presek

4

IX
1981–82

LIST ZA MLADE
MATEMATIKE
FIZIKE
ASTRONOME

ZDAJA DMFA SRS


Peña
jan. 02

POGOVORI

PROFESOR IVAN VIDAV JE DOBIL NAGRADO AVNOJ ZA MATEMATIKO

Kakšni so Vaši spomini na otroška leta, na osnovno šolo?

V osnovno šolo sem hodil pet let. Pač pa je imela takrat gimnazija osem razredov. V gimnaziji sem bil bolj povprečen učenec, tako da bi me le težko vzeli za vzgled, prej v svarilo. Res sem imel matematiko, fiziko in kemijo vedno odlično, pri latinščini in grščini pa sem imel po navadi dobro, kar je bila tedaj najnižja pozitivna ocena.

Osnovno šolo ste obiskovali še na Opčinah, kjer ste rojeni?

Ne, že ko sem bil star dve leti, se je naša družina preselila v okolico Maribora. Osnovno šolo sem tako obiskoval v Krčevini pri Mariboru. In pomislite, v prvem razredu sem imel samo enke.

Pa menda ja niste padli?

Ne, le ocene so imele drug pomen kakor danes. Enka je bila najboljša in petica najslabša. Zdi se mi pa, da smo že v drugem razredu doživeli reformo ocen in te so dobile svoj današnji pomen. Pač pa se še zdaj spominjam, da sem dobil pravo enko prav pri matematiki. V drugem razredu gimnazije mi je dal profesor debel cvek, ker nisem znal pravilno zaznamovati trikotnika.

Kdaj ste se odločili za matematiko?

Nekako v tretji gimnaziji (t.j. sedanji sedmi razred) sem se začel resneje zanimati za matematiko in v četrti mi je bilo že jasno, da bom študiral matematiko. Tiste čase so me zanimale razne uganke, ki so jih objavljali časopisi, in marsikatera je imela matematično jedro. Zanimala me je tudi astronomija.

Ko sem skušal razumeti, kako so izračunali razdaljo od Zemlje do Lune, sem se moral naučiti trigonometrije.

Katere knjige ste zato vzeli v roke?

Najprej sem študiral učbenike matematike za višje razrede. V slovenščini takrat razen šolskih knjig ni bilo matematične literature. V študijski knjižnici v Mariboru sem dobil nekaj knjig iz višje matematike, ki pa sem jih sprva bral z veliko težavo, ker nisem znal nemško; nemščino kot tuj jezik so nam namreč v gimnaziji po dveh letih zamenjali s francoščino.

Danes je le precej bolje. Omenimo le Sigmo, katero ste Vi odprli z Rešenimi in nerešenimi problemi matematike, pozneje ste dodali še knjižici Algebra in Števila in matematične teorije.

Bral sem tudi poljudnoznanstvene knjige iz naravoslovja, med njimi Vidmarjevi Moj pogled na svet in Oslovski most, ki sta tedaj izšli. Velik vtis pa sta napravili name Čermeljevi knjigi o astronomiji in o R.Boškoviću. Posebno me je pretresla zadnja knjiga, iz katere sem prvič zvedel za relativnostno teorijo in za neevklidsko geometrijo. Prej sem bil trdno prepričan, da je edina možna geometrija evklidska geometrija, ki smo se je učili v šoli. Tedaj je bila relativnostna teorija razmeroma nova, prav tako kvantna mehanika s principom nedoločenosti. Obe sta imeli velik vpliv tudi na filozofijo. Posebno kvantna mehanika je zamajala staro sliko sveta, kjer si vedno lepo sledita vzrok in posledica.

Ampak fizike potem niste šli študirat, čeprav ste se pri znanstvenem delu ukvarjali tudi z uporabo matematike v fiziki.

Fizika takrat na ljubljanski univerzi še ni bila tako močna, kot je danes. Tudi nimam daru za eksperimentalno delo. Že v srednji šoli pa sem zvedel, da je v Ljubljani dobra matematična šola s Plemljem in Zupančičem.

Študentska leta?

V Ljubljani je bilo kar trdo, ker me od doma niso mogli podpirati. V Mariboru sem si pomagal z inštrukcijami, v Ljubljani pa sem prišel v čisto novo okolje. Bolje je bilo, ko me je profesor Plemelj po kolokviju ob prvem semestru priporočil za sprejem v Oražnov dom, kjer sem dobil stanovanje zastonj, hrano pa sem imel tam že prej skoraj zastonj. Prava sreča je bila, da sem že v prvem letniku poslušal predavanja pri profesorju Plemlju. Sprva sem bil kar nekako razočaran. Predstavljal sem si, da na univerzi predavajo tako, da je dostopno samo izbrancem. Pa je profesor Plemelj vse povedal izredno preprosto, da je "vsakdo razumel". Seveda, bil je takrat eden največjih evropskih matematikov in izvrsten učitelj.

Doktorirali ste izredno hitro, komaj mesec dni po diplomi.

Disertacijo sem imel napravljeno že prej. Bilo je takoj po začetku vojne, ko sem diplomiral in promoviral. Takoj nato sem dobil Turnerjevo štipendijo. Rad bi bil šel na študije v Pariz. Zaradi vojne to ni bilo mogoče, pa sem šel za eno leto v Rim. Ko sem se vrnil v Ljubljano, so me Italijani poslali v taborišče Gonars. Imel sem srečo, zame sta se pri italijanskih oblasteh zavzela Plemelj in Ramovš z Akademije in po mesecu dni so me izpustili.

Ste potem kdaj bili v Parizu?

V začetku petdesetih let sem bil nekajkrat po mesec ali dva pri profesorju Mandelbrojtu.

Koliko študentov je šlo skozi Vaše roke do zdaj?

Leta 1946 sem postal docent. Kakšnih 15 let sem bil izpraševalec iz matematike za študente tehničnih fakultet in v tem času je opravilo pri meni izpite nekaj tisoč študentov. Zadnja leta, ko predavam le študentom matematike, in to predvsem v višjih letnikih, imam izpitov precej manj, le okrog 1000 jih naštejem v svojem zvezku.

Kaj pa, če bi šteli še vse, ki so študirali po Vaši Višji matematiki?

Teh bi bilo precej več.

Kaj bi svetovali mladim, ki se zanimajo za matematiko?

če vas veseli matematika, vas bo zanimanje zanjo samo gnalo naprej. Konjunktura poklica je pa vprašljiva. Zdajle res matematik dokaj lahko najde delo, za desetletje naprej je pa težko napovedati.

Kaj menite o računalniku?

Imam žepnega, a ga skoro ne uporabljam. Je pa res, da včasih pride prav tudi v matematiki. N.pr. v teoriji števil s pomočjo računalnika z eksperimentiranjem odkrijemo kako zakonitost, ki jo je seveda treba potem še dokazati. Računalnik ne more sam - vsaj zaenkrat - delati matematike. Vendar, poglejte v teorijo grafov. S pomočjo računalnika so ugnali problem štirih barv.

Prosim za kratko nalogo za bralce Preseka.

Tole vam dam, le bojim se, da bo malce pretežka:
Na pet decimalk izračunajte deseti koren iz deset, samo s svinčnikom in papirjem seveda.

Profesor Vidav, hvala lepa.

Peter Petek

KRATKOČASNE VŽIGALICE *

6. Iz petih vžigalic sestavi kvadrat z diagonalo. Nato daj diagonalo stran! Ali znaš sestaviti isti vzorec samo s premikanjem ostalih štirih vžigalic?

* V tretji številki devetega letnika smo začeli po delih objavljati to zbirko nalog, ki jo je za Presek napisal Roman Rojko. Se nadaljuje. (Op.ur.)

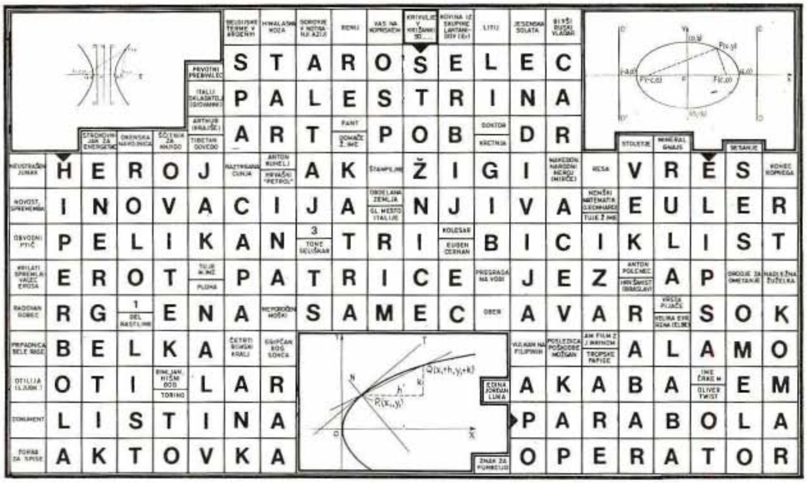
UVODNIK

Pred seboj imate četrto, to je zadnjo številko devetega letnika Preseka. Vsebina je pisana. Kljub denarnim težavam bomo v tem šolskem letu natisnili še peto in šesto številko. Njuna vsebina pa bo enotna. V peti številki bomo predstavili nekoliko razširjeno "Enajsto šolo iz fizike" profesorja Ivana Kuščerja. Starejši bralci Preseka se je morda še spominjajo. V uredništvu smo menili, da morate to lepo delo spoznati tudi vi. V šesti številki bomo natisnili prvi del zbranih matematičnih nalog za osnovnošolce avtorja Pavleta Zajca "Tekmujmo za Vegova priznanja". Ta del bo vseboval zbirko rešenih nalog iz matematike za 5. in 6. razred osnovne šole v SR Sloveniji.

Rokopisa za zadnji letošnji številki Preseka smo dobili prepozno, tako da bosta izšli šele sredi junija, ko učencev osmih razredov in maturantov ne bo več v šolo. Le-te prosimo, da se jeseni oglasijo na šoli in prosijo svojega učitelja za ti dve številki, ki sta seveda vključeni v letno naročnino. Če se kateri od teh učencev ne bi zglasil in bi izvodi ostali na šoli, jih gotovo ne bo težko podariti mlajšim učencem, katerim sta obe številki tudi namenjeni.

Jeseni bosta izšli še dve knjižici zbranih matematičnih nalog, in sicer zbirka za 7. razred in zbirka za 8. razred, dobili pa ju bodo vsi, ki bodo naročeni na Presek v šolskem letu 1982/83.

Andrej Likar



PRESEK - List za mlade matematike, fizike in astronome.
9. letnik, šolsko leto 1981/82, 4. številka, str. 193-256

Rokopis je natipkala Ivanka Breznikar, jezikovno ga je pregledala Ivanka Šircelj, opremila pa sta ga Borut Delak in Višnja Kovačič, slike sta narisala Rafko Šavli in Vili Vrhovec.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS - PRESEK, Jadranska 19, 61111 Ljubljana, p.p.6, tel. (061)265-061/53, štev. žiro računa 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki štev. 50100-620-107-257300-5694/4. Naročnina za šolsko leto je za posamezna naročila 87,50 din, za skupinska pa 70.- din; za inozemstvo 7 $, 5600 Lit, 100.-Asch. Posamezna številka stane 21.- din.

List sofinancirata ISS in RSS.

Ofset tisk časopisno in grafično podjetje "DELO", Ljubljana.

List izhaja štirikrat letno. Naklada 20.000 izvodov.

MATEMATIKA

DESETI KOREN IZ DESET

Profesor Vidav nam je v pogovoru zastavil nalogo, izračunati deseti koren iz deset na pet decimalk, seveda samo s svinčnikom in papirjem. Pri reševanju te naloge si bomo pomagali z dvema rezultatoma, ki ju je prav lahko preveriti, le nekaj računanja je treba.

Najprej opazimo, da je $2^{10} = 1024$, kar blizu številu tisoč, t.j. 10^3. Zapišemo približno "enačbo"

$$2^{10} = 10^3 \qquad (1)$$

Druga reč je deseta potenca vsote. Poznamo že kvadrat in kub vsote:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Za deseto potenco pa imamo

$$(a + b)^{10} = a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10} \qquad (2)$$

kar prav lahko preverimo, le "malo" več računanja je.

"Enačbo" (1) kubiramo in še pomnožimo z 10

$2^{30} = 10^9$

$10.2^{30} = 10^{10}$

Delimo s številom $2^{30} = 8^{10}$ in potegnemo deseti koren
$\sqrt[10]{10} = \frac{10}{8}$

Očitno je ta približek premajhen. Imamo tedaj pozitivno število x, tako da je

$$\sqrt[10]{10} = \frac{10}{8} + x \qquad (3)$$

Enačbo (3) pomnožimo z 0,8

$$\frac{8}{10}\sqrt[10]{10} = 1 + 0{,}8x$$

in potenciramo z deset

$$8^{10}.10^{-9} = (1 + 0{,}8x)^{10}$$

Levo stran zgornje enačbe lahko zapišemo kot

$$2^{30}.10^{-9} = (2^{10}.10^{-3})^3 = 1{,}024^3 = 1{,}073741824$$

Na desni strani pa uporabimo formulo (2).

$$1{,}073741824 = 1 + 8x + 36.0{,}8x^2 + 96.0{,}64x^3 + \dots. \qquad (4)$$

S pikicami smo "zapisali" preostalih sedem členov. Takoj bomo namreč ugotovili, da so tako majhni, da se pri računanju na pet decimalk nič ne poznajo. Ker so vsi členi pozitivni, lahko takoj opazimo, da je $x < 0{,}01$, že če upoštevamo le prva dva člena na levi strani enačbe (4). Pravzaprav, če smo natančnejši in upoštevamo na levi tri člene, dobimo, da je $x < 0{,}009$. Res, za $x = 0{,}009$ je

$$1 + 8x + 36.0{,}8x^2 = 1{,}0743328$$

kar je že preveč.

Predelamo enačbo (4)

$$8x = 0{,}073742 - 36.0{,}8x^2 - 96.0{,}64x^3 - \dots$$

$$x = 0{,}009218 - 3{,}6x^2 - 96.0{,}08x^3 - \dots \qquad (5)$$

Tu smo račun zaokrožili na šest decimalk. Če hočemo namreč pet točnih mest, moramo vedeti tudi še šesto decimalko. Ocenimo najprej člen z x^3. Ker je $x < 0{,}009$, ta členi ni večji kot

$$96.0{,}08.0{,}9^3.10^{-6} = 7{,}68.0{,}729.10^{-6} = 5.10^{-6}$$

Naslednji členi so še manjši in jih res lahko izpustimo.
Iz enačbe (5) in zgornje ocene vidimo, da moramo od 0,009218 odšteti še $3{,}6x^2$. Ampak kako, če iksa ne poznamo? No, vemo pa,

da je x nekaj manjši od 0,009. Če odštejemo $3{,}6 . 0{,}009^2 = 0{,}000292$, dobimo

$x = 0{,}008926$

kar je za malenkost premalo, saj smo odšteli preveč. Če pa za to odštevanje vzamemo $x = 0{,}0089$, bomo odšteli

$3{,}6x^2 = 3{,}6 . 0{,}000079 = 0{,}000285$

in število x je enako

$x = 0{,}008933$

Pet decimalk je tedaj trdnih. Pogledamo enačbo (3) in zapišemo deseti koren iz deset na pet decimalk

$$\sqrt[10]{10} = 1{,}25893$$

Peter Petek

7. Iz sekire naredi 3 trikotnike s premikom 4 vžigalic!

8. Iz ključa naredi 3 kvadrate s premikom 4 vžigalic!

Z IGRO SPOZNAJMO TELESA

Navodilo: Pri sestavljanju teles potrebuješ plastelin in enako dolge paličice. Oboje že dobiš pripravljeno v *"geometrijski zložljivki"*. Če geometrijske zložljivke nimaš, poprosi zanjo učitelja, ki ti jo bo gotovo posodil. Lahko pa si oboje pripraviš tudi sam. Zelo pripravne so plastične paličice, ki jih uporabljajo učenci nižjih razredov osnovne šole. Dobiš jih v vsaki knjigarni in še drage niso.

Iz plastelina oblikuj kroglice. To bodo *oglišča* teles, ki jih boš sestavljal. S paličicami je treba kroglice povezati v telo tako, kot zahtevajo navodila in tabela. Telesa, ki jih boš tako sestavil, so *trikotni enakorobni konveksni poliedri*. To pomeni, da so telesa *izbočena*, da so vsi *robovi* na površju telesa skladni, vendar pa se v vseh ogliščih ne stika vselej enako mnogo robov. Posvetili se bomo le takim telesom, katerih površje pokrivajo *trikotniki*. Odslej bomo takim telesom rekli kar enakorobni poliedri.

Če te matematična utemeljitev enakorobnih poliedrov ne zanima preveč ali pa se ti zdi preveč zahtevna, lahko točko 1. preskočiš in začneš sestavljati telesa po opisu v točki 2. Morda pa te bo sestavljanje navdušilo do te mere, da se boš po uspešnem delu vrnil in prebral tudi točko 1.

1. Kot rečeno, se bomo ukvarjali s takimi enakorobnimi poliedri, katerih površje pokrivajo trikotniki, vendar tako, da se v nekaterih ogliščih stikajo po trije trikotniki (tako oglišče bomo označili o_3), v nekaterih štirje (tako oglišče bomo označili o_4) in v nekaterih ogliščih naj se stika pet trikotnikov (oznaka zanje je o_5).

Naloga: Bralec naj sam ugotovi, zakaj ni oglišč, v katerih bi se stikalo šest (ali več) trikotnikov.

Naloga: Ali je lahko raznostranični trikotnik ploskev enakorobnega poliedra?

Kot za vsako telo, velja tudi za enakorobne poliedre *Eulerjev poliedrski obrazec* (1) :

$$o - r + p = 2 \tag{E}$$

(o je število oglišč, r število robov, p število ploskev na površju poliedra.)

Za enakorobne poliedre, pokrite s trikotniki, sklepamo takole: Naj ima telo r robov. Tedaj ima $2r$ oglišč, vendar pri tem štejemo oglišča o_3 trikrat, oglišča o_4 štirikrat in oglišča o_5 petkrat. Zato velja:

$$3o_3 + 4o_4 + 5o_5 = 2r \tag{1}$$

Podobno teče misel za ploskve. Ob vsakem robu se stikata dve ploskvi, torej ima polieder $2r$ ploskev. Ker so ploskve trikotniki, vsako ploskev štejemo trikrat in je v resnici vseh ploskev $2r/3$. Odtod dobimo:

$$2r = 3p \tag{2}$$

Zvezi (1) in (2) upoštevamo v Eulerjevem obrazcu za poliedre, ki ga najprej pomnožimo s 6 ($6o = 6r - 6p + 12$). Tako dobimo:

$$3o_3 + 2o_4 + o_5 = 12 \tag{3}$$

Ta enačba nam pomaga poiskati enakorobne poliedre. Ti ne morejo imeti manj kot 4 ali več kot 12 oglišč.

Naloga: Pokaži, da ni enakorobnega poliedra, ki bi bil pokrit s trikotniki in bi imel več kot 12 oglišč. Pomagaj si z enačbo (3)!

Za zgled začnimo raziskavo z enakorobnim poliedrom, ki ima štiri oglišča. Dvoje mora veljati zanj: $o_3 + o_4 + o_5 = 4$ in $3o_3 + 2o_4 + o_5 = 12$. Rešitev je ena sama: $o_3 = 4$ in $o_4 = o_5 = 0$. Ta enakorobni polieder ima štiri oglišča, v katerih se stikajo po trije trikotniki.

Iz enačbe (1) lahko izračunamo število robov; teh je 6.

Enačba (2) pa nam pove število ploskev, ki ga pokrivajo; te so v našem primeru 4. Vse, kar smo izvedeli o tem poliedru, podajmo v pregledni tabeli:

(1) J.S.Taylor: Pravilna telesa, Presek 1980-81, št. 3

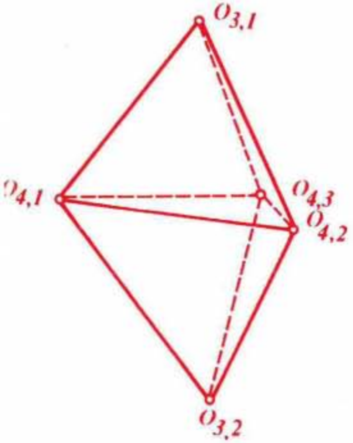
o	o_3	o_4	o_5	r	p
4	4	0	0	6	4

Iz podatkov, ki ga opišejo, spoznamo pravilno telo četverec (tetraeder).

Izbrali smo si lažji primer. Že pri raziskovanju naslednjega predstavnika, za katerega želimo, da ima 5 oglišč, najdemo iz enačb: $o_3 + o_4 + o_5 = 5$ in $3o_3 + 4o_4 + 5o_5 = 12$ dve rešitvi

o	o_3	o_4	o_5	r	p
5	3	1	1	9	6
5	2	3	0	9	6

Toda model enakorobnega poliedra lahko naredimo le za drugi primer (slika 1).



Slika 1

Naloga: Pokaži, da za enakorobne poliedre, ki imajo najmanj 6 in največ 12 oglišč, obstaja 16 možnosti.

Vendar za vse rešitve ne moremo sestaviti modelov. V tabeli so zbrani tisti enakorobni poliedri, za katere boš lahko sestavil modele.

2. Pred seboj imaš tabelo s podatki za enakorobne poliedre.

	o	o_3	o_4	o_5	r	p
1.	4	4	-	-	6	4
2.	5	2	3	-	9	6
3.	6	-	6	-	12	8
4.	7	-	5	2	15	10
5.	8	-	4	4	18	12
6.	9	-	3	6	21	13
7.	10	-	2	8	24	16
8.	12	-	-	12	30	20

o pomeni število vseh oglišč poliedra. Toliko plastelinastih kroglic moraš narediti.

r nam pove število robov, kar pomeni, da moraš vzeti toliko paličic.

Med skupnim številom oglišč o, jih je o_3 takih, v katerih se stikajo trije enakostranični trikotniki in moraš vanje zabosti toliko paličic, da boš z njimi oblikoval tri trikotnike. Podobno velja za oglišča o_4, v katerih se stikajo štirje enakostranični trikotniki, in o_5, v katerih se stika pet enakostraničnih trikotnikov.

Z nekaj domiselnosti in spretnosti moraš vse kroglice in vse paličice povezati v celoto tako, da opis poliedra ustreza zahtevam v tabeli. Lahko si še pomagaš tako, da oblikuješ oglišča o_3, o_4 in o_5 vsaka s plastelinom svoje barve.

Danijel Bezek

FIZIKA

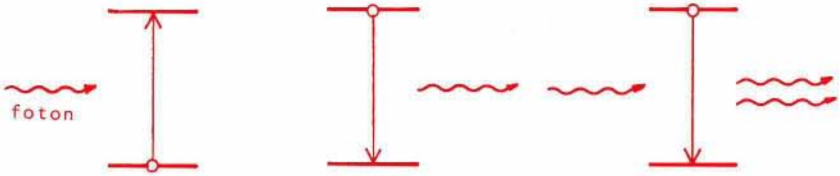
LASER

V 4. številki Preseka letnika 1980/81 smo spoznali nekatere lastnosti laserske svetlobe. Danes si oglejmo, kako *laser* deluje.

Za zgled si vzemimo šolski laser, ki ga vsi dobro poznamo. Napis na njem pravi, da je to *plinski laser* in da je v njem mešanica helija in neona. Ko odpremo ohišje, opazimo najprej tanko stekleno cev, v katero sta zavarjena električna priključka. Krajišči cevi zapirata majhni zrcalci. Eno od zrcal je popolno, drugo pa polprepustno. Ko laser vključimo, steče po plinu električni tok in plin zasveti v rdeči svetlobi. Vzdolž cevke izhaja na krajišču s polprepustnim zrcalom curek značilne rdeče svetlobe. Zanjo vemo, da je *monokromatična* in *koherentna*. Svetloba, ki izhaja iz cevke v drugih smereh, se ne razlikuje od svetlobe navadnih svetil. V spektru te svetlobe najdemo množico spektralnih črt, ki so značilne za helij in za neon. Lepo jih vidimo, ko s spektroskopom opazujemo svetlobo, ki prihaja iz laserja od strani.

Zakaj plin v cevi sveti, ko teče skozenj električni tok? Atomi plina v cevi doživljajo neprestano trke z elektroni in s pozitivnimi ioni. Pri tem lahko preidejo iz *osnovnega stanja* v *vzbujeno stanje* z večjo energijo. V vzbujenem stanju pa atom ne more ostati dalj časa. Že po preteku okoli 10^{-8}s preide v stanje z manjšo energijo, lahko kar v osnovno stanje. Pri tem odda svetlobo. Frekvenca svetlobe je sorazmerna z energijsko razliko med začetnim in končnim stanjem. Čim večje je število vzbujenih stanj, tem več je v spektru svetlobe, ki jo seva vzbujeni plin, značilnih spektralnih črt z izbranimi frekvencami ali valovnimi dolžinami.

Svetlobo, ki jo atom izseva pri prehodu iz stanja z višjo energijo v stanje z nižjo energijo, lahko atom tudi absorbira. V začetku mora biti seveda atom v stanju z nižjo energijo, iz tega pa preide z absorpcijo svetlobe v stanje z višjo energijo. Sliki 1a in 1b ponazarjata primer, ko prehaja atom z absorpcijo in s sevanjem svetlobe med osnovnim stanjem in enim od vzbujenih stanj. Takemu sevanju pravimo *spontano* sevanje. Zanimiva pa je še ena vrsta dogodkov: pri prehodu iz vzbujenega stanja v energijsko nižje ležeče stanje atom izseva svetlobo. Pri obratnem prehodu atom to svetlobo absorbira. Lahko pa se zgodi, da oddana svetloba pospeši izsevanje svetlobe pri atomu, ki je v vzbujenem stanju. Oddano svetlobno valovanje je v tem primeru v fazi z valovanjem, ki je pospešilo prehod. Temu pojavu pravimo *stimulirano* sevanje. Shematično ga kaže slika 1c.



a) absorpcija

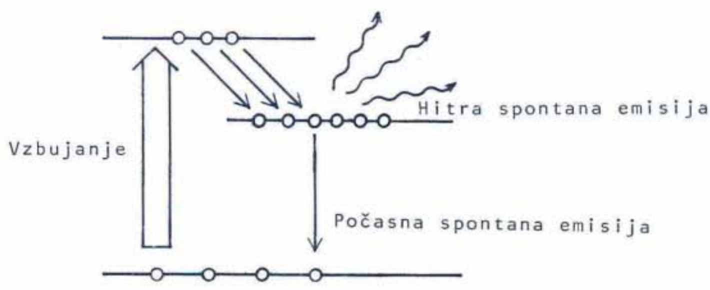
b) spontana emisija

c) stimulirana emisija

Slika 1

Svetloba, ki jo oddajajo vzbujeni atomi pri spontanem sevanju, je nekoherentna. To si lahko predstavljamo z gladino vode, na katero padajo dežne kaplje. Z mesta, kjer pade deževna kaplja na gladino, se širijo na vse strani krožni valovi. Med valovanji, ki jih povzročajo posamezne kaplje, ni nobene fazne povezave - so nekoherentna. Za stimulirano sevanje, ki je koherentno, pa moramo v naši deževni prispodobi zahtevati, da padajo kapljice dežja ubrano. Takrat bodo imela tudi valovanja, ki izhajajo iz točk na gladini, kamor zadevajo kaplje, določeno fazno povezavo. Takega dežja v naravi seveda ni. V atomskem svetu pa smo našli stimulirano valovanje. Pri delujočem laserju prevladuje stimulirano sevanje nad spontanim sevanjem in absorpcijo. Takrat lahko dobimo koherentno svetlobno valovanje.

Da se to zgodi, mora v plinu število atomov v začetnem vzbujenem stanju dovolj presegati število atomov v končnem stanju. Pri plinu, v katerem prehajajo atomi le med dvema stanjema - osnovnim in vzbujenim - se to ne more zgoditi. Število atomov v vzbujenem stanju je lahko kvečjemu enako številu atomov v osnovnem stanju. Do presežka števila atomov v začetnem vzbujenem stanju pa lahko pride, če ima atom še tretji nivo. Tak primer kaže sl. 2.



V stanju 2 je več elektronov kot v stanju 1 - obrnjena zasedba.
Slika 2

Atome spravimo v višje vzbujeno stanje z električnim tokom ali s svetlobo. Iz višjega vzbujenega stanja s spontanim sevanjem hitro preidejo na nižje vzbujeno stanje. Če je to stanje takšno, da so prehodi s sevanjem v osnovno stanje težavni, se število atomov v tem stanju v primerjavi s številom atomov v osnovnem stanju brž poveča.

Razmere v takem sistemu atomov si lahko ponazorimo na takle način. Smučišče ima širok zgornji in ozek spodnji del. Smučarji se po širokem zgornjem delu smučišča hitro spustijo na srednji nivo, tam pa morajo počakati, da se lahko spustijo po spodnjem delu. Ob nedeljah, ko je število smučarjev veliko, se bo nabrala vrsta za spust po spodnjem delu proge, ob dnu smučišča pa vrste ne bo. Smučišče z ozkim zgornjim delom in širokim spodnjim delom pa nam lahko rabi kot model za nastanek druge možne obratne zasedbe v sistemu s tremi nivoji. Če je vlečnica, ki vozi smučarje navzgor, dovolj hitra, se bodo nabirali ob zgornji postaji, ob prehodu v širši del smučišča pa vrste ne bo. Tej sliki ustreza sistem atomov, pri katerih je prehod iz višjega vzbujenega stanja v nižje vzbujeno stanje otežen, lahek pa je iz nižjega vzbujenega stanja v osnovno stanje. Za delovanje laserja je pomembno, da je število atomov v višjem vzbujenem stanju večje od števila atomov v nižjem vzbujenem stanju. Vsako tako zasedbo nivojev, pri kateri je število atomov v stanjih z manjšo energijo, imenujemo *obrnjeno* ali *invertirano zasedbo*.*

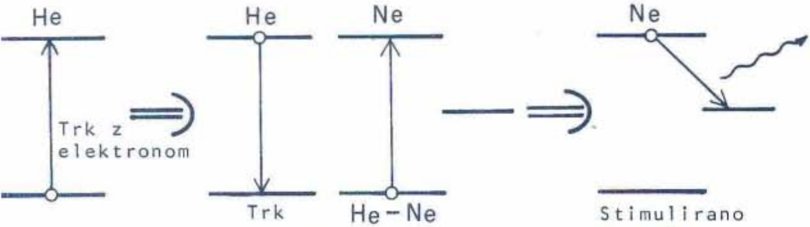
V sistemu atomov z invertirano zasedbo nivojev lahko prevlada stimulirano sevanje nad spontanim sevanjem in nad absorpcijo, če je le dovolj velika gostota svetlobnega toka s frekvenco, ki je sorazmerna z energijsko razliko med nivojema. Tako gostoto lahko dosežemo, če zapremo sistem atomov v posodo z idealno odbojnimi stenami. Pravzaprav zadoščata le *dve zrcali*.

Slika 3 - optični resonator

* Tako stanje smo seveda lahko dosegli le s hudim posegom v sistem atomov. V sistemu atomov, ki je prepuščen samemu sebi, je število atomov v stanju z večjo energijo vselej manjše kot število atomov v stanju z manjšo energijo. Za zasedbo nivojev velja podobna zakonitost kot za zračni tlak na Zemlji - čim višje gremo, tem manjši je.

Sl. 3 ponazarja, kaj se dogaja s svetlobnim valovanjem v svetleči snovi med zrcaloma. Svetloba, ki jo pri spontanem prehodu izseva atom, prej ali slej uide iz cevi. V smeri osi se svetlobni val s stimuliranim sevanjem ojačuje. Med zrcaloma dobimo *stoječe svetlobno valovanje* na podoben način, kot dobimo stoječe zvočno valovanje v piščali. Tako "svetlobno piščal" z zrcaloma na krajiščih imenujemo *optični resonator*. Del svetlobe prihaja iz resonatorja skozi eno od zrcal, ki je delno propustno. Svetlobni tok v curku je odvisen od izdatnosti *črpanja* atomov iz osnovnega vzbujenega stanja v zgornje vzbujeno stanje. Laser ne more oddajati svetlobe, če se poruši ravnovesje med močjo črpanja, stimuliranim sevanjem, absorpcijo in močjo, ki jo odnaša curek. Laser zaradi tega tudi ne more delovati s poljubno majhno močjo.

Zanimivo je, kako je dosežena invertirana zasedenost nivojev v helij-neonskem laserju. V laserju je plinska mešanica približno v razmerju 10 atomov helija na atom neona. V električnem toku prehajajo ob trkih z elektroni mnogi atomi v vzbujena stanja. Praviloma preide v vzbujena stanja z večjo energijo manj atomov kot v vzbujena stanja z manjšo energijo. Za delovanje laserja je odločilno, da imajo atomi helija in neona nekaj vzbujenih stanj z enako energijo. Atomi helija lahko pri trkih z elektroni preidejo v vzbujena stanja, iz katerih je prehod v osnovno stanje s sevanjem zelo težaven. Zato ostanejo v teh stanjih toliko časa, da z veliko verjetnostjo predajo svojo energijo ob trkih atomom neona. Iz vzbujenega stanja preidejo atomi neona v *vmesno vzbujeno stanje*, iz tega pa zelo hitro v osnovno stanje (sl. 4).



Slika 4 Delovanje helij-neonskega laserja

če je vzbujanje preko helija dovolj močno, je lahko v zgornjem vzbujenem stanju več atomov neona kot v vmesnem - kar omogoča lasersko delovanje. Pri prehodu med takima dvema stanjema odda atom neona svetlobo z valovno dolžino 6328 nm, torej svetlobo, ki jo oddaja šolski laser. Pri prehodu električnega toka po mešanici helija in neona pride do invertirane zasedbe še med enim parom nivojev. Atom neona izseva pri prehodu med njima infrardečo svetlobo z valovno dolžino 1,15 um. Helij-neonski laser lahko deluje pri eni ali pri drugi valovni dolžini. V šolskem laserju so zrcalca, ki močno odbijajo vidno svetlobo, slabo pa infrardečo. Opremljen z zrcalci za infrardečo svetlobo bi laser oddajal svetlobo z valovno dolžino 1,15 um.

Na koncu si nekoliko oglejmo še druge vrste laserjev. Zelo znani sta še dve vrsti plinskih laserjev. Prvi je *argonski laser*, ki lahko oddaja zeleno ali modro svetlobo z močjo do 20 W. Drugi laser je na *ogljikov dioksid*. Oddaja nevidno infrardečo svetlobo z valovno dolžino 10 um in z močjo do 10 kW. To je že dovolj za obdelavo materialov. Vsi plinski laserji delujejo v neprekinjenem curku in vse vzbujamo z električnim tokom.

Prvi delujoči laser je bil narejen iz *rubinske paličice* z zrcalci na krajiščih. Rubin je kristal Al_2O_3 s primesjo kromovih ionov, ki dajejo kristalu značilno rdečo barvo. Takšna je tudi barva svetlobe, ki jo oddaja *rubinski laser*. Paličico iz rubina osvetljuje močna bliskovna luč. Ob vsakem blisku odda paličica blisk rdeče svetlobe. Na podoben način delujejo tudi laserji, v katerih uporabljajo *paličice iz stekla*, v katero so vgrajeni *ioni neodima*. Ti laserji oddajajo bliske infrardeče svetlobe z valovno dolžino okoli 900 nm.

Posebna skupina so *polprevodniški laserji*. To so svetleče diode, podobne tistim, ki jih imajo številčnice žepnih kalkulatorjev. Dodani sta še zrcalci, ki imata enak pomen kot pri drugih laserjih. Med preostalimi laserji so posebej imenitni *laserji na organska barvila*. Molekule organskih barvil imajo zelo na gosto nanizana vzbujena stanja. S primernim oblikovanjem optičnega resonatorja lahko v precej širokem območju izbiramo valovno dolžino svetlobe, ki naj jo laser oddaja. Barvilo vzbujamo z bliskovno lučjo ali pa s kakim laserjem.

Raziskovalci pogosto poročajo o novih vrstah laserjev in o novih možnostih za njihovo uporabo. Upamo, da vam bo površna slika o delovanju laserjev, ki ste jo pridobili ob tem prispevku, v pomoč pri prebiranju novic. Veseli bomo tudi vprašanj, ki se vam porodijo ob tem.

Martin Čopič
(priredil Marjan Hribar)

NOBELOVI NAGRAJENCI ZA FIZIKO V LETU 1981

Jeseni leta 1981 so dobili Nobelove nagrade za fiziko Šved *Karl Manne Börje (Kai) Siegbahn*, Američan *Arthur L. Schawlow* in Holandec, sedaj naturaliziran Američan, *Nicolaas Bloembergen*.

Sl.1 K.M.B.Kai Siegbahn

Sl.2 Nicolaas Bloembergen

Sl.3 Arthur L.Schawlow

Siegbahn je dobil nagrado za pionirske raziskave na področju *fotoelektronske spektroskopije*, Schawlow in Bloembergen pa za zasluge pri razvoju *laserske spektroskopije*. Lanske nagrade so bile torej priznanje za dosežena nova spoznanja v *spektroskopiji*. Spektroskopija je obširno raziskovalno področje v naravoslovju. Zelo splošno lahko rečemo: spektroskopija preiskuje valovanje ali delce, ki jih oddaja kak sistem, z namenom, da bi dobili nove informacije o lastnostih sistema. Valovanje ali delce lahko preiskovani sistem oddaja sam od sebe ali pa jih nanj pošljemo in potem ugotavljamo, kolikšne so spremembe, ko so sistem zapustili.

Siegbahn je s sodelavci po letu 1950 domiselno dopolnil naprave, ki so jih uporabljali za študij elektronov pri jedrskih reakcijah. Uspeli so izmeriti hitrosti in s tem kinetične energije počasnih elektronov, ki jih iz trdnih preiskovanih vzorcev izbija rentgenska svetloba. Nekaj elektronov ima kinetične energije, ki so porazdeljene po širokem energijskem območju. Te nas sedaj ne zanimajo. Zanimivi pa so preostali elektroni z natančno določenimi kinetičnimi energijami, ki so značilne za določeno snov. Te energije so povezane z energijami, s katerimi so elektroni vezani v atomu. Tako določene *vezavne energije* elektronov v atomih pri posameznih elementih so bile vsaj 10-krat natančneje določene kot dotlej. Še korak naprej je bilo spoznanje, da sosednji elektroni vplivajo na vezavno energijo danega elektrona. Z drugimi besedami: vezavna energija elektrona je odvisna od *kemijske vezi*. Določenemu elektronu v neki kemijski vezi se spremeni vezavna energija, če se kemijska vez spremeni. Pri tem pa imamo v obeh primerih določen elektron v atomu istega elementa. Tej razliki v vezavni energiji elektronov pravijo *kemijski premik* in je osnova *elektronske spektroskopije za kemijsko analizo*, bolj poznane po začetnicah ESCA.

Ta veja spektroskopije se je izredno uveljavila pri raziskavah *površin trdnih snovi* in pri študiju *katalize*, *korozije* in *adhezije*, kar je zelo zanimivo tudi za industrijo in tehnologijo.

O *laserjih* in *laserski svetlobi* je tekla beseda v 4. številki Preseka letnika 1980/81 ter v tej številki na strani.... in te pojme že poznamo. Schawlow je bil sodelavec C.H.Townesa, ko sta leta 1958 zapisala osnovne principe, po katerih bi se dalo zgraditi *laser* (takrat so mu rekli optični mikrovalovni ojačevalnik stimuliranega sevanja - *optični maser*). Prvi ga je uspel zgraditi T.H.Maiman leta 1960. Američan C.H.Townes pa je dobil Nobelovo nagrado leta 1964 skupaj s sovjetskima fizikoma A.M.Prohorovim in N.G.Basovim. Schawlow je uspešno nadaljeval delo z laserji in jih uporabil pri raziskavah atomov in dvoatomskih molekul. Skupaj s sodelavci je uvajal laserje v *lasersko spektroskopijo*, ki je postala bolj precizna kot nekatere do takrat znane tehnike optične spektroskopije.

Bloembergen je začel raziskovalno delo na področju *radiofrekvenčne spektroskopije*, točneje *jedrske magnetne resonance*, in ga je nadaljeval z laserji. Posvetil se je študiju vpliva *močnih električnih polj* pri laserjih in dosegel pomembna nova spoznanja v *nelinearni optiki*. Pri nelinearnih pojavih v optiki je odziv opazovanega sistema nabitih delcev v snovi sorazmeren z višjimi potencami električne poljske jakosti. Kadar je odziv opazovanega sistema sorazmeren s prvo potenco neke količine, pravimo, da je pojav *linearen*. Tako rečemo na primer: sila, ki deluje na vijačno vzmet, je sorazmerna z raztezkom vzmeti ($F=ks$). Ali pa: moč, ki jo troši električni grelec z uporom R, je sorazmerna s kvadratom toka ($P=RI^2$). V prvem primeru je odvisnost linearna, v drugem pa kvadratna (torej nelinearna).

Še nekaj podatkov iz "osebnih izkaznic" nagrajencev:
K.M.N.Siegbahn je bil rojen leta 1918. Študiral je na univerzah v Uppsali in v Stockholmu. Je profesor na univerzi v Uppsali.

A.L.Schawlow je bil rojen leta 1921 v ZDA. Študiral je na univerzi v Torontu, delal na univerzi Columbia in v Bellovih laboratorijih. Od leta 1961 je profesor na univerzi Stanford.

N.Bloembergen je bil rojen leta 1920 na Holandskem. Študiral je na univerzah v Utrechtu in Leidenu in delal na univerzah v Utrechtu in Harvardu, kjer je sedaj profesor.

Vsi trije nagrajenci so avtorji več knjig, ki so že ob izdaji vzbudile veliko zanimanje v strokovnih krogih. Vsi trije so sodelovali z drugimi Nobelovimi nagrajenci: Siegbahnov oče M.Siegbahn je dobil Nobelovo nagrado za fiziko leta 1924; omenili smo že, da je Schawlow sodeloval s C.H.Townesom, ki je dobil Nobelovo nagrado leta 1964; N.Bloembergen pa je ob prihodu v ZDA sodeloval z E.Purcellom, ki je dobil Nobelovo nagrado leta 1952.

Zvonko Trontelj

DOLGA, DOLGA POT DO ENERGIJSKEGA ZAKONA

Iz zgodovine fizike

Energija je ena najpomembnejših fizikalnih količin; uporabljamo jo v vseh delih fizike. Danes se nam zdi to skoraj samo po sebi razumljivo; ne zavedamo se, koliko naporov je bilo potrebnih, preden so fiziki nedvoumno vpeljali *delo*, *toploto*, *energijo* in zapisali *energijski zakon* (*prvi zakon termodinamike*). Kratek iz let v zgodovino fizike naj nas spomni na nekatere glavne postaje na dolgi poti do energijskega zakona.

Ponovimo nekaj osnovnih ugotovitev. Najprej se dogovorimo, katera telesa ali katero telo bomo podrobno opazovali. To je naš *sistem*, drugo je *okolica*. Sistem ima energijo in jo izmenjuje z okolico v obliki dela (mehaničnega ali električnega) ali toplote (k njej štejemo tudi energijo svetlobe). Energijo sistema lahko primerjamo z imetjem lastnika računa v banki, dovedeno delo z gotovino, ki jo kdo vplača na ta račun, in dovedeno toploto s čekom v dobro tega računa.

Po energijskem zakonu je sprememba polne energije sistema $W - W_o$ (W je energija na koncu in W_o energija na začetku) enaka dovedenemu delu A in dovedeni toploti Q:

$$W - W_o = A + Q$$

Polno energijo W sestavljajo kinetična energija W_k, ki jo določajo hitrosti teles v sistemu, W_n notranja energija, ki jo določa stanje sistema, in še druge vrste energije. Poseben primer zakona je *izrek o kinetični energiji*

$$W_k - W_{ko} = A$$

Pri tem je $W_k = \frac{1}{2}mv^2$ kinetična energija drobnega telesa z maso m in hitrostjo v, toplote pa ne dovajamo ($Q = 0$).

Za sistem, ki je popolnoma *neodvisen* od okolice, ki torej ne prejema ne dela ne toplote ($A = 0$, $Q = 0$), velja *zakon* (*izrek*) *o ohranitvi energije*:

$$W_o = W$$

Čeprav so fiziki dokaj pozno nedvoumno vpeljali delo in energijo, so imeli že dolgo nekakšen občutek zanju. Tako je Galileo Galilei (1564-1642) pri dviganju bremen s škripci ugotovil: "Kar pridobimo pri poti, izgubimo pri bremenu." Danes pravimo, da je delo produkt sile, v tem primeru teže, in premika njenega prijemališča. Pri danem delu je sila tem manjša, čim večji je premik njenega prijemališča, in obratno. Galilei je tudi slutil izrek o kinetični energiji, čeprav ga kot takega ni izrazil. Kroglica, ki jo je spustil po klancu navzdol, je na nasprotnem klancu dosegla skoraj začetno višino, nikdar je ni presegla.

Zametek izreka o kinetični energiji je bilo *načelo o živi sili* Christiana Huyghensa (1629-1693). Pri prožnih trkih dveh teles je opazil, da se ohranja vsota produktov mv^2 za obe telesi. To količino je imenoval *živa sila* (latinsko: vis viva). Sam temu spoznanju ni posvečal veliko pozornosti. Enako velja za Isaaca Newtona (1643-1727), ki je načelo najbrž tudi poznal. Tedaj je bil pač bolj v čislih Newtonov zakon:

$$F = ma$$

Po njem povzroči sila F, s katero delujejo na opazovano telo telesa iz okolice, pospešek telesa a.

Huygensova živa sila je prišla prav Wilhelmu Leibnizu (1646-1716), ko je pobijal trditve Renéja Descartesa (Kartezija, 1596-1650). Spor med njunimi pristaši se je iz druge polovice sedemnajstega stoletja zavlekel še globoko v osemnajsto stoletje. Na hitro povedano je Leibniz trdil, da je živa sila prava mera za učinkovitost sile, ki deluje na telo.

To je utemeljeval na primer takole: kamen doseže štirikratno višino, če ga vržemo navpično navzgor z dvojno začetno hitrostjo; odločilna je torej živa sila, ki je sorazmerna s kvadratom hitrosti. (Danes zapišemo izrek o kinetični energiji

$-\frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh$ in dobimo $h = v_0^2/2g$.)

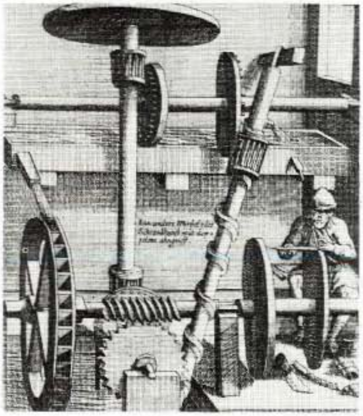
Descartes je temu nasprotoval: prava mera za učinkovitost sile je količina, ki je sorazmerna s hitrostjo v. Kamen se namreč dviga dvakrat dalj časa, če ga vržemo navpično navzgor z dvojno začetno hitrostjo.

Spor je bil v resnici čisto nepotreben, šlo je predvsem za prepir o poimenovanju. Ta ugotovitev je v glavnem zasluga Jeana d'Alemberta (1717-1783), ki je pokazal, da se oboje, torej Leibnizova in Descartova trditev, sklada z Newtonovim zakonom.

Pri Leibnizovem prijemu postavimo v izrek o kinetični energiji $F.s = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_o^2$ za končno hitrost $v = v_o + \Delta v$. Če je sprememba hitrosti Δv majhna v primeri z začetno hitrostjo v_o, smemo zanemariti $\frac{1}{2}(\Delta v)^2$ v primeri z $v_o\Delta v$ in sledi $F.\Delta s = mv_o\Delta v$. Obe strani delimo z Δt, pa imamo Newtonov zakon $F = ma$, saj je hitrost $v = \Delta s/\Delta t$ in pospešek $a = \Delta v/\Delta t$. Velja tudi obratno: izrek o kinetični energiji dobimo iz Newtonovega zakona, ko ga pomnožimo z majhnim premikom telesa (in integriramo, bi pristavili tisti, ki to že znajo in upoštevajo možnost, da se sila spreminja s krajem).

Pri Descartesovem prijemu pa pomnožimo Newtonov zakon s časom. Tako dobimo *izrek o gibalni količini:* $F.t = mv - mv_o$, če se sila s časom ne spreminja. Za gibanje kamna navpično navzgor sledi $-mg.t = -mv_o$ in $t = v_o/g$.

Besedo *energija* (grško: en, v; ergon, delo) za živo silo je menda prvič uporabil Thomas Young (1773-1829) leta 1807; besedo *delo* (v francoščini) pa menda leta 1826 Jean Victor Poncelet (1788-1867).



Sl. 1 Načrt za perpetuum mobile iz leta 1629.

Veliko vlogo je imelo na poti do energijskega zakona spoznanje, da ni mogoče zgraditi *perpetum mobile* (latinsko: nenehno se gibajoč) (sl. 1). To bi bila naprava, ki bi oddajala delo, ne da bi ji dovajali delo in ne da bi prišlo v njej do trajnih sprememb. Vztrajni izumitelji so zasipali univerze in akademije z načrti, od katerih pa ni bil noben uporaben. Po teh izkušnjah je Francoska akademija znanosti že leta 1775 sklenila, da ne bo več obravnavala načrtov za perpetuum mobile.

V mehaniki je mogoče shajati brez dela in energije, saj izrek o kinetični energiji ne pove nič več kot Newtonov zakon. Do energijskega zakona je bilo mogoče priti šele, ko so se razvile druge veje fizike.

Spočetka je bilo proučevanje toplote popolnoma ločeno od mehanike. Prvi bistveni uspeh so dosegli Gabriel Daniel Fahrenheit (1686-1736), Anders Celsius (1701-1744) in René Reaumur (1683-1757), ki so sestavili zanesljive termometre in merili z njimi temperaturo. Drugi bistveni uspeh pripisujejo Josephu Blacku (1728-1799). Leta 1760 je skrbno ločil toploto in temperaturo, količini, ki so ju do tedaj pogosto zamenjevali. Vpeljali so enoto za toploto - *kalorijo*, to je toploto, ki segreje 1 gram vode za 1 stopinjo Celzija. Toploto so večinoma merili z *lednim kalorimetrom*, ki sta ga leta 1780 opisala Antoine Laurent Lavoisier (1743-1794) in Pierre Simon Laplace (1749-1827).

V Blackovem času so imeli toploto za snov - *kalorikum*. Opazili so namreč, da je toplota, ki jo odda toplejši del neodvisnega sistema, ko se ohladi, enaka toploti, ki jo prejme hladnejši del, ko se segreje. Po tem so sklepali, da se toplota ohrani, kot se ohrani snov.

Med prvimi, ki so nasprotovali tej misli, je bil Benjamin Thomson, grof Rumford (1753-1814). Leta 1798 je v Münchnu nadzoroval vrtanje lukenj v topovske cevi. Presenetilo ga je, da se razvije pri tem veliko toplote. V poltretji uri se je skoraj deset kilogramov vode segrelo do vrelišča, nad čimer se je po lastni izjavi otročje veselil. Ker se je pri trenju razvijala "neizčrpna" toplota, je sklepal, da to ne more biti snov. Poskuse so ponovili drugi, med njimi Humphry Davy (1778-1829), vendar je kalorikum strašil po fiziki še do polovice devetnajstega stoletja.

Sredi tega stoletja je bil čas zrel za odločilno posplošitev. Do nje se je dokopalo skoraj sočasno več mož.

Sl. 2 J.R.Mayer (levo), J.P.Joule (na sredi) in H.von Helmholtz (desno).

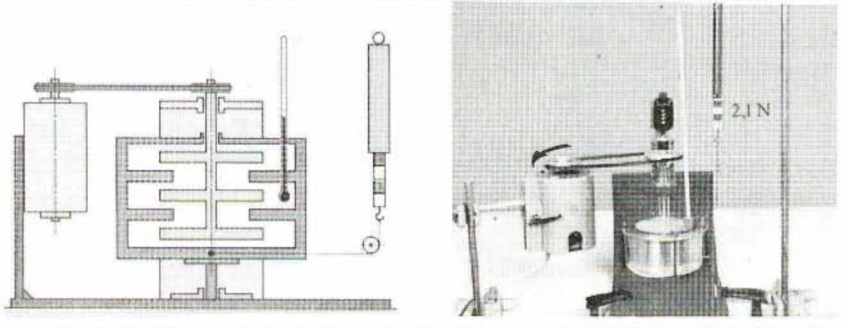
Julius Robert Mayer (1814-1878) je kot zdravnik pri opazovanjih bolnikov prišel na misel, ki ga je vodila do članka *O silah anorganske narave* (1842). Članek, v katerem je trditev, da je energija svetá konstantna, ni imel nikakršnega odmeva.

James Prescott Joule (1818-1889) se je že od mladosti ukvarjal s fiziko. Pri opazovanju električnih, kemijskih in mehaničnih pojavov je ugotovil, da odda sistem vedno enako toploto, če mu dovedemo določeno delo in v sistemu ni trajnih sprememb. Leta 1840 je spoznal, da je toplota, ki jo odda v eni sekundi upornik, enaka produktu toka skozenj in napetosti na njem. Skoraj štirideset let svojega življenja je posvetil merjenju *mehaničnega ekvivalenta toplote*, kakor so tedaj imenovali delo, ki da 1 kilokalorijo toplote. Preglednica kaže izide njegovih merjenj.

Leto	način merjenja	mehanični ekvivalent
1843	električno delo	4510 joulov
	pretakanje vode po ceveh	4170
1845	stiskanje zraka pri konstantni temperaturi	4350

1845	mešanje vode	4790
1847	mešanje vode	4210
1850	mešanje vode	4160
1878	mešanje vode	4160

Pri poznejših, natančnejših merjenjih so upoštevali, da se specifična toplota vode spreminja s temperaturo. (Kalorijo so vpeljali kot toploto, ki segreje gram vode pri navadnem zračnem tlaku od 14,5 do 15,5 stopinj Celzija.) Tako so dobili za mehanični ekvivalent 1 kilokalorije 4186 J. Imena mehanični ekvivalent že nekaj časa ne uporabljamo več. Od 1.1.1981 pa je tudi kalorija prepovedana (kilokalorija je bila prepovedana že prej). Zdaj, ko dobro poznamo energijski zakon, je posebna enota za toploto zares odveč.



Sl. 3 Naprava za merjenje specifične toplote vode pri šolskem poskusu (podobno napravo je uporabljal James Joule). Risba (levo) kaže njeno zgradbo. Elektromotor vrti os s tremi ploščami v vodi. Z vzmetno tehtnico merimo navor upora vode na vrtljivo posodo. Dovedeno delo dobimo kot produkt tega navora, kotne hitrosti osi s ploščami in časa. Delo, ki je potrebno, da se 1 kg vode segreje za 1 stopinjo, ustreza mehaničnemu ekvivalentu. Pri nekem poskusu se je 250 gramov vode skupaj s posodo (to je treba posebej upoštevati) segrelo za 3,8 stopinj, ko so dovedli 4500 joulov dela.

Hermann von Helmholtz (1821-1894) je leta 1847 predaval berlinskemu fizikalnemu društvu in objavil članek *O ohranitvi sile**.

V njem je zakon o ohranitvi energije izvedel iz spoznanja, da perpetuum mobile ni mogoče zgraditi. Vpeljal je gravitacijsko in električno potencialno energijo in na zelo široki osnovi obravnaval energijski zakon. To zanj ni bilo pretežko, saj je bil eden od najbolj vsestranskih znanstvenikov svojega časa. Velja za prvovrstnega fiziologa, fizika in matematika.

Danes ni težko razumeti, zakaj tedanji fiziki niso zaupali zamislim Mayerja, Joula, Helmholtza. Zdele so se jim preširoke in neznanstvene, ker so segale v več ločenih vej fizike. Kljub temu, da dela omenjenih mož in njihovih somišljenikov niso takoj sprejeli, je bil energijski zakon okoli leta 1880 splošno priznan. Pozneje je moral prestati še nekaj preskušenj, na primer ob odkritju radioaktivnega razpada. Danes, ko je star že dobrih sto let, je še vedno hrbtenica fizike. Če priznamo trditev, da posameznik v svojem razvoju ponavlja razvoj vrste, in upoštevamo težave, ki so jih imeli fiziki na poti do energijskega zakona, nas ne smejo presenetiti težave učencev na tej poti. Energija je zares količina, ki ji je treba posvetiti veliko pozornosti.

Janez Strnad

Dopolnilno branje

T.M.Brown, *Resource Letter EEC-1 on the Evolution of Energy Concepts from Galileo to Helmholtz*, American Journal of Physics 33 (1965) 759

F.Cajori, *A History of Physics*, Dover Publ.Co, New York 1970 (prva izdaja 1898)

M. Von Laue, *Geschichte der Physik*, Athenäum-Verlag, Bonn 1947

J.Strnad, *Kaj je energija*? Presek 4 (1976/77) 145, 209

* S tem je mislil na energijo. Še precej časa je trajalo, da so se za delo, toploto, energijo, silo, moč ustalila današnja imena.

NALOGE

KOLIKO LET BOM IMEL?

"Koliko let boš imel, ko se bova midva naročila na Presek?" sta me pred kratkim vprašala moja sinova, dvojčka. Jaz pa sprašujem vas!

Ko se bosta moja sinova naročila na Presek, bo imel starejši 20 let manj, kot jih imam zdaj jaz, mlajši pa jih ima danes 30 manj, kot jih bom imel sam takrat. Ko se bosta naročila na Presek, bo Presek star toliko, kolikor sta skupaj danes stara oba sinova.

Koliko let bom imel, ko se bosta moja sinova naročila na Presek?

Tomaž Pisanski

Dokaži, da je pri poljubni izbiri naravnih števil m, n in k, s tem, da je $mn-k^2 > 1$, število

$$N = mnk(m+n)(mn-k^2)$$

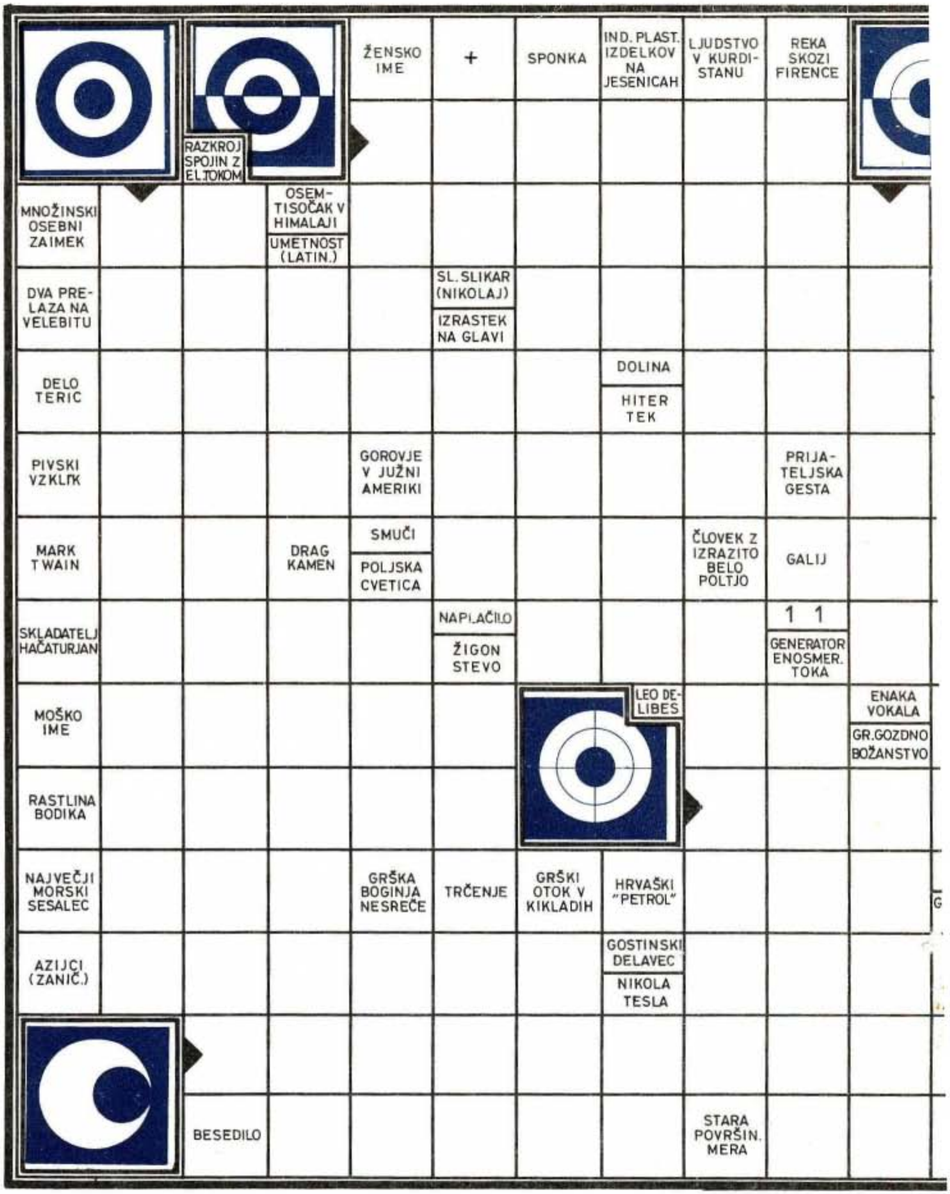
vedno deljivo s 6!

Opomba: Lahko dokažeš tudi naslednje trditve, ki so poseben primer zgornje:

1. število n^3-n je deljivo s 6, $n \in N$, $n \geq 2$,
2. število $mn(m+n)(mn-1)$ je deljivo s 6, če je m, $n \in N$, $mn \geq 2$,
3. število $n^3(n^2-1)$ je deljivo s 3, $n \in N$, $n \geq 2$.

Edvard Kramar

SLIKOVNA KRIŽANKA "PRESEKOVE RUBRIKE"



ŽIVLJENJSKA SILA

KONEC POLOTOKA

FINSKI ARHITEKT SAARINEN

MRTVAK

INDIJ

ZEMELJSKA PLAST IZ SILICIJA IN ALUMIN.

NEVARNO MAMILO

IGRALKA ...RINA

ALJA TKAČEVA

ZDRAVNIK ZA NOTRAN. BOLEZNI

NEON

ČOP JOŽA

RENATA TEBALDI

PESNICA NEGRI

VISOKA KARTA

ZAJEDALS-KA DROBNA ŽIVAL

DEL VOJVODINE

OVALNI KROŽNIK

MUSLIM. M.IME

IME ČRKE S

MUSLIM. M.IME

KOSITER

PISAN KONJ

PUŠČAVSKI RIS

CARLO PONTI

PREDPONA ŠKOTSKIH IMEN

MALAJSKI POLOTOK

ERNEST SETON

TVOR IZ MIŠIČNEGA TKIVA

ZGOLJ

SADNI SOK "TALISA"

SKLENJENA BOJNA VRSTA

DEPARTMA V FRANCIJI

PIJAČA SLOVANOV

OČKA

RIŽEVO ŽGANJE

OETHEJEVA MATI

LUKA V ČRNI GORI

HERCE-GOVEC

IGRALKA GARDNER

HRANA AZIJCEV

YU ŠAHIST (MARIO)

BORIS KIDRIČ

OVIRA

SESTAVIL: PAVLE GREGORC

PREMISLI IN REŠI

Rešitev iz druge številke.

V pozitivnih celih številih so rešili nalogo

$2abc + ab + ac = 1981$ naslednji bralci Preseka:

Valter Miščič, Kanal; Aleksander Purg, Ptuj; Franc Jerala, Kranj; Uroš Prelovšek, Kranj; Jože Arh, Stara Fužina; Mojca Kajba, Celje; Natalija Žabret, Kamnik; Zoran Rotovnik, Slovenj Gradec; Milena Lipovec, Mojstrana; Marko Gubenšek, Celje; Miran Zajc, Moravče; Milena Štrajhar, Kamnik; Brigita Horvat, Lendava; Robi Rodošek, Maribor; Teja Medved, Maribor; Heda Hočevar, Ljubljana; Nataša Centa, Ljubljana; Tea Glušič, Žalec; Janez Hren, Domžale; Aram Karalič, Ljubljana; Simona Kralj, Murska Sobota; Ksenija Vidmar, Senovo; Tomaž Leban, Jesenice; Sandi Brataševec, Nova Gorica; Mateja Barl, Slovenj Gradec; Terezija Pinter, Griže; Magda Čevdek, Nova Gorica; Dominika Bezek, Žužemberk; Marko Lampe, Celje; Irena Vivod, Mislinja; Janez Balkovec, Kranj; Borut Macuh, Podvelka; Anton Kričej, Mislinja; Zdenka Panker, Nova Gorica; Vida Fajdiga, Šmartno pri Litiji; Irena Ižanc, Ljubljana; Tomaž Pogačnik, Ljubljana; Smilja Zemljič, Maribor; Miroslav Cigan, Beltinci; Andreja Jurica, Slovenske Konjice; Marjana Lah, Ptuj; Janko Polič, Maribor; Samo Seljak, Vipava; Borut Zalar, Trebnje; Andrej Bukovšek, Kranj; Božidar Casar in Mitja Slavinec, Murska Sobota; Igor Merlin, Novo mesto; Marjan Kešnar, Trbovlje; Sergeja Lipušček, Idrija; Matjaž Sket, Brežice; Roman Drnovšek, Škofja Loka; Metka Kolenc, Izlake; Vida Kariž, Ajdovščina; Pavle Ilija, Dob pri Domžalah; Drago Torkar, Grahovo ob Bači; Samo Grčman, Ljubljana; Anita Mole, Ljubljana; Robert Koren, Marezige; Marjeta Kovačec, Videm pri Ptuju; Irena Vozlič, Griže; Gabrijel Levstek, Velike Lašče; Stanka Huč, Šmarje-Sap; Matjaž Golob, Kamnik; Milka Kramar, Ig pri Ljubljani; Franci Dimc, Medvode; Peter Polc, Ig; Sasa Pucko, Cerklje ob Krki; Mihaela Tušar, Idrija; Juš Kocijan, Ljubljana; Borut Hrobat, Železniki; Martina Kerlatec, Maribor.

Pravilnih rešitev je bilo 71, žal smo dobili tudi eno napačno. Izžrebali smo pet reševalcev: Mojco Kajba, Robija Rodoška, Arama Karaliča, Terezijo Pinter in Romana Drnovška. Poslali smo jim knjižico *Prve tri minute* S.Weinberga, ki je v slovenskem prevodu izšla v Sigmi.

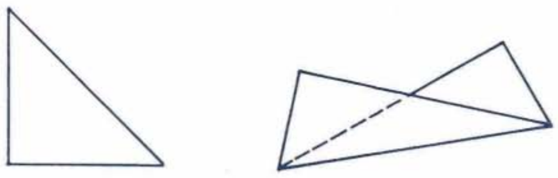
še nekaj o sami rešitvi naloge. Vseh možnih rešitev je dvanajst, navedimo jih kot trojice (a, b, c):
(283, 2, 1), (283, 1, 2), (7, 94, 1), (7, 1, 94), (7, 40, 3), (7, 3, 40), (7, 31, 4), (7, 4, 31), (7, 13, 10), (7, 10, 13), (1, 660, 1), (1, 1, 660).

Kar 11 naših bralcev je našlo vseh 12 rešitev:
Robi Rodošek, Juš Kocijan, Terezija Pinter, Marjan Kešnar, Božidar Casar in Mitja Slavinec, Borut Zalar, Tomaž Pogačnik, Sandi Brataševec, Metka Kolenc, Saša Pucko, Irena Vozlič.

Za novo nalogo vam predlagamo pregibanje trikotnika.

Pregibanje trikotnika

Če kvadrat preganemo po diagonali, se obe polovici lepo prekrijeta in dobimo dvojni enakostranični pravokotni trikotnik. Pri poljubnem pravokotniku temu ni tako.



Naloga za vas, dragi bralci: *Izreži iz papirja trikotnik s koti* 30°, 60°, 90°. *Pregani ga tako, da dobiš trojni - seveda trikrat manjši - podoben trikotnik.*

Rešitev, trikrat preganjeni trikotnik, deni v kuverto in pošlji do 10. junija 1982.

Peter Petek

KOLIKO LET BOM IMEL? - rešitev s strani 223.

Odgovor: Imel bom 37 let. Upoštevati moramo, da sta sinova dvojčka in da ima Presek danes 9 let.

Tomaž Pisanski

POSKUSI - PREMISLI - ODGOVORI

Na vprašanje, ki smo vam ga zastavili v 2. številki letošnjega Preseka, nismo prejeli nobenega odgovora. Zato vas ponovno vabimo, da nam čimprej pošljete svoje odgovore. Pišite nam tudi, če je bila naloga na kakršenkoli način nerazumljiva ali pa mogoče pretežka.

Tokrat smo vam pripravili naslednjo nalogo:

Mnogi med vami imate doma žogice iz zelo elastične gume, ki presenetljivo dobro odskakujejo. Pa napravite tale poskus: Vzemite žogico in frnikulo ter ju skupaj spustite iz majhne višine na trda tla, tako da je frnikula tik nad žogico. Opazujte, do kakšne višine glede na tisto, iz katere ste žogico in frnikulo spustili, se bosta odbili. Poskušajte s frnikulami ali kakšnimi drugimi kroglicami različnih mas. Kako je višina, do katere se odbijejo, odvisna od mase? Ali lahko dosežeš, da se žogica sploh ne odbije?

Martin Čopič

REŠITEV 6. NALOGE S STRANI 196

6. Okoli odstranjene diagonale sestavi kvadrat!

NOVE KNJIGE

Strube Wilhelm, PIERRE IN MARIE CURIE, odkritelja radija, Obzorja, Maribor 1976, zbirka Veliki možje, 300 strani, prevedel Franc Šrimpf.

Vzhodnonemški pisatelj W.Strube ni prvi, ki je obdelal življenje zakoncev Pierra Curieja in Marie Curie-Sklodowske. V svoji knjigi je poudaril življenjski zgodbi. Precej nadrobno je opisal - temu je posvečena skoraj polovica knjige - mladost Pierra Curieja v Parizu in njegovi okolici in mladost Marie Sklodowske na Poljskem. Sledi dokaj znana zgodba: študij v Parizu, poznanstvo, ljubezen, poroka, skupni napori v ozkih razmerah, ki so privedli do odkritja polonija in radija, zapoznelo priznanje, tragična smrt Pierra Curieja in poznejše raziskovalno in organizacijsko delo Marie.

Janez Strnad

Šporer Zlatko, Dragić Nedeljko, BRBLJANJE O GEOMETRIJI. - Školska knjiga, Zagreb 1981. - 190 str. - Cena 430.- din.

Knjiga popelje mladega bralca, že osnovnošolca iz nižjih razredov, na izkustven način v svet ravninske geometrije. Pisana je kot pogovor med učencem in učiteljem, ki učencu pomaga odkrivati geometrijske pojme in zakonitosti. Knjiga sestoji iz samih slik (tudi večbarvnih), katerih pomen nam razlagata učitelj in učenec.

Učitelj pokaže učencu, kako je ravnina sestavljena iz neštetih točk in jo lahko gledamo kot celo vojsko (to je množico) točk. V tej vojski si lahko izberemo posamezne enote (to je podmnožice ravnine). Med njimi najprej spoznamo daljico, nato premico, zatem kot, trikotnik, četverokotnik in krog. Naučimo se meriti daljice in kote ter določati obseg in ploščino likov. Nato so razložene preproste konstrukcije, na koncu pa koordinatni sistem (koordinati sta tu le naravni števili). Obravnavo spremljajo zanimive naloge, katerih rešitve so na koncu knjige.

Pri spoznavanju daljic, premic, likov... si učenec pomaga z njihovimi modeli, a tako, da za njimi dojema bistvo geometrije. K boljšemu razumevanju pripomorejo tudi številne risbe, ki so pokazane v različnih fazah svojega nastajanja. Posrečeno je, da učitelj in učenec v knjigi živita v sami ravnini in tako na lastni koži občutita geometrijske zakonitosti. Ob vprašanjih in težavah, ki jih srečuje na svoji poti, se učenec neopazno uči matematično misliti.

Knjigo, kakršne še nismo imeli, bo rad vzel v roke tudi osnovnošolec iz višjih razredov (ali starejši bralec), ki bo ob njej na nov način podoživljal svoja prva srečanja z geometrijo.

Janez Rakovec

Rešitev s strani

Število N je najprej deljivo z 2, namreč eno od števil mn ali $m+n$ je vedno deljivo z 2. Število N pa je tudi deljivo s 3. Ogledati si moramo le primer, ko nobeno od števil m, n in k ni deljivo s 3. Če m in n dasta pri deljenju s 3 ista ostanka, da produkt ostanek 1, tak pa je tudi ostanek števila k^2 pri deljenju s 3, ker k ni deljiv s 3. Če pa dasta m in n po deljenju s 3 različna ostanka, je vsota $m+n$ deljiva s 3.

Edvard Kramar

ZVEZNO TEKMOVANJE MLADIH FIZIKOV

18. zvezno tekmovanje mladih fizikov je bilo od 5. do 7. junija 1981 v črnogorskem obmorskem letovišču Sutomore v bližini Bara. Slovenska ekipa je bila sestavljena iz 12 najuspešnejših dijakov z republiškega tekmovanja mladih fizikov. V skupini A so tekmovali Veber Tomi in Pleško Majna iz VII. gimnazije Ljubljana-Vič, Mozetič Dean iz gimnazije Koper ter Černe Miran iz I. gimnazije Ljubljana-Bežigrad, v skupini B Kaluža Matjaž iz gimnazije Miloša Zidanška iz Maribora, Štrucl Damjan iz gimnazije Ljubljana-Šentvid, Poberaj Igor iz gimnazije Vide Janežič iz Ljubljane, Vasja Jurkas iz gimnazije Nova Gorica, Povalej Vitomir iz gimnazije Celje, Opresnik Marko iz gimnazije Ivana Cankarja ter Planinšič Gorazd iz I. gimnazije Ljubljana-Bežigrad, v skupini C pa je nastopal Dernač Branko iz gimnazije Brežice.

Kot običajno so se tudi letos tekmovalci posebej pripravljali za zvezno tekmovanje na ljubljanski VTOZD Fizika od 1. do 3. junija, kjer so pregledali naloge prejšnjih zveznih tekmovanj in izpilili še nekatere koristne fizikalne prijeme. Za dodatek k pripravam je Iskrin TOZD Elektrooptika organiziral za tekmovalce zanimiv ogled tovarne v Stegnah, ki je bil popestren s filmom o dejavnostih TOZD Elektrooptike.

Kljub nekaterim pomislekom glede finančne plati je komisija za popularizacijo fizike sklenila, da pošlje tekmovalce na pot že v sredo zvečer, da bi imeli dovolj časa za počitek od naporne poti. Kot velikodušni pokrovitelj se je izkazala TOZD Elektrooptika, ki je pokrila stroške potovanja. Odločitev komisije se je pokazala za pravilno. Po več kot deseturni zamudi so tekmovalci v petek zjutraj prispeli na kraj tekmovanja. Ta dan so izkoristili za počivanje in osvežilno kopanje v morju, da so lahko naslednji dan sveži nastopili na tekmovanju.

Naloge so reševali štiri ure, nato pa so se odpeljali na Lovčen, medtem ko je zvezna komisija pregledovala njihove izdelke. Letos so bile najbolj zanimive naloge iz skupine elektrika in magnetizem. Te so tudi zahtevale največ bistroumnosti in fizikalnega razmišljanja. Naloge v skupini A so bile standardne in niso ustrezale nivoju zveznega tekmovanja. Področja, zajeta v nalogah skupine C, že zelo presegajo učni načrt na slovenskih gimnazijah, tako da naš predstavnik ni imel vidnega uspeha, kar dokazuje, da bi tudi pri nas moral biti na srednjih šolah večji poudarek na moderni fiziki.

V nedeljo dopoldne je bila podelitev priznanj najboljšim, nato pa so imeli dijaki obilo časa za medsebojno spoznavanje. Med tekmovalci in tekmovalkami se je utrdilo že tradicionalno slovensko-vojvodinsko prijateljstvo. Za zaključek srečanja pa sta slovenska in srbska ekipa odigrali tekmov v metanju letečih krožnikov, kjer smo Slovenci z domiselnejšo igro po hudem boju zasluženo slavili.

Tudi na fizikalnem področju so bili naši predstavniki izredno uspešni, saj je kar polovica Slovencev dobila nagrade. V A skupini sta Dean Mozetić in Tomi Veber dobila prvo nagrado, Miran Černe drugo ter Majna Pleško tretjo nagrado, v B skupini pa Matjaž Kaluža drugo ter Gorazd Planinšič tretjo nagrado. Matjaž Kaluža kot prvi ter Dean Mozetič kot drugi v svojih skupinah pa sta se uvrstila v petčlansko zvezno ekipo za olimpiado, ki bo letos v Bolgariji. Takega uspeha Slovenci že dolgo nismo imeli.

Mark Pleško

ZVEZNA MATEMATIČNA LETNA ŠOLA ZA SREDNJEŠOLCE

Letos je bila matematična letna šola organizirana v času od 4. do 11. julija na otoku Ugljanu nasproti Zadra. Organizator je bilo, kakor vedno doslej, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SR Hrvaške, vodja pa prof. Petar Javor.

Predavanja smo imeli pet dni, vendar le po štiri ure dnevno, tako da nam je ostalo dovolj časa za kopanje, igranje košarke, kartanje in drugo zabavo.

Teme predavanj so bile:
a) LIMITE (odvodi, integrali, vrste); predaval prof. Petar Javor,
b) UVOD V TEORIJO GRUP; predaval prof. Nikica Uglešić,
c) TOPOLOGIJA (ploskve); predaval prof. Ivan Ivanšić.

Predavanja so bila zanimiva in dobro pripravljena, vendar pa so imela tudi majhno pomanjkljivost. Problem je bil predvsem v tem, kako uskladiti težavnostno stopnjo za vse dijake od prvega do tretjega razreda. Ta napaka pa bo že naslednje leto odpravljena, kajti predavanja bodo razdeljena po razredih.

Vseh udeležencev je bilo 20, od tega štirje Slovenci: Miloš Žefran in Matjaž Kovačec (oba 1. razred) ter Miran Černe in Jurišić Aleksandar (oba 3. razred). Med dijaki v letni šoli niso bili samo tekmovalci, ampak tudi drugi, ki jih matematika zanima.

Za konec pa si oglejte še nekatere naloge, ki so si jih izmenjali najbolj zagrizeni reševalci problemov:

1) V ravnini leži n točk. Razdalja med poljubnima dvema je večja ali enaka 2. Dokaži: če v ravnini leži madež črnila s ploščino, manjši od π, potem obstaja ravninski vektor po velikosti manjši ali enak 1, ki nam z vzporednim premikom prestavi vse točke na čisti del ravnine.

2) Ravnina je prekrita z dvema množicama točk. Dokaži, da obstaja enakokrak pravokotni trikotnik, ki ima vsa tri oglišča v eni izmed množic!

3) V ravnini leži n rdečih in n modrih točk. Dokaži, da obstaja n takih daljic, od katerih vsaka spaja po eno rdečo in eno modro točko in od katerih se poljubni dve ne sekata!

4) Na krožnici je n avtomobilov. Vsi skupaj imajo toliko goriva, da bi se eden od njih lahko enkrat zapeljal okrog. Dokaži, da med njimi obstaja eden, ki se lahko zapelje po krogu tako, da si sproti izposoja gorivo pri avtomobilih, ki jih srečuje!

5) Reši enačbo $n! = x^2$ v množici naravnih števil!

6) Poišči ulomek $\frac{p}{q}$, ki je najbližji vrednosti $\sqrt{2}$ in sta p in q manjša od 100!

7) Reši enačbo $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ v množici celih števil!

Aleksandar Juričić

XII. ZVEZNO TEKMOVANJE MLADIH MATEMATIKOV, UČENCEV OSNOVNIH ŠOL

Dne 7. junija 1981 se je v slikovitem turističnem mestu Pale nad Sarajevom zbralo 85 učencev VII. in VIII. razredov osnovnih šol iz vseh socialističnih republik in obeh avtonomnih pokrajin v SFR Jugoslaviji. To so bili učenci, ki so na predhodnih republiških oziroma pokrajinskih tekmovanjih iz matematike dosegli najboljše uspehe. Čakala jih je naloga, da se še enkrat pomerijo med seboj v znanju matematike. Tekmovanje je organiziral, letos še dvanajstič, Matematički list za učenike osnovnih škola iz Beograda. Iz SR Slovenije se je tekmovanja udeležilo 5 sedmošolcev in 6 osmošolcev.

Komisija, ki so jo sestavljali po en predstavnik iz vsake republike oziroma pokrajine, je izmed številnih predlogov izbrala naslednje naloge:

VII. razred

1) Določi neznano cifro v zapisu števila 401512x, tako da bodo ostanki pri deljenju tega števila s 3 in s 5 enaki!

2) V nepolni posodi je 85%-na raztopina alkohola. Če posodo napolnimo do vrha z 21%-no raztopino alkohola, vse to dobro premešamo, odlijemo toliko tekočine, kolikor smo je dolili, in posodo zopet dopolnimo do vrha z 21%-no raztopino alkohola, dobimo raztopino, ki ima 70% alkohola.
Koliki del posode je bil napolnjen pred dolivanjem?

3) Po najnovejšem popisu prebivalstva živi v 5990 naseljih SR Slovenije 1 883 764 prebivalcev.
Dokaži, da sta v SR Sloveniji vsaj 2 naselji z enakim številom prebivalcev!

4) V trikotniku ABC je $\frac{v_a \cdot v_b}{v_c} = c$, pri čemer so v_a, v_b, v_c dolžine višin in c dolžina stranice trikotnika.
Izračunaj enega izmed kotov tega trikotnika!

5) Naj bodo A, B in C takšne točke v ravnini, da je za vsako točko M te ravnine izpolnjen vsaj eden od naslednjih dveh pogojev: $d(A,M) \leqslant d(B,M)$ in $d(A,M) \leqslant d(C,M)$. (Z $d(A,M)$ je označena razdalja med točkama A in M.)
Dokaži, da leži točka A na daljici BC!

VIII. razred

1) Osnovna ploskev pokončne prizme je kvadrat s stranico a. Dolžina stranice a je dvakrat večja od dolžine višine prizme. Merski števili površine in prostornine prizme sta enaki. Določi dolžino robov te prizme!

2) Števila od 1 do 10 so zapisana v poljubnem zaporedju drugo za drugim. Po tem zaporedju je vsakemu številu prirejena njegova zaporedna številka. Če seštejemo vsako število z njegovo zaporedno številko, dobimo 10 različnih vsot.
Dokaži, da sta cifri enic vsaj pri dveh vsotah enaki!

3) Dva vlaka kreneta istočasno iz krajev A in B drug proti drugemu. Vsak vlak se takoj, ko pripelje v nasprotni kraj, vrne v izhodiščni kraj. Vlaka se srečata prvič v razdalji 50 km od kraja A, drugič pa v razdalji 30 km od kraja B.
Kolika je razdalja med krajema A in B?

4) Na stranici AC trikotnika ABC leži točka K, ki deli stranico AC v razmerju 1 : 3, na stranici BC pa točka L, ki deli to stranico v razmerju 1 : 4. Naj bo točka M sečišče daljic AL in BK.
   Določi razmerje daljic KM in MB!

5) Diagonali poljubnega trapeza delita trapez na 4 trikotnike. Ploščini trikotnikov, ki ležita ob osnovnicah, merita p_1 in p_2.
   Izrazi ploščino trapeza s količinama p_1 in p_2!

Komisija je po pregledu izdelkov ugotovila, da je bil med sedmošolci najuspešnejši *Jože Fabčič* iz OŠ D.Bajc, Vipava. Na drugo mesto se je uvrstila *Mojca Indihar* iz OŠ Fr.Rozman-Stane, Maribor; oba sta prejela prvo nagrado. Drugo nagrado je dobil *Beno Rola* iz OŠ Fr.Rozman-Stane, Maribor (3.-4. mesto), tretjo nagrado pa *Damjana Kokol* iz OŠ P.Kavčič, Škofja Loka, in *Matevž Kranjec* iz OŠ P.Voranc, Ljubljana (6. in 7. mesto).

Med osmošolci je dosegla vse možne točke *Mirjana Spasojević* iz Zemuna (enako uspešna je bila tudi na lanskem tekmovanju), drugo nagrado pa je prejel slovenski tekmovalec *Roman Drnovšek* iz Škofje Loke (3.-5. mesto), pohvalo pa *Marko Koselj* iz Žirovnice (10. mesto) in *Toni Biasizzo* iz Postojne (15. mesto).

Kot ekipa so se uvrstili slovenski tekmovalci na prvo mesto, za njimi pa so po vrsti ekipe iz SR Srbije, SR Hrvatske, AP Vojvodine, SR Bosne in Hercegovine, SR Črne gore, SR Makedonije in AP Kosovo. Organizator tekmovanja je povabil najboljše tekmovalce v "letno matematično šolo"; od naših so to Jože Fabčič, Mojca Indihar, Roman Drnovšek in Marko Koselj.

Reči moramo, da so naši tekmovalci častno zastopali SR Slovenijo. Njim pa bo to doživetje močna vzpodbuda pri nadaljnjem pridobivanju matematičnega znanja.

Stanislav Horvat

MATEMATIČNA LETNA ŠOLA - BLED 81

Matematika je zanimiva, če jo razumeš in imaš veselje do učenja. Z njo se srečuješ vse življenje - doma, v trgovini... Mnogim dela težave, veliko pa je takih, ki jim matematika pomeni razvedrilo.

Že v osnovni šoli učitelji posvečajo posebno pozornost uspešnim mladim matematikom. Vodijo matematični krožek, pri katerem le-ti izpolnjujejo svoje znanje, ga utrjujejo in se pripravljajo na tekmovanje za Vegovo priznanje. Najprej se pomerijo na šolskem, nato na občinskem in republiškem tekmovanju. Najuspešnejši na republiškem se uvrstijo v zvezno tekmovanje - tekmovanje mladih matematikov Jugoslavije.

Na podlagi rezultatov s teh tekmovanj DMFA izbere kandidate za letno matematično šolo. Slovenski matematiki so se v letošnjem letu udeležili dveh letnih matematičnih šol - na Bledu in v Beogradu.

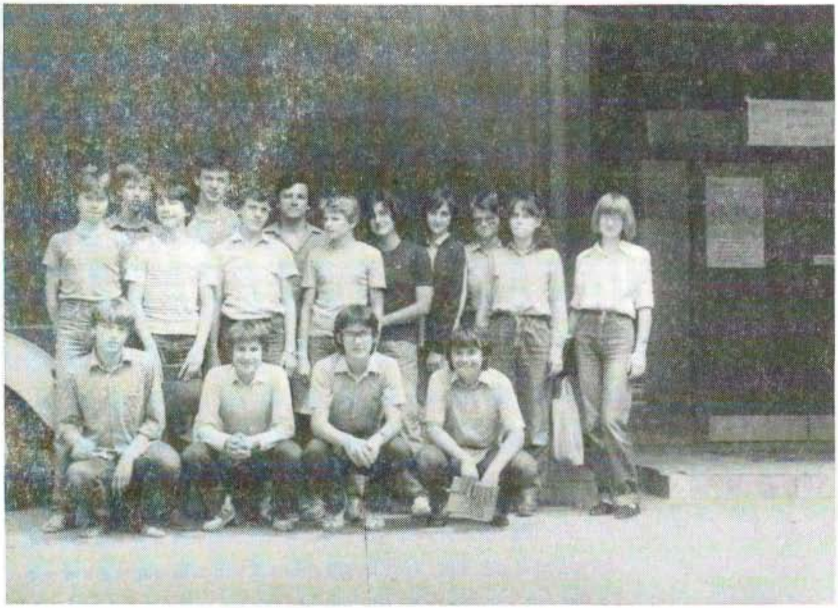
Matematične letne šole na Bledu se je udeležilo trideset najboljših osmošolcev, matematične letne šole v Beogradu pa so se udeležili najboljši tekmovalci z zveznega tekmovanja. Med njimi je bilo več Slovencev.

Matematična letna šola na Bledu je bila letos drugič. Udeležili smo se je osmošolci iz vse Slovenije, večina pa so bili Gorenjci. Ti so vsak dan od doma prihajali na predavanja, drugi pa smo stanovali v domu Josipa Plemlja. Šola je trajala deset dni - od 29.6. do 8.7.1981. Vodil jo je tovariš Dušan Grešak.

V domu Josipa Plemlja so stanovali:
Toni Biasisso - Postojna, Roman Drnovšek - Škofja Loka, Vlado Horvat - Maribor, Alojz Bogataj - Gorenja vas, Dejan Šemrov - Nova Gorica, Aleš Podgornik - Izola, Sandi Kodrič - Ljubljana, Marko Pokorn, Aleš Koren, Samo Gostić - vsi Ljubljana, Stanko Kavčič - Horjul, Jože Tavčar - Železniki, Metka Zupančič - Trbovlje, Marija Bajželj - Kranj, Janja Nusdorfer - Vipava, Mojca Janežič - Kranj, Jelka Kondič - Škofja Loka.

Vozili pa so se:
Aleš Janez, Filip Novak, Magda Papič, Sandra Tušar, Blanka Bertalanić, Marko Dolenšek, Sergej Rožman, Damjana Kokol, Helena Pangerc, Mataša Planinc, Boštjan Žepić, Nataša Polak, Marjeta Novak.

Poslušali smo devet predavanj. Prvo smo imeli že prvi dan popoldne.Predavala nam je tovarišica prof. Sonja Križanič o ulomljeni linearni preslikavi, druga predavanja smo imeli dopoldan od 9.00 do 12.30.



Udeleženci matematične letne šole - Bled 81

Predavali so nam:
Marko Petkovšek - Pozicijske igre s popolno informacijo,
Vlado Batagelj - Teorija grafov,
Marjana Vagaja - Matematična indukcija, Binomski izrek,
Ivan Pucelj - Krog in kocka, Rimske številke in računanje,
Angela Blaznik - Matematične strukture,
Niko Prijatelj - Neskončne vsote in produkti.

Zadnji dan nam je o diofantskih enačbah predaval vodja matematične letne šole Dušan Grešak. Prejeli smo potrdilo o opravljeni letni šoli. Predavanja so bila zanimiva. Izvedeli smo veliko novega in se ogreli za delo v prihodnje, kajti večina bo nadaljevala šolanje na matematično-naravoslovni smeri. Predavatelji so pripravili tudi vaje. Delali smo jih skupaj z njimi in sami v popoldanskem času. Imeli pa smo tudi veliko prostega časa. In kako smo ga izkoristili? Sprehajali smo se ob jezeru, priredili kak krajši izlet - na Blejski grad, v Vintgar, na Pokljuko, odšli smo na igrišče, v kino, vozili smo se s čolni (sami smo veslali na otok), kolesarili smo, prepevali ob spremljavi kitare. . Kjerkoli smo bili, smo imeli s seboj Rubikovo kocko. Zlagali smo jo, iskali krajše rešitve, tekmovali.

V domu smo skrbeli za red. Imeli smo dežurnega. Zjutraj nas je zbujal, zvečer spravljal spat. Zajtrk smo si pripravljali sami, kosili smo v vrtcu, večerjali pa v gostilni Back. (Najbolj nam je teknil "pomfri"!)

Dnevi so bežali, kajti imeli smo lepo vreme, in deset dni je hitro minilo. Polni novih spoznanj in čudovitih vtisov smo se poslovili.

Društvu matematikov, fizikov in astronomov SR Slovenije se zahvaljujemo za nepozabne dneve na Bledu, predavateljem pa za njihova predavanja.

Janja Nusdorfer

9. Iz šesterokotnika naredi 2 romba, tako da dodaš vžigalico in prestaviš dve!

REŠITVE NALOG

REŠITVE NEKATERIH NALOG Z ZVEZNEGA TEKMOVANJA SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE V LETU 1980/81*

Oglejmo si rešitve po dveh nalog iz vsakega razreda: Poročilo o tekmovanju je v prejšnji številki Preseka.

1. razred, 3. naloga:

3. Prvi štirje členi nekega zaporedja so 1,9,8,1. Vsak naslednji člen je enak zadnji cifri vsote prejšnjih štirih členov.
   a) Ali v tem zaporedju najdemo četverko 1,2,3,4?
   b) Ali se v tem zaporedju kdaj ponovi začetna četverka?

Rešitev:

a) Označimo z N poljubno neparno, s P pa poljubno parno število. Prve štiri člene danega zaporedja lahko sedaj zapišemo takole: N,N,P,N. Ker je vsota treh neparnih in enega parnega števila neparna, je naslednji člen N. Analogno ugotovimo, da so tudi naslednji trije enaki N: N,N,P,N,N,N,N. Ker pa je vsota štirih neparnih števil parno število, sledi torej P. Nato pa se zadnja peterka N,N,N,N,P stalno ponavlja in je očitno, da v zaporedju ne obstaja četverka N,P,N,P oziroma 1,2,3,4.

b) Označimo četverko 1,9,8,1 s C_1, naslednjo s C_2 itd. Ker je različnih četverk končno mnogo, zaporedje pa je neskončno, se vsaj ena četverka ponovi. Naj bo C_n prva četverka, ki smo jo v zaporedju že srečali. C_n mora biti enaka C_1. To dokažemo s protislovjem. Če je $C_m = C_n$ $(m > 1)$, potem je tudi $C_{m-1} = C_{n-1}$, saj vsaka četverka enolično določa predhodno. C_n torej ni prva četverka, ki se ponovi, kar pa je protislovje.

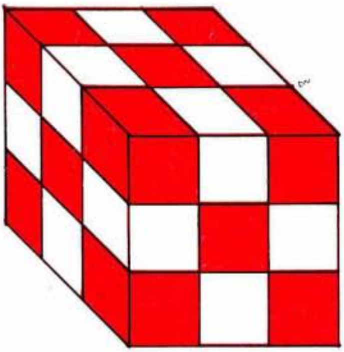
*GLEJ PRESEK IX/3, STRAN 174!

1. razred, 4. naloga:

4. Miška grize kos sira v obliki kocke z robom 3. Kocka je razdeljena na 27 manjših kockic z robom 1. Miška grize sir tako, da začne s kockico v enem od oglišč. Ko poje celo kockico, se loti naslednje, ki ima z ravnokar pojedeno skupno ploskev. Ali lahko poje miška cel kos sira tako, da je zadnja kockica, ki jo poje, tista v središču kocke?

Rešitev:

Zunanje kocke pobarvajmo tako kakor šahovsko tablo, da bosta kocki, ki imata skupno ploskev, različne barve. Kock ene barve je za dve več kot kock druge barve. Ker mora miška pojesti najprej vse zunanje kocke, je pa izmenično eno belo eno črno kocko, ne more pojesti celega sira tako, da poje nazadnje kocko v središču.



2. razred, 1. naloga:

1. Naj bodo a, b in c cela števila in $a > 0$. Predpostavimo, da ima enačba $ax^2 + bx + c = 0$ dve različni rešitvi na intervalu $(0, 1)$. Dokažite, da je $a \geqq 5$, in poiščite primer takšne enačbe za $a = 5$.

Rešitev:

$\frac{c}{a}$ je produkt korenov x_1, x_2 in je zato $\frac{c}{a} > 0$. Zaradi $a > 0$ je tudi $c > 0$, b pa je negativno število, saj je $-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 > 0$. Enačba ima dva različna korena, zato je $b^2 - 4ac > 0$. Najprej naj bo $x_1 + x_2 \leqq 1$. Ker je $-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 \leqq 1$ in je $-\frac{b}{a}$ pozitivno število, je $\frac{b^2}{a^2} \leqq 1$ oziroma $b^2 \leqq a^2$. Od tod sledi:

$$0 < b^2 - 4ac \leqq a^2 - 4ac = a(a - 4c).$$

Ker je $a > 0$, mora biti tudi drugi faktor produkta večji od nič: $a > 4c$ oziroma $a \geqq 5$, saj je c celo pozitivno število.

Če pa je $x_1 + x_2 \geqq 1$, vstavimo v enačbo namesto $x = 1-y$ in dobimo:

$(1 - y)^2a + (1 - y)b + c = 0$ oziroma

$ay^2 + (-2a + b)y + a + b + c = 0$. Korena enačbe sta $y_1 = 1 - x_1$, $y_2 = 1 - x_2$ in torej prav tako ležita na intervalu $(0,1)$ in sta različna. Zanju pa velja tudi:

$y_1 + y_2 = (1 - x_1) + (1 - x_2) = 2 - (x_1 + x_2) \leqq 1$

Ker nova enačba zadovoljuje vse pogoje, ki so nas v prvem delu pripeljali do rešitve, je tudi ta drugi primer rešen. Enačba za $a = 5$ je na primer: $5x^2 - 5x + 1 = 0$.

2. razred, 3. naloga:

3. Poišči vse pare (x, y) celih števil, ki zadoščajo enačbi

   $y^4 - x(x+1)(x+2)(x+3) = 1$

Rešitev:

Najprej preoblikujmo osnovno enačbo:

$y^4 = x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$.

Iz tega sledi: $y^2 = \pm(x^2 + 3x + 1)$ oziroma $(2x + 3)^2 \pm 4y^2 = 5$.

V prvem primeru, ko velja pozitivni predznak, moramo število 5 razstaviti na vsoto dveh kvadratov. Edina možnost je $5 = 4 + 1$. Od tod dobimo rešitve: $y_{1,2} = \pm 1$, $x_{1,2} = -1$ in $y_{3,4} = \pm 1$, $x_{3,4} = -2$.

V drugem primeru, ko velja negativni predznak, pa razstavimo razliko kvadratov v produkt:

$(2x + 3)^2 - 4y^2 = (2x + 3 + 2y)(2x + 3 - 2y) = 5.1 = (-5).(-1)$.

Vsota faktorjev je $(2x + 3)2 = \pm 6$. Od tod dobimo še štiri rešitve:

$y_{5,6} = \pm 1$, $x_{5,6} = 0$ in $y_{7,8} = \pm 1$, $x_{7,8} = -3$.

3. razred, 1. naloga:

1. Dokažite, da lahko za vsak $n \in N$ število

   $\mathrm{tg}^{2n} 15^\circ + \mathrm{ctg}^{2n} 15^\circ$

   zapišemo kot vsoto kvadratov treh zaporednih naravnih števil.

Rešitev:

Dokazati moramo, da za vsak $n \in N$ obstaja $x \in N$ z lastnostjo $tg^{2n}15^{o} + ctg^{2n}15^{o} = (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2$

Upoštevajmo, da je $tg15^{o} = 2 - \sqrt{3}$ in $ctg15^{o} = 2 + \sqrt{3}$ in dobimo:

$$(2+\sqrt{3})^{2n} + (2-\sqrt{3})^{2n} = 3x^2 + 2$$

$$3x^2 = (2+\sqrt{3})^{2n} - 2 + (2-\sqrt{3})^{2n} = \left[(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right]^2.$$

Če enakost še korenimo in delimo s $\sqrt{3}$, dobimo:

$$x = \frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{\sqrt{3}}.$$

Pri potenciranju obeh binomskih izrazov se nam sode potence pokrajšajo, vse lihe pa vsebujejo faktor $\sqrt{3}$. Ulomek lahko torej okrajšamo s $\sqrt{3}$ in dobimo, da je x naravno število.

3. razred, 2. naloga:

Na isti strani daljice PQ so narisani trije podobni trikotniki KQP, QLP in PQM tako, da je $\sphericalangle QPM = \sphericalangle PQL = \alpha$, $\sphericalangle PQM = \sphericalangle QPK = \beta$ in $\sphericalangle PQK = \sphericalangle QPL = \gamma$, pri čemer je $\alpha < \beta < \gamma$. Dokažite, da je trikotnik KLM podoben prvim trem.

Rešitev:

Naj bo $\overline{PQ} = a$, $\overline{QL} = b$ in $\overline{PL} = c$. Iz podobnosti $\Delta\, PQL$ in $\Delta\, PQK$, sledi $a = \overline{PQ} = k.c$, $\overline{KQ} = k.a$ in $\overline{PQ} = b.k$. Od tod dobimo, da je $k = \frac{a}{c}$ oziroma $\overline{PK} = \frac{ab}{c}$ in $\overline{KQ} = \frac{a^2}{c}$. Analogno dobimo tudi $\overline{QM} = \frac{ac}{b}$. Trikotnika ΔPKL in ΔQKM sta podobna, saj je $\sphericalangle LPK = \sphericalangle MQK = \gamma - \beta$ in $\frac{\overline{PL}}{\overline{PK}} = \frac{\overline{QM}}{\overline{QK}} = \frac{c^2}{ab}$.

Tako sta tudi kota $\sphericalangle LKP$ in $\sphericalangle MKQ$ skladna. Za kot $\sphericalangle LKM$ torej velja: $\sphericalangle LKM = \alpha - \sphericalangle MKQ + \sphericalangle LKP = \alpha$. Dejstvo, da sta ΔPKL in ΔQKM podobna, nam pove še, da sta stranici LK in KM v razmerju $b:a$.

V ΔKLM je en kot enak α, priležni stranici tega kota pa sta v razmerju $b:a$, torej je tudi ta trikotnik podoben prvim trem in je naloga rešena.

4. razred, 3. naloga:

Naj bo $F_n = a^n \sin nA + b^n \sin nB + c^n \sin nC$, kjer so a, b, c, A, B, C realna števila in $A + B + C$ mnogokratnik števila Π. Dokažite, da iz $F_1 = F_2 = 0$ sledi $F_n = 0$ za vsako naravno število n.

Rešitev:

Uvedimo kompleksna števila $z_1 = a(\cos A + i \sin A)$, $z_2 = b(\cos B + i \sin B)$ in $z_3 = c(\cos C + i \sin C)$. Izračunajmo: $z_1 + z_2 + z_3 = E_1 + iF_1 = A_1$ in $z_1{}^2 + z_2{}^2 + z_3{}^2 = E_2 + iF_2 = A'$, pri čemer smo vpeljali števila $E_n = a^n \cos nA + b^n \cos nB + c^n \cos nC$, $n \in N$.

Ker sta F_1 in F_2 enaka 0, sta A_1 in A' realni števili, kar pomeni, da je tudi $A_2 = \frac{1}{2}(A^2 - A') = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$ realno število. Zmnožimo z_1, z_2 in z_3:

$$z_1 z_2 z_3 = abc\left[\cos(A + B + C) + i \sin(A + B + C)\right].$$

Upoštevajmo še, da je $A + B + C = k\Pi$ in dobimo:

$$z_1 z_2 z_3 = \pm abc = A_3.$$

Torej je tudi A_3realno število. Po Vietovih formulah so z_1, z_2 in z_3 koreni kubične enačbe $x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0$. Koreni te enačbe so vsi realni ali pa je en koren realen, druga dva pa sta konjugirano kompleksna. Iz tega sledi, da je tudi

$$z_1{}^n + z_2{}^n + z_3{}^n = E_n + iF_n$$

realno število. Torej $F_n = 0$.

4. razred, 4. naloga:

Množico $S = \{1,2,\dots,n\}$ prvič razdelimo na m, drugič pa na $m + k$ nepraznih disjunktnih podmnožic, $k > 0$. Dokažite, da je bilo vsaj $k + 1$ elementov množice S prvič v številnejši podmnožici kot drugič.

Rešitev:

Vzemimo i-ti element množice S in označimo z $x_{(i)}$ število elementov podmnožice, v kateri se nahaja. Po razporeditvi naj podobno za isti element $y_{(i)}$ pomeni število elementov nove podmnožice, v kateri se ta element sedaj nahaja. Očitno veljata zvezi:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_{(i)}} = m \quad \text{in} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y_{(i)}} = m + k,$$

saj je vsota recipročnih vrednosti $x_{(i)}$ ali $y_{(i)}$ v vsaki posamezni podmnožici enaka 1. Od tu pa sledi:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{y_{(i)}} - \frac{1}{x_{(i)}}\right) = k$$

Vsi členi v vsoti so manjši od 1, ker je vsak razlika dveh števil med 0 in 1, torej mora biti med njimi vsaj $k + 1$ pozitivnih. V primeru, da bi bilo pozitivnih členov le k, bi njihova vsota bila manjša od k in tako ne bi veljala zgornja enakost. Dejstvo, da je en člen vsote pozitiven:

$$\frac{1}{y_{(i)}} - \frac{1}{x_{(i)}} > 0 \quad \text{nam pove} \quad x_{(i)} > y_{(i)}.$$

To se pravi, da je bil i-ti element prvič v številčnejši podmnožici kot drugič. Ker je takih členov vsaj $k + 1$, je naloga rešena.

Aleksandar Jurišić

RESITEV 7. NALOGE S STRANI 202

REŠITVE IZBRANIH NALOG ZA UČENCE VIŠJIH RAZREDOV OSNOVNIH ŠOL *

5. razred

1. Produkt dveh poljubnih zaporednih naravnih števil se vedno končuje s cifro 0, 2 ali 6 (poskusi z nekaj primeri). Ker se dano število konča s cifro 4, torej...

2. $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1980 + 1981 + 1982$

$2.S = (1+1982)+(2+1981)+(3+1980)+\ldots+(1980+3)+(1981+2)+(1982+1)$

$2.S = 1983.1982$

$S = 1983.991$

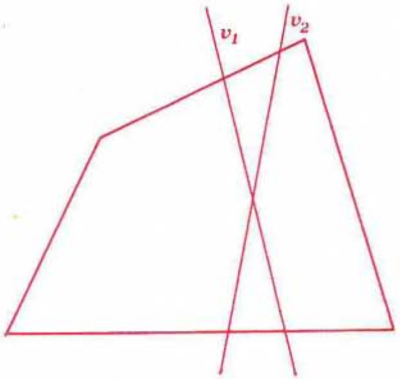
$\underline{S = 1965153}$

3. Enačba je lahko zapis nekega besedila. V našem primeru bi se besedilo glasilo takole: Če 10-kratniku nekega števila prištejemo 6, rezultat delimo z 9, dobljeni izraz pomnožimo z 10, prištejemo 7, dobljeni izraz delimo s 13, dobimo 19. Poišči neznano število!

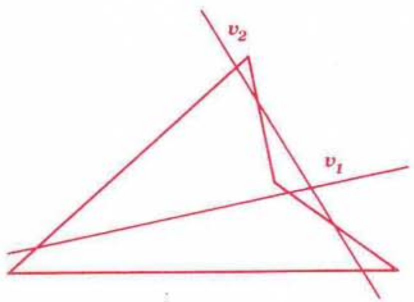
$\underline{(((10.x+6):9).10+7):13 = 19}$

$((10.x+6):9).10+7$	$= 247$	(13.19)
$(10.x+6):9$	$= 24$	$(240:10)$
$10.x+6$	$= 216$	(24.9)
$10.x$	$= 210$	$(216-6)$
	$\underline{x = 21}$	$(210:10)$

4. a)

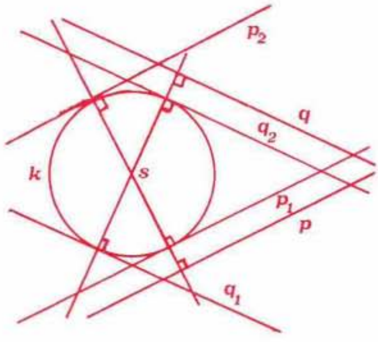


b)



*Glej Presek IX/2, stran 99!

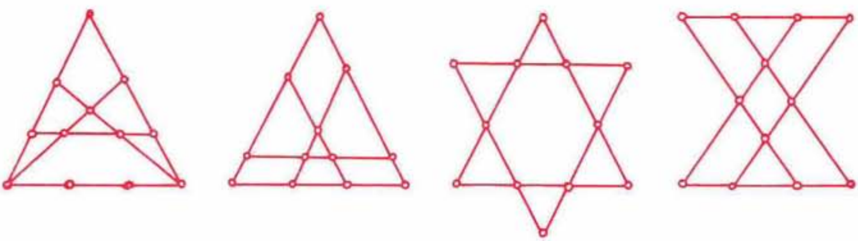
5.



6. Za predlog je glasovalo 99 volilcev, proti predlogu je bilo 81 volilcev.

7. Tretja.

8. Nekaj rešitev:



6. razred

1. 601236

2. Pomagamo si z razcepom:
   819 = 3.3.7.13
   4365 = 3.3.5.97
   Števili imata dva skupna deljitelja: 3 in 9.
   Pogoju zadošča samo 9, ker je 9 > 8 in 9 > 7.

3. Nalogo opravi sam!

4. Upoštevaj, da je število deljivo s 36, če je deljivo s 4 in 9
s 15, če je deljivo s 3 in 5
s 24, če je deljivo s 3 in 8
z 18, če je deljivo z 2 in 9

5. Reši sam!

6. Reši sam!

7. $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$ in $\frac{9}{11}$

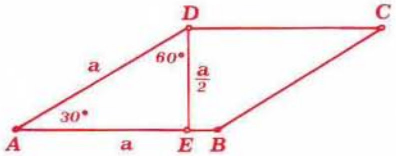
8. Če raste število a, raste tudi ulomek $\frac{a-1}{a}$, vendar je vedno pod 1.

9. 9 mm^2

7. razred

1. $p = a \cdot \frac{a}{2}$

$p = \frac{a^2}{2}$

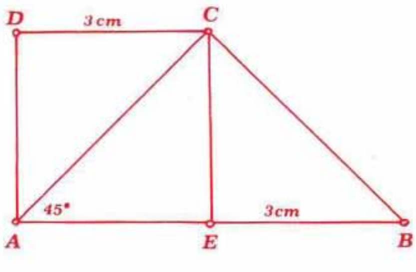


2. Četrtina kota 30° je....Torej!

3. $p = p(AECD) + p(EBC)$

$p = 9 + 4{,}5$

$p = 13{,}5\ cm^2$



4. $p(ABC) = p(ABD)$ (skupna osnovnica in višina)
Obema odštejemo $p(ABS)$, sledi:
$p(ASD) = p(BSC)$

5. Reši sam!

6. $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

8. razred

1. a) $\frac{7}{2}\, by^2$, b) 4, c) 5000

2. Uporabi Pitagorov izrek.

3. Poenostavljena enačba ima obliko
$p(n-1) = 18$
Rešitve so naslednji pari za p in n: (1, 19), (2, 10), (3, 7), (6, 4), (9, 3) in (18, 2)

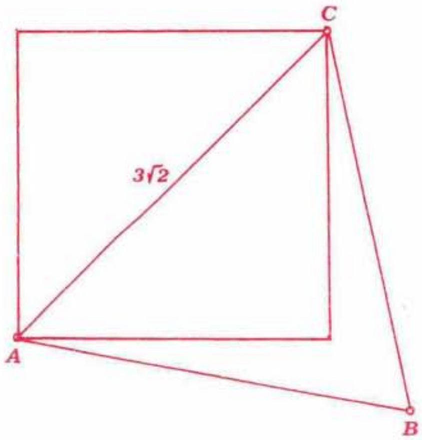
4. Zapišimo: $101010 = a^2 - b^2$ ali
$101010 = (a + b)(a - b)$,
kjer sta a in b celi števili.

Ločimo tele primere
a) a je parno, b je parno število
b) a je parno, b je neparno število
c) a je neparno, b je parno število
d) a je neparno, b je neparno število

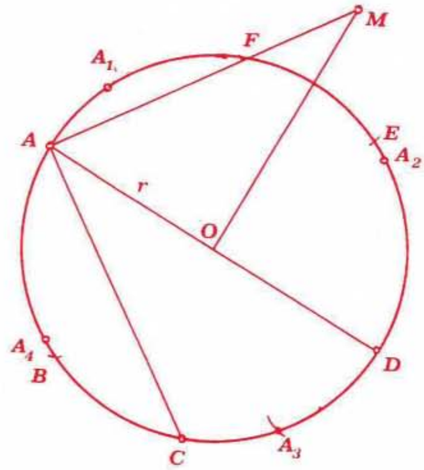
V primeru b) in c) sta števili $(a+b)$ in $(a-b)$ neparni, njun produkt je zato neparen in ne more biti enak parnemu številu 101010.

V primeru a) in d) sta števili $(a+b)$ in $(a-b)$ parni in zato je njun produkt deljiv s 4.
To število pa ne more biti enako številu 101010 (ker to ni deljivo s 4).

5.



6. Določiti moramo dolžino stranice kvadrata $a = r\sqrt{2}$ s šestilom. Najprej razdelimo krožnico k na 6 enakih delov. Točke označimo z A, B, C, D, E in F. AD je premer krožnice k, AC je stranica enakostraničnega trikotnika včrtanega v krožnico $k (AC = r\sqrt{3})$. Iz točke A in točke D narišemo loka s polmerom AC; sečišče lokov označimo z M.



Iz slike dobimo:

$MO^2 = AM^2 - AO^2$

$MO^2 = AC^2 - AO^2$

$MO^2 = 3r^2 - r^2$

$MO^2 = 2r^2$

$\underline{MO = r\sqrt{2}}$, kar je dolžina stranice iskanega kvadrata.

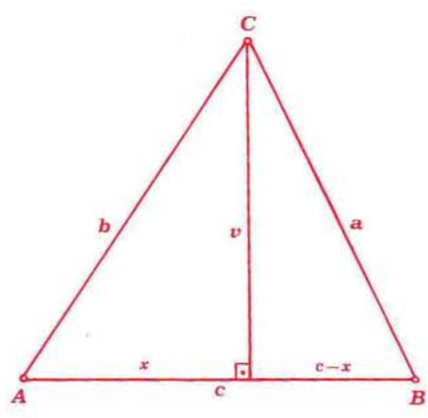
S šestilom nanesemo razdaljo MO. Oglišča iskanega kvadrata označimo z A_1, A_2, A_3 in A_4.

7. $b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2$

$x = 9$

$v = 12$ cm

$\underline{p = 84 \text{ cm}^2}$



8. $\frac{MB.MN}{2} = \frac{1}{4}.20.AC$

$MB.MN = 10.AC$ (1)

Iz podobnosti trikotnikov MNB in ABC dobimo:

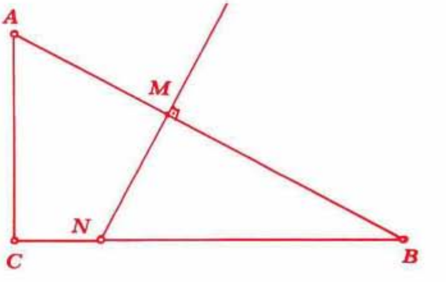
$MB : MN = 20 : AC$

$AC = \frac{20.MN}{MB}$ (2)

Vstavimo enačbo (2) v enačbo (1) pa dobimo

$MB.MN = 10.\frac{20.MN}{MB}$, sledi

$MB = 10\sqrt{2}$



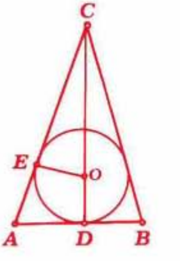
9. $CE:EA = 7:5$

$CA:EA = 12:5$

Ker je $AE = AD$, $AD = \frac{AB}{2}$, sledi

$CA:AD = 12:5$

$CA:AB = 12:10 = 6:5$



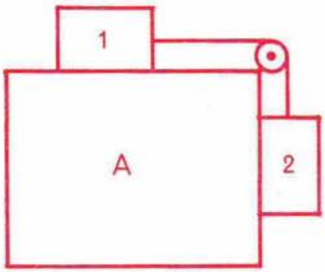
Konveksni četverokotnik razdelita diagonali na štiri trikotnike tako, da so njihove ploščine cela števila. Dokaži, da je produkt teh štirih števil popoln kvadrat! (Naloga iz zveznega tekmovanja srednješolcev v matematiki 1980/81.)

Aleksandar Jurišić

NALOGE Z ZVEZNEGA TEKMOVANJA MLADIH FIZIKOV V SUTOMORU

Skupina mehanika in toplota

1. Teniško žogico z maso 0.015 kg in polmerom 5 cm dvignemo, tako da je njeno središče 1 m nad tlemi, in jo vržemo z začetno hitrostjo 25 m/s navpično navzgor. Izračunaj čas od trenutka meta žogice do trenutka udarca žogice ob tla in kinetično energijo žogice v trenutku tik pred udarcem ob tla v naslednjih primerih:
   a) žogica ne udari ob nobeno zapreko,
   b) žogica se elastično odbije od stropa, ki je 8 m nad tlemi,
   c) žogica pri odboju od stropa izgubi 10 % kinetične energije.
2. S kolikšnim najmanjšim pospeškom moramo premikati v navpični smeri telo A (glej sliko), da telesi 1 in 2 glede na telo A mirujeta? Masi teles 1 in 2 sta enaki, koeficient trenja med telesom A in telesom 1 je enak koeficientu trenja med telesom A in telesom 2 in znaša k. Maso škripca in vrvice zanemari.



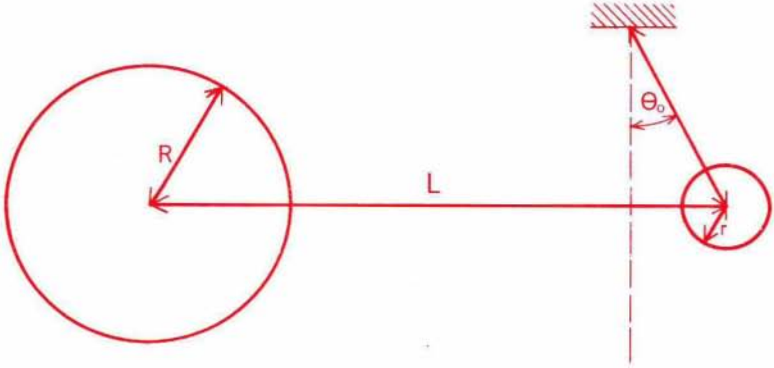
3. Traktorjeva gosenica je sestavljena iz n členkov. Dolžina vsakega členka je a. Polmer koles, na katera je nataknjena gosenica, je R. Traktor se giblje s konstantno hitrostjo v, tako da gosenica ne spodrsava. Določi število členkov gosenice, ki se v danem trenutku gibljejo premo, krožno ali pa mirujejo glede na podlago. Določi tudi čas, ki ga en členek porabi pri premem gibanju, pri krožnem gibanju in v mirovanju, ko traktor prevozi pot s, $s = n\ a$.

4. Raketa, ki kroži okoli Zemlje na višini 10 000 km, ima na trupu anteno, ki je v trenutku prihoda v orbito usmerjena proti Zemlji. Koliko goriva in v kateri smeri mora izteči iz repa rakete, da bo antena ves čas obrnjena proti Zemlji? Hitrost iztekajočih plinov je 2000 m/s, vztrajnostni moment rakete okoli težišča, ki je sredi rakete, je 10^6 kg m^2, dolžina rakete je 40 m. Polmer Zemlje je 6350 km.

5. Razmerje specifičnih toplot $\varkappa = c_p/c_v$ lahko določimo z naslednjima poskusoma. Pri prvem poskusu segrejemo plin pri stalnem volumnu V_1 od tlaka p_1 do tlaka $p_1 + \Delta p$. Pri drugem poskusu pa segrejemo plin pri stalnem tlaku p_1 od volumna V_1 do $V_1 + \Delta V$. Pri prvem poskusu je dovedena toplota Q_1, v drugem primeru Q_2. Poišči zvezo med $\varkappa$ in dovedenima toplotama Q_1 in Q_2.

Skupina elektrika in magnetizem

1. Na stojalo iz idealnega izolatorja je pričvrščena kovinska krogla s polmerom 5 cm, na kateri je naboj 9 nC. Druga, manjša krogla, z maso 0.1 g in polmerom 0.5 cm je obešena na vrvico z zanemarljivo maso in dolžino 50 cm. Manjšo kroglo nabijemo s pozitivnim nabojem, tako da vrvica tvori kot 15^o z navpičnico. Ravnotežna lega manjše krogle je oddaljena 40 cm od središča večje krogle. (Glej sliko!) Izračunaj:



a) potencial večje krogle,
b) naboj na manjši krogli,
c) upor vrvice, če se odklon vrvice zmanjša od 15^{o} do 11^{o} v 20 minutah.

Navodilo: Naboj na manjši krogli se spreminja z zakonom:

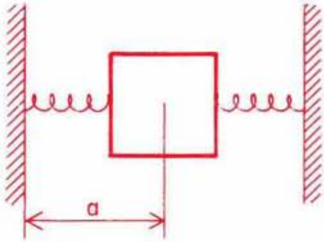
$$e = e_0\, \mathrm{e}^{-t/t_0}, \quad t_0 = R\,C.$$

2. Ploščati kondenzator s kapaciteto C je zaporedno z upornikom priključen na baterijo z gonilno napetostjo U_0. Razdaljo med ploščama hitro zmanjšamo za dvakrat. Predpostavimo, da se med premikanjem ohranja naboj na ploščah. Določi količino toplote, ki se sprosti na uporniku potem, ko se naboj na ploščah preporazdeli. Določi red velikosti upornika, pri kateri je zgornja predpostavka izpolnjena, če je čas približevanja plošč
$t \approx 10^{-2}$s in $C = 10^{-10}$F.

3. Krožna zanka z radijem a je postavljena v ravnino druge zanke z znatno večjim radijem b ($b >> a$), tako da središči sovpadata. Velika zanka je nepremična. Po njej teče tok I, manjša pa se vrti okoli premera s kotno hitrostjo ω. Upornost manjše zanke je R, njena induktivnost pa je zanemrljiva.
   a) Določi, kako se s časom spreminja tok v mali zanki.
   b) Kolikšen navor je potreben, da se mala zanka vrti z navedeno hitrostjo?

4. Med dva koncentrična kovinska obroča z radijema 1 m in 1.1 m je v radialni smeri postavljenih 1000 kovinskih prečk. Obroč se vrti okoli središča s frekvenco 10 s^{-1}. En del obroča sega v magnetno polje z gostoto 1 T, ki je pravokotno na ravnino obročev, tako da je v magnetnem polju ob vsakem trenutku 50 prečk. S kolikšnim navorom moramo vrteti obroč? Upor ene prečke je 1 ohm, upor kovinskega obroča pa zanemari.

5. Dve enaki vzmeti s koeficientoma k in začetno dolžino a pritrdimo na utež z maso m. Dolžina vsake od vzmeti je v neobremenjeni legi a_0 ($a > a_0$). Utež malo odmaknemo v prečni smeri in spustimo. S kolikšno lastno frekvenco niha, če trenja ne upoštevamo? (Glej sliko.)

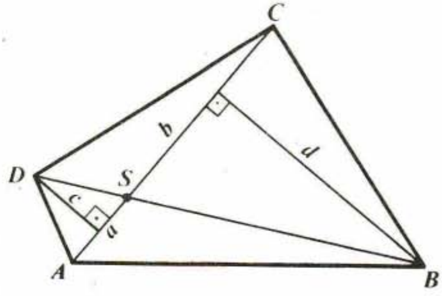


Skupina optika in atomika

1. Kopalec stoji na robu bazena in gleda njegovo dno.
   a) Kako je odvisna navidezna globina bazena od kota, ki ga tvori črta gledanja kopalca z normalo na površino vode?
   b) Nariši navidezno globino bazena v odvisnosti od tega kota, če je dejanska globina 2 m in lomni količnik za vodo 4/3.
2. Na 1.2 mm debelo planparalelno ploščo iz stekla z lomnim količnikom 1.6 svetimo s točkastim svetilom, ki oddaja svetlobo z valovno dolžino 500 nm in je oddaljeno od plošče 20 cm. Interferenčne kolobarje opazujemo na okroglem zaslonu s premerom 20 cm, ki je na drugi strani steklene plošče in je od nje oddaljen 1 m. Za koliko moramo premakniti svetilo in v kateri smeri, da se bo število kolobarjev povečalo za enega.
3. Mezon π^0, ki ima kinetično energijo enako svoji mirovni energiji, razpade v lètu na dva delca gama. Poišči najmanjši kot, ki ga tvorita smeri gibanja delcev gama.
4. Masa čistega preparata polonija ${}^{210}_{84}Po$ je 10^{-3} kg. Polonij seva alfa delce, razpolovni čas je 138.4 dni. Kolikšen je pri normalnih pogojih volumen helija, ki nastane pri tem razpadu v prvem letu? Kilomolska masa helija je 4 kg.
5. Košček izotopa zlata Au^{197} obsevamo s snopom nevtronov. Pri tem se vsako sekundo absorbira 10^6 nevtronov. Nastali izotop Au^{198} emitira delce beta, razpolovni čas za ta razpad je 2,70 dni. Koliko je atomov Au^{198} po dveh dneh neprekinjenega obsevanja?

REŠITEV NALOGE S STRANI 251

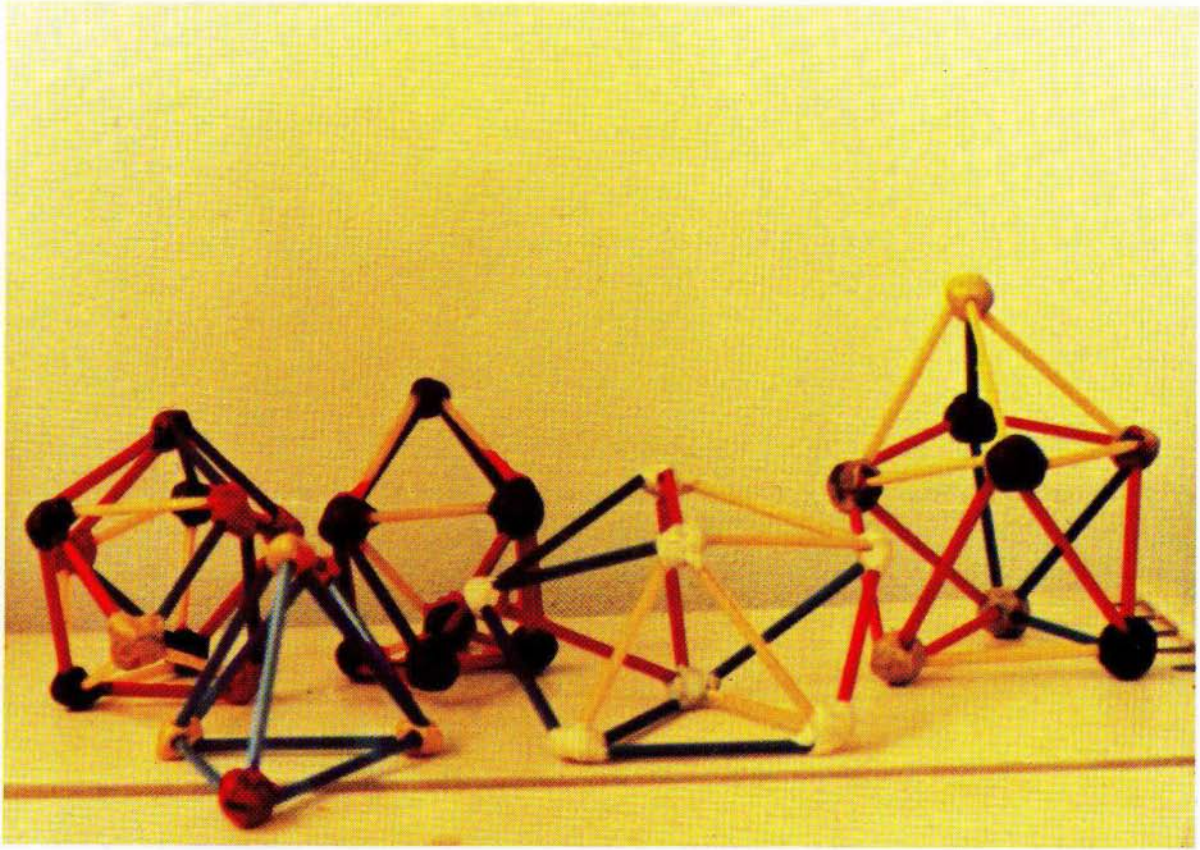
Ploščine dobljenih trikotnikov izrazimo z a, b, c in d (glej sliko), kjer je $a = \overline{AS}$, $b = \overline{SC}$.
$P_1 = \frac{1}{2}.ac$, $P_2 = \frac{1}{2}.bc$,
$P_3 = \frac{1}{2}.ad$ in $P_4 = \frac{1}{2}.bd$.
Ploščine trikotnikov so cela števila, zato so tudi produkti teh ploščin cela števila:
$P_1P_4 = \frac{1}{4}.abcd = P_2P_3$
Produkt vseh ploščin je torej res popoln kvadrat, saj velja:
$P_1P_2P_3P_4 = (P_1P_4)^2 = (P_2P_3)^2$.



Aleksandar Jurišić

REŠITEV 8. NALOGE S STRANI 202

REŠITEV 9. NALOGE S STRANI 239



Modeli nepravilnih enakorobnih poliedrov, narejenih po podatkih
iz tabele na strani 206 (Glej prispevek "Z igro spoznavajmo telesa).

BISTROVIDEC

V letošnji januarski številki ameriške poljudnoznanstvene revije *Scientific American* je bil objavljen sestavek o stavkih, ki opisujejo sami sebe. Primera takih stavkov sta: "V tem stavku je šest besed" in "Ta stavek ima enaintrideset malih črk". Bralcem je bila zastavljena tudi naslednja naloga: Dopolni stavek

V tem stavku
0 nastopa __ krat
1 nastopa __ krat
2 nastopa __ krat
3 nastopa __ krat
4 nastopa __ krat
5 nastopa __ krat
6 nastopa __ krat
7 nastopa __ krat
8 nastopa __ krat
9 nastopa __ krat
s števili, ki so pisana na običajen način, tako da bo stavek pravilen.

Poišči vse rešitve!

Janez Lesjak