Tekmovanja

4. državno tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Naloge za 1. letnik

1. Poenostavi:

$$\frac{a^3-1}{1+\dfrac{1}{a-\dfrac{a}{a+1}}}.$$

2. V trgovini *Moda* je stal moški suknjič po 30 % pocenitvi 24500 SIT. Pred koncem razprodaje so ga pocenili še za 20 %. Koliko tolarjev znaša razlika med začetno ceno in ceno po drugi pocenitvi?
V trgovini *Obleka* je imel tak suknjič enako začetno ceno kot v trgovini *Moda*. Pocenili so ga le enkrat in takoj prodajali po ceni, ki je veljala v trgovini *Moda* šele po drugi pocenitvi. Za koliko odstotkov so suknjič pocenili v trgovini *Obleka*?
Zapiši odgovora.

3. Reši sistem enačb:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(y+\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{5}(x+2) &= 1{,}1 \\ x-2y+4 &= \frac{1}{4}\left(2x+3\left(y-\frac{1}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

4. Dan je pravokotnik $ABCD$ z oglišči $A(-2,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,3)$, $D(-2,3)$. Izračunaj koordinati središča S in polmer R pravokotniku očrtane krožnice. Nariši sliko.

5. Poišči največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik naslednjih izrazov:
$$4^x - 9^x,\quad 4^x + 2\cdot 6^x + 9^x,\quad 4^x + 3\cdot 6^x + 2\cdot 9^x,\quad 8^x + 27^x\,.$$

Naloge za 2. letnik

1. Določi parameter b tako, da bo linearna funkcija $3x + (b-2)y + 6 = 0$ naraščajoča.

2. Dani sta funkciji $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ in $g(x) = -2x + 6$.
   a) V kateri interval preslika funkcija f interval $[-2, 6]$?
   b) Na katerem intervalu zavzame funkcija f vrednosti od vključno -5 do vključno 0?
   c) Za katere x sta vrednosti $f(x)$ in $g(x)$ obe pozitivni?

3. Izračunaj vsoto kvadratov višin v trikotniku s podatki: $c = 6$ cm, $v_c = 4$ cm, $a = 5$ cm. Nariši sliko.

4. Če zmnožek treh zaporednih naravnih števil $n-1$, n in $n+1$ povečamo za srednje število, dobimo število med 3000 in 4000. Določi ta števila.

5. Poenostavi izraz
$$\frac{x^{0,5}+1}{x+x^{0,5}+1} : \frac{1}{x^{1,5}-1}\,.$$

Naloge za 3. letnik

1. Določi a tako, da bosta korena enačbe $ax^2 + x^2 + 9ax - x - 9a = 0$ obratni števili.

2. Del procesa priprave polizdelkov je ohlajanje posebne zmesi surovin. Zmes izdelajo pri temperaturi $180°C$ in jo takoj nato ohlajajo v prostoru, kjer je stalna temperatura $20°C$. Ugotovili so, da lahko s formulo $T = a \cdot b^t + c$ izračunajo trenutno temperaturo T zmesi po t urah od začetka hlajenja v prostoru s stalno temperaturo c.

   a) Določi konstanti a in b, če veš, da ima zmes na začetku ($t = 0$) temperaturo $180°C$ in da ima po 1 uri hlajenja temperaturo $160°C$.

   b) Koliko časa po izdelavi se zmes ohladi na $150°C$? Izračunaj do minute natančno. Zapiši odgovor.

3. V trikotniku je $\beta = 74°18'$ in $\gamma = 38°46'$ ter $|AC| - |AB| = 2{,}5$ cm. Izračunaj dolžini stranic $|AB|$ in $|AC|$ ter rezultat zaokroži na dve mesti natančno. Nariši skico.

4. Osnovna ploskev pokončne prizme je deltoid, ki ima krajšo diagonalo dolgo e. Notranja kota deltoida z vrhoma v krajiščih daljše diagonale merita $90°$ in $60°$. Višina prizme je enaka daljši diagonali deltoida. Izrazi prostornino prizme z e. Rezultat naj bo točen.

5. Reši enačbo:

$$\log\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \log\left(\frac{4}{x}\right) = \frac{3}{4} \cdot (\log 4)^2.$$

Naloge za 4. letnik

1. V razredu je 25 dijakov. Rok je računal, koliko točk je v povprečju dosegel posamezen dijak pri šolski nalogi. Najprej je izračunal povprečje 74,5 točk, a se je spomnil, da je pozabil upoštevati svoj dosežek. Ko ga je upošteval, je izračunal povprečje 75 točk. Koliko točk je dosegel Rok pri šolski nalogi? Zapiši odgovor.

2. Dana sta polinom $p(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2$ in premica $y = bx + 20$. Grafa obeh funkcij se sekata v točkah z abscisama $x = 5$ in $x = -2$. Določi koeficienta a in b in zapiši obe funkciji.

3. Janez in Peter, ki sta drug od drugega oddaljena 450 m, istočasno kreneta drug proti drugemu. Janez si je zakril oči in se premika počasi – v prvi minuti prehodi 5 m, v vsaki naslednji minuti pa 15 m več kot v prejšnji. Peter prehodi v prvi minuti 100 m, v vsaki naslednji minuti pa 10 m manj kot v predhodni. Čez koliko časa se bosta srečala? Zapiši odgovor.

4. Za racionalno funkcijo $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+1}$ velja: $f(1) = \dfrac{3}{4}$, $f(2) = 1$ in $f(-1) = -\dfrac{1}{2}$. Določi realne parametre a, b in c ter zapiši funkcijo $f(x)$. Zapis funkcije poenostavi.

5. Pokaži, da velja

$$\frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin^2(\pi + x)}{\cos 6\pi + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)} = -\cos x\,,$$

kjer je $x \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Državno tekmovanje iz matematike za dijake poklicnih šol

I. del: Kratke naloge

NAVODILO: V tem delu izberite črko pred pravilnim odgovorom in jo vpišite v tabelo. Vsaka pravilna rešitev se točkuje z 2 točkama, napačna rešitev pa z -1 točko. Če odgovora v tabeli ni, dobite 0 točk.

1	2	3	4	5	6

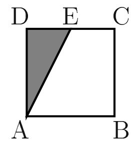
1. Če je Feliks star 44 let, 44 mesecev, 44 tednov, 44 dni in 44 ur, kateri rojstni dan je praznoval nazadnje?

   (**A**) 44. (**B**) 47. (**C**) 48. (**D**) 49. (**E**) 50.

2. Koliko znaša vrednost izraza $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 - 11 - 12 + ... - 996 + 997 + 998 - 999$?
   (**A**) Ni mogoče izračunati. (**B**) 0 (**C**) 999
   (**D**) 909 (**E**) 1000

3. Najnižji pretok vode v potoku po mesecih je naslednji: 85, 60, 53, 98, 88, 83, 67, 60, 80, 98, 96, 80 $\frac{l}{s}$. Srednje nizek pretok je povprečje teh pretokov. Izračunaj ekološko sprejemljiv pretok, ki znaša 95 % srednje nizkega pretoka.
   (**A**) 77,05 $\frac{l}{s}$ (**B**) 75,05 $\frac{l}{s}$ (**C**) 53 $\frac{l}{s}$
   (**D**) 79 $\frac{l}{s}$ (**E**) nič od navedenega

4. ABCD je kvadrat, točka E je razpolovišče CD, ploščina osenčenega dela ADE meri 10 cm^2. Koliko cm^2 meri ploščina kvadrata ABCD?



   (**A**) 20 (**B**) 30 (**C**) 40 (**D**) 45 (**E**) 50

5. Z ladjo je pripotovalo 100 turistov. Med njimi 10 ni znalo niti nemško niti francosko, 75 je znalo nemško in 83 francosko. Koliko turistov je govorilo oba jezika?
   (**A**) 90 (**B**) 25 (**C**) 17 (**D**) 68 (**E**) 8

6. Mlada nadebudneža Vega in Kukec sta izmislila zanimivo matematično igro. Obrnjena s hrbtom eden proti drugemu sta krenila naravnost v nasprotnih smereh in naredila vsak 60 korakov, nato sta zavila pod pravim kotom na levo in naredila vsak 80 korakov do končne točke. Koliko korakov narazen sta bila na končni točki? Predpostavite, da so njuni koraki enako dolgi.
   (**A**) 20 (**B**) 100 (**C**) 140 (**D**) 200 (**E**) 120

Rezerva: Največ koliko različnih vrst popra ali mešanic popra lahko ponudi prodajalna Začimba svojim kupcem, če mešanice sestavljajo iz enakih delov belega, črnega, zelenega in rdečega popra?
   (**A**) 15 (**B**) 11 (**C**) 19 (**D**) 14 (**E**) 12

II. del: Daljše naloge

NAVODILO: V tem delu skrbno preberite naloge in odgovorite na zastavljena vprašanja. Celotne račune zapisujte na priloženi list papirja, ki ga boste oddali skupaj z izdelkom. V celoti pravilno rešena naloga se točkuje s sedmimi točkami.

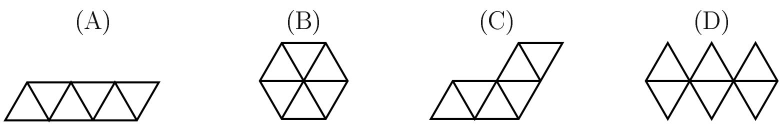
1. Matko je spustil s 5,12 m visokega balkona gumijasto žogico. Ko se žogica odbije od tal, vsakokrat doseže $\frac{3}{4}$ prejšnje višine.

   A. Kako visoko od tal se je žogica odbila prvič?

   B. Pri katerem odboju od tal je dosegla višino natanko 2,16 m?

   C. Ko se žogica četrtič odbije od tal, jo Matkov kuža ulovi na višini 12 cm od tal. Kolikšno pot je žogica naredila skupaj od takrat, ko jo je Matko spustil z balkona?

2. Vsak lik na posamezni sliki je sestavljen iz šestih skladnih enakostraničnih trikotnikov s stranico $2 \cdot \sqrt[4]{3}\ cm$.



   A. Kaj lahko zapišete o ploščinah likov na vseh slikah?

   B. Pod katero črko ima lik najmanjši obseg?

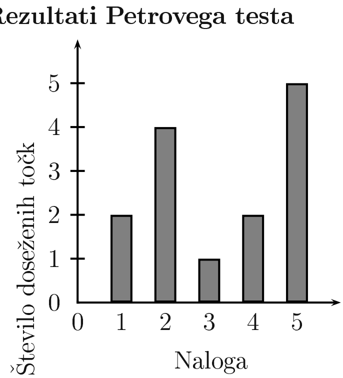
   C. Čimbolj natančno poimenujte celoten lik pod črko (A)!

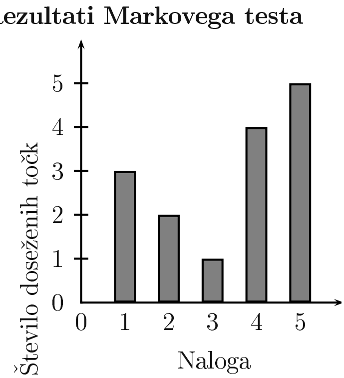
   D. Čimbolj natančno poimenujte celoten lik pod črko (B)!

   E. Natančno izračunajte ploščino celotnega lika pod črko (B)!

3. Metod si želi kupiti CD predvajalnik, ki stane 29400 SIT, zato bo delal preko študentskega servisa. Izbira lahko med dvema ponudbama:
   A: če dela vsak drugi dan po tri ure, zasluži 1000 SIT na uro,
   B: če dela dva dni zaporedoma po tri ure, potem pa četrti dan dve uri, zasluži 800 SIT na uro.
   Katero ponudbo naj izbere, da bo čimprej zaslužil za nov CD predvajalnik? Čez najmanj koliko dni ga bo s tako prisluženim denarjem lahko kupil, če je izplačilo za opravljeno delo dnevno?

4. Peter in Marko sta rezultate testa predstavila s histogramom: test je imel 5 nalog, od katerih je bila vsaka vredna 5 točk.





Točkovnik:
$90-100$ % ... odlično 5
$75-89$ % ... prav dobro 4
$60-74$ % ... dobro 3
$45-59$ % ... zadostno 2
$0-44$ % ... nezadostno 1

A. Koliko točk je zbral Peter?

B. Kdo je imel več točk?

C. Katero nalogo sta reševala najbolje in katero najslabše?

D. Ali sta oba fanta dobila enako oceno? Utemeljite!

D. Kolikšen delež (izrazite na % natančno) glede na skupno število doseženih točk je k Markovi oceni prispevala pravilno rešena 5. naloga?

5. Rezerva:
Mednarodno vesoljsko postajo obiskuje skupina astronavtov, ki mora hrano pripeljati s seboj. Izračunali so, da 4500 obrokov hrane zadošča za 10 moških astronavtov za 90 dni. Za koliko dni bi enaka zaloga hrane zadoščala posadki, ki jo sestavlja osem astronavtov, od tega polovica žensk, ki v povprečju pojejo petino manj kot njihovi moški kolegi.

4. regijsko tekmovanje v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Naloge za prvi letnik

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da na tem listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake izmed teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno.

Čas za reševanje je 90 minut.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

I. DEL

A1. Vrednost produkta $\left(\frac{4}{7}\right)^7 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^5$ je:

(**A**) $\frac{14}{8}$ (**B**) $\frac{16}{49}$ (**C**) $\frac{49}{16}$ (**D**) 1 (**E**) $\frac{8}{14}$

A2. Katero izmed navedenih števil je treba prišteti številu 888777666555, da bo vsota deljiva s 6?

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4 (**E**) 5

A3. Vrednost izraza $5\frac{7}{8} - 3\frac{2}{5} + 3\frac{11}{25} : 8\frac{6}{10} - 3\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{-1}$ je:

(**A**) $\frac{15}{8}$ (**B**) $2\frac{1}{8}$ (**C**) $-1,2$
(**D**) $\frac{13}{4}$ (**E**) nič od navedenega

A4. V Singapuru je $\frac{3}{4}$ Kitajcev, $\frac{1}{6}$ Malajcev in $\frac{1}{20}$ Indijcev, prebivalcev ostalih ras pa je 85000. Koliko milijonov prebivalcev ima Singapur?

(**A**) 1,6 (**B**) 2,55 (**C**) 4,2
(**D**) 6 (**E**) nič od navedenega

A5. Naj bo $3a + 6 = b$ in $3b = 9c$. Potem je $c - a$:

(**A**) -2 (**B**) $\frac{1}{12}$ (**C**) 1 (**D**) 2 (**E**) 3

A6. Točka $A(1-\sqrt{2}, \pi - 3)$ leži:

(**A**) v I. kvadrantu (**B**) v II. kvadrantu (**C**) v III. kvadrantu
(**D**) v IV. kvadrantu (**E**) na abscisni osi

II. DEL

B1. Za katere vrednosti realnega števila a ima izraz $(a-0,\bar{3})(-3)+(-4a)$ vrednost vsaj -6? Rešitev predstavite tudi grafično.

B2. Pri nakupu blaga za več kot 10000 SIT trgovina nudi 15 % popusta. Koliko tolarjev prihrani gospa Mezgec, ki kupi tri majice po 2150 SIT, štiri pare nogavic po 680 SIT, pulover za 8980 SIT in ruto za 2450 SIT? Koliko znaša račun? Zapišite odgovora.

B3. Krona sirakuškega kralja Hieronima je bila narejena iz zlata in srebra. Njena teža je bila na zraku 10 kp, pod vodo pa $9\frac{3}{8}$ kp. Zlato izgubi pod vodo $\frac{1}{19}$ svoje teže, srebro pa $\frac{1}{10}$ svoje teže. Koliko bi bilo težko zlato in koliko srebro v kroni, če bi tehtali na zraku? Zapišite odgovor.

B4. Dane so točke $A(4,y)$, $B(-2,-3)$ in $C(-3,4)$. Določite neznano koordinato y točke A tako, da bo ploščina trikotnika ABC enaka 25.

Naloge za drugi letnik

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da na tem listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake izmed teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno.

Čas za reševanje je 90 minut.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

I. DEL

A1. Premica, dana z enačbo $4x+7y-3=0$,

(**A**) je naraščajoča
(**B**) je padajoča
(**C**) seka abscisno os pri $x=1$
(**D**) seka ordinatno os pri $y=-1$
(**E**) je vzporedna ordinatni osi

A2. Premica $ax+2y-c=0$ je vzporedna osi x, če je vrednost parametra a:

(**A**) -2 (**B**) 0 (**C**) 2 (**D**) negativna (**E**) pozitivna

A3. Dolžine stranic trikotnika so $a=5$, $b=3$ in $c=4$. Kot α meri:

(**A**) $60°$ (**B**) $89°$ (**C**) $91°$
(**D**) $180°$ (**E**) nič od navedenega

A4. Iztegnjeni kot razpolovimo, polovico razdelimo na tretjine, tretjino na petine, petino na šestine. Šestina petine tretjine polovice iztegnjenega kota meri:

(**A**) 1° (**B**) 2° (**C**) 30° (**D**) $1'$ (**E**) $30'$

A5. Rešitev enačbe $\sqrt[3]{x}+\sqrt{16}=\sqrt[3]{8}$ je:

(**A**) $x=-8$ (**B**) $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (**C**) $x=2$

(**D**) $x=8$ (**E**) nič od navedenega

A6. Če izraz $\dfrac{a^{-2}b^{-1}}{a^{-2}b^{-1}}:a^{-1}b$ poenostavimo, dobimo:

(**A**) 0 (**B**) ab^{-1} (**C**) $a^{-1}b^{-1}$ (**D**) $a^{-1}b$ (**E**) ab

II. DEL

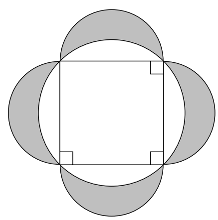
B1. Natančno izračunajte razdaljo med točko $A(-1,-6)$ ter presečiščem premic $2x+4y-2=0$ in $x+3y+1=0$. Rezultat delno korenite.

B2. Točke A, B, C in D, ki razdelijo krožnico v razmerju $3:5:7:3$, določajo tetivni štirikotnik. Narišite skico in izračunajte notranje kote nastalega štirikotnika.

B3. Rešite iracionalno enačbo:

$$\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{3x+2}}}=2.$$

B4. Kvadratu, ki ima stranico dolgo $\sqrt{2}$ cm, očrtamo krožnico. Nad vsako stranico kvadrata narišemo polkrožnico, ki leži izven kvadrata. Kolikšna je vsota ploščin likov, ki jih omejujejo narisane polkrožnice in očrtana krožnica?



Naloge za tretji letnik

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da na tem listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake izmed teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno.

Čas za reševanje je 90 minut.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

I. DEL

A1. Dvomestno število ima x desetic in y enic. Števki zadoščata pogoju $3^x - 3^y = 6$. Katero število je to?

(**A**) 11 (**B**) 12 (**C**) 21
(**D**) 30 (**E**) Nobeno izmed navedenih.

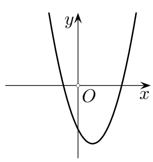
A2. Enačba $\log(m^2 - 3m) = 1$ ima rešitvi:

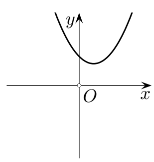
(**A**) 0 in 3 (**B**) 5 in -2 (**C**) -5 in 2
(**D**) $\pm\frac{1}{2}$ (**E**) Enačba ni rešljiva.

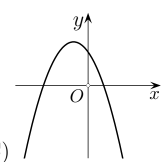
A3. Dana je funkcija $f(x) = -x^2 + 7x - 12$. Katera izmed naslednjih trditev je pravilna?

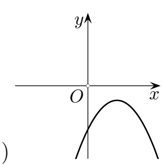
(**A**) Funkcija $f(x)$ ima samo eno realno ničlo.
(**B**) Graf funkcije $f(x)$ je parabola, njena os simetrije je vzporedna z ordinatno osjo.
(**C**) Produkt obeh ničel funkcije $f(x)$ je 7.
(**D**) Vsota obeh ničel funkcije $f(x)$ je 12.
(**E**) Graf funkcije $f(x)$ ima vodoravno asimptoto.

A4. Na kateri sliki je graf kvadratne funkcije, katere vodilni koeficient je pozitiven, prosti člen pa negativen?

(**A**)


(**B**)


(**C**)


(**D**)


(**E**) Na nobeni izmed narisanih.

A5. Dolžino kvadra povečamo za 25 %, širino za tretjino, višino pa zmanjšamo za 10 %. Za koliko odstotkov se poveča prostornina tega kvadra?

(**A**) 10 (**B**) 25 (**C**) 48 (**D**) 50 (**E**) 150

A6. Najmanj kolikšen mora biti premer debla, ki ima obliko valja, da iz njega lahko izdelamo tram, katerega presek je kvadrat s ploščino 162 cm^2?

(**A**) 9 cm (**B**) $8\sqrt{2}$ cm (**C**) 1,8 dm (**D**) 9 dm (**E**) 4,5 m

II. DEL

B1. Na delovni akciji je bilo potrebno prepeljati 350 vozičkov materiala. Če bi vsak delavec prepeljal tri vozičke več, bi bilo potrebnih 15 delavcev manj. Koliko je bilo delavcev in koliko vozičkov je vsak prepeljal? Zapišite odgovor.

B2. Grafično rešite enačbo $2^{x+1} = -x^2 + 2$.

B3. Hlebec sira v obliki valja z višino 10 cm in premerom 30 cm, razrežemo na 8 enakih kosov tako, kot režemo torto. Vsak kos posebej zavijemo v folijo. Za vsak kos porabimo 20 % več folije, kot je površina kosa sira. Koliko dm^2 folije bomo porabili za zavijanje sira? Rezultat zaokrožite na stotinko natančno. Zapišite odgovor.

B4. Rešite enačbo: $\log(4 + 2^{x+2}) = \log 4 + \log(5 \cdot 2^{4-x} - 1)$.

Naloge za četrti letnik

Pred teboj sta dva sklopa nalog. Naloge od 1 do 6 prvega sklopa rešuješ tako, da na tem listu izmed predlaganih petih odgovorov izbereš pravilnega in ga vpišeš v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko ti bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli.

Naloge od 1 do 4 drugega sklopa rešuješ na priloženi papir. Rešitev vsake izmed teh nalog bo ocenjena z 0 do 6 točkami. Na liste, kjer boš reševal(a) naloge, se ne podpisuj, napiši le svojo šifro. Izdelek piši s črnilom čitljivo in pregledno.

Čas za reševanje je 90 minut.

DRŽAVNA TEKMOVALNA KOMISIJA TI ŽELI VELIKO USPEHA.

A1	A2	A3	A4	A5	A6

I. DEL

A1. Dana je funkcija $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$. Vrednost produkta $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ je enaka:

(**A**) -1 (**B**) 0 (**C**) 1 (**D**) $\dfrac{\pi}{3}$ (**E**) 2

A2. Naj bosta α in β ostra kota v pravokotnem trikotniku, ki ni enakokrak. Potem je $\sin(\alpha+\beta)$ enako:

(**A**) $-\cos 2\alpha$ (**B**) $2\cos^2\alpha$ (**C**) $2\sin^2\beta$
(**D**) $\sin^2\alpha+\cos^2\beta$ (**E**) 1

A3. Količnik geometrijskega zaporedja $\sqrt{2}+1$, $\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$, $3\sqrt{2}+3$ je:

(**A**) $-\sqrt{3}$ (**B**) 1 (**C**) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (**D**) $\sqrt{3}$ (**E**) 3

A4. Katera izmed trditev ne velja za zaporedje $1,\ -\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{16},\ -\dfrac{1}{64},\ \ldots,\ \left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$?

(**A**) Zaporedje je omejeno.
(**B**) Zaporedje je padajoče.
(**C**) Zaporedje je geometrijsko.
(**D**) Zaporedje je navzdol omejeno.
(**E**) Vse navedene trditve veljajo.

A5. Katera izmed trditev ne velja za funkcijo $f(x)=x-4x^{-1}$?

(**A**) Funkcija $f(x)$ je liha.
(**B**) Funkcija $f(x)$ je soda.
(**C**) Funkcija $f(x)$ je navzgor omejena.
(**D**) Funkcija $f(x)$ ima ničlo $x=4$.
(**E**) Vse navedene trditve veljajo.

II. DEL

B1. Izračunajte $531 + 535 + 539 + 543 + \cdots + 983 + 987$.

B2. Določite koeficient a tako, da bosta premici, dani z enačbama $2x+ay+3=0$ in $3x-2y-2=0$, oklepali kot $45°$.

B3. Naj bo $p(x) = 3x^3 - 2x^2 - 3$ in $q(x) = x + 1$.

a) Izračunajte $3p(-2) + 2q(3)$.

b) Zapišite vodilni člen polinoma $2\left(p(x)\right)^2$.

c) Izračunajte $p(x) \cdot \left(q(x)\right)^2$.

d) Delite $p(x)$ s $q(x)$.

B4. Narišite graf funkcije $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ in pokažite, da velja $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ za $x \neq \pm 1$.

4. regijsko tekmovanje v znanju matematike za dijake poklicnih šol

I. del: Kratke naloge

Navodilo: V nalogah od A1 do A10 izberite črko pred pravilnim odgovorom in jo vpišite v preglednico pod ustrezno zaporedno številko. Le en odgovor je pravilen. Pravilni odgovor bo ovrednoten z dvema točkama, medtem ko bomo za vpisan nepravilni odgovor eno točko odšteli. Če pustite polje v preglednici prazno, dobite 0 točk.

Upoštevajte, da je treba v času 90 minut rešiti naloge prvega in drugega dela.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10

A1. Pri plačilu položnice moramo plačati 1,2 % provizije. Koliko tolarjev bo znašala provizija, če moramo plačati položnico za 8000 SIT?

(**A**) 960 (**B**) 115 (**C**) 120 (**D**) 667 (**E**) 96

A2. Tri dneve nekega meseca, in sicer tri torke, smo zapisali s sodo številko. Kateri dan v tednu je bil 25. dan tega meseca?

(**A**) ponedeljek (**B**) torek (**C**) sreda (**D**) četrtek (**E**) petek

A3. Naj bo $A = \diamondsuit - \heartsuit + \spadesuit$, $B = -\spadesuit - \heartsuit + \diamondsuit$ in $C = \heartsuit - \diamondsuit + \spadesuit$. Potem je $A - B - C$ enako:

(**A**) 0 (**B**) $3\diamondsuit - 3\heartsuit - \spadesuit$ (**C**) $\heartsuit$
(**D**) $\diamondsuit$ (**E**) $\diamondsuit - \heartsuit + \spadesuit$

A4. V slaščičarni imajo pet različnih okusov sladoleda: vanilijo, čokolado, jagodo, marelico in jogurt. Sladoledno porcijo sestavljajo tri kepice sladoleda, vsaka kepica je drugačnega okusa. Koliko različnih sladolednih porcij lahko sestavi sladoledar?

(**A**) 60 (**B**) 10 (**C**) 15
(**D**) 6 (**E**) nič izmed navedenega

II. del: Daljše naloge

Navodilo: Naloge od B1 do B4 drugega dela rešujte na priloženem papirju, kamor vpisujte celotne račune. Vsako nalogo skrbno preberite in odgovorite na zastavljena vprašanja. Rešitev vsake izmed teh nalog bo ocenjena z 0 do 5 točkami.

Upoštevajte, da je treba v času 90 minut rešiti naloge prvega in drugega dela.

B1. Frida si je kupila 105 cm dolge hlače. Ker so ji bile predolge, jih je dala šivilji skrajšati za 5 cm. Ko je po pranju hlače vzela iz pralnega stroja, je ugotovila, da so ji prekratke za 2 cm. Seveda je Frida spregledala priloženi listek o krčenju po dolžini.

a) Koliko odstotkov krčenja je označil proizvajalec?

b) Na katero najkrajšo dolžino bi morala šivilja skrajšati hlače (pred pranjem), da Fridi ne bi bile prekratke? Rezultat zaokrožite na centimeter natančno.

B2. Neki Arabec je imel 1000 zlatnikov. Razdelil jih je svojim trem sinovom in štirim hčeram. Vsi sinovi so dobili enake deleže. Tudi hčere so dobile med seboj enake deleže, vsaka pol toliko kot vsak izmed bratov.

a) Koliko zlatnikov je dobil vsak sin?

b) Koliko zlatnikov je dobila vsaka hči?

c) Koliko zlatnikov bi dobil vsak otrok pri enakopravni delitvi? Rezultat zaokrožite navzdol.

B3. Mama je za dnevno sobo kupila karniso, dolgo 1 m, in 2 m^2 blaga za zavese. Za vse skupaj je plačala 19000 SIT. Doma je ugotovila, da bi bilo najbolje, če bi imela tudi v jedilnici tako karniso in zavese. Vrnila se je v trgovino ter za 1,5 m dolgo karniso in 4 m^2 blaga plačala 35500 SIT. Koliko stane 1 m karnise in koliko 1 m^2 blaga?

B4. Na matematičnem tekmovanju so med tekmovalce razdelili 62 čokolad, 310 bonbonov, 155 žvečilnih gumijev, 93 pomaranč in 186 sokov tako, da je dobil vsak enako število čokolad, bonbonov, žvečilnih gumijev, pomaranč in sokov.

a) Koliko tekmovalcev je bilo na tekmovanju?

b) Koliko posameznih dobrot je dobil vsak tekmovalec?

Rešitve nalog 4. državnega tekmovanja v znanju matematike za dijake tehniških in strokovnih šol

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovico možnih točk.

Prvi letnik

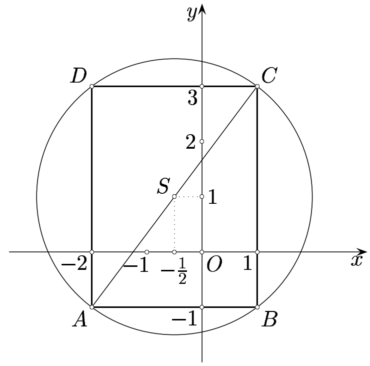
1. Izraz poenostavimo:

$$\frac{a^3-1}{1+\dfrac{1}{a-\dfrac{a}{a+1}}}=\frac{a^3-1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{a^2}{a+1}}}=\frac{a^3-1}{\dfrac{a^2+a+1}{a^2}}=\frac{(a-1)(a^2+a+1)a^2}{a^2+a+1}=a^2(a-1)\,.$$

2. Če označimo začetno ceno suknjiča z x, velja $0{,}7x=24500$, od koder izračunamo $x=35000$. Po drugi pocenitvi je suknjič stal $0{,}8\cdot 24500=19600$ SIT. Razlika med začetno ceno in ceno po drugi pocenitvi je $35000-19600=15400$ SIT.
V trgovini *Obleka* so pocenili suknjič, ki je stal 35000 SIT, za 15400 SIT, to je za $\frac{15400}{35000}=44\ \%$.

3. Najprej poenostavimo obe enačbi. Prvo preoblikujemo v $10y+5x-4x-8=22$ oziroma $10y+x=30$, drugo pa v $8x-16y+32=4x+6y-3$ oziroma $4x-22y=-35$. Sistem rešimo po eni izmed metod. Če uporabimo zamenjalni način, iz prve izrazimo $x=30-10y$ in vstavimo v drugo enačbo: $4(30-10y)-22y=-35$. Odtod izrazimo $y=\dfrac{5}{2}$. Nato izračunamo $x=5$.

4. Središče S pravokotniku očrtane krožnice je hkrati razpolovišče diagonale AC, zato je $S(\frac{x_A+x_C}{2}, \frac{y_A+y_C}{2})$ oziroma $S(-\frac{1}{2}, 1)$. S skice je razvidno, da je polmer R enak polovici dolžine diagonale AC. Ker je $|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{9+16} = 5$, je $R = \dfrac{5}{2}$.



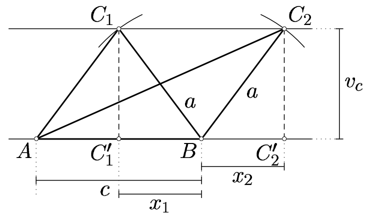
5. Najprej razcepimo posamezne izraze: $4^x - 9^x = (2^x+3^x)(2^x-3^x)$, $4^x+2\cdot 6^x+9^x = (2^x+3^x)^2$, $4^x+3\cdot 6^x+2\cdot 9^x = (2^x+3^x)(2^x+2\cdot 3^x)$ in $8^x+27^x = (2^x+3^x)(4^x-6^x+9^x)$. Vidimo, da je največji skupni delitelj 2^x+3^x, najmanjši skupni večkratnik pa $(2^x+3^x)^2(2^x-3^x)(2^x+2\cdot 3^x)(4^x-6^x+9^x)$.

Drugi letnik

1. Parameter b ne sme biti enak 2, sicer zapis $3x + (b-2)y + 6 = 0$ ne predstavlja funkcije. Za $b \neq 2$ lahko enačbo premice zapišemo v eksplicitni obliki: $y = \dfrac{-3}{b-2}x - \dfrac{6}{b-2}$. Linearna funkcija je naraščajoča, če je smerni koeficient pozitiven: $\dfrac{-3}{b-2} > 0$. Števec ulomka $\dfrac{-3}{b-2}$ je negativen, zato bo vrednost ulomka pozitivna, če bo imenovalec negativen, torej $b-2<0$. Od tod dobimo rešitev $b<2$.

2. Funkcija f je linearna naraščajoča. Izračunamo vrednost funkcije pri -2 in pri 6, ki sta krajišči danega intervala. Dobljeni vrednosti $f(-2) = 0$ in $f(6) = 4$ sta krajišči intervala $[0, 4]$, v katerega se preslika dani interval.
Da bi ugotovili, na katerem intervalu zavzame funkcija f vrednosti od -5 do 0, rešimo enačbi $\dfrac{1}{2}x + 1 = -5$ in $\dfrac{1}{2}x+1 = 0$. Rešitev prve je $x = -12$, rešitev druge pa $x = -2$. Iskani interval je $[-12, -2]$.
Vrednost $f(x)$ je pozitivna, če velja $\dfrac{1}{2}x + 1 > 0$ oziroma $x > -2$, vrednost $g(x)$ pa je pozitivna, če velja $-2x+6>0$ oziroma $x<3$. Obe sta pozitivni za $x \in (-2, 3)$.

3. Ko narišemo sliko, opazimo, da imamo dva trikotnika z danimi podatki: $\triangle ABC_1$ in $\triangle ABC_2$. Oglejmo si najprej $\triangle ABC_1$. Iz $S = \frac{c\cdot v_c}{2} = \frac{a\cdot v_a}{2}$ sledi $v_a = \frac{c\cdot v_c}{a} = 4{,}8$ cm. Naj bo x_1 dolžina pravokotne projekcije stranice a na stranico c. Izračunamo jo po Pitagorovem izreku: $x_1 = 3$ cm. Ker je stranica c dolga 6 cm, je tudi $c - x_1 = 3$ cm. Trikotnik ABC_1 je enakokrak in zato je $v_b = v_a = 4{,}8$ cm. Vsota kvadratov višin je $v_a^2 + v_b^2 + v_c^2 = 62{,}08\ \text{cm}^2$.



Oglejmo si še $\triangle ABC_2$. Ker so dolžini stranic c in a ter višina v_c enake kot v trikotniku $\triangle ABC_1$, je tudi $v_a = 4{,}8$ cm. Naj bo x_2 dolžina pravokotne projekcije stranice a na podaljšek stranice c. Izračunamo jo po Pitagorovem izreku: $x_2 = 3$ cm. Dolžino stranice b prav tako izračunamo po Pitagorovem izreku: $b = \sqrt{(c+x_2)^2 + v_c^2} = \sqrt{81+16} = \sqrt{97}$. Nato iz $S = \frac{c\cdot v_c}{2} = \frac{b\cdot v_b}{2}$ izračunamo $v_b = \frac{c\cdot v_c}{b} = \frac{24}{\sqrt{97}}$ cm. Končno imamo $v_a^2 + v_b^2 + v_c^2 = 44{,}98\ \text{cm}^2$.

4. Najprej ugotovimo, da je $(n-1)n(n+1) + n = n^3$. Zapišemo neenačbo $3000 < n^3 < 4000$. Sklepamo, da je $\sqrt[3]{3000} < n$ oziroma $14{,}42 < n$ in da je $n^3 < 4000$ oziroma $n < 15{,}87$. Tako je $n = 15$. Iskana zaporedna naravna števila so 14, 15 in 16.

5. Potence z racionalnimi eksponenti zapišemo s koreni. Tako je $\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} : \frac{1}{\sqrt{x^3}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x^3}-1}{1}$. Ulomka množimo in dobimo $\frac{\sqrt{x^4}+\sqrt{x^3}-\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+1}$. Števec poenostavimo $\frac{x^2+x\sqrt{x}-\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+1}$, nato pa preoblikujemo v $\frac{(x-1)(x+1)+\sqrt{x}(x-1)}{x+\sqrt{x}+1}$ in izpostavimo skupni faktor v števcu: $\frac{(x-1)(x+1+\sqrt{x})}{x+\sqrt{x}+1}$. Po krajšanju dobimo $x-1$.

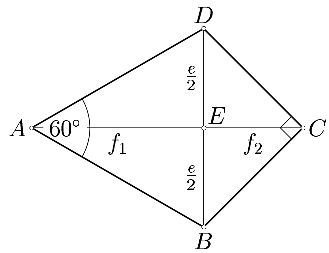
Tretji letnik

1. Enačbo uredimo do oblike $x^2(a+1) + x(9a-1) - 9a = 0$. Korena enačbe x_1 in x_2 sta obratni števili, če velja $x_1 = \frac{1}{x_2}$ ali $x_1 \cdot x_2 = 1$. Upoštevamo obrazec $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, pa imamo $\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = 1$. Enačbo uredimo do oblike $b^2 - D = 4a^2$ in uporabimo zvezo $D = b^2 - 4ac$. Dobimo $a = c$, torej mora biti vodilni koeficient enak stalnemu členu. To za dano enačbo pomeni $a + 1 = -9a$, kar prinese rešitev $a = -\frac{1}{10}$.

2. Ker ima zmes na začetku temperaturo 180°, velja $180 = a\cdot b^0 + 20$, od koder izračunamo $a = 160$. Po 1 uri hlajenja ima zmes temperaturo 160°, zato velja $160 = a\cdot b + 20$, od tod pa dobimo $b = \frac{7}{8}$, če upoštevamo, da je $a = 160$. Velja torej formula $T = 160\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^t + 20$. Iz enačbe $150 = 160\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^t + 20$ sledi $\frac{13}{16} = \left(\frac{7}{8}\right)^t$, odtod pa dobimo $t = \frac{\log\frac{13}{16}}{\log\frac{7}{8}} = 1{,}555$, kar je 1 ura in 33 minut.

3. Zvezo $c = b - 2{,}5$ vstavimo v obrazec za sinusni izrek. Izrazimo $b = -\dfrac{2{,}5\sin\beta}{\sin\gamma - \sin\beta}$ in izračunamo $b = 7{,}1$ cm ter $c = 4{,}6$ cm.

4. Prostornina prizme je $V = \dfrac{e \cdot f}{2} \cdot f$. Daljša diagonala je razdeljena na dela f_1 in f_2. Oba dela izrazimo z dolžino e krajše diagonale. Pravokotni trikotnik DBC je enakokrak, zato je $f_2 = \frac{e}{2}$. Trikotnik BDA je enakostraničen, zato je $f_1 = \dfrac{e\sqrt{3}}{2}$, saj je to višina enakostraničnega trikotnika. Torej je dolžina diagonale f enaka $\dfrac{e\sqrt{3}}{2} + \dfrac{e}{2} = \dfrac{e}{2}(\sqrt{3}+1)$. Prostornina prizme je $\dfrac{e \cdot \frac{e}{2}(\sqrt{3}+1)}{2} \cdot \dfrac{e}{2}(\sqrt{3}+1) = \dfrac{e^3(2+\sqrt{3})}{4}$.



5. Najprej uporabimo pravilo za logaritmiranje količnika: $(\log 1 - \log x) \cdot (\log 4 - \log x) = \frac{3}{4}(\log 4)^2$. Enačbo preuredimo v $(\log x)^2 - \log x \cdot \log 4 - \dfrac{3}{4}(\log 4)^2 = 0$. Izračunamo diskriminanto kvadratne enačbe $D = 4(\log 4)^2$, ki ima rešitvi $(\log x)_1 = \frac{3}{2}\log 4 = \log 8$ in $(\log x)_2 = -\frac{1}{2}\log 4 = \log\frac{1}{2}$. Iz teh rešitev dobimo rešitvi dane enačbe: $x_1 = 8$ in $x_2 = \frac{1}{2}$.

Četrti letnik

1. Ker je vsak izmed 24 dijakov dosegel v povprečju 74,5 točke, so vsi skupaj dosegli $24 \cdot 74{,}5 = 1788$ točk. Ko je Rok upošteval tudi svoje točke, je izračunal povprečje 75 točk, zato je 25 dijakov doseglo skupaj $25 \cdot 75 = 1875$ točk. Razlika $1875 - 1788$ predstavlja število točk, ki jih je dosegel Rok. Rok je dosegel 87 točk.

2. Abscise presečišč grafov obeh funkcij dobimo z rešitvijo enačbe $x^4 - 3x^3 + ax^2 = bx + 20$ oziroma $x^4 - 3x^3 + ax^2 - bx - 20 = 0$. Ker vemo, da sta rešitvi $x = 5$ in $x = -2$, velja $625 - 375 + 25a - 5b - 20 = 0$ in $16 + 24 + 4a + 2b - 20 = 0$. Enačbi preuredimo v $25a - 5b + 230 = 0$ in $4a + 2b + 20 = 0$. Sistem ima rešitev $a = -8$ in $b = 6$. Funkciji sta torej $p(x) = x^4 - 3x^3 - 8x^2$ in $y = 6x + 20$.

3. Sestavimo preglednico, v kateri zapisujemo prehojeno pot v metrih.

	Janez	Peter	Oba skupaj	
			v zadnji minuti	v celoti
1. minuta	5	100	105	105
2. minuta	20	90	110	215
3. minuta	35	80	115	330
4. minuta	50	70	120	450

Janez in Peter se bosta srečala čez 4 minute.

Nalogo lahko rešimo tudi drugače. Dolžine poti, ki jih prehodi Janez v zaporednih minutah, predstavljajo člene aritmetičnega zaporedja z $a_1 = 5$ in $d = 15$. Podobno velja za Petrovo pot: $a_1 = 100$, $d = -10$. Vsota dolžin poti, ki jih prehodi Janez v času t minut, je enaka $\frac{t}{2}(10 + 15(t-1))$, vsota dolžin poti, ki jih prehodi Peter, pa $\frac{t}{2}(200 - (t-1) \cdot 10)$. Ker skupaj prehodita 450 m, zapišemo enačbo $450 = \frac{t}{2}(10 + 15(t-1)) + \frac{t}{2}(200 - (t-1)\cdot 10)$, ki jo uredimo v $t^2 + 41t - 180 = 0$. Pozitivna rešitev enačbe je $t = 4$, kar pomeni, da se srečata čez 4 minute.

4. Upoštevamo zapisane pogoje in zapišemo enačbe $\frac{a+b}{c+1} = \frac{3}{4}$, $\frac{2a+b}{2c+1} = 1$ in $\frac{-a+b}{-c+1} = -\frac{1}{2}$. Odpravimo ulomke in rešimo sistem treh enačb s tremi neznankami. Dobimo rešitev $a = \frac{2}{3}$, $b = c = \frac{1}{3}$. Zapišemo funkcijo $f(x) = \frac{\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}x + 1}$ in zapis poenostavimo $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$.

5. Najprej poenostavimo posamezne člene: $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, $\sin(\pi + x) = -\sin x$ in z uporabo adicijskega izreka še $\sin(\frac{3\pi}{2} - x) = -\cos x$. Ulomek zapišemo v obliki $\frac{1 - \cos x - \sin^2 x}{1 - \cos x}$. Upoštevamo zvezo $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ in dobimo $\frac{\cos^2 x - \cos x}{1 - \cos x}$, nato pa v števcu izpostavimo skupni faktor in krajšamo: $\frac{-\cos x(1 - \cos x)}{1 - \cos x} = -\cos x$.

Rešitve nalog državnega tekmovanja iz matematike za dijake poklicnih šol

Kratke naloge

V tabeli so zapisani pravilni odgovori izbirnih nalog. Vsak pravilen odgovor točkujemo z 2 točkama, nepravilen z -1 točko, če naloga ni rešena, 0 točk.

1	2	3	4	5	6
C	B	B	C	D	D

Rešitve daljših nalog

1. naloga Skupaj: 7 točk

Rešitve:

A. Žogica se je prvič odbila do višine 3,84 m, ker je $\frac{3}{4}$ od 5,12 m = 3,84 m.

B. Po tretjem odboju je žogica dosegla višino natanko 2,16 m, ker je $\frac{3}{4}$ od 5,12 m = 3,84 m, $\frac{3}{4}$ od 3,84 m = 2,88 m, in $\frac{3}{4}$ od 2,88 m = 2,16 m.

C. Pot žogice je vsota poti: $5,12\ m + 2 \cdot 3,84\ m + 2 \cdot 2,88\ m + 2 \cdot 2,16\ m + 0,12\ m = 23\ m$.

2. naloga Skupaj: 7 točk

Rešitve:

A. Ploščina vseh likov je enaka, ker so vsi liki sestavljeni iz šestih enakih skladnih trikotnikov.

B. Najmanjši obseg ima lik pod črko (B).

C. Lik pod črko (A) se imenuje paralelogram.

D. Lik pod črko (B) se imenuje enakostranični (ali pravilni) 6-kotnik.

E. Ploščina enakostraničnega 6-kotnika s stranico $2 \cdot \sqrt{3}\ cm$ je $S = 6 \cdot S_{\triangle} = 6 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{\left(2\sqrt[4]{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{4} = 18\ cm^2$.

3. naloga Skupaj: 7 točk

Rešitve:

- Če Metod dela po ponudbi (A), bo koledarček z opravljenimi urami po dnevih: 3030303030303030303 oz. po 19-ih dnevih bo imel 10 opravljenih delovnih dni oz. $10 \cdot 3 = 30\ ur$, in bo zaslužil 30000 SIT.
- Če Metod dela po ponudbi (B), bo koledarček z opravljenimi urami po dnevih: 330233023302330233. Po 18-ih dnevih bo opravil 38 ur po 800 SIT, kar znaša 30400 SIT.

4. naloga Skupaj: 7 točk

Rešitve:

A. Seštevek Petrovih točk v testu je: $2\ t + 4\ t + 1\ t + 2\ t + 5\ t = 14\ t$.

B. Seštevek Markovih točk v testu je: $3\ t + 2\ t + 1\ t + 4\ t + 5\ t = 15\ t$. Marko je zbral več točk kot Peter.

C. Oba sta najbolje reševala peto nalogo, najslabše tretjo nalogo.

D. Vseh možnih točk v testu je 25. Peter je zbral 14 točk od 25-ih točk, kar znaša 56 %; po točkovniku je pridobil oceno zadostno (2).
Marko je zbral 15 točk od 25-ih, kar znaša 60 %; po točkovniku je pridobil oceno dobro (3). Njuni oceni sta različni.

E. Markova pravilno rešena 5. naloga mu je prinesla 5 točk od 15-ih doseženih, kar znaša 33%.

Rezerva: Skupaj: 7 točk

Rešitve:

4500 obrokov zadostuje desetim moškim za 90 dni. En moški poje 5 obrokov na dan, ker je $\frac{4500}{10\cdot 90} = 5$. Posadko sestavljajo 4 moški in 4 ženske. Vsaka ženska poje na dan le $\frac{4}{5}$ obrokov, ki jih poje moški, kar so $\frac{4}{5}\cdot 5 = 4$ obroki. Celotna posadka bo na dan potrebovala $4\cdot 5+4\cdot 4 = 36$ obrokov in bo hrana zadoščala za $4500 : 36 = 125$ dni.

Rešitve nalog 4. regijskega tekmovanja v znanju matematike za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovico možnih točk.

Prvi letnik

I. DEL

Naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6
Odgovor	B	C	A	B	D	B

A2. Dano število je deljivo s 3. Da bo vsota deljiva s 6, mora biti deljiva z 2 in s 3, zato moramo prišteti 3.

A4. Nastavimo enačbo $\frac{3}{4}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{20}x + 85000 = x$. Rešitev enačbe je 2550000 ali 2,55 milijona.

A5. Enakost $b = 3a + 6$ uporabimo v drugi enakosti. Tako dobimo $3a + 6 = 3c$, iz te zveze pa izrazimo $c - a = 2$.

II. DEL

B1. Po besedilu naloge zapišemo neenakost: $(a-0,\overline{3})(-3)+(-4a) \geq -6$. Periodično decimalno število $0,\overline{3}$ zamenjamo z ulomkom $\frac{1}{3}$. Nato odpravimo oklepaje: $-3a + 1 - 4a \geq -6$ in neenačbo uredimo $-7a \geq -7$. Delimo z -7 in dobimo rešitev $a \leq 1$.

B2. Artikli, ki jih je kupila gospa Mezgec, stanejo skupaj 20600 SIT. Ker je to več kot 10000 SIT, izračunamo 15 % popusta, kar je 3090 SIT. Gospa Mezgec je torej prihranila 3090 SIT, saj je plačala le 17510 SIT.

B3. Denimo, da je bilo na zraku zlato težko x kp, srebro pa y kp. Tedaj velja: $x + y = 10$ in $x - \frac{1}{19}x + y - \frac{1}{10}y = 9\frac{3}{8}$. Rešitvi sistema sta $x = 7\frac{11}{12}$ kp in $y = 2\frac{1}{12}$ kp. Če bi tehtali na zraku, bi bilo zlato težko $7\frac{11}{12}$ kp, srebro pa $2\frac{1}{12}$ kp.

B4. Ploščina trikotnika je $\pm\frac{1}{2}\Big((x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\Big)$, kjer predznak izberemo glede na orientacijo trikotnika. V našem primeru je $\pm\frac{1}{2}\Big((-6)(4-y)-(-7)(-3-y)\Big) = 25$, od koder dobimo rešitvi $y_1 = 5$ in $y_2 = -95$.

Drugi letnik

I. DEL

Naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6
Odgovor	B	B	E	A	A	E

A1. Iz eksplicitne oblike enačbe premice $y = -\frac{4}{7}x + \frac{3}{7}$ razberemo smerni koeficient $k = -\frac{4}{7}$. Funkcija je padajoča, ker je smerni koeficient negativen.

A2. Premica je vzporedna osi x, če je smerni koeficient enak nič. Tako mora biti $a = 0$.

A3. Uporabimo kosinusni izrek za izračun kota $\alpha : \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{9+16-25}{24} = 0$. Torej je kot α pravi. Pravilen odgovor je E.

A4. Polovica iztegnjenega kota je $90°$, tretjina tega je $30°$, petina dobljenega je $6°$ in šestina slednjega je $1°$.

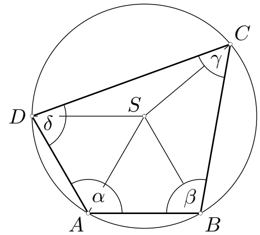
A5. Enačbo poenostavimo: $\sqrt[3]{x} + 4 = 2$, pa še uredimo $\sqrt[3]{x} = -2$. Nazadnje še kubiramo in dobimo rešitev $x = -8$.

A6. Ulomek v izrazu okrajšamo in dobimo: $1 : \frac{1}{a} \cdot b$, kar je enako ab.

II. DEL

B1. Najprej poiščemo presečišče premic tako, da rešimo sistem dveh enačb z dvema neznankama: $2x+4y-2 = 0$ in $x+3y+1 = 0$. Le-ta ima rešitev $x = 5,\ y = -2$, torej je presečišče $P(5, -2)$. Z uporabo obrazca za razdaljo med točkama izračunamo $d(P, A) = 2\sqrt{13}$.

B2. Oglišča tetivnega štirikotnika $ABCD$ razdelijo krožnico v razmerju $3 : 5 : 7 : 3$. Daljice, ki povezujejo središče krožnice s temi točkami, razdelijo polni kot v enakem razmerju. Tako je $\angle ASB = 60°$, $\angle BSC = 100°$, $\angle CSD = 140°$ in $\angle DSA = 60°$. Sedaj lahko hitro poiščemo velikosti notranjih kotov štirikotnika, saj sta trikotnika ABS in DAS enakostranična, trikotnika BCS in CDS pa enakokraka s kotoma $40°$ oziroma $20°$ ob osnovnici. Notranji koti so torej $120°$, $100°$, $60°$ in $80°$.



Rešujemo lahko drugače: iz danega razmerja sklepamo, da so posamezni krožni loki dolgi $3t$, $5t$, $7t$ in $3t$. Obodni koti pri A, B, C in D pripadajo lokom $5t + 7t = 12t$, $7t + 3t = 10t$, $3t + 3t = 6t$ oziroma $3t + 5t = 8t$, zato so njihove velikosti v razmerju $12 : 10 : 6 : 8$ oziroma $6 : 5 : 3 : 4$. Ker je vsota notranjih kotov štirikotnika enaka $360°$, je $6v+5v+3v+4v = 360°$, od tod pa dobimo $v = 20°$ in končno še notranje kote: $120°$, $100°$, $60°$ in $80°$.

B3. Zaporedoma kvadriramo in urejujemo: $2 + \sqrt{1 + \sqrt{3x + 2}} = 4$, $\sqrt{1 + \sqrt{3x + 2}} = 2$, $1 + \sqrt{3x + 2} = 4$, $\sqrt{3x + 2} = 3$, $3x + 2 = 9$. Rešitev je $x = \dfrac{7}{3}$. Končno preverimo, da ta x res zadošča enačbi.

B4. Polmer kvadratu očrtane krožnice je enak polovici dolžine diagonale: $R = \dfrac{d}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 1$. Polmer polkrožnice nad stranico kvadrata je $r = \dfrac{a}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Vsoto ploščin likov, ki jih omejujejo narisane polkrožnice in očrtana krožnica, dobimo tako, da od vsote ploščin kvadrata in polkrogov nad njegovimi stranicami odštejemo ploščino kvadratu očrtanega kroga. Imamo torej $S = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi r^2 - \pi R^2 = \sqrt{2}^2 + 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} - \pi = 2\ \mathrm{cm}^2$.

Tretji letnik

I. DEL

Naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6
Odgovor	C	B	B	A	D	C

A2. V enačbi nastopa logaritem z osnovo 10, zato lahko zapišemo $10 = m^2 - 3m$. Enačbo uredimo: $m^2 - 3m - 10 = 0$, razstavimo in dobimo rešitvi $m_1 = 5$, $m_2 = -2$.

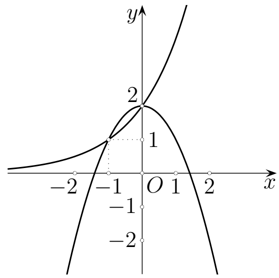
A5. Nova dolžina je $1,25\ d$, nova širina je $1\frac{1}{3}\ š$ in nova višina je $0,9\ v$. Nova prostornina je tako enaka $V_1 = 1,25d \cdot 1\frac{1}{3}š \cdot 0,9v = 1,50 \cdot d \cdot š \cdot v$, kar pomeni, da se prostornina poveča za 50 %.

A6. Iz ploščine kvadrata izračunamo dolžino stranice $a = 9\sqrt{2}$ cm. Premer debla mora biti vsaj enak dolžini diagonale kvadratnega preseka trama. Tako je $r = d = 1{,}8$ dm.

II. DEL

B1. Denimo, da je x število delavcev in y število vozičkov. Po besedilu naloge zapišemo enačbi: $x \cdot y = 350$ in $(y+3)\cdot(x-15) = 350$. Rešimo sistem dveh enačb z dvema neznankama: iz prve lahko izrazimo $x = \frac{350}{y}$ in vstavimo v drugo enačbo. Dobimo $(\frac{350}{y} - 15) \cdot (y + 3) = 350$, kar poenostavimo v $y^2+3y-70 = 0$. Kvadratno enačbo razstavimo $(y-7)(y+10) = 0$, od koder preberemo rešitvi $y = 7$ in $y = -10$, pri čemer druga rešitev ni smiselna. Ko izračunamo še $x = 50$, odgovorimo: sodelovalo je 50 delavcev in vsak je prepeljal 7 vozičkov.

B2. Graf eksponentne funkcije poteka skozi točki $(0,2)$ in $(-1,1)$. Graf kvadratne funkcije ima teme v točki $(0,2)$ in ničli $x_1=-\sqrt{2}, x_2=\sqrt{2}$, gre pa tudi skozi točko $(-1,1)$. Iz narisanih grafov odčitamo rešitvi $x_1=0$ in $x_2=-1$.



B3. Površina enega kosa sira je enaka $P_1=\frac{1}{8}\cdot 2\pi r^2+\frac{1}{8}\cdot 2\pi r+2\cdot r\cdot v=594{,}375\ \mathrm{cm}^2$. Osem kosov sira ima osemkrat večjo površino $P=(\frac{1}{8}\cdot 2\pi r^2+\frac{1}{8}\cdot 2\pi r+2\cdot r\cdot v)\cdot 8=47{,}55\ \mathrm{dm}^2$. Upoštevamo še dodatnih 20 %, ki jih porabimo za folijo: $8\cdot 1{,}2\cdot P_1=57{,}06\ \mathrm{dm}^2$. Za zavijanje sira bomo porabili $57,06\ \mathrm{dm}^2$ folije.

B4. Z antilogaritmiranjem dobimo $4+2^{x+2}=4\cdot(5\cdot 2^{4-x}-1)$. Ko odpravimo oklepaje, dobimo $4+2^{x+2}=20\cdot 2^{4-x}-4$ oziroma $4+2^x\cdot 2^2=\dfrac{20\cdot 2^4}{2^x}-4$, kar preoblikujemo v $2^x+(2^x)^2=5\cdot 2^4-2^x$. Uvedemo novo neznanko $2^x=t$. Dobimo enačbo $t^2+2t-80=0$, ki jo razstavimo na $(t+10)(t-8)=0$. Rešitev $t=-10$ ni ustrezna, saj potenca s pozitivno osnovo ne more imeti negativne vrednosti. Rešitev $t=8$ vstavimo v $2^x=t$ in dobimo $x=3$. Rezultat preverimo.

Četrti letnik

I. DEL

Naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6
Odgovor	C	E	D	B	A	E

A1. Izračunamo vrednost produkta $f\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{1+\cos\frac{\pi}{3}}\cdot\dfrac{\sin\frac{2\pi}{3}}{1+\cos\frac{2\pi}{3}}=\dfrac{(\sin\frac{\pi}{3})^2}{1-\cos^2\frac{\pi}{3}}=\dfrac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{1-(\frac{1}{2})^2}=1.$

A2. Upoštevamo $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, pa je $\sin(\alpha+\beta)=1$.

A3. Izračunajmo količnik $q=\dfrac{3}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{6}-\sqrt{3})}=\dfrac{3}{(2\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{6}-\sqrt{6})}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$

II. DEL

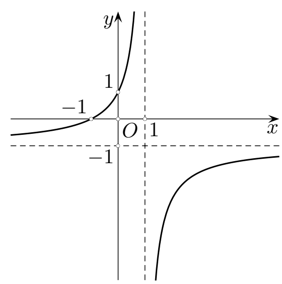
B1. Izračunati je treba vsoto členov aritmetičnega zaporedja z diferenco 4. Prvi člen je 531, zadnji (n-ti) pa 987. Iz enačbe za splošni člen aritmetičnega zaporedja izračunamo $n=115$. Uporabimo obrazec za vsoto n členov aritmetičnega zaporedja in dobimo vsoto 87285.

B2. Enačbi premic zapišemo v eksplicitni obliki: $y = -\frac{2x}{a} - \frac{3}{a}$ in $y = \frac{3x}{2} - 1$. Smerna koeficienta sta $k_1 = \frac{-2}{a}$ in $k_2 = \frac{3}{2}$. Uporabimo zvezo $\tan\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$ in dobimo enačbo $\left|\frac{3a+4}{2a-6}\right| = 1$. Iz $\frac{3a+4}{2a-6} = 1$ in $\frac{3a+4}{2a-6} = -1$ dobimo $a_1 = -10$ oziroma $a_2 = \frac{2}{5}$.

B3. Vrednost izraza $3p(-2) + 2q(3)$ izračunamo tako, da vstavimo izbrane vrednosti v $p(x)$ in $q(x)$. Dobimo -97. Vodilni člen polinoma $2(p(x))^2$ je $18x^6$. Produkt $p(x) \cdot q(x)$ je enak $3x^5 + 4x^4 - x^3 - 5x^2 - 6x - 3$. Po osnovnem izreku o deljenju zapišemo $p(x) = (3x^2 - 5x + 5)(x + 1) - 8$.

B4. Ničla racionalne funkcije je $x = -1$, pol $x = 1$, asimptota $y = -1$ in presečišče z ordinatno osjo $(0, 1)$. S pomočjo teh ugotovitev lahko narišemo graf.

Hitro se prepričamo, da velja $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ za $x \neq \pm 1$, saj je $f(-x) = \frac{1 + (-x)}{1 - (-x)} = \frac{1 - x}{1 + x}$ in $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1 - x}{1 + x}$.



Rešitve nalog 4. regijskega tekmovanja v znanju matematike za dijake poklicnih šol

Tekmovalec, ki je prišel po katerikoli pravilni metodi do rešitve (četudi točkovnik take ne predvideva), dobi vse možne točke.

Za pravilno metodo se upošteva vsak postopek, ki
– smiselno upošteva besedilo naloge,
– vodi k rešitvi problema,
– je matematično pravilen in popoln.

Tekmovalec, ki je le delno rešil nalogo, iz sicer pravilnih postopkov reševanja pa ni videti poti do končne rešitve naloge, ne more dobiti več kot polovico možnih točk.

I. DEL

V preglednici so zapisani pravilni odgovori. Pravilni odgovor tekmovalca se točkuje z 2 točkama, nepravilni z -1 točko, prazno polje preglednice pa z 0 točkami.

Naloga	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
Odgovor	E	D	E	B	A	A	D	C	D	D

A1. Izračunati moramo 1,2 % od 8000 SIT, kar je enako $80 \cdot 1{,}2 = 96$ SIT.

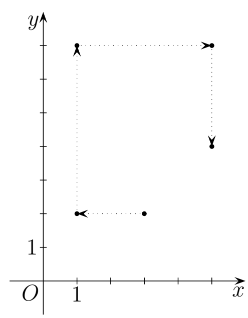
A2. Če smo tri torke nekega meseca zapisali s sodo številko, so bili to 2., 16. in 30. dan v mesecu. Torka sta bila še dva: 9. in 23. dan v mesecu, torej je bil 25. dan četrtek.

A3. Izračunamo: $A - B - C = \diamondsuit - \heartsuit + \spadesuit - (-\spadesuit - \heartsuit + \diamondsuit) - (\heartsuit - \diamondsuit + \spadesuit) = \diamondsuit - \heartsuit + \spadesuit$.

A4. Ker sladoledno porcijo sestavljajo tri kepice sladoleda različnih okusov, je 10 različnih porcij. Če okuse kratko označimo z V, K, J, M in T, imamo možnosti: VKJ, VKM, VKT, VJM, VJT, VMT, KJM, KJT, KMT in JMT.

A5. Če grem v kino skupaj z dvema prijateljema, plačamo 3 vstopnice, kar je ceneje. Če bi šel dvakrat v kino, vsakič z enim prijateljem, bi plačali 4 vstopnice.

A6. Na sliki je prikazano, kako se robot premika, če uboga ukaze.



A7. Opazimo, da v zaporedju nastopajo popolni kvadrati $144 = 12^2$, $121 = 11^2$, $100 = 10^2$, $81 = 9^2$ in $64 = 8^2$, naslednje število je tako $49 = 7^2$.

A8. Iz besedila naloge sklepamo, da je $10x + 6x + 4x + 3x + 2x + x = 1{,}3$, od koder dobimo $x = 0{,}05$. Zmagovalec dobi $10 \cdot 0{,}05 = 0{,}5$ milijona USD.

A9. Ko Cene preteče 1000 m, manjka Tonetu 10 m do cilja. Milan je nekoliko počasnejši od Toneta, saj od skupnega štarta počasi zaostaja za njim: ko Tone preteče 1000 m, je Milan 20 m za njim. Sklepamo torej, da je Milan $\frac{990 \cdot 20}{1000} = \frac{99}{5} = 19{,}8$ m za Tonetom, ko le-ta preteče 990 m. Cene prehiti Milana za $10 + 19{,}8 = 29{,}8$ m.

A10. Levo in desno stran knjige označujeta zaporedni števili, zato je $21 = 10 + 11$, zmnožek pa je $10 \cdot 11 = 110$.

II. DEL

B1. Dolžina skrajšanih hlač pred pranjem je bila 105 cm − 5 cm = 100 cm. Po pranju so se skrčile za 2 cm, kar predstavlja 2 % dolžine skrajšanih hlač pred pranjem in hkrati odstotek krčenja, ki ga je označil proizvajalec.
Da bi imele skrajšane hlače po pranju želeno dolžino 100 cm, bi šivilja pred pranjem morala upoštevati 2 % krčenja, ki ga je označil proizvajalec. To pomeni, da dolžina 100 cm predstavlja 98 % najkrajše dolžine, na katero bi morala šivilja Fridi skrajšati hlače. Najkrajša dolžina je: $\frac{100 \cdot 100}{98} = 102{,}04 \doteq 102$ cm.

B2. Če označimo delež vsakega izmed sinov z x, delež vsake izmed hčera pa z y, imamo: $3x+4y = 1000$. Iz besedila razberemo, da je vsaka izmed hčera dobila pol toliko kot vsak izmed bratov, kar lahko zapišemo kot $y = \frac{x}{2}$. Če to zvezo upoštevamo v prej zapisani enačbi, dobimo linearno enačbo z eno neznanko: $3x + 4\frac{x}{2} = 1000$ oziroma $3x + 2x = 1000$, od tod pa izračunamo $x = 200$. Vsak sin je dobil 200 zlatnikov.
Upoštevamo, da je vsaka izmed hčera dobila pol toliko kot vsak od sinov: $y = \frac{x}{2} = 100$. Vsaka hči je dobila 100 zlatnikov.
Če bi bila delitev enakopravna, bi vsak izmed sedmih otrok dobil enak delež: $1000 : 7 = 142{,}86$. Ko zaokrožimo navzdol, dobimo 142. Pri enakopravni delitvi bi vsak otrok dobil 142 zlatnikov.

B3. Če označimo ceno 1 m karnise z x, ceno 1 m^2 blaga pa z y, lahko po besedilu naloge zapišemo enačbi: $x + 2y = 19000$ in $1{,}5x + 4y = 35500$. Ta sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama lahko rešimo npr. z zamenjalnim načinom ali z metodo nasprotnih koeficientov.
Rešitev z zamenjalnim načinom: Iz prve enačbe izrazimo $x = 19000 - 2y$. To upoštevamo v drugi enačbi: $1,5 \cdot (19000 - 2y) + 4y = 35500$, od tod pa sledi $28500 - 3y + 4y = 35500$ oziroma $y = 7000$. Končno imamo še $x = 19000 - 2y = 5000$.
Rešitev z metodo nasprotnih koeficientov: Prvo enačbo pomnožimo z (-2) in prištejemo drugi, pa imamo $-0,5x = -2500$ oziroma $x = 5000$. Nato izračunamo še $y = 7000$.

B4. Število tekmovalcev na tekmovanju določimo tako, da poiščemo skupni delitelj števil 62, 310, 155, 93 in 186. Ker so praštevilski razcepi teh števil $62 = 2 \cdot 31$, $310 = 2 \cdot 5 \cdot 31$, $155 = 5 \cdot 31$, $93 = 3 \cdot 31$ in $186 = 2 \cdot 3 \cdot 31$, je največji skupni delitelj vseh naštetih števil enak 31 – to pa je ravno število tekmovalcev na matematičnem tekmovanju.
Glede na izračunano število tekmovalcev na matematičnem tekmovanju lahko s preprostimi računi določimo, koliko posameznih dobrot je dobil vsak tekmovalec. Vsak tekmovalec je dobil: $62 : 31 = 2$ čokoladi, $310 : 31 = 10$ bonbonov, $155 : 31 = 5$ žvečilnih gumijev, $93 : 3 = 3$ pomaranče in $186 : 31 = 6$ sokov.