Tekmovanja

48. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije

1. letnik

1. Ali obstaja naravno število n, za katerega velja: če število n pomnožimo z vsoto njegovih števk, je vsota števk dobljenega zmnožka enaka 3?

2. Na vsaki ploskvi kocke je napisano naravno število, v vsakem oglišču pa je napisan zmnožek števil na 3 ploskvah, ki se stikajo v tem oglišču. Vsota števil v ogliščih kocke je 70. Kolikšna je vsota števil na ploskvah kocke?

3. Naj bosta E in F razpolovišči stranic AD in DC pravokotnika $ABCD$. Označimo z G presečišče daljic AF in EC. Dokaži, da je $\sphericalangle CGF = \sphericalangle FBE$.

4. Ana je izbrala števke 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 in 9. Odločila se je, da bo oblikovala skupine s po 4 dvomestnimi praštevili in da bo za vsako skupino praštevil uporabila vse izbrane števke. Kolikšna je vsota praštevil posamezne skupine?

2. letnik

1. Poišči vsa petmestna števila $\overline{abcde}$, ki so deljiva z 9 in za katera velja $\overline{ace} - \overline{bda} = 760$.

2. Dano je pozitivno realno število p. Med vsemi pari pozitivnih realnih števil (x, y), ki ustrezajo enačbi $xy(x+y) = p$, poišči tistega, za katerega je vrednost izraza $x^3 + y^3$ najmanjša.

3. Na krožnici k s središčem v točki O izberemo točki A in B tako, da izbrani točki nista krajišči premera. Na trikotniku OAB očrtani krožnici izberemo točko C, ki ne sovpada niti z A niti z B. Premica AC seka krožnico k v točkah A in D. Dokaži, da je trikotnik DCB enakokrak.

4. Igralca imata vsak po 2004 žetone. Izmenoma mečeta neobičajno igralno kocko, na kateri je napisanih prvih 6 praštevil. Igralec, ki je na potezi, vrže kocko, drugi pa mu da toliko žetonov, kolikor je ostanek pri deljenju števila 2004 s številom, ki je padlo pri metu kocke. Ali je mogoče, da bi imel eden izmed igralcev v nekem trenutku igre 7-krat toliko žetonov kot drugi?

3. letnik

1. Poišči vse celoštevilske rešitve enačbe $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2004}$.

2. Naj bo n naravno število, ki je enako vsoti svojih od n manjših deliteljev. Tako število je denimo število 28. Kolikšna je vsota recipročnih vrednosti vseh njegovih deliteljev?

3. Naj bo $ABCD$ tetivni štirikotnik, pri katerem si nobeni 2 nasprotni stranici nista vzporedni. Presečišče premic AB in CD označimo z E, presečišče premic AD in BC pa s F. Simetrala kota $\sphericalangle AFB$ seka daljico AB v točki P, daljico CD pa v točki R. Simetrala kota $\sphericalangle BEC$ seka daljico BC v točki Q, daljico AD pa v točki S. Dokaži, da je štirikotnik $PQRS$ romb.

4. V telenoveli o dogodkih v zarotniškem mestecu nastopa n meščanov, $n \geq 3$. Vsaka 2 meščana skupaj kujeta zaroto proti enemu izmed ostalih meščanov. Dokaži, da obstaja tak meščan, da je vsaj $\sqrt{n}$ meščanov vpletenih v zaroto proti njemu.

4. letnik

1. Členi neskončnega geometrijskega zaporedja so naravna števila, od katerih vsaj dve nista deljivi s 4. Zapiši splošni člen tega zaporedja, če veš, da je eden izmed členov enak 2004.

2. Poišči vse celoštevilske rešitve enačbe $a^b = ab + 2$.

3. Dan je ostrokotni trikotnik ABC. Naj bo C' nožišče višine na AB, D in E pa različni točki na daljici CC'. Naj bosta F in G pravokotni projekciji točke D na stranici AC oziroma BC. Dokaži, da je trikotnik ABC enakokrak, če je štirikotnik $DGEF$ paralelogram.

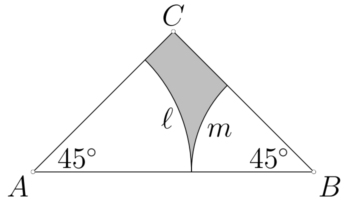
4. V telenoveli o dogodkih v zarotniškem mestecu nastopa n meščanov, $n \geq 4$. Vsaka skupina 3 meščanov kuje zaroto proti enemu izmed ostalih meščanov. Dokaži, da obstaja tak meščan, da je vsaj $\sqrt[3]{(n-1)(n-2)}$ meščanov vpletenih v zaroto proti njemu.

Matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije
Izbirno tekmovanje

Naloge za 1. letnik

1. Poišči vsa naravna števila m in n, ki zadoščajo enačbi $\frac{3}{m}+\frac{5}{n}=1$.

2. Dan je enakokrak pravokotni trikotnik ABC s pravim kotom pri C in kateto dolžine 2. Krožni lok ℓ s središčem v A razdeli trikotnik na ploščinsko enaka dela, krožni lok m s središčem v B pa se dotika krožnega loka ℓ v točki na hipotenuzi AB. Kolikšna je ploščina osenčenega lika?



3. Pravokotnik $ABCD$ ima stranico AB dolgo $2a$, stranico AD pa a. Označimo razpolovišče stranice AB z E in izberimo poljubno točko F na stranici AD. Ploščina trikotnika ECF je odvisna od izbire točke F. Kolikšna je najmanjša in kolikšna največja ploščina trikotnika ECF, ko lego točke F spreminjamo?

4. Poišči vse rešitve enačbe $x=\Big|2x-|60-2x|\Big|$.

5. Nika in Tim sta igrala karte. Neodločen izid ni bil možen. Vnaprej sta se dogovorila, da bo zmagovalec posamezne igre dobil več točk kot poraženec in da bo poraženec dobil pozitivno število točk. Določila sta, koliko točk bo po posamezni igri dobil zmagovalec in koliko poraženec. Po nekaj igrah je imela Nika 30 točk, Tim, ki je dobil 2 igri, pa 25 točk. Koliko točk je dobil zmagovalec posamezne igre?

Naloge za 2. letnik

1. Ali obstaja pravokotni trikotnik s celoštevilskimi dolžinami stranic, pri katerem sta dolžini obeh katet praštevili?

2. Poišči vsa trimestna števila, ki so enaka 30-kratniku vsote svojih števk.

3. Koliko je $\sqrt{2004\cdot 2002\cdot 1998\cdot 1996+36}$?

4. Na ravnini ležijo take točke A, B, C in D, da velja $|AB| = |BC| = |AC| = |CD| = 10$ cm in $|AD| = 17$ cm. Koliko meri kot $\sphericalangle ADB$?

5. Matija je najprej po vrsti napisal vsa števila od 1 do 10000, nato pa izbrisal vsa števila, ki niso bila deljiva ne s 5 in ne z 11. Katero število je na 2004. mestu?

Naloge za 3. letnik

1. (a) Koliko je 5^a, če je $a = \dfrac{\log_7 4\,(\log_7 5 - \log_7 2)}{\log_7 25\,(\log_7 8 - \log_7 4)}$?

   (b) Koliko je 5^b, če je $b = \dfrac{\log_{77} 4\,(\log_{77} 5 - \log_{77} 2)}{\log_{77} 25\,(\log_{77} 8 - \log_{77} 4)}$?

2. Koliko pozitivnih vrednosti lahko zavzame izraz

$$a_0 + 3a_1 + 3^2 a_2 + 3^3 a_3 + 3^4 a_4,$$

   če so števila a_0, a_1, a_2, a_3 in a_4 iz množice $\{-1, 0, 1\}$?

3. Izračunaj vrednost izraza $\sin^8 75^\circ - \cos^8 75^\circ$.

4. V množici A je 7 naravnih števil, ki niso večja od 20. Dokaži, da obstajajo taka 4 različna števila a, b, c in d iz množice A, da je število $a + b - c - d$ deljivo z 20.

5. Diagonale pravilnega petkotnika s stranico dolžine 1 tvorijo nov, manjši pravilen petkotnik. Koliko meri stranica manjšega petkotnika?

Naloge za 4. letnik

1. Reši enačbo

$$\frac{1}{x + \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^3 + \frac{1}{x^4}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^3 + \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^5}}}} - \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x + \frac{1}{x^4 + \frac{1}{x^3}}}}$$

   v pozitivnih realnih številih.

2. Poišči vsa praštevila p, za katera sta tudi $p + 28$ in $p + 56$ praštevili.

3. Za katera naravna števila n lahko najdemo n zaporednih celih števil z vsoto n?

4. Koliko desetmestnih števil $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10}}$, za katera velja, da je $a_1 = 1$ in je vsaka izmed števk a_2, a_3, $\ldots$, a_{10} enaka 0 ali 1, zadošča pogoju

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}?$$

5. V ravnini sta dani različni točki O in P. Naj bo $ABCD$ tak paralelogram, katerega diagonali se sekata v točki O, da točka P ne leži na zrcalni sliki premice AB preko premice CD. Razpolovišči daljic AP in BP označimo z M oziroma N, presečišče premic MC in ND pa s Q. Dokaži, da so točke P, Q in O kolinearne ter da je lega točke Q neodvisna od izbire paralelograma $ABCD$.

Tekmovanje za zlato Stefanovo priznanje 7. razred osemletne osnovne šole in 8. razred devetletne osnovne šole

I. del: Kratke naloge

Tekmovalci so prve tri teoretične naloge reševali 90 minut, za vsako eksperimentalno pa so imeli 40 minut časa.

1. Obkroži črko pred pravilnim odgovorom. Pri vsakem vprašanju je pravilen samo en odgovor.

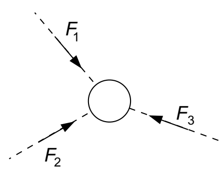
   (a) Ladja zapluje s slanega morja v reko. Kaj se zgodi z vzgonom in ladjo?

   A Vzgon se poveča, ker se ladja bolj pogrezne.
   B Vzgon se ne spremeni, čeprav se ladja pogrezne.
   C Vzgon se zmanjša, ker se ladja nekoliko dvigne.
   D Vzgon se ne spremeni, čeprav se ladja nekoliko dvigne.

   (b) Miha je s štoparico, ki kaže desetinke sekunde, meril nihajni čas nihala. Najprej je (i) izmeril čas enega nihaja 1,3 s ± 0,2 s, nato je izmeril še (ii) čas desetih nihajev 13,5 s ± 0,2 s. Katera trditev velja za meritvi?

   A Meritev (i) je manj natančna kot meritev (ii), saj je nedoločenost meritve (0,2 s) glede na izmerjeni čas (i) večja kot pri meritvi (ii).
   B Meritev (i) je bolj natančna kot meritev (ii), saj je izmeril le čas enega nihaja.
   C Pri eni meritvi se je Miha zmotil, saj je čas (ii) mnogo daljši od časa (i).
   D Čas enega nihaja je izmeril enako natančno pri obeh meritvah.

   (c) Na spodnji sliki je telo v ravnovesju. Nanj delujejo tri sile v označenih smereh. Označene so le smeri sil, ne pa tudi njihove velikosti. Katera od spodnjih trditev je pravilna?

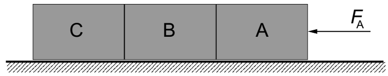
   A velikost F_1 + velikost F_2 = velikost F_3
   B velikost F_1 + velikost F_2 < velikost F_3
   C velikost F_1 + velikost F_2 > velikost F_3
   D velikost F_1 = velikost F_2 = velikost F_3

   (d) Telo A ima prostornino 2 dm^3 in gostoto 0,7 kg/dm^3, telo B pa enako prostornino kot telo A in gostoto 1,4 kg/dm^3. Obe telesi vržemo v vodo. Kolikšni sta sili vzgona na telesi A in B?

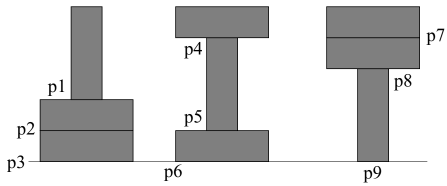
   A Sila vzgona na telo A je 7 N, na telo B pa 14 N.
   B Sila vzgona na telo A je 14 N, na telo B pa 20 N.
   C Sila vzgona na telo A in na telo B je 20 N.
   D Sila vzgona na telo A je 14 N, na telo B pa 28 N.

(e) Tri enake lesene klade postavimo eno zraven druge na hrapavo ravno podlago. Ko klado A potiskamo s silo $F_A = 1{,}2$ N v vodoravni smeri, kot je narisano, se klade gibljejo enakomerno. Kolikšna je sila F_{BA}, s katero klada B deluje na klado A in kolikšna je sila F_{CB}, s katero klada C deluje na klado B?

A $F_{BA} = 1{,}2$ N in $F_{CB} = 1{,}2$ N.
B $F_{BA} = 0{,}6$ N in $F_{CB} = 0{,}3$ N.
C $F_{BA} = 0{,}8$ N in $F_{CB} = 0{,}4$ N.
D $F_{BA} = 0{,}4$ N in $F_{CB} = 0{,}4$ N.



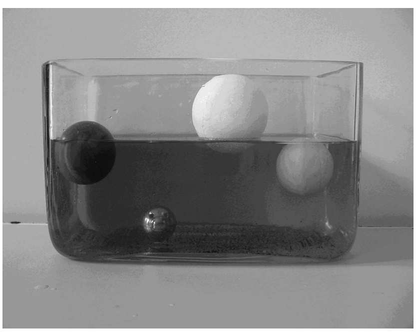
2. Devet enakih opek zložimo po tri skupaj, kot je narisano. Ploščina velike ploskve je trikrat večja od ploščine male ploskve.

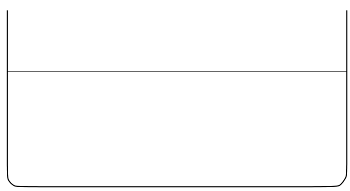


(a) Uredi tlake p_3, p_6 in p_9 po velikosti. Uporabi oznake $<, >, =$.

(b) Uredi vse tlake od p_1 do p_9 po velikosti! Uporabi oznake $<, >, =$.

3. Žogice iz črne gume (ČG, $\rho_{ČG} = 0,77$ kg/dm^3), stiropora (S, $\rho_S = 0,033$ kg/dm^3), svetle gume (SG, $\rho_{SG} = 0,97$ kg/dm^3) in kovine (K, $\rho_K = 4{,}6$ kg/dm^3) mirujejo v posodi z vodo, kot kaže fotografija (A).

(A) 

(B) 

(a) Na list preriši sliko posode (B), ter nanjo skiciraj, kako bi v vodi mirovale žogice iz istih snovi, če bi imele vse enako prostornino kot stiroporna, $V_S = 62$ cm^3. Uporabi znamenja ČG, S, SG in K.

(b) Koliko vode izpodrinejo vse žogice skupaj v primeru naloge (a)?

(c) Žogice iz istih snovi izberemo tako, da imajo vse enako maso kot kovinska, $m_K = 31$ g. Na list preriši sliko posode (B) ter nanjo približno nariši vse štiri žogice, ko mirujejo v vodi. Uporabi znamenja ČG, S, SG in K.

(d) Koliko vode izpodrinejo vse žogice skupaj v primeru naloge (c)?

4. Eksperimentalna naloga

   Pripomočki:

   - slana voda v vrču,
   - silomer,
   - menzura,
   - predmet.

   Izmeri gostoto tekočine v vrču ter gostoto snovi, iz katere je predmet.

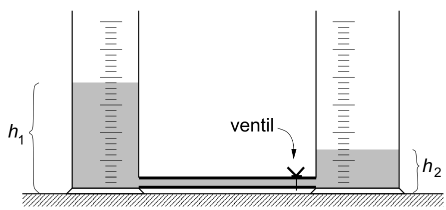
   (a) Zapiši zaporedje korakov, ki jih izvedeš.
   (b) Kolikšna je gostota snovi, iz katere je predmet?
   (c) Kolikšna je gostota tekočine?

5. Eksperimentalna naloga

   Pri poskusu boš spremljal in beležil, kako se s časom med pretakanjem spreminjata višini gladin vode h_1 in h_2 v povezanih posodah. Na list z meritvami zapiši oznako merilnega mesta. S cevkami in ventili ravnaj previdno in pazljivo.

   Pripomočki:

   - s cevko povezani posodi,
   - štoparica,
   - merilo,
   - vrč z vodo.



Zapri ventil na večji posodi, v ožjo posodo pa nalij 1000 ml vode. Večja posoda naj bo na začetku prazna.

Spremljaj in beleži, kako se s časom med pretakanjem spreminjata višini gladin vode h_1 in h_2 v povezanih posodah. Odpri ventil in v tabelo zabeleži čas, v katerem se gladina vode v ožji menzuri spusti za 1 cm. Zabeleži čas vsakič, ko se gladina spusti za naslednji cm, dokler se pretakanje ne zaustavi. Vsakič tudi izračunaj prostorninski pretok vode med posodama.

Pojasnilo: Prostorninski pretok Φ_V je količnik med prostornino tekočine V, ki se pretoči, in časom t, v katerem se tekočina pretoči, $\Phi_V = \frac{V}{t}$.

(a) Meritve in izračunan prostorninski pretok vpiši v tabelo.

(b) Nariši diagram, ki prikazuje višini gladin v obeh posodah v odvisnosti od časa! Grafa riši v isti koordinatni sistem in ju jasno označi. Skozi točke meritev vriši krivuljo.

(c) Nariši nov diagram, ki prikazuje, kako se spreminja prostorninski pretok v odvisnosti od časa.

(d) Nariši tudi diagram, ki prikazuje, kako se spreminja prostorninski pretok med posodama v odvisnosti od razlike med višinama gladin vode $(h_1 - h_2)$ v posodah.

(e) Z besedami opiši odvisnost prostorninskega pretoka med posodama od razlike višin gladin vode v posodah!

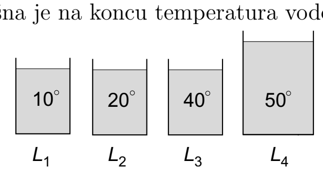
■ Tekmovanje za zlato Stefanovo priznanje 8. razred osemletne osnovne šole in 9. razred devetletne osnovne šole

Tekmovalci so prve tri teoretične naloge reševali 90 minut, za vsako eksperimentalno pa so imeli po 40 minut časa.

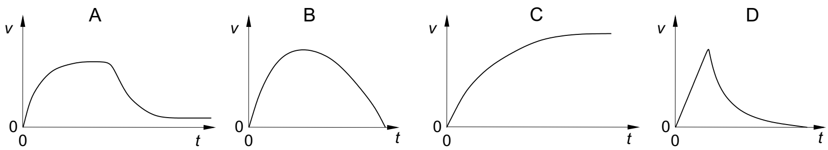
1. Obkroži črko pred pravilnim odgovorom. Pri vsakem vprašanju je pravilen samo en odgovor.

(a) V lončkih L_1, L_2 in L_3 je po 0,1 dm^3 vode, v lončku L_4 pa je 0,2 dm^3 vode. Temperatura vode v lončku L_1 je 10° C, v L_2 je 20° C, v L_3 je 40° C in v L_4 je 50° C. V prazno večjo posodo zlijemo najprej vodo iz drugega in tretjega lončka, potem iz prvega in na koncu še iz četrtega. Kolikšna je na koncu temperatura vode v večji posodi?

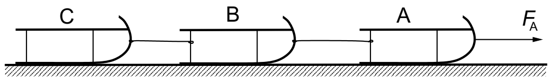
A 24° C
B 30° C
C 34° C
D 40° C



(b) Padalec skoči iz lebdečega helikopterja. Nekaj časa pada, potem odpre padalo, ki njegovo padanje upočasni. Kateri graf pravilno kaže hitrost padalca v odvisnosti od časa potem, ko skoči iz helikopterja, pada, odpre padalo in pada s padalom, preden pristane padalec na tleh?



(c) Tri enake sanke A, B in C zvežemo z lahkimi vrvicami, kot kaže slika. Postavimo jih na ledeno ploskev, da lahko trenje zanemarimo. Sanke A vlečemo s silo $F_A = 12$ N, vlakec iz sank se zato giblje enakomerno pospešeno. Kolikšna je sila F_{BA} s katero sanke B preko vrvice vlečejo sanke A in kolikšna je sila F_{CB}, s katero sanke C preko vrvice vlečejo sanke B?



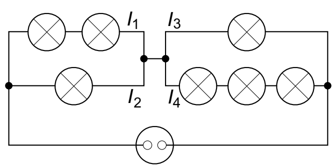
A $F_{BA} = 12$ N, $F_{CB} = 12$ N.
B $F_{BA} = 8$ N, $F_{CB} = 4$ N.
C $F_{BA} = 6$ N, $F_{CB} = 3$ N.
D $F_{BA} = 0$ N, $F_{CB} = 0$ N.

(d) Žogico dvignemo in jo spustimo ter jo opazujemo, kako se odbija od mize. Žogica se odbija od mize tako, da se pri vsakem odboju od površine mize v notranjo energijo pretvori 20 odstotkov kinetične energije žogice. Kolikokrat se odbije od mize, da se višina, do katere se po odboju dvigne, zmanjša pod polovico začetne višine?

A 1 krat.
B 2 krat.
C 3 krat.
D 4 krat.

(e) Skozi vezje na sliki teče tok. Kateri od tokov je največji? Vse žarnice so enake.

A I_1.
B I_2.
C I_3.
D I_4.



2. Voziček z maso 8 kg se giblje po vodoravni podlagi s hitrostjo 1 m/s. Potem ga na poti 3 m potiskamo v smeri gibanja s konstantno silo tako, da je njegova hitrost na koncu 2 m/s.

(a) Kolikšna je povprečna hitrost vozička?

(b) Koliko časa smo delovali s silo na voziček?

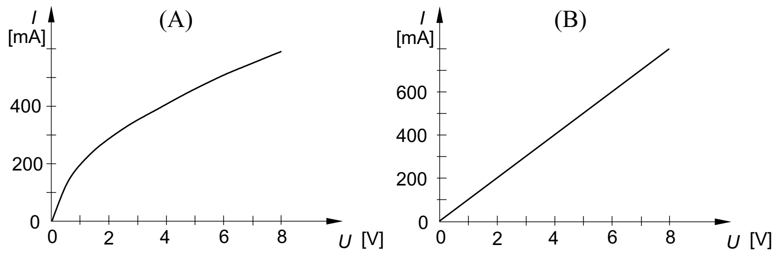
(c) S kolikšno silo smo delovali?

(d) S kolikšno povprečno močjo smo delovali?

(e) Nariši graf, ki kaže pospešek v odvisnosti od časa med potiskanjem.

(f) Nariši graf, ki kaže hitrost v odvisnosti od časa med potiskanjem.

3. Slika (A) kaže, kako je tok skozi kolesarsko žarnico odvisen od napetosti na žarnici. Slika (B) kaže, kako je tok skozi upornik z uporom 10 Ω odvisen od napetosti na uporniku. Na vir napetosti vežemo zaporedno eno kolesarsko žarnico in en upornik z uporom 10 Ω. Z voltmetrom izmerimo, da je na žarnici napetost 2 V.



(a) Nariši vezje pri merjenju napetosti na žarnici, vključno z upornikom in voltmetrom.

(b) Kolikšen je tok skozi žarnico?

(c) Kolikšna je napetost na uporniku?

(d) Kolikšna je napetost vira?

(e) Napetost povečamo tako, da skozi žarnico teče tok 0,5 A. Kolikšna naj bo nova napetost vira?

(f) Koliko toplote odda upornik v eni uri v primeru (e)?

4. Eksperimentalna naloga: **Žogice**

Pripomočki:

- štiri žogice,
- tehtnica,
- merilni trak dolžine 1 meter.

Izmeri, kako visoko se odbijejo žogice in oceni za kolikšen odstotek se zmanjša kinetična energija žogice pri enem odboju žogice.

Navodilo: Spusti žogico z višine 0,5 m in po prvem odboju izmeri višino, do katere se odbije. Poskus ponovi vsaj petkrat. Izmerke beleži v tabelo. Poskuse ponovi z vsemi štirimi žogicami.

(a) Katere energije ima žogica tik po odboju?

(b) Katere energije ima žogica v najvišji legi po odboju?

(c) V tabelo zapiši za vsako žogico, kolikšna je njena potencialna energija preden jo spustiš, kolikšna je njena kinetična energija tik preden trči ob mizo ter kolikšna je njena kinetična energija tik po prvem odboju.

(d) Za vse štiri žogice izračunaj, za koliko odstotkov se je zmanjšala njihova kinetična energija pri enem odboju.

(e) Kaj se zgodi z 'izgubljeno' kinetično energijo?

5. Eksperimentalna naloga: **Vezava stikal**

Pripomočki: škatla s štirimi stikali, baterija, dve žarnici, vezne žice.

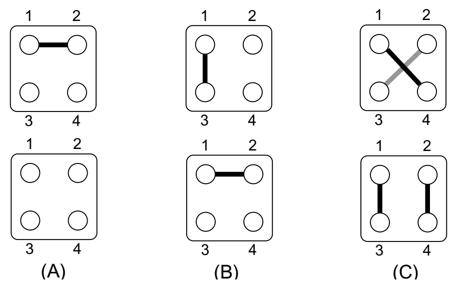
V trgovini z elektro materialom lahko kupimo več vrst stenskih stikal, med drugim *navadno*, *menjalno* in *križno* stikalo. Na zunaj so si ta stikala zelo podobna, vendar se ob preklopu tipke vsako od njih obnaša drugače. V tej nalogi boš najprej raziskal, v katerega od treh tipov stikal sodi posamezno stikalo, ki se skriva v škatli. Nato boš uporabil ustrezno stikalo in ge zvezal v električni krog, da bo ta imel zahtevane lastnosti.

Preden se lotiš reševanja praktične naloge, opišimo delovanje stikala posameznega tipa.

Navadno stikalo je tisto, pri katerem v enem položaju tipke ni stika med nobenima priključkoma stikala, v drugem položaju tipke pa je med dvema priključkoma stik (slika A).

Menjalno stikalo je tisto, pri katerem je v enem položaju tipke stik med dvema priključkoma stikala, recimo 1 in 2, v drugem položaju tipke pa je stik med enim od prejšnjih priključkov in tretjim priključkom, recimo 1 in 3 (slika B).

Križno stikalo je tisto, pri katerem sta v enem položaju tipke v stiku dva para kontaktov, recimo 1 s 4 in 2 s 3, v drugem položaju tipke pa sta v stiku druga dva para kontaktov, recimo 1 s 3 in 2 s 4 (slika C).



Slika shematsko prikazuje delovanje treh vrst stikal: (A) navadnega, (B) menjalnega, (C) križnega. Vsakič je spodaj narisano, kateri priključki so v stiku, ko je tipka stikala v enem položaju, zgoraj pa, kateri priključki so v stiku, ko je tipka stikala v drugem položaju. Za križno stikalo je ena povezava narisana s sivo, da se bolje vidi, da ni stika med obema povezavama.

(a) V škatli so štiri označena stikala, vendar ne veš, katere vrste je katero. Uporabi priloženo baterijo, eno ali obe žarnici in vezne žice ter preizkusi delovanje vsakega od stikal. Vsak priključek posameznega stikala je druge barve. Pri opisu delovanja si pomagaj z barvami, da boš nedvoumno označil med katerima priključkoma je stik, ko je tipka v izbranem položaju. Za vsako od stikal napiši, katere vrste (navadno, menjalno ali križno) je!

(b) Zveži baterijo, obe žarnici ter ustrezno stikalo, tako da bo v enem položaju tipke stikala gorela ena žarnica, v drugem pa druga! Nariši shemo vezave in pojasni delovanje tvojega vezja.

Rešitve nalog 48. matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije

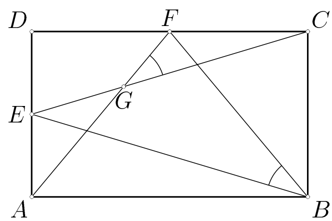
I/1. Označimo s $s(m)$ vsoto števk naravnega števila m. Naloga sprašuje, ali obstaja naravno število n, da je $s(n \cdot s(n)) = 3$. Ker je naravno število deljivo s 3 natanko tedaj, ko je s 3 deljiva vsota njegovih števk, mora biti s 3 deljiv zmnožek $n \cdot s(n)$. Torej mora biti s 3 deljivo vsaj eno izmed števil n in $s(n)$. Če pa je eno deljivo s 3, je tudi drugo deljivo s 3 in je zmnožek $n \cdot s(n)$ deljiv z 9. Tedaj bi moralo biti število $s(n \cdot s(n))$ deljivo z 9, zato enačba $s(n \cdot s(n)) = 3$ ni rešljiva. Iskano naravno število ne obstaja.

I/2. Označimo števila na ploskvah kocke z a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 in a_6. V ogliščih kocke so zapisana števila $a_1a_2a_5$, $a_2a_3a_5$, $a_3a_4a_5$, $a_4a_1a_5$, $a_1a_2a_6$, $a_2a_3a_6$, $a_3a_4a_6$ in $a_4a_1a_6$, zato je

$$\begin{aligned} 70 &= a_1a_2a_5 + a_2a_3a_5 + a_3a_4a_5 + a_4a_1a_5 + a_1a_2a_6 + a_2a_3a_6 + a_3a_4a_6 + a_4a_1a_6 = \\ &= (a_5 + a_6)(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_1) = \\ &= (a_1 + a_3)(a_2 + a_4)(a_5 + a_6). \end{aligned}$$

Ker je $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$ in so vsi 3 faktorji večji od 1, je eden izmed faktorjev enak 2, eden je enak 5 in eden je enak 7, njihova vsota pa je enaka $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 2 + 5 + 7 = 14$.

I/3. Ker je $\sphericalangle FBA = \sphericalangle BAF = \sphericalangle DFA$ in $\sphericalangle EBA = \sphericalangle DCE$, je



$$\begin{aligned} \sphericalangle CGF &= \pi - \sphericalangle FCG - \sphericalangle GFC = \\ &= \pi - \sphericalangle DCE - (\pi - \sphericalangle DFG) = \\ &= -\sphericalangle DCE + \sphericalangle DFA = \\ &= \sphericalangle FBA - \sphericalangle EBA \\ &= \sphericalangle FBE. \end{aligned}$$

I/4. Ana lahko z izbranimi števkami oblikuje skupino praštevil $\{23,\ 41,\ 59,\ 67\}$. Da ne bi iskali vseh možnih skupin praštevil, razmišljajmo drugače. Dvomestno praštevilo se ne more končati z nobeno izmed števk 2, 4, 5 oziroma 6, zato te števke nastopajo na mestu desetic. Kakor koli Ana oblikuje skupino 4 praštevil, je njihova vsota enaka $10 \cdot (2 + 4 + 5 + 6) + (1 + 3 + 7 + 9) = 170 + 20 = 190$.

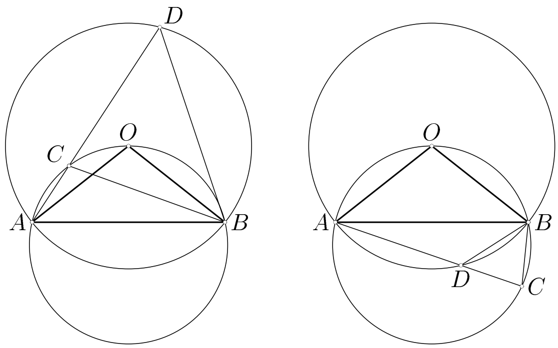
II/1. Enačbo $\overline{ace} - \overline{bda} = 760$ preoblikujemo v $100a + 10c + e - 100b - 10d - a = 760$, od koder sledi, da je $e = a$. Zdaj lahko enačbo delimo z 10 in dobimo $10(a - b) + (c - d) = 76$. Ločimo 2 možnosti, in sicer $c - d = 6$ ali $c - d = -4$.

V prvem primeru je $c = d + 6$ in $a = b + 7$. Upoštevamo pogoj, da je petmestno število deljivo z 9. To pomeni, da je $a + b + c + d + e = b + 7 + b + d + 6 + d + b + 7 = 3b + 2d + 20 = 3b + 2(d + 1 + 9)$ deljivo z 9. Zato je $d + 1$ deljivo s 3 in zaradi $c - d = 6$ sledi $d = 2$. Potem je $c = 8$ in velja, da 9 deli $3(b + 2)$, od koder zaradi $a = b + 7$ sledi $b = 1$. V tem primeru je petmestno število enako 81828.

V drugem primeru je $d = c + 4$ in $a = b + 8$. Zato je $a = 8$ in $b = 0$ ali $a = 9$ in $b = 1$. Če je $a = 8$, iz pogoja $9 \mid (a + b + c + d + e) = 8 + 2c + 4 + 8$ sledi, da 9 deli $2c + 2$. Torej je $c = 8$, vendar potem $d = c + 4 = 12$ ni števka. Če pa je $a = 9$, iz pogoja $9 \mid (a + b + c + d + e) = 10 + 2c + 4 + 9$ sledi, da 9 deli $2c + 5$. Torej je $c = 2$ in je petmestno število enako 91269.

II/2. Ker je $x^3 + y^3 - p = x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 = x^2(x - y) - y^2(x - y) = (x - y)^2(x + y) \geq 0$, je vrednost izraza zagotovo večja ali enaka p. Enakost je dosežena le za $x = y = (\frac{p}{2})^{\frac{1}{3}}$.

II/3. Če točka C leži na istem loku nad AB kot točka O, je $\sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB = \sphericalangle CDB + \sphericalangle DBC$. Ker je $\sphericalangle CDB = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB$, je tudi $\sphericalangle DBC = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB$. Torej je DCB enakokrak trikotnik z vrhom C.



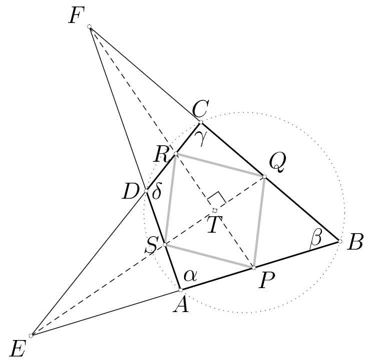
Če pa točki C in O ne ležita na istem loku nad AB, je $\sphericalangle BDA = \pi - \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = \sphericalangle DBC + \sphericalangle BCD$. Zaradi $\sphericalangle BCD = \pi - \sphericalangle AOB$ je $\sphericalangle DBC = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB$. Ker je $\sphericalangle CDB = \pi - \sphericalangle BDA = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB$, je tudi v tem primeru DCB enakokrak trikotnik z vrhom C.

II/4. Če bi imel eden izmed igralcev 7-krat toliko žetonov kot drugi, bi jih imel eden 3507, drugi pa 501, kajti žetonov je ves čas igre 4008. Prvih 6 praštevil je 2, 3, 5, 7, 11 in 13, število 2004 pa da pri deljenju s temi praštevili zaporedoma ostanke 0, 0, 4, 2, 2, 2. Pri vsakem metu kocke se torej število žetonov vsakega igralca spremeni za sodo število. Ker ima na začetku vsak igralec sodo število žetonov, ni mogoče, da bi jih imel eden izmed njiju v nekem trenutku igre 7-krat toliko kot drugi, saj bi to pomenilo, da bi tedaj vsak igralec imel liho število žetonov.

III/1. Kvadrirajmo enačbo $\sqrt{x} = \sqrt{2004} - \sqrt{y}$ in izrazimo $2\sqrt{y \cdot 2004} = 2004 + y - x$. Od tod sledi, da mora biti $2\sqrt{y \cdot 2004} = 4\sqrt{y \cdot 501}$ celo število, zato mora biti $y = 501 \cdot k^2$, kjer je k nenegativno celo število. Če sedaj y vstavimo v prvotno enačbo, dobimo $\sqrt{x} = (2-k)\sqrt{501}$, od koder sledi, da je k lahko 0, 1 ali 2. Vsi možni pari (x, y) so tako $(2004, 0)$, $(501, 501)$ in $(0, 2004)$.

III/2. Naj bodo $d_1, d_2, \ldots, d_k$ delitelji števila n in naj velja $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Potem je $d_i \cdot d_{k+1-i} = n$, zato je $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_k} = \frac{d_k}{n} + \frac{d_{k-1}}{n} + \ldots + \frac{d_1}{n} = \frac{d_k + (d_{k-1} + \ldots + d_1)}{n} = \frac{n+n}{n} = 2$.

III/3. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da leži točka A med E in B, točka C pa med F in B. Presečišče obeh simetral označimo s T, notranje kote štirikotnika $ABCD$ pa z α, β, γ in δ. Potem je



$$\begin{aligned} \sphericalangle FTE &= \sphericalangle TFQ + \sphericalangle FQT = \\ &= \tfrac{1}{2}\sphericalangle AFB + (\tfrac{1}{2}\sphericalangle BEC + \sphericalangle FBE) = \\ &= \tfrac{1}{2}(\pi - \alpha - \beta) + \tfrac{1}{2}(\pi - \beta - \gamma) + \beta = \\ &= \pi - \tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma) = \tfrac{1}{2}\pi, \end{aligned}$$

saj je $\alpha + \gamma = \pi$. Torej je $ET \perp FT$. Ker je simetrala kota $\sphericalangle PER$ hkrati tudi višina na stranico PR, je PER enakokrak trikotnik z osnovnico PR, točka T pa njeno razpolovišče. Podobno je točka T razpolovišče osnovnice SQ enakokrakega trikotnika SQF. Torej je štirikotnik $PQRS$ romb, saj ima diagonali, ki se pravokotno razpolavljata.

III/4. Vseh (neurejenih) parov meščanov je $\frac{n(n-1)}{2}$. Vsak par označimo s tistim izmed $n-2$ meščanov, proti kateremu par kuje zaroto. Potem obstaja m parov, ki so vsi označeni z istim meščanom, in je $m \geq \frac{n-1}{2}$. Denimo, da v teh m parih sodeluje k meščanov. Tedaj velja $\frac{k(k-1)}{2} \geq m \geq \frac{n-1}{2}$, torej je $k^2 > k(k-1) \geq n-1$. Res je, da obstaja tak meščan, proti kateremu se je zarotilo $k \geq \sqrt{n}$ meščanov.

IV/1. Zaporedje je oblike $a_n = a \cdot r^n$, $n \geq 0$. Najprej dokažemo, da so vsi členi zaporedja cela števila. Ker je $r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, je r racionalno število. Zapišimo $r = \frac{\alpha}{\beta}$, $\beta > 0$, kjer sta si števili α in β tuji. Dokazati je potrebno, da je $b = 1$. Recimo, da obstaja praštevilo p, ki deli b. Tedaj število $a_n = a\frac{\alpha^n}{\beta^n}$ za dovolj velike n ne bo celo.

Če je člen zaporedja deljiv s 4, so deljivi s 4 tudi vsi členi, ki mu sledijo, zato a_0 in a_1 nista deljiva s 4. Prav tako je $r \neq 1$, saj bi bili sicer vsi členi enaki 2004. Denimo, da je k-ti člen enak 2004. Tedaj je $a_k = a \cdot r^k = 2004 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 167$. Ker je 2004 sodo število, je $k \geq 2$. Če bi bil $k > 2$, bi od tod sledilo $r = 1$, to pa ni mogoče. Zato je $k = 2$ in $r > 1$. Edina možnost je $r = 2$, $a = 3 \cdot 167 = 501$. Iskano zaporedje je $a_n = 501 \cdot 2^n$.

IV/2. Če je $b < 0$, število a^b ni celo, če je $|a| > 1$. Pri $a = 1$ dobimo enačbo $1 = b + 2$ in od tod $b = -1$. Pri $a = -1$ dobimo enačbo $(-1)^b = -b + 2$, ki pa nima rešitve: ker je $b < 0$, je $-b + 2 \geq 3$, medtem ko je $(-1)^b = \pm 1$.

Če je $b = 0$, dana enačba ni rešljiva.

Če pa je $b > 0$, število a deli a^b. Zato a deli tudi število 2, saj je $a^b - ab = 2$. Torej je a lahko enak -2, -1, 1 ali 2. Oglejmo si vsakega izmed teh primerov posebej.

Če je $a = -2$, je $(-2)^b = -2b + 2$ oziroma $(-2)^{b-1} = (b-1)$. Tej enačbi ne ustreza nobeno naravno število b. Če število b ustreza pogoju, je liho; torej $b = 2s + 1$. Enačbo tedaj preoblikujemo v $4^s = s$, kar pa ni rešljivo, saj za vsako realno število s velja $4^s > s$.

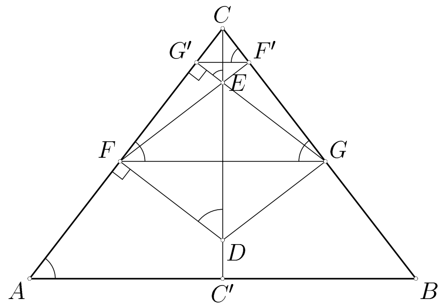
Če je $a = -1$, je $(-1)^b = -b + 2$. To pomeni, da je $|-b+2| = 1$, kar nam da $b = 1$ ali $b = 3$, vendar le $b = 3$ ustreza enačbi $(-1)^b = -b + 2$.

Če je $a = 1$, dobimo enačbo $1 = b + 2$, ki pri pogoju $b > 0$ nima rešitev.

Če je $a = 2$, je $2^b = 2(b+1)$ oziroma $2^{b-1} = b + 1$. Tej enačbi zadošča le $b = 3$. Za $b > 3$ pa velja $2^{b-1} > b + 1$, kar preverimo z indukcijo. (Pri $b = 4$ imamo $2^{4-1} = 8 > 4 + 1 = 5$. V dokazu induktivnega koraka pa $2^{(b+1)-1} = 2 \cdot 2^{b-1} > 2(b+1) > (b+1) + 2$.)

Pari (a,b), ki rešijo enačbo, so: $(2,3)$, $(1,-1)$ in $(-1,3)$.

IV/3. 1. način Označimo s F' presečišče premice FE s stranico BC ter z G' presečišče premice GE s stranico AC. Naj bo $\sphericalangle BAC = \alpha$. Zaradi tetivnosti štirikotnika $FDGC$ je $\sphericalangle CGF = \sphericalangle CDF = \alpha$. Predpostavimo, da je $DGEF$ paralelogram. Ker je $DF \parallel GG'$, je tudi $\sphericalangle CEG' = \alpha$, zaradi tetivnosti štirikotnika $G'EF'C$ pa je $\sphericalangle CEG' = \sphericalangle CF'G' = \alpha$. Nazadnje upoštevamo še, da je zaradi pravih kotov pri F' in G' tudi štirikotnik $FGF'G'$ tetiven in izpeljemo $\sphericalangle GFG' = \sphericalangle CF'G' = \alpha$. Torej smo dokazali, da je $\sphericalangle CGF = \sphericalangle GFC = \alpha$. Povsem analogno lahko sklepamo, da je $\sphericalangle CGF = \sphericalangle GFC = \beta$, kjer smo označili $\beta = \sphericalangle CBA$. Torej res velja $\alpha = \beta$ in je trikotnik ABC enakokrak.



2. način Označimo F' in G' kot v 1. načinu in naj bo $DGEF$ paralelogram. Ker je $GG' \perp FC$ in $FF' \perp BC$, je E višinska točka trikotnika FGC in zato je $CC' \perp FG$. Ker se diagonali v paralelogramu razpolavljata, je trikotnik FGC enakokrak. Ker pa velja $FG \parallel AB$, je tudi trikotnik ABC enakokrak.

IV/4. Vseh (neurejenih) trojic meščanov je $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. Vsako trojico označimo s tistim izmed $n-3$ meščanov, proti kateremu trojica kuje zaroto. Potem obstaja m trojic, ki so vse označene z istim meščanom, in je $m \geq \frac{(n-1)(n-2)}{6}$. Denimo, da v teh m trojicah sodeluje k meščanov. Tedaj velja $\frac{k(k-1)(k-2)}{6} \geq m$, torej je $k^3 > k(k-1)(k-2) \geq 6m \geq (n-1)(n-2)$ in zato $k^3 \geq (n-1)(n-2)$. Res je, da obstaja tak meščan, proti kateremu se je zarotilo $k \geq \sqrt[3]{(n-1)(n-2)}$ meščanov.

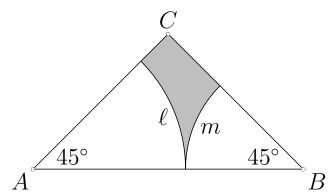
Rešitve nalog z izbirnega tekmovanja

Vsaka naloga je vredna 7 točk. Pri vrednotenju smiselno upoštevajte priloženi točkovnik. Tekmovalec naj ne prejme več kot 3 točke pri posamezni nalogi, če iz delne rešitve ni razvidna pot do končne rešitve naloge.

I/1. Enačbo $\frac{3}{m} + \frac{5}{n} = 1$ preoblikujemo v $5m + 3n = mn$ oziroma $(m-3)(n-5) = 15$. Ker je $15 = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5$ ter sta $m-3$ in $n-5$ celi števili, so možni pari $(m-3, n-5)$ enaki $(-1,-15)$, $(-3,-5)$, $(-5,-3)$, $(-15,-1)$, $(1,15)$, $(3,5)$, $(5,3)$ in $(15,1)$. V prvih štirih primerih ustrezna m in n nista oba hkrati pozitivna, drugi štirje primeri pa nam dajo rešitve $(4,20)$, $(6,10)$, $(8,8)$ in $(18,6)$.

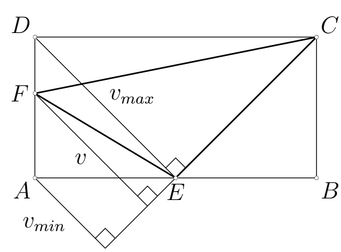
Zapis enačbe $(m-3)(n-5) = 15$ ali ekvivalentne, iz katere je jasno, da imamo le končno mnogo rešitev: 3 točke. Popolna analiza primerov in vse 4 rešitve: 4 točke.

Če tekmovalec ne analizira vseh primerov, priznajte po 1 točko za vsaka 2 pravilno analizirana primera. Če tekmovalec samo navede vse pravilne rešitve, a ne dokaže, da so to vse: 2 točki.



I/2. Naj bo r polmer krožnega loka ℓ, ki izreže iz trikotnika izsek s središčnim kotom $45°$, to je osmino kroga. Ker lok ℓ razdeli trikotnik na ploščinsko enaka dela, velja $\frac{1}{8}\pi r^2 = 1$, od koder izračunamo $r = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Polmer krožnega loka m je $r_1 = |AB| - r = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 2\sqrt{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}})$. Ploščino S osenčenega lika dobimo tako, da od polovice ploščine danega enakokrakega trikotnika odštejemo ploščino krožnega izseka, ki ga iz trikotnika izreže lok m: $S = 1 - \frac{1}{8}\pi \cdot 8\,(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}})^2 = 1 - \pi(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}})^2 = 2\sqrt{\pi} - \pi$.

Enačba $\frac{1}{8}\pi r^2 = 1$ ali ekvivalentna, iz katere lahko izračunamo polmer krožnega loka, ki razdeli trikotnik na ploščinsko enaka dela: 3 točke. Polmer drugega krožnega loka: 1 točka. Ploščina drugega krožnega izseka: 1 točka. Ploščina osenčenega dela: 2 točki.

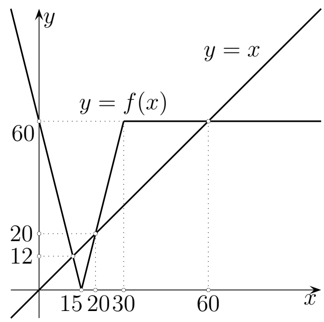


I/3. 1. način Ploščina trikotnika ECF je enaka $\frac{|EC| \cdot v}{2} = \frac{av\sqrt{2}}{2}$, kjer smo z v označili dolžino višine na stranico EC. Ker se višina daljša, ko točka F potuje od A proti D, se ploščina ustrezno veča. Ko je $F = A$, je $v_{min} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, ploščina trikotnika ECF pa najmanjša. Enaka je $\frac{a^2}{2}$, kar je četrtina ploščine pravokotnika $ABCD$. Ko je $F = D$, je $v_{max} = a\sqrt{2}$, ploščina trikotnika ECF pa največja. Tedaj je ploščina trikotnika ECF enaka a^2, kar je polovica ploščine pravokotnika $ABCD$.

2. način Če označimo $|FA| = x$, je ploščina trikotnika ECF enaka $2a^2 - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}(a-x)2a = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}ax$. Ker je $a > 0$ in $0 \leq x \leq a$, je najmanjša ploščina trikotnika ECF enaka $\frac{1}{2}a^2$ in je dosežena pri $x = 0$, največja ploščina pa je enaka a^2 in je dosežena pri $x = a$.

Pravilno ugotovljena najmanjša ploščina: 2 točki. Pravilno ugotovljena največja ploščina: 2 točki. Geometrijska utemeljitev, da sta to res skrajni možnosti, ali eksplicitna formula za ploščino, v kateri nastopa 1 neodvisna spremenljivka: 3 točke.

I/4. Označimo $f(x) = |2x - |60 - 2x||$. Ker zavzame izraz $|2x - |60 - 2x||$ le nenegativne vrednosti, negativen x ne reši enačbe $x = f(x)$.
Oglejmo si najprej možnost $60 - 2x \geq 0$, ko je $x \leq 30$. Tedaj se enačba zapiše: $x = |2x - 60 + 2x|$ oziroma $x = |4x - 60|$. Ločimo 2 primera. Če je $4x - 60 \geq 0$, je $x \geq 15$, enačba pa se poenostavi v $x = 4x - 60$ in ima rešitev $x = 20$. Če je $4x - 60 < 0$, je $x < 15$, enačba pa se poenostavi v $x = -4x + 60$ in ima rešitev $x = 12$.
Preostane nam še možnost $60 - 2x < 0$, ko je $x > 30$. Tedaj se enačba zapiše: $x = |2x + 60 - 2x|$ oziroma $x = 60$, ki je še njena 3. rešitev.



Analiza primerov glede na notranjo in zunanjo absolutno vrednost: 2 + 2 = 4 točke. Vse rešitve: 1 + 1 + 1 = 3 točke.

I/5. Po nekaj igrah imata Nika in Tim skupaj $30 + 25 = 55$ točk. Denimo, da dobi zmagovalec posamezne igre m točk, poraženec pa n točk. Ker po vsaki igri dobita skupaj $m + n$ točk in sta odigrala več kot 2 igri, je $m + n = 11$ ali $m + n = 5$.
Če je $m + n = 5$, sta Nika in Tim odigrala 11 iger, od katerih je Tim dobil 2. Ker je $m > n > 0$, sta le 2 možnosti, in sicer $m = 4$, $n = 1$ ali $m = 3$, $n = 2$. Pri prvi možnosti bi Tim dobil $2 \cdot 4 + 9 \cdot 1 = 17$ točk, pri drugi pa $2 \cdot 3 + 9 \cdot 2 = 24$ točk, toda ne prvo ne drugo število točk ne ustreza podatku iz naloge.
Če je $m + n = 11$, sta Nika in Tim odigrala 5 iger, od katerih je Tim dobil 2. Tokrat imamo več možnosti, ki jih lahko zavzame par (m, n), in sicer $(10, 1)$, $(9, 2)$, $(8, 3)$, $(7, 4)$ in $(6, 5)$. Ker mora biti $2m + 3n = 25$, ugotovimo, da le par $(8, 3)$ ustreza pogoju. Torej je zmagovalec posamezne igre dobil $m = 8$ točk.

Pogoja $m + n = 11$, $m + n = 5$ ali ekvivalentna: 2 točki. Analiza primera $m + n = 5$: 2 točki. Analiza primera $m + n = 11$: 2 točki. Rešitev: $m = 8$: 1 točka.

Če tekmovalec samo navede rešitev $m = 8$, a iz postopka ni razvidno, da je to edina rešitev: 1 točka. Če tekmovalec pravilno analizira vse možne primere, lahko tudi analiza vseh možnosti $1 \leq m < \frac{25}{2}$: 7 točk.

II/1. Denimo, da sta dolžini katet a in b, dolžina hipotenuze pa c. Dolžini a in b ne moreta biti hkrati lihi praštevili, saj bi dobili $c^2 = (2k+1)^2 + (2j+1)^2 = 4(k^2 + j^2 + k + j) + 2$, kar ne more biti res ($c$ bi bilo sodo število, katerega kvadrat bi bil deljiv z 2 in ne s 4). Dolžini a in b tudi ne moreta biti hkrati sodi praštevili (torej enaki 2), saj bi dobili $c^2 = 4 + 4 = 8$, $c = \sqrt{8}$ pa ni celo število.

Preostane nam še možnost, da je dolžina ene katete sodo praštevilo (enako 2), dolžina druge pa liho praštevilo (večje ali enako 3). To pomeni, da je zaradi $c^2 = 4 + b^2$ dolžina hipotenuze liho število, večje ali enako 5. Toda $4 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b) \geq 2 \cdot 8 = 16$ pokaže, da tudi ta možnost odpade. Pravokotnega trikotnika s celoštevilskimi dolžinami stranic, pri katerem bi bili dolžini katet praštevili, ni.

Analiza primera, ko sta dolžini obeh katet lihi praštevili: 3 točke. Analiza primera, ko sta dolžini obeh katet sodi praštevili: 1 točka. Analiza primera, ko sta dolžini obeh katet različne parnosti: 3 točke.

Če tekmovalec brez utemeljitve zapiše, da takih trikotnikov ni: 0 točk.

II/2. Iščemo taka števila $\overline{xyz}$, za katera velja $100x + 10y + z = 30(x + y + z)$. Gotovo se 30-kratnik konča s števko 0, zato je $z = 0$. Potem je $100x + 10y = 30(x + y)$ oziroma $10x + y = 3(x + y)$. Od tod dobimo $7x = 2y$. Ker sta x in y števki, je možno le $x = 2$ in $y = 7$. Obstaja samo 1 trimestno število, ki je enako 30-kratniku vsote svojih števk, to je število 270.

Zapis enačbe $100x + 10y + z = 30(x + y + z)$ ali ekvivalentne: 2 točki. Ugotovitev $z = 0$: 1 točka. Sklep $x = 2$ in $y = 7$: 2 + 2 točki.

II/3. Označimo $a = 2000$. Tedaj je iskana vrednost enaka

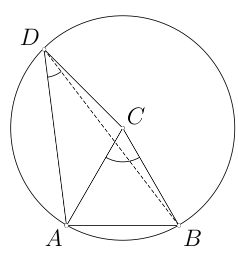
$$\begin{aligned}\sqrt{(a+4)(a+2)(a-2)(a-4)+36} &= \sqrt{(a^2-16)(a^2-4)+36} = \\ &= \sqrt{a^4 - 20a^2 + 64 + 36} = \sqrt{(a^2-10)^2} = \\ &= |a^2 - 10|.\end{aligned}$$

Če upoštevamo, da je $a = 2000$, dobimo vrednost $2000^2 - 10 = 4\,000\,000 - 10 = 3\,999\,990$.

Prevedba na razliko kvadratov $(a^2 - 16)(a^2 - 4)$, lahko tudi brez vpeljave $a = 2000$: 3 točke. Zapis popolnega kvadrata $(a^2 - 10)^2$: 3 točke. Rezultat 3 999 990: 1 točka.

Če tekmovalec izraz pod korenom pravilno zmnoži, a izraza ne koreni: 2 točki. Če tekmovalec izraz pod korenom nepravilno zmnoži: 0 točk. Uporaba računala seveda ni dovoljena.

II/4. Ker je točka C enako oddaljena od točk A, B in D, ležijo točke A, B in D na krožnici s središčem C in polmerom 10 cm. Zaradi $|AB| = 10$ cm je trikotnik ABC enakostraničen in je $\sphericalangle ACB = 60°$. Ker je $|AD| > |AB|$, leži točka D na istem bregu premice AB kot točka C. Torej sta $\sphericalangle ADB$ in $\sphericalangle ACB$ obodni oziroma središčni kot nad istim lokom in je $\sphericalangle ADB = 30°$. (Na sliki je narisana ena izmed 2 možnih leg točke D.)



Konciklično točk A, B, D: 2 točki. Središčni kot $60°$: 1 točka. Obodni kot $30°$: 1 točka. Utemeljitev, da zaradi $|AD| > |AB|$ ležita C in D na istem bregu premice AB: 3 točke.

Če tekmovalec (napačno!) trdi, da je s pogoji naloge lega točke D enolično določena: največ 6 točk.

II/5. Ker je najmanjši skupni večkratnik števil 5 in 11 enak 55, je med števili od vključno 1 do vključno 55 natanko $11 + 5 - 1 = 15$ števil deljivih s 5 ali z 11. To so: $a_1 = 5$, $a_2 = 10$, $a_3 = 11$, $a_4 = 15$, $a_5 = 20$, $a_6 = 22$, $a_7 = 25$, $a_8 = 30$, $a_9 = 33$, $a_{10} = 35$, $a_{11} = 40$, $a_{12} = 44$, $a_{13} = 45$, $a_{14} = 50$ in $a_{15} = 55$. Ker je $2004 = 133 \cdot 15 + 9$, je iskano število enako $133 \cdot 55 + a_9 = 133 \cdot 55 + 33 = 7348$.

Ugotovitev, da je dobro opazovati bloke po 55 števil: 2 točki. Ugotovitev, da je med 1 in 55 natanko 15 števil deljivih s 5 ali 11 (lahko tudi implicitno tako, da so vsa ta števila našteta): 1 točka. Enakost $2004 = 133 \cdot 15 + 9$ ali ekvivalentna, ki pove, da moramo opazovati 9. število v bloku: 2 točki. Sklep $133 \cdot 55 + a_9 = 7348$: 2 točki.

III/1. (a) Najprej poenostavimo eksponent:

$$a = \frac{\log_7 4\,(\log_7 5 - \log_7 2)}{\log_7 25\,(\log_7 8 - \log_7 4)} = \frac{\log_7 2^2 \cdot \log_7 \frac{5}{2}}{\log_7 5^2 \cdot \log_7 2} = \frac{2 \cdot \log_7 2 \cdot \log_7 \frac{5}{2}}{2 \cdot \log_7 5 \cdot \log_7 2} = \frac{\log_7 \frac{5}{2}}{\log_7 5}.$$

Slednje se v osnovi 5 zapiše: $\dfrac{\frac{\log_5 \frac{5}{2}}{\log_5 7}}{\frac{\log_5 5}{\log_5 7}} = \log_5 \dfrac{5}{2}$. Končno je: $5^a = 5^{\log_5 \frac{5}{2}} = \frac{5}{2}$.

(b) Iz rešitve (a) vidimo, da je rezultat neodvisen od osnove logaritma. Torej je $5^b = 5^a = \frac{5}{2}$.

Izračun $a = \log_5 \frac{5}{2}$: 3 točke. Sklep $5^a = \frac{5}{2}$: 2 točki. Izračun $5^b = \frac{5}{2}$: 2 točki.

Če tekmovalec pravilno reši le (b) z ustreznim izračunom $b = \log_5 \frac{5}{2}$ in sklepom $5^b = \frac{5}{2}$: 3 + 2 točki.

III/2. Najprej opazimo, da sta števili $a_0 + 3a_1 + 3^2a_2 + 3^3a_3 + 3^4a_4$ in $a'_0 + 3a'_1 + 3^2a'_2 + 3^3a'_3 + 3^4a'_4$, $a_i, a'_i \in \{-1, 0, 1\}$, enaki natanko tedaj, ko je $a_i = a'_i$ za $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

Če je $a_4 = 1$, so lahko vrednosti $a_0, \ldots, a_3$ poljubne (dobimo 3^4 različnih števil). Če je $a_4 = -1$, bo ne glede na vrednosti ostalih koeficientov število negativno. Če pa je $a_4 = 0$, ponovimo podoben razmislek glede na a_3. Vseh možnih števil je torej $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121$.

Ugotovitev, da mora biti neničelni koeficient z najvišjim indeksom pozitiven: 2 točki. Izračun števila možnosti za ta primer: 2 točki. Vsota $3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 121$: 3 točke.

Če tekmovalec pravilno zapiše vseh 121 možnosti: 7 točk. Če tekmovalec (napačno!) sklepa, da je to le nekoliko spremenjen zapis v trojiškem sistemu in je zato $3^5 - 1$ možnosti: 0 točk. Če tekmovalec (pravilno!) sklepa, da je to le nekoliko spremenjen zapis v trojiškem sistemu in nas zanimajo le tista števila, ki so večja od $\overline{11111}_{(3)} = 121$, a niso večja od $\overline{22222}_{(3)} = 242$: 7 točk.

III/3. Računajmo

$$\begin{aligned}
\sin^8 75^\circ - \cos^8 75^\circ &= (\sin^4 75^\circ - \cos^4 75^\circ)(\sin^4 75^\circ + \cos^4 75^\circ) = \\
&= (\sin^2 75^\circ - \cos^2 75^\circ)(\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ) \cdot \\
&\quad \cdot ((\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ)^2 - 2\sin^2 75^\circ \cos^2 75^\circ) = \\
&= -\cos(2 \cdot 75^\circ)(1 - \tfrac{1}{2}\sin^2(2 \cdot 75^\circ)) = -\cos 150^\circ (1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 150^\circ) = \\
&= \tfrac{\sqrt{3}}{2}(1 - \tfrac{1}{8}) = \tfrac{7\sqrt{3}}{16}.
\end{aligned}$$

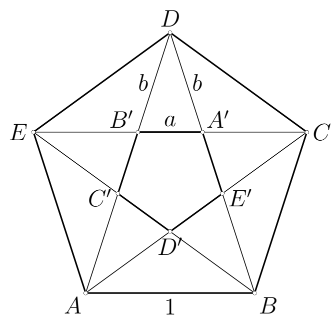
Razcep na razliko 4. potenc: 2 točki. Nadaljnji razcep: 1 točka. Poenostavitev z uporabo zveze $\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ = 1$: 1 točka. Izračun: 3 točke.

Če tekmovalec naloge ne reši pravilno, a izraz precej poenostavi: največ 4 točke. Uporaba računala seveda ni dovoljena.

III/4. Vseh možnih vsot $a+b$ po 2 števil iz A je $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$. Zato imata vsaj dve enak ostanek pri deljenju z 20 in ju označimo z $a+b$ in $c+d$. Denimo, da niso vsa števila a, b, c in d med seboj različna. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $a = c$. Potem velja, da 20 deli $b-d$. Ker je $-20 < b-d < 20$, mora biti $b = d$. Slednje pa je v nasprotju z izbiro vsot. Dokazali smo torej, da so vsa števila a, b, c in d med seboj različna. Ker imata števili $a+b$ in $c+d$ enak ostanek pri deljenju z 20, je število $a+b-c-d$ res deljivo z 20.

Opazovanje vsot po 2 števil iz A: 2 točki. Izračun, da je takih vsot 21: 1 točka. Sklep, da imata vsaj 2 vsoti enak ostanek pri deljenju z 20: 1 točka. Dokaz, da so števila v teh 2 vsotah različna: 3 točke.

III/5. Označimo večji petkotnik z $ABCDE$, manjšega pa z $A'B'C'D'E'$, kjer je A' oglišče, ki je najbolj oddaljeno od A. Označimo še $|A'B'| = a$ in $|B'D| = b$. Trikotnika ABD' in ECD sta podobna, saj sta enakokraka s kotoma 36° ob osnovnici in kotom 108° pri vrhu. Sledi razmerje $\frac{b}{1} = \frac{1}{2b+a}$. Opazimo, da je trikotnik CDB' enakokrak, z vrhom v C, zato je $a+b=1$. Dobimo kvadratno enačbo $b^2+b-1=0$, ki ima edino pozitivno rešitev $b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ in od tod $a = 1-b = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.



Podobnost $\triangle ABD' \sim \triangle ECD$: 1 točka. Zveza $\frac{b}{1} = \frac{1}{2b+a}$: 2 točki. Zveza $a+b=1$: 2 točki. Enačba $b^2+b-1=0$: 1 točka. Rešitev $a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$: 1 točka. Če tekmovalec vpelje drugačne oznake in zapiše pravilen sistem 2 enačb z 2 neznankama: 5 točk. Če tak sistem poenostavi: 1 točka.

IV/1. Po vrsti izračunamo

$$\frac{1}{x+\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^3+\frac{1}{x^4}}}} = \frac{1}{x+\frac{1}{x^2+\frac{x^4}{x^7+1}}} = \frac{1}{x+\frac{x^7+1}{x^2+x^4+x^9}} = \frac{x^2+x^4+x^9}{1+x^3+x^5+x^7+x^{10}} = a,$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x^3+\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^5}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{x^3+\frac{x^5}{x^7+1}}} = \frac{1}{1+\frac{x^7+1}{x^3+x^5+x^{10}}} = \frac{x^3+x^5+x^{10}}{1+x^3+x^5+x^7+x^{10}} = ax \text{ in}$$

$$\frac{1}{x^2+\frac{1}{x+\frac{1}{x^4+\frac{1}{x^3}}}} = \frac{1}{x^2+\frac{1}{x+\frac{x^3}{x^7+1}}} = \frac{1}{x^2+\frac{x^7+1}{x+x^3+x^8}} = \frac{x+x^3+x^8}{1+x^3+x^5+x^7+x^{10}} = \frac{a}{x}.$$

Dano enačbo torej lahko zapišemo v obliki $a = xa - \frac{a}{x}$. Ker je $a > 0$ za $x > 0$, lahko enačbo delimo z a in množimo z x. Dobimo kvadratno enačbo $x^2 - x - 1 = 0$, ki ima edino pozitivno rešitev $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Poenostavitev vsakega verižnega ulomka: 1 + 1 + 1 = 3 točke. Krajšanje in prevedba na enačbo $x^2 - x - 1 = 0$: 3 točke. Rešitev $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: 1 točka.

Če tekmovalec pravilno odpravi vse ulomke in zapiše polinomsko enačbo stopnje 5 ali več, a je ne reši: 3 točke. Če tekmovalec delno razcepi dobljeno enačbo in pravilno zapiše rešitev $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, a ne dokaže, da je edina: 2 točki.

IV/2. Pri deljenju števila 28 s 3 dobimo ostanek 1, pri deljenju števila 56 s 3 pa ostanek 2. To pomeni, da praštevilo p ne sme imeti niti ostanka 1 niti ostanka 2 pri deljenju s 3, saj bi bilo sicer eno izmed števil $p+28$ oziroma $p+56$ deljivo s 3. Edino praštevilo, ki je deljivo s 3 in ki pride v upoštev, je praštevilo 3, takrat sta $p+28 = 31$ in $p+56 = 59$ res praštevili.

Ugotovitev, da je pomembno opazovati ostanke pri deljenju s 3: 3 točke. Sklep, da je iskano praštevilo enako $p = 3$: 3 točke. Preverjanje, da sta $p+28$ in $p+56$ res praštevili: 1 točka.

IV/3. Denimo, da seštevamo n zaporednih celih števil, med katerimi je M največje. Očitno je $M > 0$, saj je vsota enaka naravnemu številu n in torej pozitivna. Velja:

$$\begin{aligned} n &= M + (M-1) + \cdots + (M-(n-1)) \\ n &= n \cdot M - (1 + 2 + \cdots + (n-1)) \\ n &= n \cdot M - \frac{(n-1)\cdot n}{2}. \end{aligned}$$

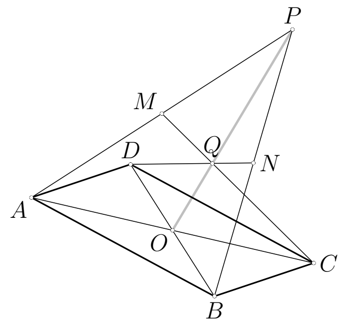
Od tod dobimo $1 = M - \frac{n-1}{2}$, kar pomeni, da mora biti n liho število. Za vsako liho naravno število n je največje celo število v zaporedju enako $M = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$. Če seštejemo n zaporednih celih števil od vključno $-\frac{n-3}{2}$ do vključno $\frac{n+1}{2}$, je njihova vsota enaka n.

Zapisana vsota n zaporednih števil: 2 točki. Enačba $n = Mn - \frac{n(n-1)}{2}$ ali ekvivalentna: 1 točka. Ugotovitev, da je n liho (potrebni pogoj): 2 točki. Ugotovitev, da taka števila res obstajajo, če je n liho število (zadostni pogoj): 2 točki.

IV/4. Če je med števili a_3, a_5, a_7 in a_9 natanko k števil enakih 1, mora biti med a_2, a_4, a_6, a_8 in a_{10} natanko $k+1$ števil enakih 1. Pri nekem k lahko to napravimo na $\binom{4}{k} \cdot \binom{5}{k+1}$ načinov. Ker je $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, imamo skupaj $1 \cdot 5 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 10 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 126$ možnosti.

Ugotovitev, da mora biti med a_2, a_4, a_6, a_8 in a_{10} natanko $k+1$ števil enakih 1, če je med števili a_3, a_5, a_7 in a_9 natanko k števil enakih 1, ali ekvivalentna: 3 točke. Ugotovitev, da je v posameznem primeru $\binom{4}{k} \cdot \binom{5}{k+1}$ števil: 3 točke. Izračun $1 \cdot 5 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 10 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 126$: 1 točka.

IV/5. **1. način** Premice MN, AB in DC so vzporedne, zato sta si trikotnika MQN in CQD podobna. Zaradi podobnosti trikotnikov ABP in MNP je $|MN| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}|DC|$, pa tudi $|CQ| = 2|MQ|$ in $|DQ| = 2|NQ|$. Ker sta CM in DN težiščnici trikotnikov ACP in DBP, je Q težišče teh 2 trikotnikov. Daljica OP je težiščnica obeh trikotnikov, zato so točke Q, P in O kolinearne. Točka Q leži na $\frac{1}{3}$ daljice od O do P, njena lega je torej neodvisna od izbire paralelograma $ABCD$.



Opomba: pogoj, da točka P ne leži na zrcalni sliki premice AB preko premice CD, nam zagotavlja, da premici MC in ND nista vzporedni.

2. način Označimo $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ in naj bo $\overrightarrow{OP} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$. Tedaj je $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(1+\lambda)\vec{a}+\frac{1}{2}\mu\vec{b}$ in $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\lambda\vec{a} + \frac{1}{2}(1+\mu)\vec{b}$. Izrazimo $\overrightarrow{OQ}$ na 2 načina: $\overrightarrow{OQ} = s\overrightarrow{ON} + (1-s)\overrightarrow{OD} = t\overrightarrow{OM} + (1-t)\overrightarrow{OC}$. Sledi $\frac{1}{2}s\lambda\vec{a} + \frac{1}{2}s(1+\mu)\vec{b} - (1-s)\vec{b} = \frac{1}{2}t(1+\lambda)\vec{a} + \frac{1}{2}t\mu\vec{b} - (1-t)\vec{a}$. Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta linearno neodvisna, zato je $\frac{1}{2}s\lambda = \frac{1}{2}t(1+\lambda) - (1-t)$ in $\frac{1}{2}s(1+\mu) - (1-s) = \frac{1}{2}t\mu$. Iz prve enačbe dobimo $\lambda(s-t) = 3t-2$, iz druge pa $\mu(s-t) = 2-3s$. Enačbi seštejemo in dobimo $(\lambda+\mu+3)(s-t) = 0$, torej je $s = t$ (ker točka P ne leži na zrcalni sliki premice AB preko premice CD, je $\lambda+\mu \neq -3$). Iz prve enačbe je $t = \frac{2}{3}$, iz druge pa $s = \frac{2}{3}$. Vstavimo s v $\overrightarrow{OQ}$ in dobimo $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OP}$.

Podobnost $\triangle MQN \sim \triangle CQD$: 2 točki. Ugotovitev, da sta CM in DN težiščnici: 2 točki. Ugotovitev, da je Q težišče: 1 točka. Ugotovitev, da so O, P in Q kolinearne: 1 točka. Sklep $|OQ| = \frac{1}{3}|OP|$ ali ekvivalentna trditev, iz katere je razvidno, da je lega točke Q odvisna le od O in P: 1 točka.

Uvedba 2 linearno neodvisnih vektorjev (ne nujno $\vec{a}$ in $\vec{b}$) in zapis vektorja $\overrightarrow{OP}$ v tej bazi: 1 točka. Izračun krajevnih vektorjev točk M in N: 1 točka. Izračun krajevnega vektorja točke Q na 2 načina in zapisana ustrezna enačba: $1+1=2$ točki. Popolnitev dokaza: 3 točke.

Rešitve nalog s tekmovanja za zlato Stefanovo priznanje za osnovnošolce 7./8 ali 8./9 razred

Vse fizikalno in matematično korektne rešitve so enakovredne. Rezultati računskih nalog so lahko smiselno zaokroženi.

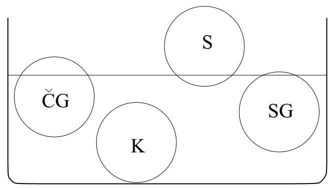
1. naloga
   (a) B
   (b) A
   (c) C
   (d) B
   (e) C

2. naloga

(a) $p_3 = p_6 < p_9$.

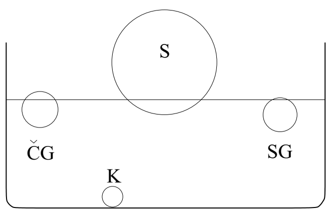
(b) Ploščina male ploskve $= S$, ploščina velike ploskve $= 3S$, teža opeke $= F$.
$p_0 = F/S$
$p_1 = p_3 = p_4 = p_6 = p_0$
$p_2 = 2p_0/3$, $p_5 = p_8 = 2p_0$, $p_7 = p_0/3$ in $p_9 = 3p_0$.
Rešitev: $p_7 < p_2 < p_1 = p_3 = p_4 = p_6 < p_5 = p_8 < p_9$.

3. (a) Žogice iz stiropora (S), črne gume (ČG), svetle gume (SG) in kovine (K), ki imajo vse enako prostornino kot stiroporna na sliki (A).



(b) Kovinska kroglica izpodrine toliko vode, kot je njena prostornina, torej 62 cm^3. Ostale žogice izpodrinejo toliko vode, da vzgon ravno uravnoteži njihovo težo. Izračunamo maso ostalih treh žogic in ta je enaka masi izpodrinjene vode, $m_v = m_S + m_{SG} + m_{ČG} = V_S(\rho_S + \rho_{SG} + \rho_{ČG}) = 110$ g. Celotna prostornina izpodrinjene vode je $V_v = 62$ cm^3 $+$ 110 cm^3 $=$ 172 cm^3.

(c) Žogice iz stiropora (S), črne gume (ČG), svetle gume (SG) in kovine (K), ki imajo vse enako maso kot kovinska na sliki (A).



(d) Kovinska kroglica izpodrine $V_K = m_K/\rho_K = 7,2$ cm^3 vode, ostale tri pa 3×31 cm^3 vode, skupaj $V_v = 100,2$ cm^3.

4. (a) Za določanje gostote snovi, iz katere je predmet, mora tekmovalec izmeriti prostornino in maso predmeta. Maso določi preko merjenja teže predmeta F_g z vzmetno tehtnico, prostornino V pa tako, da predmet v celoti potopi v vodo v mezuri in odčita dvig gladine menzuri.

Princip merjenja gostote tekočine temelji na merjenju efektivne teže predmeta F_{ef}, ko je ta potopljen v tekočino. Tekmovalec je že izmeril težo predmeta na zraku, zatem izmeri še silo vzmetne tehtnice, ko na njej visi predmet, v celoti potopljen v tekočino. Razlika med težo in efektivno težo predmeta v tekočini je sila vzgona, ki je odvisna od gostote kapljevine, $F_v = F_g - F_{ef} =$ teža izpodrinjene tekočine $= \sigma V$. Odtod izračuna specifično težo tekočine in iz specifične teže še njeno gostoto.

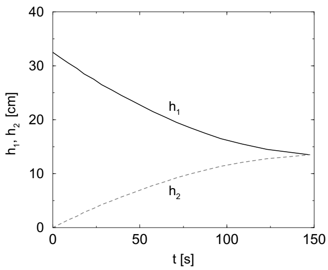
(b) Izmerjena teža predmeta na zraku $F_g = (0,80 \pm 0,05)$ N, odtod masa $m = (80 \pm 5)$ g.
Izmerjena prostornina predmeta $V = (10,0 \pm 0,5)$ ml,
gostota predmeta $\rho = m/V = (8,0 \pm 0,5)$ kg/dm^3.

(c) Izmerjena teža predmeta v tekočini $F_{ef} = (0,68 \pm 0,05)$ N
sila vzgona $F_v = F_g - F_{ef} = (0,12 \pm 0,2)$ N
specifična teža tekočine $\sigma = F_v/V = (12 \pm 1)$ N/dm^3, odtod pretvorba na gostoto tekočine $\rho_t = (1,2 \pm 0,1)$ kg/dm^3.

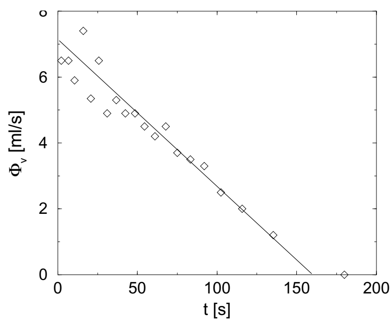
5. naloga

(a) Tabela z meritvami h_1 in h_2 v odvisnosti od časa, ter izračunani prostorninski pretoki.

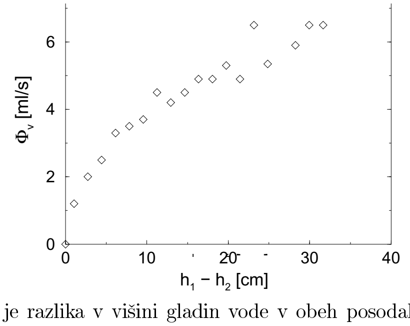
(b) Graf odvisnosti višine gladin od časa



(c) Graf odvisnosti prostorninskega pretoka od časa



(d) Graf odvisnosti prostorninskega pretoka od razlike v višini gladin



(e) Čim večja je razlika v višini gladin vode v obeh posodah, tem večji je prostorninski pretok.

Rešitve nalog s tekmovanja za zlato Stefanovo priznanje za osnovnošolce 8./8 ali 9./9 razred

Vse fizikalno in matematično korektne rešitve so enakovredne. Dovoljeno odstopanje pri načrtovanju dolžin ±1 mm in kotov ± 1°. Rezultati računskih nalog so lahko smiselno zaokroženi.

1. naloga

   (a) C

   (b) A

   (c) B

   (d) D

   (e) C

2. naloga

   Hitrost na začetku je $v_0 = 1$ m/s, hitrost na koncu je $v_1 = 2$ m/s, celotna pot je $s = 3$ m, masa vozička je $m = 8$ kg.

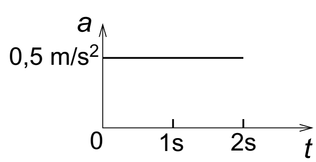
   (a) $\bar{v} = \frac{v_0+v_1}{2} = 1{,}5$ m/s.

   (b) $s = \bar{v}t \Rightarrow t = \frac{s}{\bar{v}} = 2$ s.

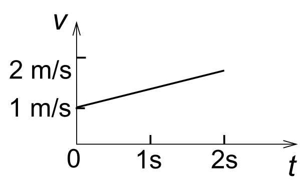
   (c) $v_1 - v_0 = at \Rightarrow a = \frac{v_1-v_0}{t} = 0{,}5$ m/s^2.
   $F = ma = 4N$.

   (d) $\bar{P} = F\bar{v} = 6$ W.

   (e) Graf pospeška

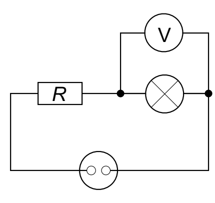


   (f) Graf hitrosti



3. naloga

   (a) Slika vezja



(b) Iz grafa odčitamo, da je tok I skozi žarnico pri napetosti $U_ž = 2$ V enak 290 mA ± 10 mA.

(c) Skozi upornik teče isti tok kot skozi žarnico, zato je napetost na uporniku, ki jo izračunamo iz Ohmovega zakona ali odčitamo iz grafa (B) $U_R = IR = 2{,}9$ V ± 0,1 V.

(d) $U_g = U_R + U_ž = 4{,}9$ V.

(e) $I_1 = 500$ mA, iz grafa odčitamo, da je napetost na žarnici pri toku I_1 enaka
$U_{ž1} = 5{,}8$ V ± 0,2 V, iz Ohmovega zakona ali iz grafa $U_{R1} = I_1R = 5{,}0$ V ± 0,1 V, $U_{g1} = U_{R1} + U_{ž1} = 10{,}8$ V ± 0,3 V.

(f) Toplota, ki jo upornik v primeru (e) odda v eni uri, je enaka prejetemu električnemu delu, $Q = eU_{R1} = I_1tU_{R1} = 9000$ J.

4. naloga

(a) V odgovoru nujno kinetična energija, nikakor prožnostna.

(b) V odgovoru nujno potencialna energija, nikakor kinetična in prožnostna.

(c) Mase žogic izmerimo, izračunamo njihove potencialne energije W_{p0} ko so pol metra nad mizo. Kinetična energija vsake žogice tik preden trči ob mizo je enaka njeni začetni potencialni energiji, $W_{k0} = W_{p0}$. Kinetično energijo W_{k1} po prvem odboju določimo posredno, preko merjenja največje višine h_1, do katere se žogica dvigne po prvem odboju, ter računa potencialne energije v najvišji legi po prvem odboju, $W_{p1} = F_gh_1 = W_{k1}$.

(d) Za kolikšen delež se zmanjša kinetična energija po enem odboju izračunamo za vsako žogico posebej: $\frac{\Delta W_k}{W_{k0}} = \frac{W_{k0}-W_{k1}}{W_{k0}}$, izrazimo v odstotkih.

(e) Pretvori se v notranjo energijo večinoma žogice, delno tudi podlage in zraka.

5. naloga

(a) V škatli so štiri stikala: eno je navadno, dve sta menjalni in eno je križno. Iz opisa preizkusov stikal mora biti razvidno, da sta tekmovalca opravila potrebne teste, da sta prišla do pravilnega odgovora. Vsaka vrsta stikal je z barvnimi žicami zvezana enako, tako da je za vsako stikalo iz barvne kombinacije mogoče preveriti pravilnost rezultata.

(b) Možna je uporaba križnega ali menjalnega stikala, medtem ko se naloge samo z enim navadnim stikalom ne da rešiti.

5. naloga

(a) V škatli so štiri stikala: eno je navadno, dve sta menjalni in eno je križno. Iz opisa preizkusov stikal mora biti razvidno, da sta tekmovalca opravila potrebne teste, da sta prišla do pravilnega odgovora. Vsaka vrsta stikal je z barvnimi žicami zvezana enako, tako da je za vsako stikalo iz barvne kombinacije mogoče preveriti pravilnost rezultata.

(b) Možna je uporaba križnega ali menjalnega stikala, medtem ko se naloge samo z enim navadnim stikalom ne da rešiti.