Tekmovanja

41. državno tekmovanje za zlato Vegovo priznanje

8. razred

Na mizi imaš prijavni list, nalepko s šifro, tekmovalno polo formata A3 in pritožni list. Nalepko nalepi na prvo stran tekmovalne pole, prijavni list in pritožni list pa sta že opremljena s šifro. List z nalogami, prijavni list in pritožni list po tekmovanju odnesi s seboj. V primeru ugovora na vrednotenje izdelka **uporabi pritožni list**. Na prijavnem listu imaš uporabniško ime in geslo, ki ti omogočata, da takoj, ko bo tekmovalna komisija dosežke vnesla v strežnik, svoj dosežek najdeš na naslovu `http://www.dmfa.si`, povezava Rezultati tekmovanj ali preko mobilnega telefona, ki omogoča WAP, na naslovu `http://wap.dmfa.si`

Čas za reševanje je 120 minut.
Naloge rešuj na tekmovalni poli, priloženi list naj bo le v pomoč tvojemu razmišljanju. Pot do rezultata mora biti jasno in korektno predstavljena. Piši s črnilom berljivo in pregledno.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

1. naloga

Od traku elastike (dolg je a cm) smo odrezali petino dolžine.

a) Za koliko odstotkov moramo raztegniti daljši odrezek, da bo imel začetno dolžino a?
b) Krajši odrezani del smo raztegnili do prvotne dolžine a in elastika se ni strgala. Za koliko odstotkov smo ga raztegnili?

2. naloga

Marko ve, da za hojo od doma do železniške postaje potrebuje 24 minut, medtem ko to razdaljo preteče v 12 minutah. Marko mora ujeti vlak, ki s postaje odpelje ob 12.30, zato se z normalno hojo odpravi od doma ob 12.00. Med potjo se spomni, da je v vratih pozabil ključ, zato steče proti domu, vzame ključ in nato preteče tudi pot do postaje, kamor prispe točno ob 12.30.
Ob kateri uri se je spomnil, da je pozabil ključ?

3. naloga

V enakokrakem trikotniku z vrhom C je kot ob vrhu $20°$. Na kraku AC leži točka E, na kraku BC pa točka D, tako da meri kot $\sphericalangle CBE$ $60°$, kot $\sphericalangle CAD$ pa $30°$.
Izračunaj velikost kota $\sphericalangle CED$. Nariši skico.

4. naloga

Ana in Blaž imata vsak svojo posodo z bonboni. V Anini posodi je 40 čokoladnih in 30 jagodnih bonbonov, v Blaževi pa 15 čokoladnih in 30 jagodnih bonbonov. Blaž iz Anine posode zagrabi 10 bonbonov in jih prestavi v svojo posodo. Če bi iz Anine posode prenesel v svojo posodo še 1 jagodni bonbon, bi bilo skupno število jagodnih bonbonov v Anini posodi in čokoladnih bonbonov v Blaževi posodi enako 50.
Koliko čokoladnih bonbonov in koliko jagodnih bonbonov je Blaž prenesel iz Anine posode v svojo posodo?

5. naloga

Za kateri vrednosti spremenljivke x je vrednost izraza $\left(x^2+1\right)^{(x+4)^2-(x-2)(x+2)}$ enaka 1?

9. razred

1. naloga

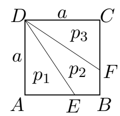
Rešitev enačbe $\frac{(x+5)^2}{2} - \frac{(x-2)(x+2)}{3} = (x-1)^2 - \left(x^2-1\right) - \frac{55-x^2}{6}$ je začetna vrednost n linearne funkcije, katere graf gre skozi točko $A(-4,3)$.
Zapiši enačbo te linearne funkcije.

2. naloga

Mobilni operater nam ponuja tri različne pakete. V paketu **A** ni mesečne naročnine, zato pa minuta pogovora stane 25 SIT. Paket **B** ima mesečno naročnino 2000 SIT, vsaka minuta pogovora pa stane 5 tolarjev. Paket **C** ponuja pri mesečni naročnini 1000 SIT prvih 60 minut pogovora zastonj, vsaka naslednja minuta pa stane 10 tolarjev.
Spreminjanje cen pogovorov prikaži z grafi. Koliko minut najmanj in koliko minut največ lahko telefoniramo na mesec, da se splača odločiti za paket **C**?

3. naloga

Kvadrat $ABCD$ s stranico $a = 6$ cm bi radi razdelili na tri ploščinsko enake dele, kot kaže slika.
Izračunaj dolžini daljic AE in CF.

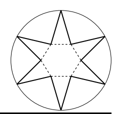


4. naloga

Alen, Boris, Cene in Črt so zbrali prihranke in kupili žogo. Alen je dal 40 % vrednosti žoge, Boris je prispeval tri sedmine zneska, ki so ga plačali ostali trije, Cene pa 25 % zneska ostalih treh. Najmlajši, Črt, je dal 2000 tolarjev. Kolikšna je bila cena žoge?

5. naloga

Zvezda na sliki je sestavljena iz pravilnega šestkotnika in šestih skladnih enakokrakih trikotnikov, ki imajo osnovnice na stranicah šestkotnika in kot ob vrhu 30°. Polmer krožnice je 1 enota.
Izračunaj ploščino zvezde.

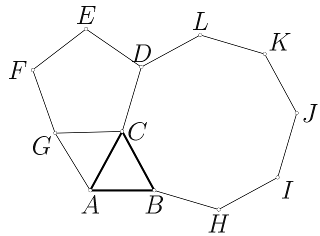


Matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije – izbirno tekmovanje

1. letnik

1. Poišči najmanjše naravno število n, da bo vsota $n + 2n + 3n + \cdots + 9n$ enaka številu, ki ima v desetiškem zapisu vse števke enake.
2. Za katere vrednosti parametra a ima sistem enačb $|x-1| + |y-a| = 1$ in $y = -2|x-1| - 1$ natanko 3 rešitve?
3. Za realni števili a in b velja $a^3 = 3ab^2 + 11$ in $b^3 = 3a^2b + 2$. Izračunaj vrednost izraza $a^2 + b^2$.
4. Dan je romb $ABCD$ z ostrim kotom $\sphericalangle BAC$. Nožišče višine iz točke D na stranico AB deli to stranico na dela dolžin x in y. Izrazi dolžini diagonal romba $ABCD$ z x in y.

5. V točki C se stikajo enakostranični trikotnik ACG, pravilni petkotnik $CDEFG$ in pravilni osemkotnik $BHIJKLDC$ (glej sliko). Določi kote trikotnika ABC.



2. letnik

1. Rok je iz 500 enako velikih kock sestavil kvader. Najmanj koliko mejnih ploskev kock je sestavljalo mejne ploskve kvadra?
2. Če petmestno število delimo s 100, dobimo količnik k in ostanek o. Pri koliko petmestnih številih je vsota $k + o$ deljiva z 11?
3. Naj bosta a in b pozitivni realni števili. Dokaži, da je vrednost izraza
$$\frac{\sqrt{\frac{ab}{2}} + \sqrt{8}}{\sqrt{\frac{ab+16}{8} + \sqrt{ab}}}$$
neodvisna od a in b.
4. Označimo z D in E razpolovišči stranic AC in BC enakostraničnega trikotnika ABC. Poltrak DE seka očrtano krožnico trikotnika ABC v točki F. V kakšnem razmerju deli točka E daljico DF?
5. Poišči vse rešitve enačbe $m^2 - 3m + 1 = n^2 + n - 1$, kjer sta m in n naravni števili.

3. letnik

1. Poišči vsa pozitivna realna števila x, ki zadoščajo enačbi $x^{x\sqrt[3]{x}} = (x\sqrt[3]{x})^x$.
2. Med naravnimi števili m, za katere ima neenakost $n^2 + 2005 \leq mn$ vsaj kakšno celoštevilsko rešitev n, poišči tista, kjer je teh rešitev najmanj.
3. Za koliko naravnih števil n je vrednost izraza $n^3 - 14n^2 + 64n - 93$ praštevilo?
4. Naj bosta x in y realni števili, za kateri velja $\sin x + \sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ in $\cos x + \cos y = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Koliko je $\sin(x + y)$?
5. Na diagonali AC pravokotnika $ABCD$ izberemo točki E in F tako, da je $|AE| = |AB|$ in $|AF| = |AD|$. Označimo z G in H pravokotni projekciji točk E in F na stranico AB. Dokaži, da velja $|AG| + |FH| = |AC|$.

4. letnik

1. Prva dva člena zaporedja sta $a_1 = 1$ in $a_2 = 3$. Od drugega člena dalje velja: če od nekega člena odštejemo člen, ki je pred njim, dobimo člen, ki je za njim. Poišči vsoto prvih 2005 členov zaporedja.

2. Koliko je šestmestnih števil oblike $\overline{abcacb}$, ki so deljiva s 23?

3. Poišči vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki zadoščajo enačbi

$$yf(x) + xf(y) = (x + y)f(x + y).$$

4. Naj bo ABC enakokrak ostrokoten trikotnik z vrhom C. Nosilka višine iz A seka stranico BC v točki D, očrtano krožnico trikotnika ABC pa v točkah A in E. Premica BE seka krožnico s premerom BC v točkah B in F. Dokaži, da je $|AD| = |BF|$.

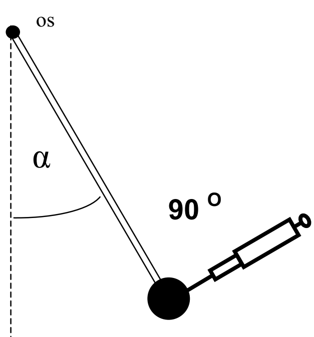
5. Za neprazno podmnožico X množice $\{1, 2, 3, \ldots, 42\}$ označimo z $v(X)$ vsoto elementov množice X. (Tako je denimo $v(\{1, 3, 8\}) = 12$.)

   Izračunaj vsoto vseh števil $v(X)$, ko X preteče vse neprazne podmnožice množice $\{1, 2, 3, \ldots, 42\}$.

Tekmovanje za zlato Stefanovo priznanje

8. razred devetletne osnovne šole

1. Na lahko palico, ki je na zgornjem krajišču brez trenja vrtljiva okrog osi, pritrdimo kovinsko kroglo z maso 1 kg. Kroglo vlečemo s silomerom tako, da je kot med palico in silomerom vedno 90° (glej sliko).

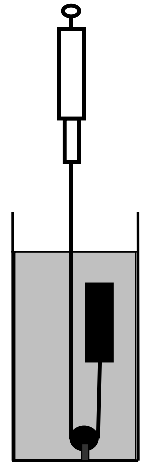


a) S kolikšno silo moramo vleči silomer, da bo krogla mirovala, kot α pa bo 60°. Pomagaj si z načrtovanjem.

b) Vlečno silo ugotovi še za primera , ko je kot α enak 0° in 90° in vse tri vrednosti vnesi v tabelo. Tabelo prepiši na list z rešitvami.

α [°]	0°	60°	90°
F [N]			

2. Na lesen kvader pritrdimo lahko vrvico ter jo speljemo preko škripca, drugi konec vrvice pa s silomerom vlečemo navpično navzgor, kot kaže slika. Masa kvadra je 80 gramov, višina 12 cm, specifična teža pa 4,0 N/dm^3 . Specifična teža vode je 10 N/dm^3 .

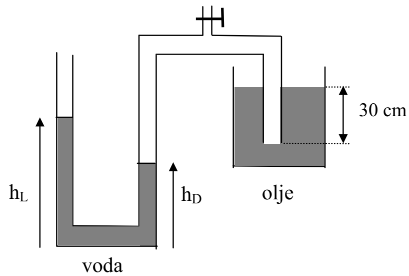


a) Kvader preriši na svoj list in skiciraj vse sile, ki delujejo na kvader, ko je ves potopljen v vodi. Sile označi in jih imenuj.

b) S kolikšno silo mora vleči silomer navpično navzgor, da kvader miruje pod vodo ?

c) S kolikšno silo pa mora vleči silomer navpično navzgor, ko gleda iz vode 2,0 cm kvadra?

3. Cev z enako debelino zvijemo, kot kaže slika. V levem delu je voda, desni konec cevi pa smo potisnili 30 cm globoko v olje in poskrbeli, da v cevi ni olja. Specifična teža vode je 10,0 N/dm^3, olja pa 8,0 N/dm^3.



a) Za koliko je tlak v olju v globini 30 cm večji od zunanjega zračnega tlaka? [4 točki]
b) Kolikšna je višinska razlika vodnih stolpcev h_L - h_D?
c) Kolikšni pa bosta višini h_L in h_D, če odpremo ventil na zgornjem delu cevi?
Možni odgovori: $h_L > h_D$, $h_L = h_D$, $h_L < h_D$. Odgovor utemelji.

Eksperimentalni nalogi:

4. Pri tej nalogi boš raziskal, ali napis "lahka" pijača pomeni tudi manjšo gostoto pijače.

Pribor: tehtnica, menzura, kapalka, dve pijači.
Po vklopu tehtnice je potrebno počakati, da tehtnica pokaže 0, šele nato lahko začnemo s tehtanjem.

a) Izmeri gostoto lahke in gostoto navadne pijače. Na voljo imaš tehtnico in menzuro ter kapalko, s katero si pomagaj pri čim natančnejši določitvi prostornine. Razmisli tudi, kolikšno prostornino pijače boš nalil v menzuro, da bo napaka čim manjša.
b) Predpostavi, da je razlika v gostotah posledica raztopljenega sladkorja. Iz tabele razberi, koliko sladkorja je raztopljenega v pijači z večjo gostoto?
c) V kateri pijači, lahki ali navadni, je več sladkorja?

$\rho_{pijače}$ (g/ml)	1,00	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05
masa sladkorja (g) na 100 ml pijače	0	3,5	7,0	10,5	14,0	17,5

5. Iz vzmeti napravi merilnik za merjenje sil.

Pribor: vzmet na stojalu, ravnilo 50 cm, utež 0,20 N, 2 uteži 0,50 N, telo nepravilne oblike, čaša z vodo, milimetrski papir.

a) Za priloženo vzmet nariši na milimetrski papir graf sile F v odvisnosti od raztezka vzmeti x. V graf vnesi 5 izmerjenih točk.

b) Z merilnikom izmeri težo telesa nepravilne oblike.

c) Izmeri silo vzgona na telo nepravilne oblike, ko je telo potopljeno v vodi.

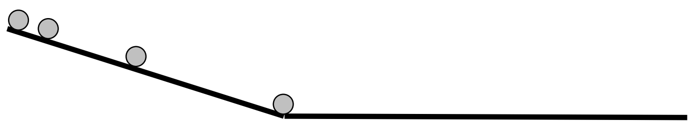
8. razred osemletne in 9. razred devetletne osnovne šole

1. S kamero smo posneli gibanje kroglice po klancu in na skupno sliko zlepili posnetke. Prva lega kroglice je bila posneta ob $t_1 = 0$, druga ob $t_2 = 0{,}25$ s, tretja ob $t_3 = 0{,}50$ s in četrta ob $t_4 = 0{,}75$ s. Merilo slike je 1:10, kar pomeni, da 1 cm na sliki ustreza 10 cm pri poskusu.

a) Iz slike odčitaj razdalje od prve lege do naslednjih leg kroglice in jih zapiši v tabelo. V prvem stolpcu tabele naj bodo dani časi, v drugem tvoje meritve, v tretji stolpec vpiši še vrednosti razdalj, ki ustrezajo poskusu.

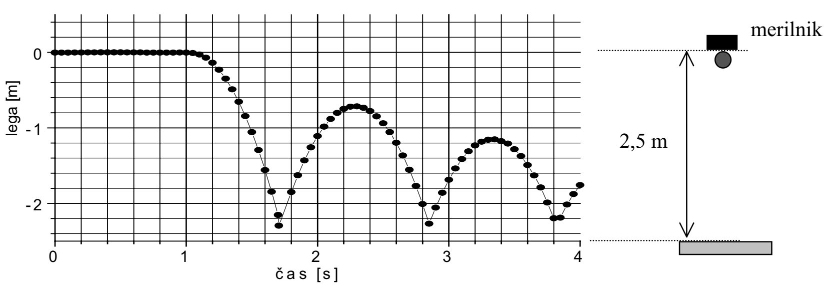
b) Ali je gibanje po klancu enakomerno, ali enakomerno pospešeno? Kolikšna je **hitrost** kroglice na koncu klanca tik pred začetkom vodoravnega dela?

c) Izračunaj razdalji od zadnje dane lege še za dve naslednji legi kroglice ob časih $t_5 = 1{,}00$ s in $t_6 = 1{,}25$ s na vodoravnem delu. Trenje smeš zanemariti. Opravljeni poti od začetka gibanja za 5. in 6. lego dodaj še v tabelo pri vprašanju a).



2. Z ultrazvočnim merilnikom razdalj lahko merimo oddaljenost telesa od merilnika v odvisnosti od časa. Merilnik vsakih nekaj stotink sekunde izmeri razdaljo, podatke pošlje računalniku, ta pa nam nariše ustrezne grafe.

Pri poskusu smo spustili košarkarsko žogo z maso 600 g z višine 2,5 m, kot kaže slika. Merilnik je meril razdaljo do zgornjega roba žoge, računalnik pa je izrisal spodnji graf. Zračni upor lahko zanemariš.



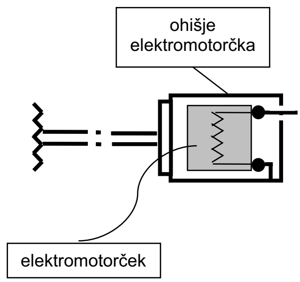
a) Približno koliko časa je poteklo od takrat, ko smo žogo spustili, do prvega odboja ?
b) Kolikšna je bila kinetična energija žoge, tik preden je prvič padla na tla ?
c) Za koliko joulov se je zmanjšala kinetična energija žoge pri prvem odboju ?

3. Električne naprave v stanovanju so: pečica (P = 2,2 kW), pralni stroj (P = 2,0 kW), grelnik vode (P = 1,3 kW), radio (P = 200 W), tri enake žarnice (vsaka z močjo P = 100 W). Vsako žarnico lahko vklopimo posebej. Instalacijo z napetostjo 220 V varuje ena varovalka, kar pomeni, da skozi to varovalko teče skupni tok vseh v stanovanju priključenih naprav.
Varovalka ne pregori, če priključimo pralni stroj in dve žarnici. Če pa priključimo pralni stroj in tri žarnice, pa varovalka pregori.

a) Kolikšen je tok, ki teče skozi varovalko, ko so priključeni pralni stroj in dve žarnici ? [4 točke]
b) Naštej vse tiste kombinacije priključenih naprav, kjer je skupni tok večji od 8 A in varovalka ne pregori.

Eksperimentalni nalogi

4. Želimo proučiti delovanje baterijskega mešalnika za pripravo kavnih napitkov. Ker se baterije hitro izrabljajo, bomo mešalnik raje priključili na malonapetostni vir. Zato smo mešalniku vgradili dve priključni žici. Črna žica je priključena na negativni priključek elektromotorčka.



Pribor: Mešalnik, malonapetostni vir z vgrajenima voltmetrom in ampermetrom, 2 žici, milimetrski papir.

Navodilo za uporabo malonapetostnega vira: Napetost približno nastavimo z vrtljivim gumbom V_{ADJ} , natančno pa z gumbom FINE. Če pri ravnanju z malonapetostnim virom potrebuješ pomoč, pokliči asistenta.

a) Zanima nas, kako se spreminja električna moč mešalnika v odvisnosti od napetosti, ko se mešalo vrti v vodi, približno 2 cm nad dnom posode.
Opravi potrebne meritve in nariši graf električne moči P v odvisnosti od napetosti U. Napetost spreminjaj <u>od 2,0 V navzdol</u> v korakih po 0,5 V.
b) Če mešalnik uporabljamo z baterijami, ga vključujemo in izključujemo z vgrajenim stikalom. Ugotovi, kako deluje stikalo mešalnika. Največ v dveh vrsticah razumljivo opiši, na kakšen način sklenemo tokokrog, ko premaknemo stikalo v smeri ON.
c) Na sliko, ki je v naravni velikosti in je priložena k vaji, vriši obe bateriji (tako kot sta narisani na pokrovčku mešalnika), stikalo v legi ON in vse električne povezave. Nariši, kje teče tok skozi zaključen tokokrog. Označi tudi smer električnega toka.

5. Pripravljeno imaš škatlo z vezjem. S poskusom izmeri, kako je odvisen tok skozi vezje od lege drsnika na škatli. Vezje priključi preko ampermetra na vir napetosti (2 bateriji). Če pri ravnanju z ampermetrom potrebuješ pomoč, pokliči asistenta.

Pribor: škatla z vezjem, bateriji, ampermeter, vezni vodniki, milimetrski papir.

a) Nariši skico vezave. Vezje predstavi kot pravokotnik z dvema priključkoma. [2 točki]
b) Izmeri tok za 12 različnih leg drsnika na drsnem uporniku. Lege naj bodo po 0,5 cm narazen. Rezultate meritev uredi v obliki tabele: prvi stolpec predstavlja razdaljo drsnika od začetne lege, drugi stolpec predstavlja pripadajoči tok.
c) Nariši diagram: električni tok I v odvisnosti od lege drsnika x.

Rešitve nalog 41. državnega tekmovanja za zlato Vegovo priznanje

8. razred

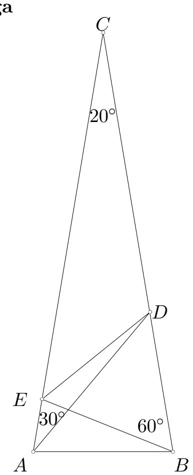
a) Daljši odrezek meri $\frac{4}{5}a$.
Ostanek raztegnemo za $\frac{1}{5}a$.
To predstavlja $\frac{\frac{1}{5}a}{\frac{4}{5}a} = \frac{1}{4} = 25\ \%$ daljšega odrezka.

b) Krajši odrezek raztegnemo za $\frac{4}{5}a$.
To je: $\frac{\frac{4}{5}a}{\frac{1}{5}a} = 400\ \%$ krajšega odrezka.

2. naloga

- Drugič je od doma do postaje porabil 12 minut, torej je šel od doma ob 12.18.
- Za pot, ki jo je prehodil, porabi dvakrat več časa kot za pretečeno pot.
- S t označimo čas, porabljen od odhoda od doma, do takrat, ko je ugotovil, da je pozabil ključ:
  $t + \frac{t}{2} = 18$ min
  $t = 12$ min
- Na ključ se je spomnil ob 12.12.

3. naloga



- Ker je $\triangle ABC$ enakokrak, velja
  $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA = \frac{180° - 20°}{2} = 80°$
  Torej je $\sphericalangle EBA = 80° - 60° = 20°$.
  V trikotniku $\triangle ABE$ je kot
  $\sphericalangle AEB = 180° - \sphericalangle BAC - \sphericalangle EBA = 80°$.
  Zato je $\triangle ABE$ enakokrak z vrhom B in $|AB| = |EB|$.
- Ker je $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC - \sphericalangle DAC = 50°$,
  je $\sphericalangle ADB = 180° - \sphericalangle BAD - \sphericalangle DBA = 50°$.
  Torej je tudi $\triangle ABD$ enakokrak z vrhom B in $|AB| = |DB|$.
- Trikotnik $\triangle EBD$ je enakostraničen,
  saj je $|EB| = |DB|$ in $\sphericalangle DBE = 60°$.
- $\sphericalangle CED = 180° - \sphericalangle AEB - \sphericalangle BED$
  $\sphericalangle CED = 180° - 80° - 60° = 40°$

4. naloga

- Stanje na začetku:

	Ana	Blaž
čokoladni	40	15
jagodni	30	30

  Blaž vzame iz Anine posode x čokoladnih bonbonov in $10 - x$ jagodnih bonbonov.
- Novo stanje:

	Ana	Blaž
čokoladni	$40 - x$	$15 + x$
jagodni	$20 + x$	$40 - x$

- Če bi Blaž vzel še en jagodni bonbon, bi Ana imela $19 + x$ jagodnih bonbonov,
  Blaž pa $15 + x$ čokoladnih bonbonov.
- $50 = 19 + x + 15 + x$..
  $x = 8$

- Prenesel je 8 čokoladnih bonbonov in 2 jagodna bonbona.

5. naloga

Realno število a^b je enako 1, če je $a = 1$ in b poljubno realno število, ali pa $a \neq 0$ in $b = 0$, zato ločimo dve možnosti:

a) Osnova potence je enaka 1:
Rešitev enačbe $x^2 + 1 = 1$ je $x = 0$.

b) Stopnja potence je enaka 0,
torej je $(x+4)^2 - (x-2)(x+2) = 0$.
Ureditev enačbe: $8x + 20 = 0$.
Rešitev $x = -\frac{5}{2}$
ustreza, saj osnova nikoli ni enaka 0.

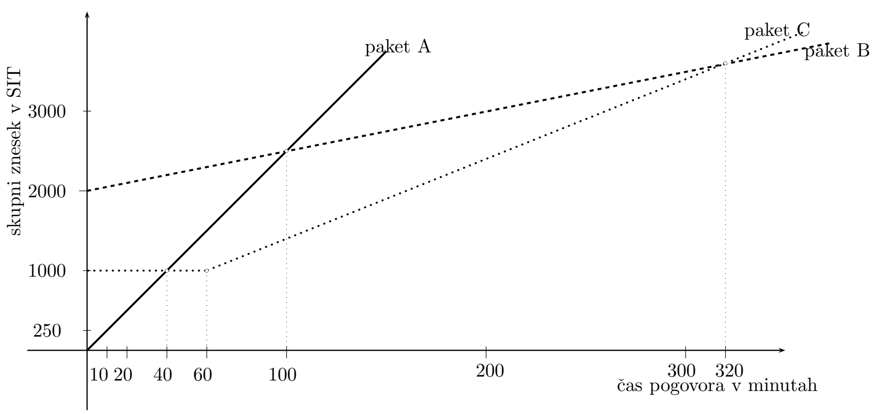
9. razred

1. naloga

- Ureditev enačbe:
  $3x^2 + 30x + 75 - 2x^2 + 8 = 6x^2 - 12x + 6 - 6x^2 + 6 - 55 + x^2$
  $42x = -126$
- Rešitev enačbe $x = -3$
- Enačba premice z upoštevanjem začetne vrednosti $y = kx - 3$
  $3 = (-4)k - 3$
  $k = -\frac{3}{2}$
- Zapis enačbe $y = -\frac{3}{2}x - 3$.

2. naloga

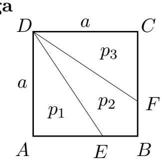
- V paketu A plačamo za x minut pogovora $25x$ SIT, $z_A(x) = 25x$.
  v paketu B pa za x minut pogovora $5x + 2000$ SIT, $z_B(x) = 5x + 2000$.
  Znesek v paketu C se prvih 60 minut ne spreminja in je 1000 SIT,
  nato pa se vsako minuto poveča za 10 SIT, $z_C(x) = \begin{cases} 1000\ ;\ x < 60 \\ 1000 + 10 \cdot (x - 60)\ ;\ x \geq 60 \end{cases}$
  Spreminjanje zneskov upodobimo z grafi.



Pojasnilo:

- Ker je cena 60 minut pogovora v paketu A enaka 1500 SIT, v paketu C pa le 1000 SIT, sta ceni x minut pogovorov v paketih A in C lahko enaki le, če je $x < 60$ in tedaj mora veljati $25x = 1000$ oz. $x = 40$. Cena pogovorov v paketu C je ugodnejša od cene v paketu A od vključno 40 minut pogovorov dalje.
- Ker je mesečna naročnina na paket B enaka 2000 SIT, sta ceni x minut pogovorov v paketih B in C lahko enaki le, če je $x > 60$ in tedaj mora veljati $1000 + 10(60 - x) = 5x + 2000$ oz. $x = 320$. To pomeni, da je cena pogovorov v paketu C ugodnejša do vključno 320 minut pogovorov.
- Na mesec moramo govoriti od 40 minut do 320 minut, da bi se splačalo odločiti za paket C.

3. naloga



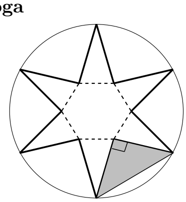
- Označimo $|AE| = x$ in $|CF| = y$
  $p_1 = \frac{ax}{2}$
- Ker je kvadrat razdeljen na 3 enake dele, velja $p_1 = \frac{a^2}{3}$.
  $p_1 = \frac{ax}{2} = \frac{a^2}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}a$
- Enak sklep velja za y: $p_3 = \frac{a^2}{3}$
  $p_3 = \frac{ay}{2} = \frac{a^2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}a$
  $x = y = 4$ cm.

(Če učenec izračuna x in namesto izračuna za y napiše $x = y$ zaradi simetrije, dobi vse točke.)
ali druga možnost:
- Označimo $|AE| = x$ in $|CF| = y$
  $p_1 = \frac{ax}{2}$ in $p_3 = \frac{ay}{2}$
  $p_2 = a^2 - \frac{ax}{2} - \frac{ay}{2}$
- $p_1 = p_3 \Rightarrow x = y$
- $p_1 = p_2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}a$
- $x = y = 4$ cm

4. naloga

- Žoga stane x SIT.
  Alen prispeva 40 %, torej $0{,}4x$ SIT, Črt pa 2000 SIT.
- Razmerje Borisovega prispevka in prispevka ostalih je $3 : 7$, torej je Borisov delež $\frac{3}{10}$ celotnega zneska oziroma $0{,}3x$ SIT.
- Ker je razmerje Cenetovega prispevka proti ostalim enako $1 : 4$, da Cene $\frac{1}{5}$ celotnega zneska oziroma $0{,}2x$ SIT.
- Zapis enačbe $0{,}4x + 0{,}3x + 0{,}2x + 2000 = x$.
  $0{,}1x = 2000$
  $x = 20000$
- Cena žoge je bila 20000 SIT.

5. naloga



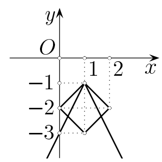
- Vrhovi zvezde tvorijo pravilni šestkotnik, ki ima stranico enako polmeru krožnice.
  Ploščina tega šestkotnika je $p_1 = \frac{6r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
- Ker je kot ob vrhu zvezde enak 30°, je kot ob osnovnici kraka zvezde enak 75°, torej se kraka zvezde sekata pod kotom $360° - 120° - 2 \cdot 75° = 90°$
- Ploščina osenčenega trikotnika je:
  $p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{4} = \frac{1}{4}$

- Ploščina zvezde je:
  $p = p_1 - 6p_2$
- $p = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 6 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3\sqrt{3}-3}{2} = \frac{3\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$

Rešitve nalog matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije – izbirno tekmovanje

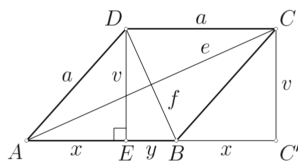
I/1. Označimo $s = n + 2n + 3n + \cdots + 9n = 45n$. Ker 5 deli število s in ker ima s v desetiškem zapisu vse števke enake, so vse njegove števke enake 5. Ker pa tudi 9 deli število s, je $s = 555555555$ in zato $n = 12345679$.

I/2. Narišemo krivulji, ki ju določata enačbi. Prva enačba določa obod kvadrata s središčem v točki $(1, a)$, druga pa 2 poltraka s skupnim izhodiščem v točki $(1, -1)$. Sistem ima natanko 3 rešitve, ko se skupno izhodišče poltrakov ujema z zgornjim ogliščem kvadrata. To je takrat, ko je $a = -2$.



I/3. Enačbi preoblikujemo v $a^3 - 3ab^2 = 11$, $b^3 - 3a^2b = 2$ in kvadriramo: $a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = 121$, $b^6 - 6a^2b^4 + 9a^4b^2 = 4$. Ti dve enačbi seštejemo in dobimo $125 = a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = (a^2 + b^2)^3$, torej je $a^2 + b^2 = 5$.

I/4. Dolžina stranice romba je $a = x + y$, zato je po Pitagorovem izreku v trikotniku AED višina v enaka $v = \sqrt{(x+y)^2 - x^2} = \sqrt{y(2x+y)}$. Potem je dolžina diagonale BD enaka $|BD| = \sqrt{v^2 + y^2} = \sqrt{2y(x+y)}$, dolžina diagonale AC pa je po Pitagorovem izreku v trikotniku $AC'C$ enaka



$$|AC| = \sqrt{(2x+y)^2 + v^2} = \sqrt{2(2x+y)(x+y)}.$$

I/5. Spomnimo se, da notranji kot pravilnega n-kotnika meri $\frac{n-2}{n}180°$. Notranji kot enakostraničnega trikotnika meri $60°$, v pravilnega petkotnika $\frac{3}{5}180° = 108°$, pravilega osemkotnika pa $\frac{6}{8}180° = 135°$. Trikotnik ABC je enakokrak s kotom $360° - (60° + 108° + 135°) = 57°$ pri vrhu C in kotoma $\frac{1}{2}(180° - 57°) = 61.5°$ ob osnovnici AB.

II/1. Denimo, da so bile Rokove kocke enotske. Kvader je imel tedaj prostornino 500. Če je bil dolg a, širok b in visok c enot, je veljalo $abc = 500$. Njegova površina je bila $P = 2(ab + bc + ac)$, vrednost izraza P pa pove tudi, koliko mejnih ploskev kock je na površju kvadra. Poiskati moramo torej najmanjšo vrednost površine kvadra. Predpostavimo lahko, da je $a \geq b \geq c$. Ker je $500 = 2^2 \cdot 5^3$, so delitelji števila 500 števila 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 250 in 500 (glej preglednico). Razberemo lahko, da je na površju kvadra najmanj 400 mejnih ploskev kock, iz katerih je sestavljen.

a	b	c	$2(ab+bc+ac)$
500	1	1	2002
250	2	1	1504
125	4	1	1258
125	2	2	1008
100	5	1	1210
50	10	1	1120
50	5	2	720
25	20	1	1090
25	10	2	640
25	5	4	490
20	5	5	450
10	10	5	400

II/2. Vseh petmestnih števil je 90000 (od 10000 do 99999). Razdelimo jih lahko v 900 stolpcev po 100 števil, in sicer glede na vrednost k od 100 do 999:

$$\begin{array}{ccccc}
100\cdot100+\ \ 0 & 100\cdot101+\ \ 0 & 100\cdot102+\ \ 0 & \cdots & 100\cdot999+\ \ 0\\
100\cdot100+\ \ 1 & 100\cdot101+\ \ 1 & 100\cdot102+\ \ 1 & \cdots & 100\cdot999+\ \ 1\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
100\cdot100+99 & 100\cdot101+99 & 100\cdot102+99 & \cdots & 100\cdot999+99
\end{array}$$

V vsakem stolpcu, v katerem k ni deljiv z 11, najdemo takih 9 vrednosti ostanka o, da je vsota $k+o$ deljiva z 11. V stolpcih, v katerih je k deljiv z 11, pa je 10 vrednosti ostanka o takih, da je vsota $k+o$ deljiva z 11. Tedaj je ostanek o lahko enak $0, 11, 22, \ldots, 99$.
Nato ugotovimo, da je 81 stolpcev, v katerih je količnik k deljiv z 11. To so stolpci, v katerih ima k vrednosti $110 = 11\cdot 10$, $121 = 11\cdot 11$, $132 = 11\cdot 12, \ldots, 990 = 11\cdot 90$. Stolpcev, v katerih k ni deljiv z 11 je torej $900-81 = 819$. Vsota $k+o$ je deljiva z 11 pri $81\cdot 10 + 819\cdot 9 = 8181$ petmestnih številih.

II/3. Ker sta števili a in b pozitivni, je izraz za vsaka a in b definiran, zato lahko zapišemo

$$\frac{\sqrt{\frac{ab}{2}}+\sqrt{8}}{\sqrt{\frac{ab+16}{8}}+\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{\frac{ab}{2}}+\sqrt{8})^2}}{\sqrt{\frac{ab+16+8\sqrt{ab}}{8}}} = \frac{\sqrt{\frac{ab}{2}+2\cdot\sqrt{\frac{8ab}{2}}+8}}{\frac{1}{\sqrt{8}}\sqrt{ab+16+8\sqrt{ab}}} = \frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{\frac{ab+8\sqrt{ab}+16}{2}}}{\sqrt{ab+16+8\sqrt{ab}}} =$$

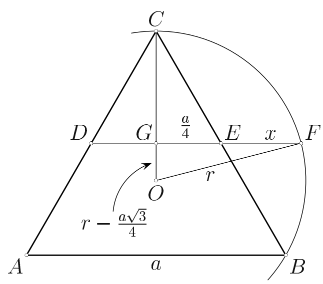
$$= \frac{\sqrt{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{ab+8\sqrt{ab}+16}}{\sqrt{ab+16+8\sqrt{ab}}} = \sqrt{4} = 2$$

torej je izraz neodvisen od a in b.
Lahko rešujemo tudi drugače. Če ulomek kvadriramo, dobimo

$$\frac{\frac{ab}{2}+2\sqrt{\frac{ab}{2}\cdot 8}+8}{\frac{ab+16}{8}+\sqrt{ab}} = \frac{4ab+32\sqrt{ab}+64}{ab+16+8\sqrt{ab}} = 4\cdot\frac{ab+8\sqrt{ab}+16}{ab+8\sqrt{ab}+16} = 4\,.$$

To pomeni, da je vrednost ulomka enaka $\sqrt{4}=2$ in je neodvisna od a in b.

II/4. Označimo $a = |AB|$ in $x = |EF|$. Razpolovišče daljice DE označimo z G. Ker je DEC enakostranični trikotnik z dolžino stranice $\frac{a}{2}$, je $|GE| = \frac{a}{4}$ in $|GC| = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Očrtana krožnica trikotnika ABC naj ima polmer r in središče v O. Potem je $r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $|OG| = r - |GC| = \frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$ in $|GF| = \frac{a}{4}+x$. Trikotnik OFG je pravokoten s hipotenuzo OF, zato velja $|OF|^2 = |OG|^2 + |GF|^2$. Torej je $|GF|^2 = |OF|^2 - |OG|^2 = \frac{5a^2}{16}$ in $x = -\frac{a}{4}+\frac{a\sqrt{5}}{4} = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{4}$. Iskano razmerje je torej enako $|DE| : |EF| = \frac{a}{2} : \frac{a(\sqrt{5}-1)}{4} = 2 : (\sqrt{5}-1)$. (Zapišemo lahko tudi $2 : (\sqrt{5}-1) = (\sqrt{5}+1) : 2$.)



II/5. Dano enačbo preuredimo v $m^2 - 3m - (n^2+n-2) = 0$. Dobljeno kvadratno enačbo rešimo: $m_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9+4n^2+4n-8}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{(2n+1)^2}}{2} = \frac{3\pm(2n+1)}{2}$. Torej je $m_1 = n+2$ in $m_2 = -n+1$. Ker m_2 ni naravno število pri nobeni naravni vrednosti parametra n, ta možnost odpade. Dano enačbo reši par $(m, m-2)$, kjer je m poljubno naravno število.

III/1. Obe strani enačbe logaritmiramo in dobimo $x\sqrt[3]{x}\log x = x\log x^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}x\log x$, kar preoblikujemo v $x\log x(\sqrt[3]{x}-\frac{4}{3}) = 0$. Ker je $x>0$, dobimo eno rešitev enačbe iz $\log x = 0$, to je $x=1$, drugo pa iz $\sqrt[3]{x} = \frac{4}{3}$, to je $x = \frac{64}{27}$.

III/2. Dano neenačbo preoblikujemo v $n^2 - mn + 2005 \le 0$. Oglejmo si kvadratno enačbo $n^2 - mn + 2005 = 0$. Njeni rešitvi sta $n_{1,2} = \frac{m\pm\sqrt{m^2-8020}}{2}$. Diskriminanta ne sme biti negativna, saj želimo, da bi imela pripadajoča neenačba vsaj kakšno celo rešitev. To pomeni, da mora biti $m \ge 90$ ($m\in\mathbb{N}$). Če je $m = 90$, dobimo $n_1 = \frac{90-\sqrt{80}}{2} = 45 - 2\sqrt{5}$ in $n_2 = 45+2\sqrt{5}$. Cele rešitve neenačbe ležijo med n_1 in n_2. Za $m = 90$ ima neenačba najmanj celih rešitev; tedaj jih je 9. Če bi izbrali večje število m, se iz $n_{1,2} = \frac{m\pm\sqrt{m^2-8020}}{2}$ vidi, da bi se n_1 in n_2 oddaljila drug od drugega in bi imela neenačba več celih rešitev.

III/3. Poskusimo izraz razstaviti. Ker je $93 = 3 \cdot 31$, so cele ničle polinoma $p(x) = x^3 - 14x^2 + 64x - 93$ lahko le ± 1, ± 3, ± 31 in ± 93. Na pamet preverimo, da niti 1 niti -1 nista ničli. S Hornerjevim algoritmom ugotovimo, da je 3 ničla:

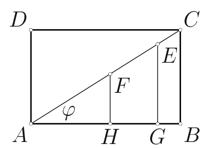
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -14 & 64 & -93 \\ & & 3 & -33 & 93 \\ \hline 3 & 1 & -11 & 31 & \end{array}$$

Pišemo $n^3 - 14n^2 + 64n - 93 = (n-3)(n^2 - 11n + 31)$. Vrednost izraza je praštevilo, če je eden izmed faktorjev enak 1, drugi pa praštevilo. Najprej predpostavimo, da je $n - 3 = 1$. Tedaj je $n = 4$, prvi faktor je enak 1, drugi pa $4^2 - 11 \cdot 4 + 31 = 3$, torej je praštevilo.
Predpostavimo še, da je $n^2 - 11n + 31 = 1$. Tedaj je $n^2 - 11n + 30 = 0 = (n-5)(n-6)$. Faktor $n^2 - 11n + 31$ je enak 1 pri $n = 5$ in pri $n = 6$. Pri obeh vrednostih števila n je faktor $n - 3$ praštevilo, in sicer 2 oziroma 3.
Vrednost izraza $n^3 - 14n^2 + 64n - 93$ je praštevilo za tri vrednosti naravnega števila n, in sicer za 4, 5 in 6.

III/4. Če enačbi kvadriramo in seštejemo, dobimo $\sin^2 x + 2\sin x \sin y + \sin^2 y + \cos^2 x + 2\cos x \cos y + \cos^2 y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$ oziroma $2(\sin x \sin y + \cos x \cos y) = 0$ in od tod $\cos(x - y) = 0$. Če pa enačbi med seboj množimo, dobimo $\sin x \cos x + \sin x \cos y + \sin y \cos x + \sin y \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, kar preoblikujemo v $(\sin x \cos y + \sin y \cos x) + (\sin x \cos x + \sin y \cos y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ in še v $\sin(x + y) + \sin(x + y)\ \cos(x - y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Če upoštevamo, da je $\cos(x - y) = 0$, imamo $\sin(x + y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, kar smo želeli izračunati.

III/5. Naj bo $\sphericalangle BAC = \varphi$. Tedaj je $|AE| = |AB| = |AC| \cos\varphi$ in $|AF| = |AD| = |AC| \sin\varphi$. Podobno je $|AG| = |AE| \cos\varphi$ in $|FH| = |AF| \sin\varphi$, od koder sledi

$$|AG| + |FH| = ((\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2)|AC| = |AC|.$$



IV/1. Za $i \geq 2$ velja $a_{i+1} = a_i - a_{i-1}$. Tako je $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2005} = a_1 + a_2 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{2003} - a_{2002}) + (a_{2004} - a_{2003}) = a_2 + a_{2004}$. Če zapišemo prvih nekaj členov zaporedja, ugotovimo, da je zaporedje periodično s periodo 6: 1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3 … Ker je $2004 = 6 \cdot 334 + 0$, je $a_{2004} = a_6 = -2$. Vsota prvih 2005 členov zaporedja je $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2005} = a_2 + a_{2004} = 3 - 2 = 1$.

IV/2. Šestmestno število $\overline{abcacb}$ lahko zapišemo kot

$$x = 100100a + 10001b + 1010c = 23 \cdot (4352a + 434b + 43c) + 4a + 19b + 21c =$$

$$= 23 \cdot (4352a + 435b + 44c) + 2(2a - 2b - c).$$

To število je deljivo s 23 natanko tedaj, ko je vrednost izraza $2a - 2b - c$ deljiva s 23. Ker pa so a, b in c števke in je $a \neq 0$, velja $-25 \leq 2a - 2b - c \leq 18$. Vrednost izraza $2a - 2b - c$ je deljiva s 23 le, če je enaka 0 ali -23.

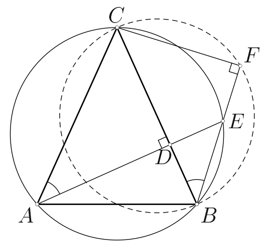
V prvem primeru je $c = 2(a - b)$, torej je $4 \geq a - b \geq 0$ oziroma $4 + b \geq a \geq b$. Pri $b = 0$ imamo za a štiri možnosti, pri $5 \geq b \geq 1$ lahko a izberemo na 5 načinov, pri $b = 6$ so 4 možnosti, pri $b = 7$ so 3, pri $b = 8$ sta 2 in pri $b = 9$ je ena sama možnost. Skupaj imamo torej $4 + 5 \cdot 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 39$ števil.

V drugem primeru je $2a - 2b - c = -23$. Če je $7 \geq b$, je $23 = 2 \cdot 7 + 9 \geq 2b + c = 23 + 2a$, torej $a = 0$, kar ni mogoče. Pri $b = 8$ dobimo $c = 7 + 2a$ in edina rešitev je $a = 1$ in $c = 9$. Pri $b = 9$ pa imamo $c = 5 + 2a$, od koder dobimo dve možnosti, in sicer $a = 1$, $c = 7$ ter $a = 2$, $c = 9$. V drugem primeru imamo torej 3 možnosti.

Vseh šestmestnih števil z danimi lastnostmi je $39 + 3 = 42$.

IV/3. Pri $x = 0$ dobimo $yf(0) = yf(y)$, zato je $f(y) = f(0)$ za vsak $y \in \mathbb{R}$. Torej je $f(y) = c$ za vsak y, kjer je c poljubna konstanta. Očitno vse konstantne funkcije ustrezajo prvotni enačbi.

IV/4. Po Talesovem izreku je BFC pravokotni trikotnik s hipotenuzo BC. Ker je $AD \perp BC$, je ADC pravokotni trikotnik s hipotenuzo AC. Ker sta $\sphericalangle EAC$ in $\sphericalangle EBC$ obodna kota nad istim lokom $\widehat{EC}$, sta enaka. Ker je ABC enakokraki trikotnik z vrhom C, je $|BC| = |AC|$. Torej sta ADC in BFC skladna pravokotna trikotnika, zato je $|AD| = |BF|$.



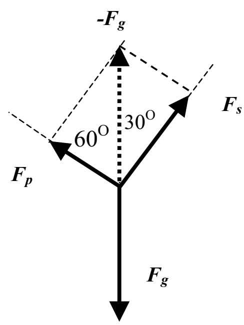
IV/5. Označimo iskano vsoto z V. Vsako izmed števil od 1 do 42 se v vsoti V pojavi tolikokrat, kolikor je podmnožic množice $\{1, 2, 3, \ldots, 42\}$, ki vsebujejo to število. Takih podmnožic je 2^{41}, torej je

$$S = (1 + 2 + 3 + \ldots + 42)2^{41} = 21 \cdot 43 \cdot 2^{42}.$$

Rešitve nalog tekmovanja za zlato Stefanovo priznanje

8. razred devetletne osnovne šole

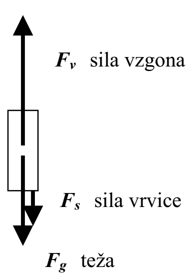
1. a) V izbranem merilu (npr. 10 N ustreza 5 cm) narišemo težo in nato rezultanto obeh preostalih sil, ki je nasprotno enaka teži. Pod kotom 60^0 v levo narišemo smer sile palice in pod kotom 30^O v desno smer sile silomera. Nasprotno silo teže nato razstavimo na dani smeri in izmerimo dolžino sile $F_{S.}$ Z upoštevanjem merila dobimo, da je sila silomera približno F_S = 8,6 N.



b) Ko sta kota α 0^O in 90^O, ugotovimo sili silomera z razmislekom, potem ko narišemo obe skici.

α [°]	0^O	60^O	90^O
F [N]	0	8,6 N	10 N

2. a)



b) Prostornina kvadra je $V = F_g / \sigma_k$ = 0,8 N/ (4 N/dm^3) = 0,20 dm^3, sila vzgona nanj pa $F_v = \sigma_v V$ = 10 N/dm^3 · 0,20 dm^3 = 2,0 N.
Sila silomera je $F_s = F_v - F_g$ = 2,0 N - 0,8 N = 1,2 N.

c) Pod vodo je 10/12 kvadra, sila vzgona je torej F_{v1} = (10/12) · 2,0 N = 1,7 N. Sila silomera v tem primeru je $F_{s1} = F_{v1} - F_g$ = 1,7 N – 0,8 N = 0,9 N.

3. a) V globini 30 cm je tlak večji za $\Delta p = \sigma_{olja}\ \Delta h_{olja} = 8{,}0\ \mathrm{N/dm^3} \cdot 3{,}0\ \mathrm{dm} = 2{,}4\ \mathrm{kPa}$.

b) Razliko višin vodnih stolpcev lahko izračunamo s sklepanjem: 10 m ustreza 100 kPa, 2,4 kPa pa višinski razliki $\Delta h_{\mathrm{vode}} = 2{,}4\ \mathrm{kPa} \cdot 10\ \mathrm{m}/100\ \mathrm{kPa} = 0{,}24\ \mathrm{m}$.

c) Ker je ob obeh vodnih gladinah zunanji zračni tlak, sta višini enaki, $h_{\mathrm{L}} = h_{\mathrm{D}}$.

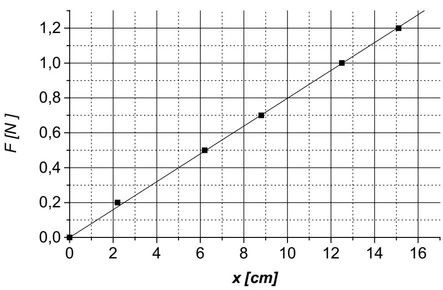
4. a) V menzuro bomo nalili največjo merljivo prostornino, v našem primeru 100 ml. Stehtamo še prazno menzuro, m_{pr} =116 g, maso menzure z lahko pijačo, m_{lahka} = 216 g in maso z navadno pijačo, m_{nav} = 219 g. Sledita gostoti $\rho_{\mathrm{lahka}} = (m_{\mathrm{lahka}} - m_{\mathrm{pr}})/V$ = 100 g / 100 ml =1,00 g/ml in $\rho_{\mathrm{nav}} = (m_{\mathrm{nav}} - m_{\mathrm{pr}})/V$ = 103 g / 100 ml =1,03 g/ml.

b) Iz tabele razberemo m_{sladkor} = 10 g.

c) Več sladkorja je v navadni pijači.

5. a)

sila F (N)	0	0,2	0,5	0,7	1,0	1,2
raztezek x (cm)	0	2,2	6,2	8,8	12,5	15,1



b) Ko na vzmet obesimo merjenec, se vzmet raztegne za približno 12 cm. Iz grafa razberemo, da je teža merjenca okrog 0,95 N.

c) Ko je ves merjenec pod vodo, je vzmet raztegnjena za približno 10 cm, torej je sila okrog 0,80 N. Sila vzgona je torej 0,95 N – 0,80 N ≈ 0,15 N.

(Vse vzmeti niso povsem enake, zato so možna odstopanja pri grafu in rezultatih).

Rešitve nalog tekmovanja za zlato Stefanovo priznanje

8. razred osemletne in 9. razred devetletne osnovne šole

1. a) Glej tabelo.

b) Gibanje je enakomerno pospešeno. Iz podatkov za 4. lego sledi: $a = 2s/t^2$ in $v = at = 2s/t$ = 112 cm/(3·0,25 s) = 150 cm/s.

c) Gibanje po vodoravnem delu je enakomerno s hitrostjo, ki jo ima kroglica na koncu klanca. Naslednji razdalji sta torej: $s_5 = v\Delta t$ = 150 cm/s · 0,25 s= 37,5 cm in $s_6 = v \cdot 2\Delta t$ = 75 cm. Pri vpisu v tabelo prištejemo še 56 cm, kolikor je dolg klanec.

t (s)	x (cm)	x_2 (cm)
0	0	0
0,25	0,6	6
0,50	2,5	25
0,75	5,6	56
1,00	9,3	93
1,25	13,1	131

2. a) Iz diagrama razberemo $t \approx$ 0,7 s

b) Višina žoge se je zmanjšala za približno 2,3 m, tako da se je potencialna energija zmanjšala za $\Delta W_p = mgh$ = 6,0 N · 2,3 m $\approx$ 14 J. Tik preden je žoga padla na tla, je bila kinetična energija žoge približno 14 J.

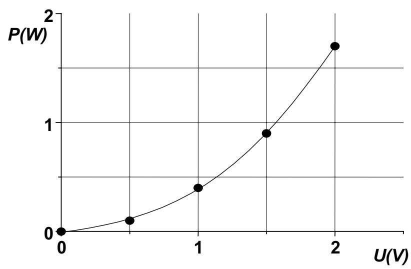
c) Po prvem odboju se je žoga dvignila za približno 1,6 m in potencialna energija žoge se je povečala za $\Delta W_p = mgh_1$ = 6,0 N · 1,6 m $\approx$ 10 J. Tik po odboju je torej imela 10 J kinetične energije. Kinetična energija žoge se je pri prvem odboju zmanjšala od 14 J na 10 J, torej za okrog 4 J.

3. a) Tokova za pralni stroj in za eno žarnico sta: I_{prstr} = 2000 W/220 V = 9,1 A, $I_{\text{žar}}$ = 100 W/220 V = 0,45 A. Tok skozi varovalko je I = 9,1 A + 2·0,45 A = 10,0 A.

b) Tokovi za ostale naprave so: I_{grvode} = 1300 W/220 V = 5,9 A, $I_{\text{peč}}$ = 2200 W/220 V = 10,0 A, I_{radio} = 200 W/220 V = 0,9 A. Skupni tok med 8 A in 10 A je pri naslednjih kombinacijah: pečica (10 A), samo pralni stroj (9,1 A), pralni stroj + radio (10 A), pralni stroj +1 žarnica (9,5 A) in grelnik vode +radio+3 žarnice (8,1 A), pralni stroj + 2 žarnici (10 A).

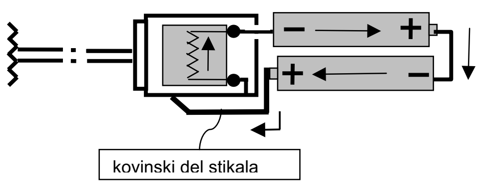
4. a) Vsi elektromotorčki niso enaki, zato se rezultati na posameznih delovnih mestih lahko nekoliko razlikujejo od spodnjih:

U (V)	I (A)	P(W)
2,0	0,85	1,7
1,5	0,6	0,9
1,0	0,4	0,4
0,5	0,2	0,1
0,0	0,0	0,0

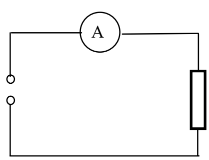


b) Ko premaknemo stikalo v smeri ON, pritisnemo kovinski del stikala na ohišje elektromotorčka in tako sklenemo tokokrog.

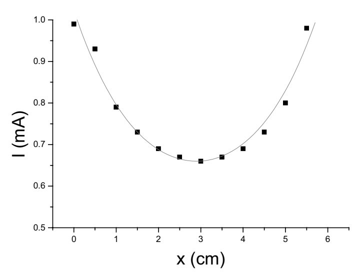
c) Tok teče skozi porabnik od pozitivnega priključka baterij proti negativnemu priključku. Smer toka je narisana s puščicami.



5.
a)



c)



b)

x (cm)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5
I (mA)	0,99	0,93	0,79	0,73	0,69	0,67	0,66	0,67	0,69	0,73	0,80	0,98