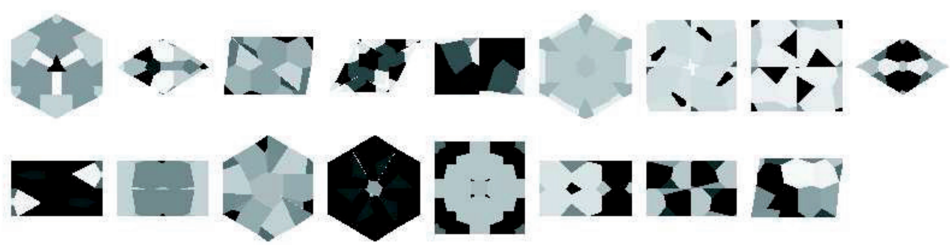


□ 3. in 4. letnik srednje šole ter študenti

1. Ravninske grupe (razlaga postopka reševanja ni potrebna)

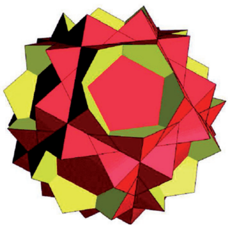
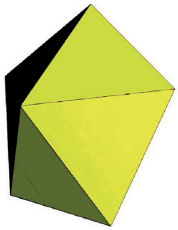
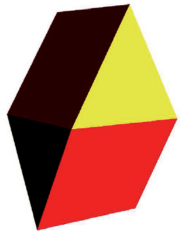
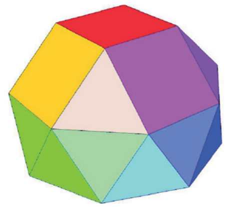
Oštevilči sličice na zgornji sliki od 1 do 17. Nato zaznamuj vsako sličico na spodnji sliki z isto številko, kot je na zgornji sliki označena sličica, ki ustreza isti grupi.

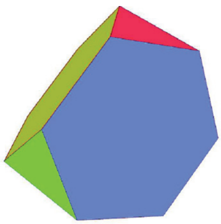
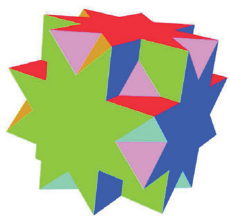
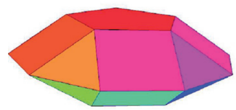
Za vsak pravilen odgovor dobiš 1 točko, za vsak nepravilen pa se 1 točka odšteje (če pri sličici ni številke, to šteje 0 točk).



2. Rotacijska simetrija

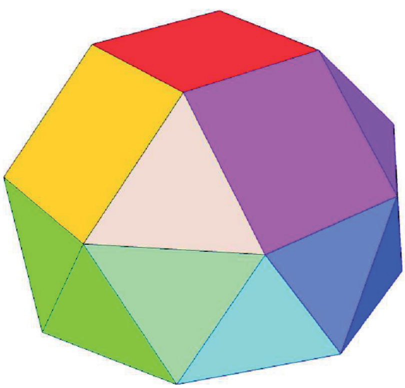
Telesom določi tip rotacijske simetrije. Pod posamezno sliko vpiši C, D, T, O ali I, kjer C pomeni ciklično simetrijo, D diedrsko simetrijo, T simetrijo četverca, O simetrijo osmerca in I simetrijo dvajseterca. Ob črkah C in D mora biti zapisan tudi red glavne rotacijske osi (npr. C2, C3 ... oziroma D2, D3 ...). Za vsak pravilen odgovor dobiš 1 točko, za nepravilnega se 1 točka odšteje.

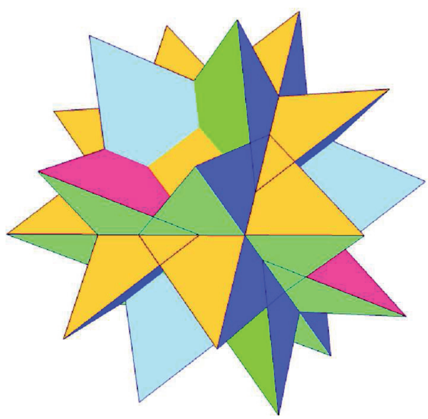





3. Mejne ploskve (naloga je vredna 30 točk)

a) Koliko mejnih ploskev ima telo na sliki? Upoštevaj simetrijo telesa C4.



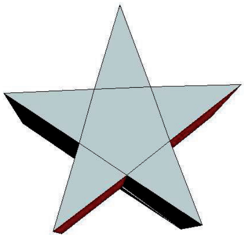
b) Iz koliko pravilnih večkotnikov (mednje štejemo tudi zvezde) sestoji uniformni polieder na sliki?

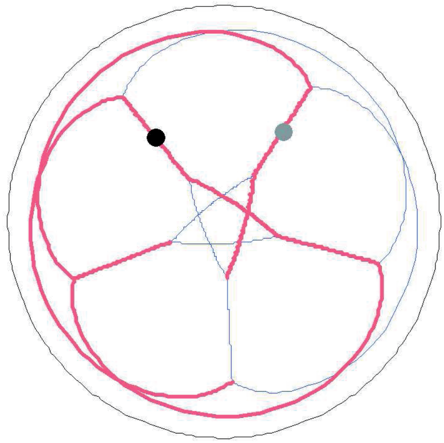


4. a) Pentagramska prizma (osnovni ploskvi sta pentagramski zvezdi, stranske ploskve so kvadrati)
(razlaga postopka reševanja ni potrebna, naloga je vredna 10 točk)

Telo na levi spodnji sliki najprej projiciramo na očrtano sfero, nato sfero prebodemo v eni izmed točk, ki predstavljajo projekcije središč mejnih ploskev telesa, in raztegnemo v krog. Točka preboda se pri tem raztegne v krožnico – mejo dobljenega kroga.

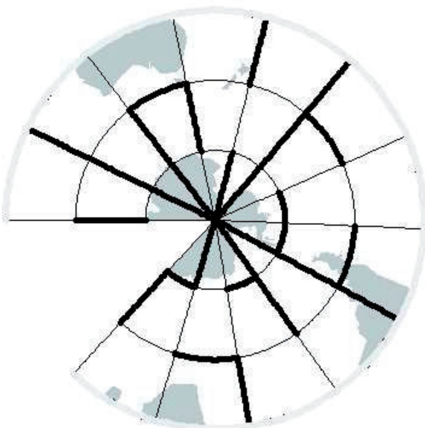
Črna in siva pika na labirintu sta projekciji središč dveh mejnih ploskev telesa. Poišči najkrajšo pot med njima. Polje, v katerem je črna pika, označi z 1, nato pa označuj z zaporednimi števili vsa polja, preko katerih se po vrsti pomikaš do sive pike. Z enega polja lahko greš neposredno na sosednje polje le, če meja med njima ni označena z odebeljeno črto. Morebitni prehod preko mejne ploskve, katere projekcija središča se je raztegnila v krožnico, označi kjerkoli na krožnici.

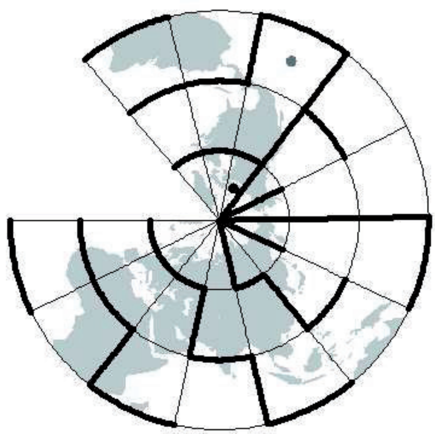




4. b) Geografski labirint
(razlaga postopka reševanja ni potrebna, naloga je vredna 20 točk)

Poišči najkrajšo pot od črne do sive pike na labirintu. Polje, v katerem je črna pika, označi z 1, nato pa označuj z zaporednimi števili vsa polja, preko katerih se po vrsti pomikaš do sive pike. Z enega polja lahko greš neposredno na sosednje polje le, če meja med njima ni označena z odebeljeno črno črto.





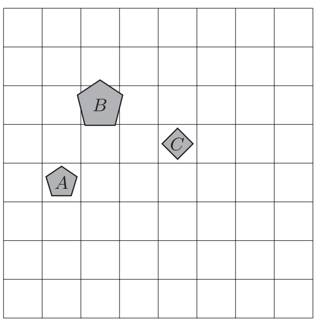
5. Potreben in zadosten pogoj (razlaga postopka reševanja ni potrebna)

Ugotovi resničnostno vrednost posameznega stavka v vsakem izmed dveh danih svetov. V posamezno polje preglednice vpiši R, če je ustrezen stavek resničen, oziroma N, če ni resničen.

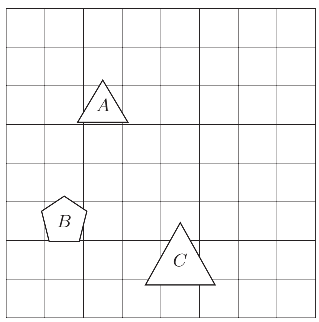
Za vsak pravilen odgovor dobiš 1 točko, za vsak nepravilen pa se 1 točka odšteje (prazno polje prinese 0 točk).

1. Biti majhen lik je zadosten pogoj za biti siv lik.
2. Biti petkotnik je zadosten pogoj za biti siv lik.
3. Biti majhen lik je samo zadosten pogoj za biti majhen lik.
4. Biti siv lik je samo zadosten pogoj za biti lik srednje velikosti.
5. Biti majhen lik je potreben pogoj za biti kvadrat.
6. Biti velik lik je potreben pogoj za biti siv lik.
7. Biti petkotnik je samo potreben pogoj za biti bel lik.
8. Biti lik srednje velikosti je samo potreben pogoj za biti trikotnik.
9. Biti bel lik je potreben in zadosten pogoj za biti kvadrat.
10. Biti siv lik je potreben in zadosten pogoj za biti kvadrat.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.										
2.										



1. svet

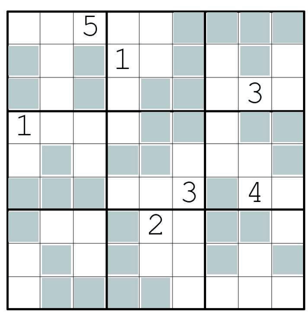


2. svet

6. Sudoku

(za vsako pravilno izpolnjeno polje dobiš 1 točko, za nepravilno se 1 točka odšteje)

V vsako vrstico, v vsak stolpec in v vsak kvadrat 3×3 moraš vpisati vsa števila od 1 do 5.



■ 27. mednarodno matematično tekmovanje mest (jesenski krog)

Prva skupina (prvi del)

1. Dan je trikotnik ABC. Naj bodo M_1, M_2 in M_3 zapored razpolovišča stranic AB, BC in AC, točke H_1, H_2 in H_3 pa zapored nožišča višin iz oglišč C, A in B. Dokaži, da so dolžine daljic H_1M_2, H_2M_3 in H_3M_1 stranice nekega trikotnika.
2. V vsakem oglišču kocke je zapisano neko število. V enem koraku vsako število zamenjamo s povprečno vrednostjo števil v sosednjih ogliščih. Po desetih korakih so v vseh ogliščih enaka števila. Ali so bila tedaj tudi števila, ki so bila zapisana v ogliščih na začetku, nujno enaka?
3. Palico dolžine 1 razrežemo na enajst delov dolžine kvečjemu a. Za katere vrednosti a velja, da poljubni trije izmed dobljenih enajstih delov tvorijo nek trikotnik, ne glede na način rezanja?
4. Na šahovnici velikosti 15×15 stoji figura, ki se lahko pomakne za 8 ali 9 polj v navpični ali vodoravni smeri. Največ koliko polj lahko ta figura obišče, če lahko začne kjerkoli in nobenega polja ne sme obiskati dvakrat?
5. Med šestimi kovanci je en kovanec ponarejen in se od preostalih razlikuje le po teži. Kako lahko s tremi tehtanji poiščemo ponarejeni kovanec, če imamo na razpolago tehtnico, ki pokaže skupno težo kovancev, ki jih na tehtnico položimo?

Druga skupina (prvi del)

1. Ali obstajajo naravna taka števila a, b in n, da je
$$n^2 < a^3 < b^3 < (n+1)^2?$$
2. Dana je daljica dolžine $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$. Ali lahko samo s pomočjo ravnila, šestila in dane daljice konstruiramo daljico dolžine 1?
3. Med šestimi kovanci je en kovanec ponarejen in se od preostalih razlikuje le po teži. Kako lahko s tremi tehtanji poiščemo ponarejeni kovanec, če imamo na razpolago tehtnico, ki pokaže skupno težo kovancev, ki jih na tehtnico položimo?
4. Nad stranicami pravokotnega trikotnika ABC z zunanje strani konstruiramo kvadrate in njihova središča označimo z D, E in F. Dokaži, da je razmerje med ploščinama trikotnikov DEF in ABC:
a) večje od 1.
b) vsaj 2.

5. Kocko, ki leži na mizi, nekajkrat zakotalimo preko njenih robov, tako da se vrne začetni položaj, na vrhu kocke pa je ista stranska ploskev kot je bila pred začetkom kotaljenja. Ali je možno, da se je gornja ploskev kocke pri tem zasukala za 90° glede na svoj začetni položaj.

Prva skupina (drugi del)

1. Naravno število imenujmo *palindrom*, če zaporedje njegovih števk z leve proti desni sovpada z zaporedjem njegovih števk od desne proti levi (npr.: 1, 343, 2002 so palindromi, 2005 pa ne). Ali obstaja 2005 različnih parov oblike $(n, n + 110)$, kjer sta obe števili posameznega para palindroma?

2. Nosilki stranic AB in CD konveksnega štirikotnika $ABCD$, v katerem velja $|AD| = |BC|$, se sekata v točki K. Naj bosta M in N razpolovišči stranic AB in CD. Dokaži, da je MNK topokotni trikotnik.

3. Na vsakem polju šahovnice velikosti 8×8 stoji trdnjava. Trdnjava napada neko drugo trdnjavo, če stojita v skupni vrstici ali skupnem stolpcu in med njima ni nobene druge trdnjave. V eni potezi lahko s šahovnice odstranimo tako trdnjavo, ki napada liho število preostalih trdnjav. Koliko največ trdnjav lahko na ta način odstranimo s šahovnice?

4. Dve mravlji lezeta po robu mize v obliki mnogokotnika. Vsi robovi mize so daljši od 1m, razdalja med mravljama pa je ves čas enaka 10cm. Na začetku se mravlji nahajata na skupnem robu mize.
   a) Denimo, da ima miza obliko konveksnega mnogokotnika. Ali lahko tedaj obe mravlji oblezeta vse točke z roba mize?
   b) Denimo, da miza nima nujno oblike konveksnega mnogokotnika. Ali lahko tedaj vsaj ena izmed mravelj obleze vse točke z roba mize?

5. Določi največje tako naravno število N, da ima enačba
$$99x + 100y + 101z = N$$
natanko eno rešitev v naravnih številih.

6. Velikan Sladkosned ima tisoč kozarcev marmelade, ki niso nujno enaki in vsak od njih vsebuje kvečjemu stotino skupne količine marmelade v vseh kozarcih. Vsako jutro Sladkosned poje enako količino marmelade iz stotih kozarcev, ki si jih tisto jutro izbere. Dokaži, da lahko na ta način velikan nekega dne izprazni vse kozarce.

Druga skupina (drugi del)

1. Za katera števila n lahko najdemo različna naravna števila $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tako, da je vsota
$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$
naravno število?

2. Dve mravlji lezeta po robu mize v obliki mnogokotnika. Vsi robovi mize so daljši od 1m, razdalja med mravljama pa je ves čas enaka 10cm. Na začetku se mravlji nahajata na skupnem robu mize.
   a) Denimo, da ima miza obliko konveksnega mnogokotnika. Ali lahko tedaj obe mravlji oblezeta vse točke z roba mize?
   b) Denimo, da miza nima nujno oblike konveksnega mnogokotnika. Ali lahko tedaj vsaj ena izmed mravelj obleze vse točke z roba mize?

3. Na vsakem polju šahovnice velikosti 8×8 stoji trdnjava. Trdnjava napada neko drugo trdnjavo, če stojita v skupni vrstici ali skupnem stolpcu in med njima ni nobene druge trdnjave. V eni potezi lahko s šahovnice odstranimo tako trdnjavo, ki napada liho število preostalih trdnjav. Koliko največ trdnjav lahko na ta način odstranimo s šahovnice?

4. Na krožnici je zapisano končno mnogo pozitivnih števil, ki niso večja od 1. Dokaži, da lahko krožnico razrežemo na tri take loke, da se vsoti števil s poljubnih dveh lokov ne razlikujeta za več kot 1. (Če na nekem loku ni nobenega števila, je vsota števil s tega loka enaka 0.)

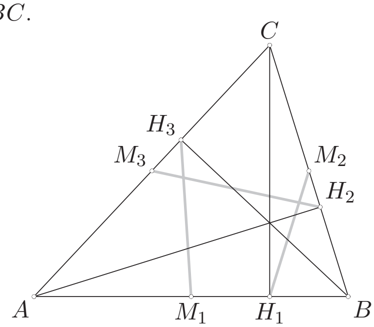
5. Naj bodo AA_1, BB_1 in CC_1 simetrale kotov trikotnika ABC, v katerem je razmerje kotov pri ogliščih A, B in C enako $4:2:1$. Dokaži, da velja $|A_1B_1| = |A_1C_1|$.

6. V enem koraku lahko na tablo napišemo dve števili 1 ali pa dve enaki števili n s table zbrišemo in namesto njiju zapišemo števili $n+1$ in $n-1$. Najmanj koliko korakov potrebujemo, da na tablo zapišemo število 2005, če je tabla na začetku prazna?

■ Rešitve nalog 27. mednarodnega matematičnega tekmovanja mest

Prva skupina (prvi del)

1. Točka M_2 je razpolovišče hipotenuze pravokotnega trikotnika H_1BC, zato je $|M_2H_1| = \frac{1}{2}|BC|$. Enako dobimo še $|M_3H_2| = \frac{1}{2}|CA|$ in $|M_1H_3| = \frac{1}{2}|AB|$. Od tod sledi, da so daljice M_2H_1, M_3H_2 in M_1H_3 stranice trikotnika, katerega stranice imajo polovično dolžino ustreznih stranic trikotnika ABC.



Slika 1

2. Pobarvajmo oglišča kocke z belo in črno, tako da sta krajišči vsakega roba kocke pobarvani različno. V bela oglišča postavimo število 0 v črna pa število 1. Po vsakem koraku se 1 zamenja z 0 in obratno, zato je po desetih korakih situacija enaka kot na začetku, čeprav so bila števila na začetku različna.

3. Naj bodo $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{11}$ dolžine enajstih kosov palice. Ker je $1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{11} \leq 11a$, mora veljati $a \geq \frac{1}{11}$. Če je $a \geq \frac{1}{10}$, lahko vzamemo $a_1 = \cdots = a_9 = \frac{1}{10}$ ter $a_{10} = a_{11} = \frac{1}{20}$. Iz kosov a_1, a_{10} in a_{11} tedaj ne moremo sestaviti trikotnika, zato je $a < \frac{1}{10}$. Privzemimo, da je $\frac{1}{11} \leq a < \frac{1}{10}$. Velja $a_{10} + a_{11} = 1 - (a_1 + \cdots + a_9) \geq 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10} > a_1$, zato lahko iz poljubnih treh kosov tvorimo nek trikotnik.

4. Slika 2 prikazuje šahovnico velikosti 15×15 razdeljeno na osrednji križ širine 3 in štiri kvadrate velikosti 6×6. Figura začne svoj obhod na polju, označenem s številko 1 in se nato sprehodi po vseh 144 poljih, pri čemer sledi zaporednim številom, vpisanim v polja štirih vogalnih kvadratov. Predpostavimo, da se figura med nekim obhodom znajde na kakem polju osrednjega križa. Jasno je, da to polje ni povezano z nobenim izmed polj vogalnih kvadratov, kar pomeni, da figura pri tem obhodu ni obiskala nobenega polja izven osrednjega križa. Ker je polj v križu $81 < 144$, lahko figura obišče kvečjemu 144 polj.

14	16	18	20	22	24				13	15	17	19	21	23
38	40	42	44	46	48				37	39	41	43	45	47
62	64	66	68	70	72				61	63	65	67	69	71
86	88	90	92	94	96				85	87	89	91	93	95
110	112	114	116	118	120				109	111	113	115	117	119
134	136	138	140	142	144				133	135	137	139	141	143
11	9	7	5	3	1				12	10	8	6	4	2
35	33	31	29	27	25				36	34	32	30	28	26
59	57	55	53	51	79				60	58	56	54	52	50
83	81	79	77	75	73				84	82	80	78	76	74
107	105	103	101	99	97				108	106	104	102	100	98
131	129	127	125	123	121				132	130	128	126	124	122

Slika 2

5. Označimo kovance s črkami A, B, C, D, E in F. V treh tehtanjih določimo povprečno težo m kovancev C in E, povprečno težo n kovancev D in F ter povprečno težo k kovancev B, E in F. Če velja $m = n = k$, je ponarejen kovanec A. Če je $m = n \neq k$, je ponarejen kovanec B. Če dobimo $m \neq n = k$, je ponarejen kovanec C. Če velja $k = m \neq n$, je ponarejen kovanec D. V preostalem primeru so števila m, n, k paroma različna in je ponarejen eden izmed kovancev E ali F. V primeru, ko je ponarejeni kovanec E, mora veljati $2m + n = k$, v primeru, da je ponarejen kovanec F, pa dobimo $m + 2n = k$. Obe moznosti se ne moreta pojaviti hkrati, saj bi v tem primeru iz razlike enačb dobili $m - n = 0$ in tako $m = n$.

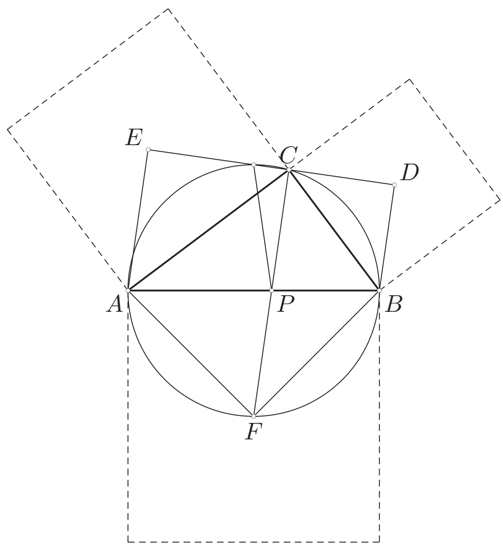
Druga skupina (prvi del)

1. Predpostavimo, da taka tri naravna števila a, b in n obstajajo. Ker je $a + 1 \leq b$, dobimo $n^2 < a^3 < (a+1)^3 < (n+1)^2$. Velja tudi $n^2 < a^3 < a^4$, kar pomeni, da je $n < a^2$. Od tod sledi
$$(a+1)^3 > a^3 + 3a^2 + 1 > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2,$$
torej smo dobili protislovje, zato taka tri naravna števila ne obstajajo.

2. Najprej konstruiramo nek enakokrak pravokotni trikotnik s krakoma dolžine x. Osnovnica tega trikotnika meri $\sqrt{2}x$. Nato konstruiramo pravokotni trikotnik s katetama dolžin x in $\sqrt{2}x$, katerega hipotenuza meri tedaj $\sqrt{3}x$. Nazadnje konstruiramo še pravokotni trikotnik s katetama dolžin $\sqrt{2}x$ in $\sqrt{3}x$, katerega hipotenuza meri $\sqrt{5}x$. Zatem načrtamo dva nevzporedna poltraka s skupnim začetkom ter na prvem odmerimo x ter $\sqrt{2}x + \sqrt{3}x + \sqrt{5}x$. Zadnjo točko s prvega poltraka povežemo s točko, ki jo na drugem poltraku določa dolžina $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$. Vzporednica tej zveznici, ki poteka skozi oznako x na prvem poltraku, nam na drugem poltraku odreže odsek dolžine 1.

3. Glej rešitev 5. naloge za prvo skupino.

4. Označimo s $[T]$ ploščino nekega trikotnika T. Ker velja $\sphericalangle BCD + \sphericalangle BCA + \sphericalangle ACE = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$, točka C leži na daljici DE. Ker je $\sphericalangle BCA + \sphericalangle BFA = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, je $BCAF$ tetivni štirikotnik, od koder dobimo $\sphericalangle FCD = \sphericalangle FCB + \sphericalangle BCD = \sphericalangle FAB + \sphericalangle BCD = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$. Označimo s P presečišče daljic FC in AB.



Slika 3

a) Daljici BD in AE sta pravokotni na daljico DE, zato sta vzporedni daljici CF. Ker je $|CF| > |CP|$, velja $[DCF] > [BCP]$ in $[ECF] > [ACP]$, od koder dobimo $[DEF] > [ABC]$.

b) Naj bo $Q \neq C$ drugo presečišče daljice DE in trikotniku ABC očrtane krožnice. Daljica FQ je tedaj premer te krožnice, zato je $|PF| = |PQ| \geq |PC|$ in $|CF| \geq 2|CP|$. Od tod sledi, da je $[DCF] \geq 2[BCP]$ ter $[ECF] \geq 2[ACP]$, torej res velja $[DEF] \geq 2[ABC]$.

5. Pobarvajmo oglišča kocke z belo in črno, tako da sta krajišči vsakega roba kocke pobarvani različno. Če se kocka vrne žačetni položaj z enako ploskvijo na gornji strani, se barve oglišč ne zamenjajo, kar pomeni, da se oznaka na ploskvi ni mogla obrniti za 90°.

Prva skupina (drugi del)

4. a) Naj ima miza obliko romba $ABCD$ z vodoravno diagonalo BD, ki je krajša od 10cm. Označimo z X položaj mravlje, ki je na začetku bližje točki A, z Y pa položaj mravlje, ki je

na začetku bližje oglišču C. Ker zveznica XY nikoli ne more biti vodoravna, prva mravlja ne more obiskati oglišča C.

b) Spremenimo obliko mize iz točke a) tako, da oglišče C pomaknemo navpično proti A za toliko, da postane razdalja $d(A, C)$ manjša od 10cm. Če je zveznica XY na začetku na stranici AB ali stranici AD, nobena izmed mravelj ne more obiskati točke C. Če je zveznica XY na začetku na stranici CB ali stranici CD, nobena izmed mravelj ne more obiskati točke A.

5. Dokažimo, da je $N = 5251$ največje tako število. Najprej se prepričajmo, da je $x = 50$, $y = 2$ in $z = 1$ edina rešitev enačbe $99x + 100y + 101z = 5251$. Opazimo, da velja $x + y + z = 52$ ali $x + y + z = 53$, saj je $51 \cdot 101 < 5251 < 54 \cdot 99$. Če je $x + y + z = 52$, dobimo $z - x = 99x + 100y + 101z - 100(x + y + z) = 5251 - 100 \cdot 52 = 51$. Iz enakosti $x+y+z = 52$ in $z = x + 51$ dobimo enačbo $2x + y = 1$, ki nima rešitev v naravnih številih. Oglejmo si sedaj še primer $x + y + z = 53$. Kot prej dobimo $x - z = 49$, od koder sledi $2z + y = 4$, kar velja le za $z = 1$ in $y = 2$. To pomeni, da je $x = 50$, $y = 2$ in $z = 1$ res edina rešitev.

   Pokažimo, da ima za $N = 5251 + k$, kjer je $1 \leq k \leq 99$, dana enačba vsaj dve rešitvi v naravnih številih. Za $1 \leq k \leq 49$ sta rešitvi oblike $(50 - k, k + 2, 1)$ in $(51 - k, k, 2)$. Za $50 \leq k \leq 97$ sta rešitvi oblike $(1, 100 - k, k - 48)$ in $(2, 98 - k, k - 47)$. Za $k = 98$ enačbo rešita trojici $(52, 1, 1)$ in $(1, 2, 50)$. Za $k = 99$ enačbo rešita trojici $(51, 2, 1)$ in $(1, 1, 51)$. Če za $N \geq 5351$ rešitev enačbe $99x + 100y + 101z = N - 99$ spremenimo, tako da x zamenjamo z $x + 1$, dobimo rešitev za N. Od tod sledi, da tudi v primeru $N \geq 5351$ dana enačba ni enolično rešljiva.

6. Rešimo posplošeno nalogo. Denimo, da imamo m kozarcev, ki vsak vsebuje kvečjemu n-ti del celotne količine marmelade in je $n \leq m$. Vsak dan velikan izbere n kozarcev in iz njih poje enako količino marmelade. Nalogo rešujmo z indukcijo na n, pri čemer je primer $n = 1$ trivialen, ker lahko velikan vsako jutro pač poje vso marmelado iz nekega kozarca. Predpostavimo, da obstaja strategija praznjenja kozarceža nek $n \geq 1$ in poiščimo strategijo za $n + 1$ kozarcev. Naj bo P kozarec z največjo količino marmelade. Ločimo dva primera.

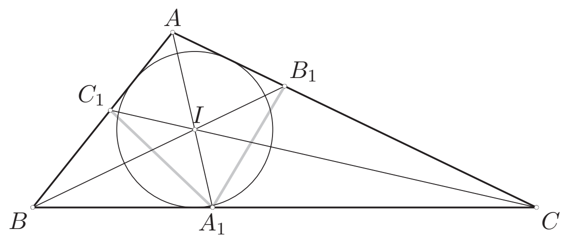
   Primer 1: V kozarcu P je manj kot $\frac{1}{n+1}$ marmelade. Potem je $m > n + 1$. Med nabori z $n + 1$ kozarcev izberimo tistega, ki vsebuje skupno najmanj marmelade. V nadaljevanju naj velikan poskuša izprazniti tisti kozarec K iz tega nabora, ki vsebuje najmanj marmelade tako, da iz izbranih $n + 1$ kozarcev poje toliko marmelede, kot jo vsebuje kozarec K. Če kozarec P po tem koraku vsebuje več kot $\frac{1}{n+1}$ preostale marmelade, načrt spremenimo tako, da iz izbranih $n + 1$ kozarcev pojemo le toliko marmelade, da kozarec P zatem vsebuje natanko $\frac{1}{n+1}$ preostale marmelade in nadaljujemo po primeru 2. Če kozarec P po tem koraku vsebuje kvečjemu $\frac{1}{n+1}$ preostale marmelade, smo število nepraznih kozarcev zmanjšali. Na ta način po nekaj korakih pridemo do primera (nazadnje zagotovo, če postane $m = n+1$), ko kozarec P vsebuje natanko $\frac{1}{n+1}$ preostale marmelade in nadaljujemo po primeru 2.

   Primer 2: Kozarec P vsebuje natanko $\frac{1}{n+1}$ marmelade. Opazimo, da vsak kozarec različen od P vsebuje kvečjemu $\frac{1}{n}$ od vse marmelade, ki ni v kozarcu P. Strategijo, ki obstaja po indukcijski predpostavki, lahko tedaj uporabimo za kozarce različne od P. Pri tem isto količino marmelade, ki jo velikan vsak dan poje iz n kozarcev, poje tudi iz kozarca P. Na ta način res vsak dan je iz $n + 1$ kozarcev, kot je predpisano. Po indukcijski predpostavki lahko izpraznimo kozarce različne od P. Tako vsak dan količino marmelade v kozarcu P zmanjšamo za $\frac{1}{n}$ marmelade, ki je tedaj v preostalih kozarcih. Ker na začetku v kozarec P vsebuje $\frac{1}{n}$ marmelade, ki je tedaj v preostalih kozarcih, bomo tako hkrati z ostalimi kozarci izpraznili tudi kozarec P.

Druga skupina (drugi del)

4. Označimo mesta, kjer so zapisana dana števila z rdečimi pikami. Za lok A na dani krožnici označimo z $f(A)$ vsoto vseh števil na tem loku. Ker je na krožnici končno mnogo števil, jih lahko razporedimo na tri loke le na končno mnogo načinov. Naj bodo L, M in S trije izbrani loki, pri čemer predpostavimo, da je $f(L) \geq f(M) \geq f(S)$. Med možnimi delitvami izberimo tisto, kjer je razlika $f(L) - f(S)$ minimalna in denimo, da je $f(L) - f(S) > 1$. Na loku L izberimo tisto rdečo oznako R, ki je najbližja loku S, in predpostavimo, da je na tem mestu zapisano število r. Opazujmo delitev (L', M', S'), ki jo dobimo tako, da stičišče lokov L in S premaknemo ravno za toliko, da lok S zajame oznako R. Če je $f(L) - r > f(S) + r$, je $f(L') = \max\{f(M), f(L) - r\}$ in $f(S') = \min\{f(M), f(L) + r\}$. Če je $f(L) - r \leq f(S) + r$, je $f(L') = \max\{f(M), f(L) + r\}$ in $f(S') = \min\{f(M), f(L) - r\}$. Ker je $r \leq 1$ in ne velja $f(L) = f(M) = f(S)$, dobimo $f(L') - f(S') < f(L) - f(S)$, kar je v nasprotju s predpostavko.

5. Naj bo I središče trikotniku ABC včrtane krožnice in $\vartheta = \sphericalangle BCI = \sphericalangle ACI$. Potem velja $\sphericalangle ABI = \sphericalangle CBI = 2\vartheta$ in $\sphericalangle CAI = \sphericalangle BAI = 4\vartheta$, od koder dobimo $\vartheta = \frac{\pi}{14}$. Od tod zlahka izpeljemo, da je $\sphericalangle AB_1I = 4\vartheta$, $\sphericalangle AIB_1 = \sphericalangle BIA_1 = \sphericalangle BA_1I = 6\vartheta$ in $\sphericalangle AIC_1 = \sphericalangle AC_1I = 5\vartheta$. Označimo $x = |AI|$ in $y = |A_1I|$. Iz ustreznih enakokrakih trikotnikov dobimo enakosti $|AC_1| = |IB_1| = x$ in $|BA_1| = |BI| = x + y$. V trikotniku BAA_1 velja $\frac{|AB|}{|AI|} = \frac{|A_1B|}{|A_1I|}$, od koder sledi $|BC_1| = \left(\frac{|A_1B|}{|A_1I|} - \frac{|AB|}{|AI|}\right)|AI| = \frac{x^2}{y} = |BC_1|$. V trikotniku ABB_1 velja $\frac{|B_1A|}{|B_1I|} = \frac{|BA|}{|BI|}$, od koder dobimo $|AB_1| = \left(\frac{|AC_1|+|C_1B|}{|BI|}\right)|B_1I| = \frac{x^2}{y} = |BC_1|$. Torej sta trikotnika B_1AA_1 in C_1BA_1 skladna in velja $|A_1B_1| = |A_1C_1|$.



Slika 4

6. Pomagajmo si z dodatno beležnico. Vsakič, ko tablo zapišemo število n, v beležnico zapišimo število n^2 in vsakič, ko s table zbrišemo število n, iz beležnice zbrišimo število n^2. Jasno je, da število n prvič nastane iz para števil $n-1$ na tabli. Števila $n-1$ tedaj ni več na tabli, pojavi pa se število $n-2$. V prejšnjem koraku smo število $n-1$ dobili iz para števil $n-2$, in tako dalje. Na tabli imamo torej števila $n, n-2, n-3, \ldots, 3, 2, 1$, pri čemer je na tabli morda še dodatno število 1, tako da je na tabli zapisano sodo mnogo števil. Naj bo $f(n)$ minimalno število korakov, ki jih potrebujemo, da na tablo zapišemo naravno število n. Če na tablo dodamo dve števili 1, se vsota števil v beležnici poveča za $1+1 = 2$, prav tako pa se vsota števil v beležnici poveča za $(m+1)^2 + (m-1)^2 - m^2 - m^2 = 2$ tudi v primeru, ko dve števili m nadomestimo z $m+1$ in $m-1$. Od tod sledi $f(n) = \frac{1}{2}\left(n^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2 + 1^2\right)$ za $n = 4k$ ali $n = 4k+1$ in $f(n) = \frac{1}{2}\left(n^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2 + \cdots + 2^2 + 1^2\right)$ za $n = 4k+2$ ali $n = 4k+1$. V našem primeru tako dobimo

$$f(2005) = \frac{1}{2}\left(2005^2 + \frac{2003 \cdot 2004 \cdot 4007}{6} + 1\right) = 1342355520.$$

Gregor Cigler