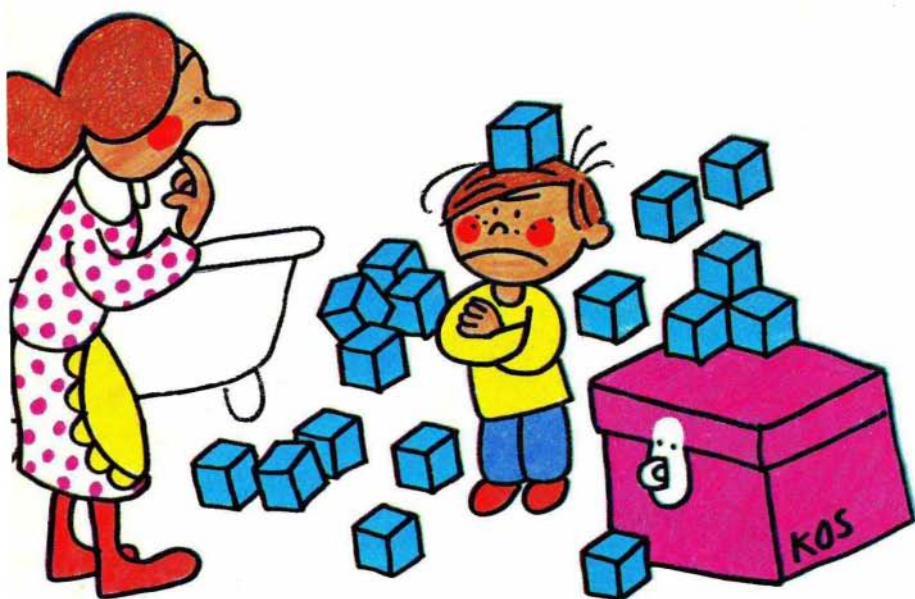


p r e 3
s e k IX
1981-82



LIST ZA MLADE

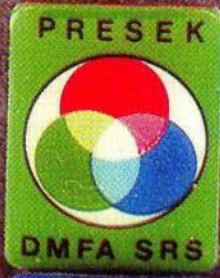
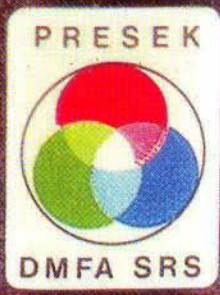
 **MATEMATIKE**

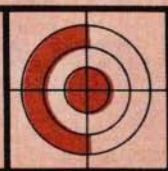
   **FIZIKE**

 **ASTRONOME**

ZDAJA DMFA SRS







DRUŠTVENE ZNAČKE - PRIZNANJA TEKMOVALCEM *

Tekmovalnim komisijam tudi v letošnjem letu predlagamo, da nabavijo za uspešne tekmovalce značke pri Komisiji za tisk. S tem bodo mlade matematike in fizike na prijeten način stimulirali in jih privabili, da se bodo tekmovanja udeležili tudi v prihodnjem letu. Učenci osnovnih šol tekmujejo na šolskih, občinskih in republiških tekmovanjih. Po napovedih naj bi letos prvič tekmovali učenci ne samo iz matematike za Vegova bronasta, srebrna in zlata priznanja, pač pa tudi iz fizike. Kolikor prireditelji ne bodo v letošnjem letu izvedli teh tekmovanj, bodo za gotovo na programu v prihodnjem šolskem letu. Dijaki srednjih šol, ki ne bodo več tekmovali po razredih, pač pa po predmetnih skupinah, tekmujejo iz matematike in fizike že vrsto let; v nasprotju z učenci osnovnih šol merijo svoje moči le na šolskih in republiškem tekmovanju.

Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS - podružnica Ljubljana in njena komisija za tisk, ki je prevzela vse obveznosti komisije za tisk republiškega društva, je ohranilo tudi staro številko žiro računa:

50101 - 678 - 47233

Na zalogi ima še dovolj različnih značk, in sicer:

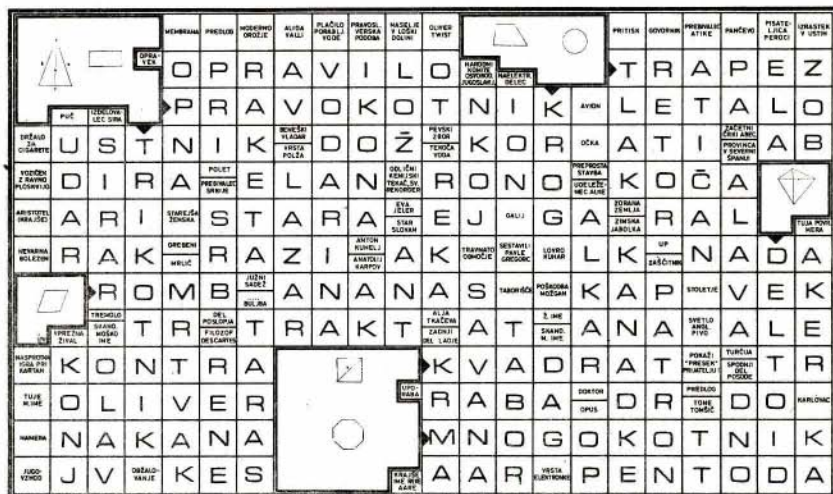
šolsko	občinsko	republiško	tekmovanje
zelena	modra	rdeča	Presekova značka

Na zalogi pa imamo še Plemljeve bronaste in srebrne značke ter belo Presekovo značko, katere lahko naročite in namenite tekmovalcem po lastni presoji. Če ste lani podelili pisane Presekove značke, se letos lahko odločite, da nabavite Plemljeve značke in belo Presekovo značko, da tekmovalci ne bodo obdarjeni vedno z enakim simbolom. Cena vsake značke je 10.- din razen bele Presekove značke, ki stane 15.- din. Zlato Plemljevo značko pa lahko kupijo le obiskovalci Plemljeve spominske sobe na Bledu. Za prihodnje šolsko leto vam bomo skušali pripraviti večji izbor različnih značk tako, da pri izbiri ne boste v zadregi.

Tekmovalcem želimo veliko uspeha pri reševanju nalog.

Ciril Velkovich

* Na drugi strani ovitka so na večbarvni sliki vse presekove značke. Prve ("Presečka") nimamo več na zalogi.



PRESEK - List za mlade matematike, fizike in astronome.

9. letnik, šolsko leto 1981/82, 2. številka, str. 65-128

Uredniški odbor: Vladimír Batagelj (bistrovidec), Danijel Bezek (bralci sprašujejo in odgovarjajo), Andrej Čadež (astronomija), Jože Dover, Rado Flegar (urednik), Tomaž Fortuna, Franci Forstnerič, Bojan Golli (tekmovanja - naloge iz fizike), Pavel Gregorc (uganke, križanke), Marjan Hribar (fizika), Metka Luzar-Vlachy (poskusi-premisli-odgovori), Andrej Kmet (Presekova knjižnica - matematika), Ljubo Kostrevc, Jože Kotnik, Edvard Kramar (glavni urednik, tekmovanja - naloge iz matematike), Matilda Lenarčič (pisma bralcev), Andrej Likar (odgovorni urednik), Sorma Markoč-Borštnik (Presekova knjižnica + fizika), Franci Oblak, Peter Petek (naloge bralcev, premisli in reši), Tomaž Pisanski (matematika), Tomaž Skulj, Zvonko Trontelj, Marjan Vagaja, Ciril Velkovrh (nove knjige, novice-zanimivosti).

Rokopis je natipkala Ivanka Breznikar, jezikovno sta ga pregledali Sandra Oblak in Miša Longyka, opremila pa sta ga Borut Delak in Višnja Kovačič, slike sta narisala Slavko Lesnjak in Rafko Šavli. Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS - PRESEK, Jadranska 19, 61111 Ljubljana, p.p. 6, tel. 265-061/53, štev. žiro računa 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki štev. 32009-007-10022/6. Naročnina za šolsko leto je za posamezno naročila 87,50 din, za skupinska pa 70.- din; za inozemstvo 7 \$, 5600 Lit, 100.-Asch. Posamezna številka stane 21.- din.

List sofinancirata ISS in RSS.

Ofset tisk časopisno in grafično podjetje "DELO", Ljubljana.

List izhaja štirikrat letno. Naklada 20.000 izvodov.

© 1981 Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS - 537

UVODNIK	129	Društvene značke - priznanja tekmovalcem (Ciril Velkovrh)
DRUŠTVENE ZNAČKE	132	Naloge s kovanci (Bojan Mohar)
MATEMATIKA	138	Inverzor (Ivan Pucelj) Kako se konča (Karel Bajc)
	142	Rob trikotnika (Janez Rakovec) Paschev aksiom (Janez Rakovec)
POSKUSI-PREMISLI-ODGOVORI	143	(Andrej Likar, Metka Luzar-Vlachy)
PREMISLI IN REŠI	146	(Peter Petek)
	147	Rezanje šahovnice (Ljubomir Kostrevec)
FIZIKA	148	Dve o energijskem zakonu in energiji (Janez Strnad)
KROŽKI	152	Astronomske vaje (Astronovski krožek osnovne šole Tomo Brejc, Kamnik)
BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES	156	Saj ni res...pa je (Milan Hladnik)
KRIŽANKA	160	(Pavle Gregorc)
TEKMOVANJA-NALOGE	162	Republiško tekmovanje mladih fizikov v Titovem Velenju (Mark Pleško)
	167	Občinska tekmovanja iz matematike za srebrna Vegova priznanja v šolskem letu 1980/81 (Pavle Zajc)
	170	Razpis tekmovanja srednješolcev iz matematike in fizike v šolskem letu 1981/82 (Bojan Golli, Gorazd Lešnjak)
	172	Vprašalnik za predtekmovanje iz matema- tike, vprašalnik za predtekmovanje iz fizike
	173	22. zvezno tekmovanje srednješolcev iz matematike (Mihael Perman)
REŠITVE NALOG	177	Paschev aksiom (Janez Rakovec)
	179	Rob trikotnika (Janez Rakovec)
NALOGE	180	Kratkočasne vžigalice (Roman Rojko)
REŠITVE NALOG	182	Nemogoč problem (Ivan Vidav)
	187	Rešitve nalog s tekmovanja vegovcev (Pavle Zajc)
NALOGE	190	Dvojni kot tete Amalije (Peter Petek)
NA OVITKU	I	Mislite si otroka, denimo Denisa Pokoro, ki ima popolnoma nezlomljive in nede- ljive kocke... glej prispevek Dve o energijskem zakonu in energiji str.148 (Janez Strnad, ilustriral Božo Kos)
	II	Presekove značke
	III	Dvojni kot tete Amalije (Peter Petek, ilustrirala Marjanca Prelog)
	IV	Bistrovidec (Vladimír Batagelj)



MATEMATIKA

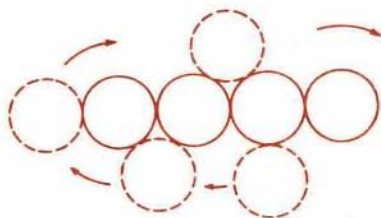
NALOGE S KOVANCI

V tem sestavku si bomo zastavili več nalog, ki imajo vse eno skupno lastnost - opraviti imajo s kovanci. Ne zanima nas, ali so kovanci zlatniki, srebrniki ali pa navadni dinarji. Omenil bi le to, da so slednji najprimernejši, saj za praktičen preizkus pravilnosti rešitve zlatnikov in srebrnikov navadno nimamo pri roki.

Naloga 1. V ravni vrsti imamo postavljenih nekaj enako velikih kovancev, tako da se drug drugega dotikajo kot kaže slika 1. Vzemimo prvi kovanec in ga kotalimo po obodu okrog preostalih kovancev, dokler ne pride spet nazaj na svoje začetno mesto. Zanima nas, koliko obratov okrog svoje osi je napravil novčič na svoji poti.



Slika 1

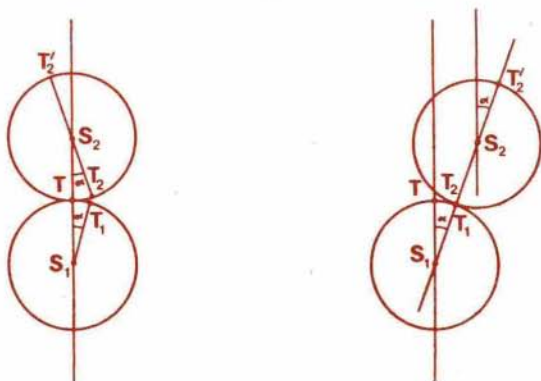


Slika 2

Naloga 1 ni enostavna, zato si najprej oglejmo najpreprostejši primer, ko imamo opravka le z dvema novcema. V tem primeru en kovanec zavrtimo okrog drugega. Prenagljen sklep marsikaterega bralca bo takle: kovanca imata isti obseg, zato prvi novčič pri poti okrog drugega napravi točno en obrat. Vendar nam praktičen preizkus z dinarjema na mizi pokaže, da je tak sklep napačen. Kovanec se namreč dvakrat zasuče okrog svoje osi. En obrat pride od poti, ki jo kovanec napravi pri kotaljenju vzdolž svojega roba, drugi pa je posledica potovanja okrog novčiča. Do istega zaključka nas pripelje tudi malo drugačno razmišljanje: namesto kovancev imejmo dve zobati kolesi iste velikosti, ki se stikata. Zavrtimo prvo kolo za en obrat v smeri ure. Pri tem drugo kolo napravi obrat v nasprotno smer, kolesi pa se spet stikata v začetnih točkah. Če se postavimo kot opazovalec na drugo kolo, se bomo zavrteli skupaj z njim in se nam bo zdelo, da to kolo miruje. Pri tem pa bo prvo kolo napravilo pot okrog nas in prišlo v začetni položaj. Ni težko uganiti, da je tako gibanje povsem ekvivalentno z gibanjem obeh kovancev. Opazovalcu na drugem kolesu se pri obratu zdi, da so se mirujoča telesa zavrtela za en obrat v smeri ure. Ker pa je prvo kolo napravilo še en dejanski obrat, se mu zdi, da se je dvakrat zavrtelo.

Tako fizikalno razmišljanje nas pripelje do splošnejšega sklepa, ki nam bo pomagal pri reševanju naloge 1.

Trditev. Ko se prvi kovanec zavrti za kot α okrog drugega, se zasuče za kot 2α okrog svoje osi.



Slika 3

Dokaz. Oznake bomo pobrali s slike 3. Ker sta loka TT_1 in TT_2 iste dolžine, se bosta pri poti za kot α točki T_1 in T_2 pokrili. Diametralno glede na T_2 leži točka T_2' in je v začetku za kot α levo od navpičnice, po zasuku pa za kot α desno os nje, saj je kot med navpičnico in T_2S_2 enak kotu T_1S_1T (vzporedne nosilke). Točka se je torej zasukala za kot 2α . Zasuk okrog osi je za vse točke kroga (novca) isti, kar nam pove, da je trditev pravilna.

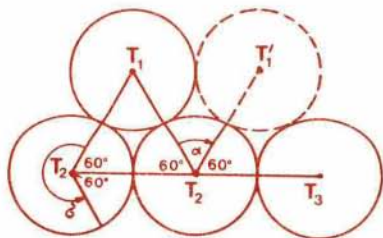
Opomba. Dokaz gornje trditve je oprt na geometrijsko predstavo in na sliko 3. Iz slike je konstrukcija razvidna le za dovolj majhne kote, vendar pa nas ne pusti na cedilu tudi pri poljubno velikem kotu α . Če kdo tega ne verjame, naj poskusi to dokazati. Npr. za kot $\alpha = 512^\circ$ lahko storimo naslednje: napravimo 512-krat obrat za 1° (1° je dovolj majhen kot), torej se bo kovanec zasukal 512-krat za 2° okrog svoje osi, skupno torej za kot $512 \cdot 2^\circ = 1024^\circ = 2 \cdot 512^\circ = 2\alpha$.

Bralec sam bo ugnal naslednjo nalogo:

Naloga 2. Kovanec s polmerom r naj napravi pot okrog kovanca s polmerom R . Kolikokrat se pri tem zasuje okrog svoje osi?

Rešitev: $((R + r)/r)$ -krat.

Vrnimo se zdaj spet k nalogi 1. Na sliki 4 je predstavljeno kotaljenje novca okrog verige kovancev v trenutku, ko prehaja z enega na drugi kovanec.



Slika 4

Če se kovanec kotali ob nekem drugem novčiču v verigi vzdolž loka nad kotom α , se je pri tem zavrteel za kot 2α okrog svoje osi. Zato je dovolj, da ugotovimo, kako dolgo se prvi novčič kotali po vsakem izmed kovancev iz verige. Z drugimi besedami, določiti moramo kota α in σ , prikazana na sliki 4. Kot α izračunamo takole: trikotnika $T_2T_3T_1$ in $T_3T_4T_1$ sta enakostranična (vse stranice so dolžine $2r$, če je r polmer kovanca). Zato sta kota $T_2T_3T_1$ in $T_4T_3T_1$ enaka 60° . Torej mora biti kot α enak $\alpha = 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ$. Isti sklep nam pove, da je kot σ enak $\sigma = 360^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 240^\circ$. Konec računa je pred nami. Recimo, da smo imeli v začetni verigi n novcev všteti tudi prvega. Prvi kovanec se ob drugem in zadnjem kovancu kotali vzdolž kota σ , ob preostalih $n-3$ kovancih pa vzdolž kota 2α (zgoraj za kot α in ravno tako spodaj). Skupna dolžina teh kotov je enaka

$$\phi_n = (n-3) \cdot 2\alpha + 2\sigma = (n-3) \cdot 120^\circ + 4 \cdot 120^\circ = (n+1) \cdot 120^\circ$$

Na svoji poti se torej prvi novčič okrog svoje osi zasuka za kot $2\phi_n = (n+1) \cdot 240^\circ$, število obratov je enako

$$M_n = \frac{2(n+1)}{3}$$

Število obratov ni nujno celo število. To se zgodi le v primeru, ko je $n+1$ deljivo s 3. Tak primer smo imeli tudi, ko sta bila pred nami le dva novca.

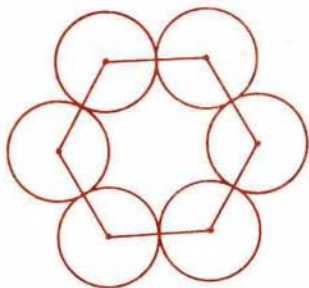
Naslednja naloga zahteva znanje trigonometrije in reševanje prepuščam bralcu.

Naloga 3. Kakšna je rešitev naloge 1, če prvi kovanec ni enake velikosti kot so preostali kovanci v verigi?

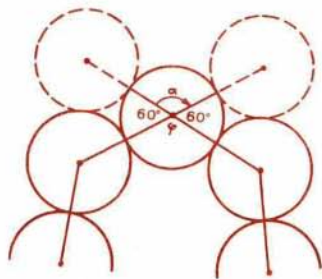
Naloga 4. Naj bo a stranica pravilnega n -kotnika. n kovancev polmera $a/2$ postavimo s središči na oglišča tega n -kotnika in tako dobimo sklenjen obroč (slika 5). Novčič iste velikosti kotalimo okrog. Koliko obratov okrog svoje osi napravi pri tem?

Rešitev: Spet moramo izračunati le vsoto kotov lokov, nad katerimi se kotali novčič. Dovolj je, da poznamo kot α s slike 6. Ravno tako kot pri reševanju naloge 1 ugotovimo, da sta kota

med krakoma kotov α in ϕ enaka 60° . Iz slike je razvidno, da je
 $\alpha = 360^\circ - 2 \cdot 60^\circ - \phi = 240^\circ - \phi$
 kjer je ϕ notranji kot pravilnega n -kotnika in je torej enak
 $\phi = 180^\circ - 360^\circ/n$. Kot α je zato enak $\alpha = 60^\circ + 360^\circ/n$.



Slika 5



Slika 6

Lok s kotom α napravimo n -krat, vsakič pa se novčič zasuka za kot 2α okrog svoje osi. Skupen zasuk je torej enak

$2n\alpha = 2n \cdot 60^\circ + 720^\circ = (n+6) \cdot 120^\circ$. Število obratov pa je enako

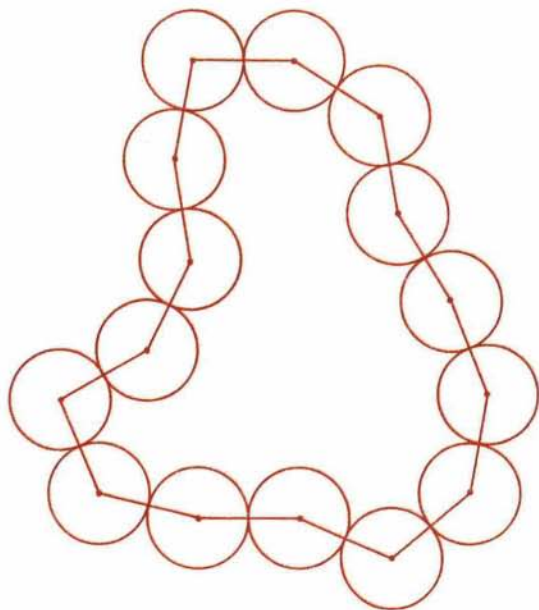
$$N_n = 2n\alpha/360^\circ = n/3 + 2$$

Naloga 5. Iz n kovancev enake velikosti tvorimo poljubno sklenjeno verigo. Okrog nje zakotalimo novčič. Koliko obratov okrog svoje osi napravi pri tem? Središča kovancev v sklenjeni verigi tvorijo n -kotnik. Ali je število obratov rotirajočega novčiča v kakšni zvezi z notranjimi koti tega n -kotnika?

Pri reševanju naloge 4 smo ugotovili, da je kot α s slike 6 enak $\alpha = 240^\circ - \phi$. Geometrijska predpostavka pri tem je bila, da je kot α nenegativen. To pa pomeni, da mora biti kot ϕ manjši ali enak 240° . Če predpostavimo, da vsi koti v n -kotniku ustrezajo temu pogoju, potem lahko tako kot pri nalogi 4 ugotovimo, da se bo novčič na poti okrog obroča zavrtel okrog svoje osi za kot

$$\begin{aligned} \gamma &= 2 \cdot (240^\circ - \alpha_1 + 240^\circ - \alpha_2 + \dots + 240^\circ - \alpha_n) = \\ &= n \cdot 480^\circ - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \end{aligned}$$

kjer so $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ notranji koti n -kotnika. Ker je vsota notranjih kotov n -kotnika vedno enaka $(n-2) \cdot 180^\circ$, dobimo

$$\gamma = n \cdot 480^\circ - 2(n-2) \cdot 180^\circ = (n+6) \cdot 120^\circ$$


Slika 7

Rezultat je torej isti kot pri nalogi 4, če je le izpolnjena predpostavka, da so vsi koti manjši ali kvečjemu enaki 240° . Če pa ta zahteva ni izpolnjena, je lahko rešitev povsem drugačna. Ustrezne primere naj skonstruira bralec sam.

Bojan Mohar

$$m^2 = \overline{OV^2} + \overline{VR^2} \qquad n^2 = \overline{TV^2} + \overline{VR^2}$$

Odtod dobimo s kratkim računom

$$\begin{aligned} \overline{OT} \cdot \overline{OP} &= \overline{OV^2} - \overline{TV^2} = (\overline{OV^2} + \overline{VR^2}) - (\overline{TV^2} + \overline{VR^2}) = \\ &= m^2 - n^2 = a^2. \end{aligned}$$

Napravo prikazano na sliki 2, imenujemo *inverzor*. Videli smo, da ustreza pogoju (1), zato prevede krožno gibanje točke T po loku $\widehat{AB}$ v premočrtno gibanje točke P po daljici XY na premici p (seveda prevede tudi gibanje točke P v kroženje točke T).

Opomba. Preslikava v ravnini, ki prireja točki T točko P po pravilu (1), in se imenuje *inverzija* v ravnini. Točka O je *središče inverzije*, število a^2 je *koefficient inverzije*. S tema dvema podatkom je preslikava natančno določena. V geometrijskem pogledu ima ta preslikava veliko zanimivosti in zasluži posebne članke.

Ivan Pucelj

KAKO SE KONČA

... pa ne roman ali film, ampak število! Natančneje: katere so zadnje tri številke števila 8^{200} ?

8^{200} ni malenkost: njegove prve številke bi zaman iskali na najboljših žepnih računalnikih (ki računajo samo s števili, manjšimi od 10^{100}), da o njegovih zadnjih številkah sploh ne govorimo! In vendar lahko na sorazmerno preprost način dožene-
mo njegove zadnje tri številke!

Zadnje številke ni prav nič težko določiti. Začnemo z zaporednimi potencami števila 8 in zapišemo vsakokrat zadnjo številko:

$8^1 = 8$	... 8	$8^5 = 32768$	... 8
$8^2 = 64$	... 4	$8^6 = 262144$	... 4
$8^3 = 512$	... 2		
$8^4 = 4096$	... 6		

Opazimo, da se zadnja številka ponovi vsake štiri potence (ima periodo 4).

Odtod sledi, da je zadnja številka 8^{200} enaka zadnji številki števila 8^4 , torej 6.

Podobno bi lahko postopali za zadnji dve številki in nato še za zadnje tri. Ker pa je najbrž perioda v teh dveh primerih zelo velika, je ta način zelo zamuden.

Zato poskusimo drugače, 8 zapišemo kot $10-2$, 8^{200} kot $(10-2)^{200}$. Ta izraz razvijemo kot potenco binoma:

$$(10-2)^{200} = 10^{200} - 200 \cdot 10^{199} \cdot 2 + \dots - 200 \cdot 10 \cdot 2^{199} + 2^{200}$$

Recimo, da hoče to število deliti s 125 ($= 5^3$). Katerakoli potenca 10^n števila 10 vsebuje toliko petic med svojimi faktorji, kot je njen eksponent n , zato je vsak člen do predzadnjega gotovo deljiv s 125 (pri predzadnjem prispeva 200 dve petici in 10 eno, skupno tri). Ostane nam še zadnji člen 2^{200} . Tega predelamo v vsoto takole:

$$2^{200} = (2^{10})^{20} = (1024)^{20} = (1025 - 1)^{20} = \\ = 1025^{20} - 20 \cdot 1025^{19} \cdot 1 + \dots - 20 \cdot 1025 + 1$$

Spet vsebujejo vsi členi razen zadnjega med svojimi faktorji vsaj 3 petice. To pomeni, da je pri deljenju s 125 ostanek števila 2^{200} in s tem tudi začetnega števila 8^{200} enak 1.

Kako se končuje število, ki ima pri deljenju s 125 ostanek 1? Na eno naslednjih oblik: 001, 126, 251, 376, 501, 626, 751, 876. Katero od teh števil je pravo?

Še enkrat se ozrimo po začetnem številu 8^{200} ! To je vendar deljivo z 8! Deljivost z 8 pa preizkusimo, kot je znano, na zadnjih treh številkah. Od gornjih kandidatov je deljivo z 8 samo število 376.

Naš odgovor je: število 8^{200} ima zadnje tri številke enake 376. Če pogledamo nazaj, vidimo, da smo število 8 pri dokazovanju bolj malo uporabili. Važno je bilo le, da se je dalo zapisati v obliki $10-2$.

Isto bi lahko dokazali za vsako število $10n - 2$, kjer je n katerokoli število, pa tudi za števila oblike $10n + 2$, $10n - 4$ in $10n + 4$.

Bralec naj to poskusi sam dokazati na podoben način, kot smo to naredili za število $8 = 10 - 2$.

Ni težko videti, da lahko vsako sodo število, ki ni deljeno z 10, zapišemo v eni od oblik $10n - 4$, $10n - 2$, $10n + 2$, $10n + 4$ za neko naravno število n .

Povzetek: Če je N katerokoli sodo število, ki ni deljivo z 10, se število N^{200} končuje s številkami 376.

Karel Bajc

ROB TRIKOTNIKA

Dan je trikotnik ABC . Na stranici AB izberemo točko D med A in B

- Pokaži, da velja vsaj ena od relacij: $\overline{CD} < \overline{CA}$, $\overline{CD} < \overline{CB}$!
- V kakšnem primeru je $\overline{CD} < \overline{CA}$ in $\overline{CD} < \overline{CB}$ za vsak D med A in B ?
- S pomočjo ugotovitve v nalogi a) dokaži, da daljica, ki spaja poljubni točki E in F na robu trikotnika ABC , ni daljša od najdaljše stranice tega trikotnika!

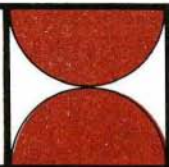
Janez Rakovec

PASCHEV AKSIOM

Upoštevaj Paschev aksiom in dokaži, da velja za konveksen četverokotnik $ABCD$ naslednja trditev: Če premica p leži v ravnini četverokotnika, ne gre skozi nobeno oglišče ter seka eno njegovih stranic, seka še natanko eno izmed ostalih stranic. - Ali velja enaka trditev za konkaven četverokotnik? Ali velja za konveksen (oziroma konkaven) mnogokotnik?

Janez Rakovec

POSKUSI - PREMISLI - ODGOVORI



Na zastavljeno vprašanje o kisli vodi smo dobili le en odgovor, ki pa smo ga bili zelo veseli, saj je v celoti pravilen. Poslal nam ga je Česar Božidar, dijak 3. razreda gimnazije v Murski Soboti.

Božidar pravi takole: "V kozarec sem nalil kislo vodo in opazoval hitrost mehurčkov. Večji mehurčki so bili hitrejši od manjših. Opazil sem tudi, da se mehurčki večajo, ko se bližajo vodni gladini.

Teže je bilo opazovati mehurčke v gibajočem se kozarcu. Po kakih sto počepih pa sem svoja opazovanja strnil takole: Če sem se gibal enakomerno gor-dol, ni bilo videti razlike v hitrosti mehurčkov. Če sem se spuščal sunkovito (pospešeno), so bili vsi mehurčki počasnejši, a ko sem se tako dvigal, hitrejši."

Božidar je tudi razložil svoja opazovanja. Mehurčke dviga kvišku vzgon, ki je pri večjih mehurčkih večji. Ker je vzgon enak teži izpodrinjene vode, narašča s kubom mehurčkovega polmera. Upor vode, ki mehurček zadržuje pri dviganju, narašča s polmerom počasneje kot vzgon, narašča pa s hitrostjo mehurčka. Pri enakomernem dviganju sta vzgon in upor vode po velikosti enaka. Večji mehurčki se tako dvigajo z večjo hitrostjo proti gladini.

Pri opazovanju relativnega gibanja mehurčkov glede na gibajoči se kozarec, je ugodno preiti z opazovalnega sistema, kjer mirujejo tla, na nov opazovalni sistem, v katerem miruje kozarec z vodo. Če se gibljemo enakomerno gor ali dol, se razmere v novem opazovalnem sistemu ne spremenijo. Pravimo, da sta opazovalna sis

tema enakovredna. Razmere pa se bistveno spremenijo, če se kozarec v starem opazovalnem sistemu pospešeno giblje v navpični smeri. Takrat se v novem opazovalnem sistemu teža spremeni, zato se spremeni tudi vzgon. Pri pospešenem gibanju navzdol se teža zmanjša, zato se zmanjša tudi vzgon in mehurčki postanejo počasnejši. Če bi kozarec spustili, da bi v starem opazovalnem sistemu prosto padal, bi se mehurčki glede na kozarec ustavili. Takrat v novem opazovalnem sistemu ni teže. Tako si razložimo breztežno stanje v vesoljski ladji, ki kroži po orbiti okrog Zemlje. Ladja ves čas prosto pada, na Zemljo pa ne trešči, ker je le-ta okrogla in se ladji "umika". Breztežno stanje bi doživeli tudi v dvigalu, ki bi se mu pretrgala nosilna vrv. Tu pa se tla na dnu jaška ne "umikajo" in čez čas bi breztežno stanje prav na trdo prenehalo.

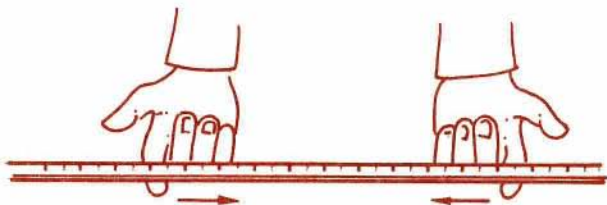
Podobno je, ko se gibljemo pospešeno navzgor. Takrat se teža v novem opazovalnem poveča in mehurčki zaradi večjega vzgona hitreje potujejo proti gladini. Res je, da je ta pojav teže opaziti, ker so pospeški, s katerimi se zmoremo dvigati, manjši od pospeškov, s katerimi se lahko spustimo na tla.

Božidarju bomo za nagrado poslali knjigo "Posebna teorija relativnosti".

Andrej Likar

SEDAJ PA K NOVI NALOGI!

Vzemite daljše ravnilo, vsaj pol metra naj ima, in mu takole poiščite težišče: najprej naj ravnilo leži v vodoravni legi na kazalcih leve in desne roke. Potem kazalca približujete (slika).

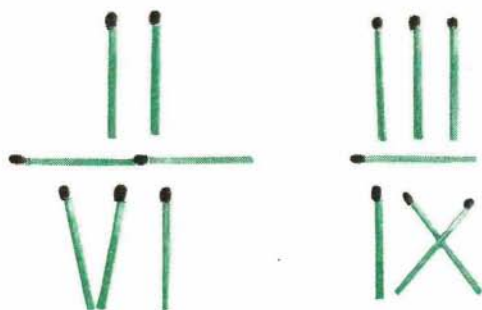


Tako najdete točko, kjer ostane ravnilo, podprto z enim samim prstom, v vodoravni legi. Ta točka, težišče, je na sredini ravnila. Bolj zanimivo je to, da ravnilo ne drsi po prstih enakomerno, ampak zdrsi najprej prek kazalca ene roke, potem prek kazalca druge roke in tako naprej. Pazljivo opazujte ta pojav in ga razložite!

Enako lahko poiščete težišče kakega telesa, ki ni simetrično, npr. težišče metle! Na vaše odgovore čakamo do 1. marca 1982. Najboljše bomo nagradili.

Metka Luzar-Vlachy

REŠITEV 2. NALOGE S STR. 181 P IX/3



Roman Rojko



PREMISLI IN REŠI

PREMISLI IN REŠI - REŠITEV IZ LETOŠNJE PRVE ŠTEVILKE

Nalogo s kovanci je rešilo le pet bralcev Preseka. Naloga prav gotovo ni bila težka, zahtevala je le primeren način preštevanja vseh možnosti. Pravilne rešitve so nam poslali: *Franco Jerazla* iz Kranja, *Barbara Motnikar* iz Kamnika, *Marko Lampe* iz Celja, *Tomaž Pogačnik* iz Ljubljane in *Jože Žibret* iz Ljubljane. Poglejmo, kako je Barbara iz Kamnika preštela vse možnosti plačevanja!

I. z eno vrsto kovancev

5 možnosti

II. z dvema vrstama kovancev

- a) 9 možnosti (5 in 10 par)
- b) 4 možnosti (5 in 20 par)
- c) 4 možnosti (10 in 20 par)
- č) 1 možnost (5 in 50 par)
- d) 1 možnost (10 in 50 par)

skupaj 19 možnosti

III. s tremi vrstami kovancev

- a) 16 možnosti (5, 10 in 20 par)
- b) 4 možnosti (5, 10 in 50 par)
- c) 2 možnosti (5, 20 in 50 par)
- č) 2 možnosti (10, 20 in 50 par)

skupaj 24 možnosti

IV. s štirimi vrstami kovancev

2 možnosti (5, 10, 20 in 50 par)

Skupno torej lahko na $5 + 19 + 24 + 2 = 50$ različnih načinov plačamo 1 dinar.

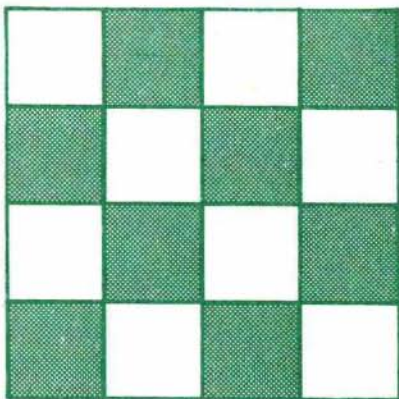
Barbari bomo poslali Struikovo *Kratko zgodovino matematike*, ki je izšla v Sigmí.

Peter Petek

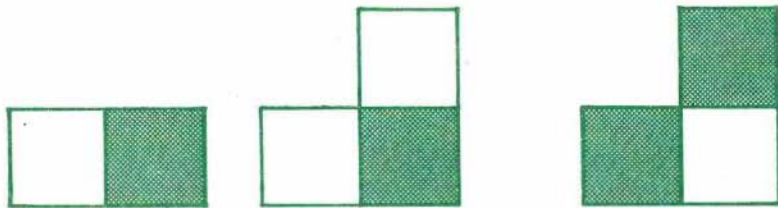
Vabimo vas, da naslednjo nalogo rešite do 15. maja.

REZANJE ŠAHOVNICE

Narišimo si šahovnico s 16 polji (slika 1). Koliko različnih ploskev z največ 6 kvadratki lahko dobimo z rezanjem te šahovnice, če je dovoljeno rezati samo po črtah, tako da mali kvadrati ostanejo celi. Ploskvi štejemo za različni, če sta različne oblike, ali pa enake oblike in drugače pobarvani (slika 2).



Slika 1



Slika 2

Ljubomir Kostrevo



DVE O ENERGIJSKEM ZAKONU IN ENERGIJI

Obstaja dejstvo ali, če hočete, *zakon*, ki so mu podrejeni vsi danes znani pojavi v naravi. Ne poznamo nobene izjeme in, kolikor vemo, velja ta zakon natančno. Imenujemo ga *ohranitev energije*. Zakon zagotavlja, da obstaja neka količina - imenujemo jo energijo, ki se pri spremembah v naravi ne spremeni. Po tej zelo abstraktni zamisli - matematičnem načelu, obstaja količina, ki se ne spremeni, ko se nekaj zgodi. To ni opis kakega mehanizma ali česa oprijemljivega. To je samo svojevrstno dejstvo, da lahko izračunamo neko število in ko nehamo opazovati naravo pri njenih zvijačah in zopet izračunamo število, dobimo enak rezultat (nekako tako, kot je na šahovnici lovec, ki je na črnem polju, po določenem številu potez še vedno na črnem polju).

Mislite si otroka, denimo Denisa Pokoro, ki ima popolnoma nezlomljive in nedeljive kocke. Vzemimo, da jih ima 28! Zjutraj ga zapre mati z njegovimi kockami v sobo. Zvečer je radovedna in skrbno prešteje kocke. Pri tem odkrije svojevrsten zakon: ne glede na to, kaj dela Denis s kockami, jih je vedno 28. To se ponavlja nekaj dni, dokler nekega dne ni samo 27 kock. Majhna preiskava pa pokaže, da je kocka pod preprogo. Mati mora pogledati prav povsod, preden se lahko prepriča, da se število kock ni spremenilo. Toda nekega dne se zdi, da se je število spremenilo - kock je samo 26. Skrbna preiskava pa pokaže, da je bilo odprto okno. Ko mati preišče okolico, najde preostali kocki. Nekega drugega dne skrbno štetje razkrije, da je kock 30. Zaradi tega je mati osupla, dokler ne ugotovi, da je bil na obisku Mihec, ki je prinesel s seboj svoje kocke in jih puš

til pri Denisu. Mati odstrani Mihčeve kocke, zapre okno in Mihcu ne dovoli vstopa.

Potem je nekaj časa vse v redu, dokler nekoč ne našteje samo 25 kock. V sobi je zaboj za igrače in mati ga hoče preiskati. Denis pa začne vpiti in ji tega ne dovoli. Mati torej ne sme odpreti zaboja. Ker pa je zelo radovedna in tudi nekoliko prebrisana, naredi načrt. Ve, da tehta posamezna kocka 0,3 kg. Stehta zaboj, ki tehta 1,5 kg, ko vidi vseh 28 kock. Naslednjič, ko preverja število kock, zopet stehta zaboj, odšteje 1,5 kg in deli z 0,3 kg. Tako ugotovi, da velja

$$(\text{število kock, ki jih vidi}) + (\text{masa zaboja} - 1,5 \text{ kg}) / 0,3 \text{ kg} = \text{konstantno.}$$

Potem pride do novih težav. Kocke spet zmanjkujejo. Toda skrbno proučevanje pokaže, da se tedaj dvigne gladina umazane vode v banji. Denis meče kocke v vodo, a mati jih ne more videti, ker je voda umazana. Koliko kock je v vodi, pa ugotovi po legi gladine in doda svoji enačbi nov člen. Ker je prvotna višina vode 15 cm in se dvigne na račun vsake kocke gladina za $\frac{1}{2}$ centimetra, je nova enačba

$$(\text{število kock, ki jih vidi}) + (\text{masa zaboja} - 1,5 \text{ kg}) / 0,3 \text{ kg} + (\text{višina vode} - 15 \text{ cm}) / \frac{1}{2} \text{ cm} = \text{konstantno}$$

Ko postaja materin svet vse bolj zapleten, vpelje celo vrsto členov, ki ustrezajo načinom za računanje števila kock na krajih, na katere ne sme pogledati. Tako pride naposled do zapletene enačbe za količino, ki *jo mora izračunati* in ki v njenih razmerah ostaja vedno nespremenjena.

V čem je podobnost tega z ohranitvijo energije? Najpomembnejše, kar moramo odmisлити, so kocke, ki *jih v resnici ni*. Z izjemo prvega člena v obeh enačbah računamo bolj ali manj abstraktne reči. Podobnost pa je v tem: prvič, ko računamo energijo, enkrat nekaj energije zapusti naš sistem, drugikrat pa je nekaj pride vanj. Ko preverjamo ohranitev energije, moramo poskrbeti, da sistemu ne dodamo nič energije in mu je nič ne odvezamemo. Drugič, energija ima veliko različnih oblik in za vsako imamo

posebno enačbo. To so: gravitacijska potencialna energija, kinetična energija, notranja energija, energija mase... Če upoštevamo enačbe za vse te prispevke, se energija ne spremeni, razen kolikor je je sistem prejel ali oddal. Zavedati se moramo, da danes v fiziki ne vemo, kaj energija *je*. Nimamo slike, v kateri bi energija nastopala v obliki majhnih, določenih obrokov. Ne, tako že ni! Obstajajo pa enačbe za računanje neke s števili izražene količine in, če vse seštejemo, dobimo "28" - vedno isto število. To je abstraktna reč, ker ne pove nič o mehanizmih ali *razlogih* za veljavnost raznih enačb...

R.P.Feynman, R.B.Leighton, M.Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1963, 1. del, str. 4-1.

Znan ameriški fizik R.P.Feynman, ki je leta 1965 skupaj z J.Schwingerjem in S.I.Tomonago dobil Nobelovo nagrado, je v šolskih letih 1961/62 in 1962/63 pripravil v okviru načrta za izboljšanje pouka fizike dveletno uvodno predavanje za univerzo (Kalifornijski tehnični inštitut v Pasadeni). Po magnetofonskem zapisu sta R.B.Leighton in M.Sands izdelala učbenik v treh delih, ki je sicer dokaj zahteven, a je prava zakladnica novih pedagoških prijemov.

Kmet ima majhen ribnik, v katerega doteka potoček in iz katerega odteka potoček. Ribnik dobiva vodo še od priložnostnega dežja in jo izgublja z izhlapevanjem. Vzemimo, da je ribnik naš *sistem*, voda v njem *notranja energija*, voda, ki priteče ali odteče v potočkih, *dovedeno ali odvedeno delo*, voda, ki jo prinese dež ali odnese izhlapevanje, pa *dovedena ali odvedena toplota*.

Z opazovanjem ribnika v določenem trenutku ne moremo ugotoviti, koliko vode, ki je v njem, je priteklo vanj v potočku in koliko je je prinesel dež.

Vzemimo, da bi radi izmerili maso vode v ribniku. Z merilnikoma pretoka izmerimo, koliko vode priteče ali odteče v potočkih. Za dež pa nimamo takega merilnika. Lahko pa pokrijemo ribnik s po-



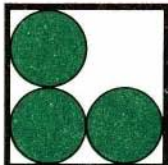
njavo. Lastnik ribnika torej postavi v ribnik navpično merilno letev, prekrije ribnik s ponjavo in vstavi merilnika pretoka v pritekajoči in v odtekajoči potoček. S tem da zapre pritok ali odtok in upošteva podatek drugega merilnika, lahko umeri maso vode v ribniku z višino vode, ki jo kaže letev. Tako (na adiabatsno izoliranem sistemu) določi maso vode v ribniku pri katerem koli stanju.

Nato odstrani ponjavo. Maso vode, ki jo je danega dne prinesel dež, določi poslej tako, da ugotovi razliko med maso vode v ribniku, kakor jo kaže letev, in maso pritečene vode, kakor jo kaže merilnika pretoka. Razlika kaže maso dežja.

H.B. Callen, *Thermodynamics*, J.Wiley Sons, New York 1960, str. 19, citirano po F. Reif, *Statistical Physics*, McGraw-Hill, New York 1967, str. 205.

Berkeleyska univerza je v okviru obsežnega načrta za izboljšanje pouka fizike pripravila učbenik v petih delih za dveletno uvodno predavanje. Reifova *Statistična fizika* je peti del tega "berkeleyskega tečaja fizike". Menda pa so pozneje učbenik opustili, češ da je prezahteven.

Izbral in prevedel
Janez Strnad



ASTRONOMSKE VAJE IZ NAŠEGA KROŽKA

Si osnovnošolec, zanima te astronomija, pa bi rad raziskoval po nebu. Nimaš teleskopa, nimaš literature, zdi se ti, da je vse pretežko in nedostopno. Pa ni tako!

Če imaš le dobro voljo, nekoliko vztrajnosti in iznajdljivosti, lahko narediš vse vaje, ki smo jih delali v našem krožku (Astronomski krožek osnovne šole Toma Brejca, Kamnik). Seveda so to začetniški koraki, ki te vodijo k spretnosti, potrpežljivosti, lastni iznajdljivosti, kar ti bo omogočilo, da se boš lotil tudi težjih opazovalnih vaj (npr.: opazovanje kake spremenljivke, kot je Algol v Perzeju).

Kje smo za delo našega krožka dobili ideje? V članku Marijana Proséna, *Astronomska opazovanja* (Presek, 5/5, 1977/78).

Najprej smo določili zemljepisno širino in dolžino naše šolske zvezdarne, ki leži na Križu 5 km od Kamnika. Vzeli smo 2,5 m dolgo ošiljeno palico (gnomon) in jo postavili pravokotno na podlago. Pri postavljanju smo poskušali biti čimbolj natančni. Okoli palice smo narisali tri krožnice s središčem v gnomonu. Potem smo zabeležili, kje se senca gnomona dotakne krožnic dopoldne in kje popoldne. Točki na isti krožnici smo povezali in dobljene tetive razpolovili. Razpolovišča tetiv smo povezali z gnomonom in tako dobili smer S - J. Smer se je dobro ujemala s smerjo, ki jo je kazal kompas.

Nato smo opazovali senco gnomona. Ko je ta padla v smer S - J, smo izmerili čas prehoda in dolžino sence. Ob tem smo spoznali,

da senca ne pade v smer S - J točno ob 12h, da se to od dneva do dneva spreminja, da se tudi dolžina sence spreminja (npr.: Križ - 9.5.1980 dolžina sence $l' = 139$ cm, čas prehoda $t = 11^h 59^m$; 14.1.1981 $l' = 470$ cm, $t = 12^h 17^m$).

Z opoldansko dolžino sence smo izračunali tudi opoldansko višino Sonca h . Uporabili smo enačbo $\text{tg } h = l/l'$, l je višina gnomona. Krožkarji so se tako morali poglobiti še v kotne funkcije. Za različne dneve smo dobili različne vrednosti za h (npr.: Križ 9.5.1980 $h = 61,2^0$; 14.1.1981 $h = 28^0$).

Iz enačbe $\varphi = 90^0 - h + \delta$ (δ je deklinacija Sonca, ki smo jo dobili iz astronomskih efemerid) smo zračunali zemljepisno širino φ . S številnimi opazovanji smo dobili povprečni $\bar{\varphi} = 46,18^0$.

Zemljepisno dolžino smo ugotovili iz razlike časov $\lambda = t_s - t_0$ (t_s - pravo poldne, $t_s = 12^h - E$, E - časovna enačba, ki jo odberemo iz efemerid, $t_0 = t - 1h$, t - čas, ki ga izmerimo, ko je senca gnomona v smeri sever - jug). Za povprečno $\bar{\lambda}$ smo ugotovili $14,35^0$. Svoje meritve smo primerjali s specialko. Ugotovili smo razliko za zemljepisno širino $0,02^0$ in za zemljepisno dolžino $0,22^0$.

Vprašali smo se, kolikšen lok na zemeljski obli pripada naši napaki. Za napako φ smo dobili približno 2 km, za λ pa 24 km. Pri računu smo uporabili enačbo $l = \pi r \alpha^0 / 180^0$ in vstavili za α enkrat $0,02^0$, drugič pa $0,22^0$, za r pa polmer Zemlje $6,4 \cdot 10^6$ km.

Zemljepisno širino smo ocenili tudi z višinomerom. Naš višinomer ima daljnogled s 44-kratno povečavo. V sredino zornega polja daljnogleda smo poiskali Severnico in odmerili kot - višino Severnice nad obzorjem. Naredili smo dvajset meritev in dobili $\bar{\varphi} = 46,15^0$ ($\Delta\varphi = 0,05^0$, $\Delta\varphi$ v km = 5,4 km).

Za dobro opazovanje zvezdnega neba je potrebno, da poznamo karakteristike teleskopa: ločljivost, zmogljivost in zorno polje. Tudi mi smo hoteli določiti te značilnosti za svoje daljnoglede.



sl. 1. Učenec 8. razreda montira streho na bodočo hišico za shranjevanje teleskopov. V ozadju gnomon in pasažni inštrument. V ozadju sta Homec in tenceš.



sl. 2. Šolska zvezdarna Križ. V ospredju teleskop Titov dvojček, ki ga je posodila tovarna Vega.

Predvsem smo se lotili zornega polja. Tu opazovalec s stoparico meri, koliko časa prečka zvezda sredino zornega polja daljnogleda. Izvedli smo osemintrideset meritev. *Zorno polje* = $\omega t \cos \delta$ (ω je kotna hitrost vrtenja nebesne krogle $15^\circ/\text{h}$, δ je deklinacija zvezde, kar odčitamo iz efemerid, t pa je merjeni čas prečkanja zvezde).

Pri različnih povečavah smo dobili različna zorna polja. Vprašali smo se, kakšen graf bi dobili, če bi na abscisno os nanašali povečavo, na ordinatno os pa zorno polje. Pri matematiki smo grafe že risali, zato nam to ni delalo prevelikih težav.

Spoznali smo, da zorno polje pada s povečavo, ampak ne linear-
no.

Vsa opazovanja smo opravili na šolski zvezdarni Križ. Tu smo si
na dveh platojih pripravili opazovalnico. Na enem smo postavili
dvoje stojal za višinomer in za 80-milimetrski ruski refraktor.
Na drugem pa imamo pasažni inštrument in gnomon. V aprilu 1981
pa smo si postavili še lesno hišico (2x2x2,10 m), kjer bomo hra-
nili teleskope. Od teh je najpomembnejši refraktor Titov dvoj-
ček, ki nam ga je posodila tovarna Vega.

Organizirajte tudi na vaši šoli astronomski krožek in začnite
s preprostimi raziskavami! Če je le dobra volja, to ne bo težko.
Veseli bomo, če se boste oglasili na naslov našega krožka.

Literatura

M.Prosén: Astronomska opazovanja, Presek 5/5 (1978);

K.Šmigovc: Merjenje s senco, Presek 4 (1976/77) 26;

F.Avsec, M.Prosén: Astronomija, Ljubljana DZS (1975).

Boris Kham

mentor astronomskega krožka

REŠITEV 3. NALOGE S STR. 181 P IX/3



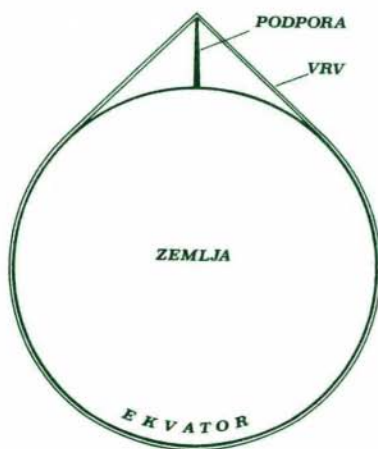
Roman Rojko



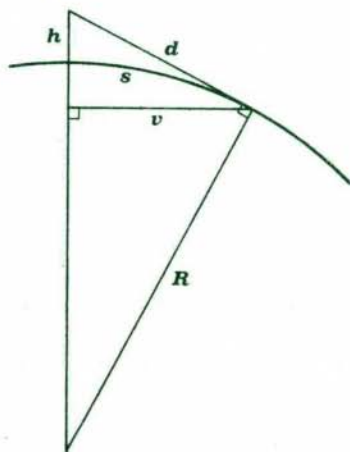
BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES

SAJ NI RES... PA JE!

Predstavljajmo si, da je Zemlja idealna krogla in da je vzdolž ekvatorja okrog in okrog položena tanka neraztegljiva sklenjena vrv, ki je 2 mm daljša od obsega ekvatorja. Ker dolžina vrvi presega obseg Zemlje, vrv v eni točki podpremo z navpično letvijo, tako da je potem lepo napeta in seveda v okolici podpore dvignjena od tal (glejte sliko 1).



Slika 1



Slika 2

Sedaj pa pride glavno vprašanje: ali lahko odrasel človek zleze pod vrh, ne da bi se vrvi dotaknil?

Marsikdo bo seveda takoj vzdiknil, da je to nemogoče, saj imamo viška vrvi le za bore 2 mm. Toda ne prenaaglimo se z odgovorom. Raje poskušajmo priti do njega "znanstveno", to je s kar se da natančnim izračunom. Popolne natančnosti pri računanju seveda ne bomo mogli doseči, ker se bomo (poleg nujnega zaokroževanja pri računskih operacijah) dvakrat morali zadovoljiti s približnimi vrednostmi, vendar to na rezultat ne bo vplivalo; odgovor bo v vsakem primeru enak.

Dajmo zgornjemu vprašanju matematično obliko! V skladu z oznakami na sliki 2 bi radi določili višino podpore h in lok s , če poznamo polmer Zemlje ($R = 6370 \text{ km} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$) in seveda razliko med dolžino vrvi in obsegom Zemlje ($\epsilon = 2\eta = 2 \text{ mm} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$)

Najprej si pogledjmo kako bi čim natančneje ocenili dolžino loka s . S slike 2 je očitno, da je $v < s < d$. Vemo tudi, da je $d - s = \epsilon/2 = \eta$. Ker lahko predpostavljamo, da je η majhno število v primeri z ostalima količinama d in s , je s približno enako d . Toda tega seveda pri računanju ne smemo uporabiti, to je predpostaviti $\eta = 0$, saj je dolžina $\epsilon = 2\eta$, čeprav je zelo majhna, bistvenega pomena za nalogo (brez nje si problema sploh ne bi mogli zastaviti!). Lahko bi vzeli, da je $s = v$, še boljše pa je na primer postaviti $s = (v + d)/2$ ali $s = 2v/3 + d/3$. Zadnja enakost je najboljši linearni približek za lok, izražen s pomočjo dela tetive in tangente. V dokaz tega dejstva se ne bomo spuščali; zanj bi potrebovali že košček višje matematike. Za Zemljo in naš problem bi lahko videli, da je formula $s = 2v/3 + d/3$ natančna na eno desetinko milimetra, če sta d in v manjša od 40 km.

Odslej bomo torej za s vzeli izraz $s = 2v/3 + d/3$. Iz njega in iz zveze $d - s = \eta$ izračunamo $d = v + 3\eta/2$. Ker pa iz podobnosti pravokotnih trikotnikov na sliki 2 dobimo še

$$v/d = R/(R + h) = (\sqrt{R^2 - v^2})/R$$

s pomočjo zveze $d = v + \frac{3}{2}\eta$, najdemo $hv = \frac{3}{2}R\eta$

Prvo enakost lahko zapišemo v obliki $h\nu = R(d - v)$, oziroma $2v = 3R\eta/2$, če se spomnimo, da je $d - v = 3\eta/2$. Drugo formulo z upoštevanjem zadnjega rezultata izrazimo takole:

$$\begin{aligned} 1/(1 + h/R) &= \sqrt{1 - (v/R)^2} = \sqrt{1 - (3\eta/2h)^2} = \\ &= \sqrt{1 - (3\eta/2R)^2 (R/h)^2} \end{aligned}$$

Postavimo $\alpha = 3\eta/2R$ in $x = h/R$, pa moremo zapisati

$$1/(1 + x) = \sqrt{1 - \alpha^2/x^2}$$

To je enačba z eno neznanko x , ki pa jo še nekoliko preuredimo. Če kvadriramo in odpravimo ulomke, dobimo $x^2 = (1 + x)^2(x^2 - \alpha^2) = (1 + x(x + 2))(x^2 - \alpha^2) = x^2 - \alpha^2 + x(x + 2)(x^2 - \alpha^2)$, oziroma po krajšanju

$$x(x + 2)(x^2 - \alpha^2) = \alpha^2$$

Če bi iz te enačbe mogli neznanko x natančno izračunati, bi bilo seveda lepo (potem bi poznali tudi $h = Rx$), toda to žal ne gre. Vemo pa nekaj: število α je zelo majhno (manjše od $(3/2) \cdot (10^{-3}/6 \cdot 10^6) = 2,5 \cdot 10^{-9}$) in zato mora biti tudi x precej majhen, če naj bo rešitev zgornje enačbe. Števila α seveda ne smemo kar zanemariti, saj bi v primeru $\alpha = 0$ dobili $x^3(x + 2) = 0$ in od tod $x = 0$. Privoščimo pa si lahko naslednjo poenostavitev. V enačbo

$$x(x + 2)(x^2 - \alpha^2) = \alpha^2$$

vstavimo $x = y \sqrt[3]{\alpha^2}$, tako, da nam po krajšanju na obeh straneh z α^2 ostane

$$y(y \sqrt[3]{\alpha^2} + 2)(y^2 - \sqrt[3]{\alpha^2}) = 1$$

Za vsako realno rešitev y te enačbe mora veljati $1/2 < y < 1$. Res: iz $y \geq 1$ bi takoj sledilo, da je leva stran večja od 1; iz $y \leq 1/2$ pa bi dobili, da je leva stran manjša od $1/2$. To so seveda zelo grobe ocene, kljub temu pa nam povedo, da je α v primeri z rešitvijo y zanemarljivo majhno število. V zadnji enačbi torej povsod izpustimo $\sqrt[3]{\alpha^2}$ in dobimo $2y^3 = 1$ oziroma $y = 1/\sqrt[3]{2}$, kar je dovolj dober približek za rešitev. Potem pa lahko postopoma izračunamo še

$$x = \sqrt[3]{a^2/2} = (1/2) \sqrt[3]{9\eta^2/R^2}$$

$$h = xR = (1/2) \sqrt[3]{9\eta^2 R}$$

$$v = (3/2)(R\eta/h) = \sqrt[3]{3\eta R^2}$$

Seveda so to le približne formule, toda njihova natančnost je precejšnja. Za točno oceno napake bi spet potrebovali malo večje znanje.

Prilomba. Iz formule za h in v lahko eliminiramo η in tako dobimo še zvezo $v = \sqrt{2Rh}$, ki nam pri dani višini h določa razdaljo do obzorja, saj je v našem primeru v skoraj do milimetra natančno enako d . Primerjajte tudi članek [1]!

Sedaj pa končno izračunajmo numerične vrednosti za h in v ter odgovorimo na vprašanje, zastavljeno v začetku! Upoštevajmo, da je $R = 6,37 \cdot 10^6$ m in $\eta = \epsilon/2 = 10^{-3}$ m, pa je pred nami rezultat

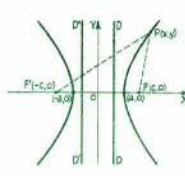
$$h = (1/2) \sqrt[3]{9 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}} = (1/2) \sqrt[3]{57,33 \text{ m}} = \\ = 3,86/2 \text{ m} = 1,93 \text{ m}$$

$$v = \sqrt[3]{3 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 6,37^2 \cdot 10^{12} \text{ m}^2} = \sqrt[3]{121,73} \cdot 10^3 \text{ m} = 4,96 \cdot 10^3 \text{ m} = \\ = 4,96 \text{ km}$$

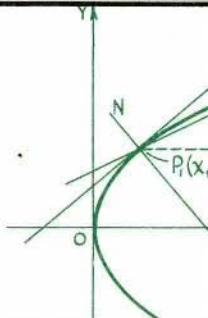
Odgovor je torej lahek: Odrasel človek v bližino podpore brez težav preide z ene strani na drugo (če ni posebno visoke rasti, se mu še skloniti ni treba). Še več, hkrati bi lahko pod vrvjo prestopilo ekvator okrog 1330 do 1,8 m visokih ljudi ali pod njo prevozilo to črto okrog 1100 vozil, visokih do 1,5 metra (vzeli smo, da vsak človek zavzame pol metra ekvatorja, če stoji na njem, vsako vozilo pa dva metra). Presenetljivo, kajne? Pa naj še kdo reče, da dva milimetra ne pomenita dosti!

Milan Hladnik

[1] K. Bajc, *Kako daleč je do obzorja?*, Presek 6 (1978/79)
str. 4



	BELGIJSKE TERME V ARDENIH	HIMALASKA KOZA	GOROVJE V NOTRA- NJI AZIJI	RENIJ	VAS KOPRSK
	PRVOTNI PREBIVALEC				
	ITALIJ. SKLADATELJ (GIOVANNI)				
	ARTHUR (KRAJŠE)			FANT	
	TIBETAN. GOVEDO			DOMAČE Ž. IME	
NEUSTRASEN JUNAK		RAZTRGANA CUNJA	ANTON KUHELJ HRVAŠKI "PETROL"		ŠTAMPA
NOVOST, SPREMENBA					OBDEL. ZEML. GL. ME ITALI
OBYODNI PTIČ			3 TONE SELIŠKAR		
KRILATI SPREMLJE- VALEC EROSA		TUJE M. IME PLOHA			
RADOVAN GOBEC	1 DEL RASTLINE		NEPOROČEN MOŠKI		
PRIPADNICA BELE RASE		ČETRTRI RIMSKI KRALJ	EGIPČAN. BOG SONCA		
OTILIJA (LJUBK.)		RIMLJAN. HIŠNI BOG TORINO			
DOKUMENT					
TORBA ZA SPISE					





TEKMOVANJA - NALOGE

REPUBLIŠKO TEKMOVANJE MLADIH FIZIKOV V VELENJU *

Letošnje tekmovanje je bilo 23. maja 1981 v Velenju, v organizaciji rudarskega šolskega centra Velenja. Zaradi velikega zanimanja dijakov je bilo tudi letos organizirano predtekmovanje po šolah, kjer je sodelovalo prek 900 dijakov iz 24 šol. Od teh se je za republiško tekmovanje kvalificiralo 118 dijakov iz 24 gimnazij in srednjih šol. Tudi letos so se mladi fiziki pomerili v znanju fizike, in sicer na predvečer republiškega prvenstva. Pod geslom "FIZIKI ODKRIVAJO VEDNO NOVE ENERGIJSKE VIRE" so se tekmovalci lotili tehle tem:

1. Fizikalne osnove pretvornikov energije.
2. Primerjava različnih virov energije s stališča uporabnosti, dosegljivosti, ekonomičnosti in varstva okolja.
3. Ocena velikosti energijskih sprememb pri raznih pojavih.
4. Shranjevanje, prenos in varčevanje z energijo.
5. Energijske potrebe in možnosti pri nas in v svetu, energetska nerazvitost.
6. Zgodovina izumov in odkritij, povezanih z energijo.
7. Gospodarske in druge znamenitosti Velenja.

Žal se je izkazalo, da so teme le preveč obsežne, da bi se dijaki lahko nanje pripravili, kot so se za prejšnji tmi (sončna energija in laserji). Že na izločilnem tekmovanju pa so vseeno nekatere ekipe pokazale precej znanja, tako da strokovni komisiji ni bilo težko izbrati pet finalistov: gimnazijo Celje, gimnazijo Poljane, gimnazijo Bežigrad, gimnazijo Vič in gimnazijo Šentvid. Kot šesta v finalu je nastopala domača ekipa z gimnazije Velenje.

Javni del tekmovanja je potekal v dvorani Kulturnega doma Velenje. Gledalce je razgrela nekaj zvitih vprašanj za publiko. Pravični odgovori so bili takoj nagrajeni. V pravem razpoloženju se je začel polfinale, kjer sta tekmovali po dve ekipi med seboj, boljša pa se je uvrstila v finale, kjer so hkrati nastopale vse tri ekipe. Vprašanja so bila bolj vezana na fizikalne ocene nekaterih količin, kot na pravo znanje, zato so tudi ekipe z manj podlage uspešno kazale svoj fizikalni občutek. Po vseh zapletih je na koncu zmagala najsrečnejša in najprisebnejša ekipa iz Celja, ki so jo sestavljali Povalej Vitomir, Alif Aleksander in Rihtar Matjaž, pred gimnazijci iz Šentvida (Pirnovar Tim, Sajovic Marko, Krašovec Marko) in Viča (Veber Tomi, Pleško Majna, Zalar Boštjan).

Naslednji dan je bilo republiško tekmovanje v reševanju računskih nalog v prostorih rudarskega šolskega centra. Sodeč po uspehih, so bile najtrši oreh za tekmovalce naloge za tretji razred, ki jih nihče ni rešil v celoti. Poglavitni vzrok za to je, da naloge iz toplote in nihanja zahtevajo mnogo fizikalnega razmišljanja. Dijaki si morajo točno predstavljati, kaj se sploh dogaja in kako se to matematično opiše, to pa je v srednji šoli premalo poudarjeno, ali pa sploh ne. Najuspešnejši tekmovalec je bil Matjaž Kaluža iz četrtega razreda, ki je že tretjič zmagal. Kot posebno nagrado za vse rešene naloge je prejel dvotarifni trifazni števec, ki ga je podarila SOZD Iskra.

Sicer pa je tekmovalna komisija podelila 11 nagrad in 18 pohval, ki so bile razdeljene takole:

- I. nagrada: Mozetič Dean (2. razred), gimnazija Koper in Matjaž Kaluža (4), gimnazija M. Zidanška Maribor
- II. nagrada: Veber Tomi (3), gimnazija Vič, Štruel Damjan (4), gimnazija Šentvid, Poberaj Igor (4), gimnazija V. Janežič
- III. nagrada: Drevenšek Irena (2), gimnazija M. Zidanška Maribor, Kosem Rok (2), gimnazija I. Cankarja, Pleško Majna (3), gimnazija Vič, Černe Miran (3), I. gimnazija, Jurkas Vasja (4), gimnazija Nova Gorica, Povalej Vitomir (4), gimnazija Celje

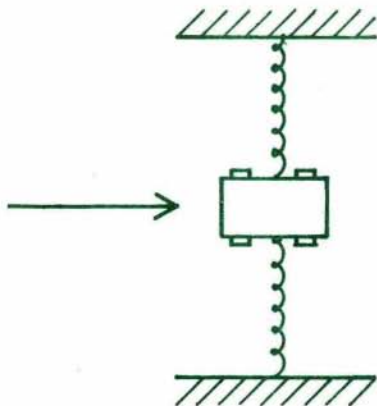
pohvala: Napast Franc (2), Tominc Lada (2), Hren Nataša (4), Ferle Maja (4), vsi gimnazija M. Zidanška; Čučulovič Peter (2), Šimenc Marjan (3), Planinšič Gorazd (4), vsi 1. gimnazija Ljubljana; Varšek Alen (2), Zalar Boštjan (3), oba gimnazija Vič; Bensa Mitja (2), Markočič Lucijan (3), oba gimnazija Nova Gorica; Oprešnik Marko (4), Senica Tomaž (4), oba gimnazija I. Cankar; Casar Božidar (2), gimnazija M. Sobota; Arh Jože (2), gimnazija Jesenice; Kapus Dejan (2), ŽIC Jesenice; Brilej Roman (3), gimnazija Velenje, Kodra Dušan (3), gimnazija Koper; Dernač Branko (4), gimnazija Brežice.

Težavnost nalog naj bralci preverijo sami:

Naloge za 2. razred

1. Mornar opazi ob času $t = 0$ dve ladji. Prva je od njega oddaljena za 5 km proti vzhodu in 2 km proti severu, giblje pa se s hitrostjo 3 km/h proti severu. Druga ladja je 2 km vzhodno in 4 km severno od mornarja, njena hitrost pa je 1 km/h proti vzhodu in 2 km/h proti severu.
Kdaj si bosta ladji najbližji? Koliko bo tedaj njuna medsebojna razdalja? Za koliko bosta oddaljeni od mornarja?
2. Žaba z maso 50 g sedi na koncu deske z maso 0.5 kg in dolžino 0.2 m, katera plava na mirujočem jezeru. Žaba skoči proti drugemu koncu deske pod kotom 45° glede na vodno gladino ter doskoči ravno na konec deske. Kolikšna je bila hitrost deske med skokom?
3. Deska z maso 10 kg drsi brez trenja po gladkem klancu z naklonom 10° . V kateri smeri in s kolikšnim pospeškom mora teči po deski človek z maso 80 kg, da bo deska mirovala?
4. Voziček z maso 0.1 kg je zvezan z dvema enakima vzmetema, katerih koeficient je 50 N/m, dolžina pa 0.5 m. Vzmeti sta pravokotni na smer, v kateri se voziček lahko giblje (glej

sliko!). Mirujoč voziček zadene izstrelek z maso 1 g in s hitrostjo 100 m/s ter obišči v njem. Izstrelek zadene voziček v smeri, v kateri se ta lahko giblje. S kolikšno amplitudo zaniha voziček?



Naloge za 3. razred

1. Tanka dolga steklena cevka, v kateri je zrak, je zataljena na enem koncu, na drugem koncu pa zaprta s stolpcem živega srebra z dolžino 2 cm. Ko cevka stoji z zataljenim koncem spodaj navpično na tleh, je dolžina zračnega stolpca v cevi 17 cm. Cevko previdno zasučemo za 180° , tako da je zataljeni konec sedaj zgoraj. Dolžina zračnega stolpca je sedaj 18 cm. Kolikšen je zračni tlak v okolici? Gostota živega srebra je 13.6 g/cm^3 , temperatura zraka pa je ves čas konstantna.
2. Plin v valju z osnovno ploskvijo 50 cm^2 , katerega tesno zapira 2 cm debel lesen bat, segrevamo 1 minuto z grelcem, ki ima moč 8 W. Plašč valja ne prevaja toplote, toplotna prevodnost lesa pa je 0.8 W/m K . Za koliko se premakne bat? Razmerje specifičnih toplot plina je 1.4. Masa plina je 100 g, kilomolska masa 32 kg, temperatura zraka zunaj pa je na začetku za 30°C nižja od temperature plina. Zunanji zračni tlak je 100 kPa.
3. Na lahki, vodoravno ležeči vzmeti sta na obeh koncih pritrjeni kroglici z maso 1 kg. Dolžina neobremenjene vzmeti je 1m, njen koeficient raztezka pa je 200 N/m . Vzmet raztegnemo

za 50 cm, nato izpustimo levo krajišče. Ko to preteče 20 cm, izpustimo še desno krajišče. Izračunaj, s kolikšno hitrostjo se giblje težišče kroglic in s kolikšno frekvenco nihata kroglici druga proti drugi!

4. V zvenu, ki ga sočasno oddajata dva zvočnika, razmaknjena za 30 cm, je osnovnemu tonu s frekvenco 1000 Hz primešan ton s frekvenco 3000 Hz. V katerih smereh slišimo v veliki razdalji od zvočnikov le osnovni ton? Hitrost zvoka v zraku je 340 m/s.

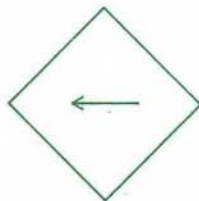
Naloge za 4. razred

1. Na baterijo priključimo upor za 0.5 ohm. Pri tem se na njem troši moč 2.63 W. Ko upor za 0.5 ohm zamenjamo z uporom za 1 ohm, se na njem troši enaka moč. Kolikšna je gonilna napetost baterije?

2. V kondenzator z navpičnima kvadratnima ploščama s stranico 1 dm, ki sta v razdalji 2 mm, nalijemo do polovice tekočino z gostoto 1 kg/dm^3 in dielektričnostjo 80. Nato kondenzator nabijemo z napetostjo 1000 V in izoliramo. Koliko dela opravimo, ko plošči toliko približamo, da tekočina napolni prostor med ploščama?

3. V magnetno polje z gostoto 1 T začnemo potiskati s pospeškom 1 m/s^2 kvadraten okvir s stranico 1 m. Okvir je ves čas pravokoten na smer magnetnega polja, diagonala okvira pa leži v smeri gibanja (glej sliko). Upornost okvira je 1 ohm/m. Izračunaj tok v odvisnosti od časa in nariši diagram! Kolikšen je največji tok?

x x x x x
 x x x x x
 x x x x x
 x x x x x
 x x x x x
 x x x x x
 x x x x x
 x x x x x
 x x x x x
 x x x x x
 x x x x x
 x x x x x



4. Na balistični galvanometer priključimo fotoelement z občutljivostjo 4.5 mA/W. Ko fotoelement osvetlimo s pulzom svetlobe z valovno dolžino 400 nm, pokaže galvanometer sunek toka 10^{-8} As. Koliko fotonov je padlo na fotoelement?

Mark Pleško

OBČINSKA TEKMOVANJA IZ MATEMATIKE ZA SREBRNA VEGOVA PRIZNANJA V ŠOLSKEM LETU 1980/81

Letos so bila prvič šolska in občinska tekmovanja že v mesecu aprilu. Znano je, da je prav v maju veliko raznovrstnih tekmovanj, ki žal večkrat potekajo istočasno. Veliko je pozivov, da bi na republiški ravni morali imeti komisijo za njihovo koordinacijo.

Druga novost v našem tekmovalnem sistemu je, da smo izbrane sedmošolce z občinskih tekmovanj prvič vključili v republiško tekmovanje - skupaj z osmošolci. Tako smo dobili zelo objektivno sestavljeno ekipo za zvezno tekmovanje. Prav ta ekipa se je letos odlično odrezala na zveznem tekmovanju.

Rezultati tekmovanj iz 62 občin Slovenije so:

razred	št. tekm.	št. podeljenih SVP	v %
6.r.	1.642	580	35,32
7.r.	1.492	396	26,54
8.r.	1.314	373	28,38
skupaj	4.448	1.349	30,32%

NALOGE:

6. razred

1. Cenček gre v slaščičarno vsak tretji dan. Sladoledar deli sladoled zastonj vsak peti dan, toda le, če je ta dan nede-

lja. Cenček je dobil sladoled zastonj v nedeljo 12. aprila.

Določi datum, ko bo Cenček prvič spet dobil sladoled zastonj!

2. Dana je premica p , točka $A \notin p$ in točka $B \notin p$.

Nariši krožnico k tako, da bo $p \cap k = \{A\}$ in $B \in k$!

3. Nariši enakokrak pravokoten trikotnik ABS s kateto $\overline{AS} = 4$ cm!

Zrcali trikotnik ABS : a) prek točke S ,

b) prek premice (B, S) ,

c) prek premice (A, S) !

Kakšen lik tvorijo dani trikotnik ABS in njegove zrcalne slike? Utemelji odgovor!

4. Zapiši ulomek, katerega števec je vsota števil $\frac{2}{3}$ in $\frac{3}{4}$, imeno-
valec pa razlika med številoma 1 in količnikom števil $\frac{2}{3}$ in $\frac{3}{4}$!

5. V trikotniku ABC je D središče stranice AB in velja:

$\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DB}$. Koliko merijo notranji koti trikotnika ABC ?

7. razred

1. Poišči najmanj tri ulomke, katerih vrednost se ne spremeni,
če števec povečamo za 27, imenovalec pa za 30!

2. V enakokrakem trikotniku je vsota kota ob vrhu in kota ob
osnovnici 111° .

Izračunaj kota, ki ju oklepa simetrala kota ob osnovnici z
višinama na kraka!

3. Določi faktorja in zmnožek pri tehle pogojih:

- če prvemu faktorju dodaš $\frac{2}{5}$, se zmnožek poveča za 1;

- če drugi faktor zmanjšaš za $\frac{1}{2}$, se zmnožek zmanjša za $\frac{4}{5}$.

4. Paralelogram $ABCD$ je orientiran tako, kot so zapisana ogli-
šča. Njegovi diagonalni sta $\vec{e} = \overrightarrow{AC}$ in $\vec{f} = \overrightarrow{BD}$.

Dokaži, da je $\vec{e} - \vec{f} = 2 \overrightarrow{AB}$!

5. Imamo tri kvadrate, stranica prvega kvadrata je a .

Stranica drugega kvadrata je daljša od stranice prvega kvad-

rata za petino stranice prvega kvadrata. Stranica tretjega kvadrata je krajša od stranice prvega kvadrata za petino stranice drugega kvadrata. Koliko odstotkov ploščine prvega kvadrata je ploščina tretjega kvadrata?

8. razred

1. Reši enačbo:

$$a(5x + 2b) - 5(x - 2a) = 5(x + 2a) + a(2b + 5)$$

in ugotovi, za katera a je enačba nerešljiva!

2. V trikotniku ABC je stranica $\overline{AB} = 6$ cm, kot pri A meri 60° in kot pri B 75° .

Izračunaj ploščino trikotnika!

3. Graf funkcije $y = (k - 2)x + 2x - 5$ poteka skozi točko $T(2, 1)$.

a) Določi vrednost parametra k !

b) Pri tej vrednosti k določi ploščino trikotnika, ki ga tvori graf funkcije s koordinatnima osema!

4. Skozi presečišče diagonal trapeza nariši vzporednico z osnovnicama!

Dokaži, da presečišče diagonal razpolavlja odsek na vzporednici med krakoma!

5. Oglišča kocke označimo A, B, C, D na spodnji osnovni ploskvi in E, F, G, H na zgornji osnovni ploskvi (E je nad $A, \dots$).

Središče roba EF označimo s P , središče roba FG s Q . Kocko presekamo z ravnino skozi nosilki daljic AC in PQ . Izračunaj ploščino preseka, če meri rob kocke 10 cm!

Pavle Zaje

RAZPIS TEKMOVANJA SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE IN FIZIKE V ŠOLSKEM LETU 1981/82

V tem šolskem letu bodo tekmovanja potekala takole:

MATEMATIKA: predtekmovanje bo v soboto, 13. marca od 9. do 11. ure, tekmovanje pa v soboto, 3. aprila od 10. do 12. ure 30 minut.

FIZIKA: predtekmovanje bo v soboto, 17. aprila od 9. do 11. ure, tekmovanje pa v soboto, 15. maja od 10. do 12. ure 30 minut.

Predtekmovanja izvedejo aktivni profesorjev matematike in fizike na srednjih šolah. Ti sestavijo komisijo za predtekmovanje, ki oceni izdelke svojih dijakov. Za strokovno plat izvedbe predtekmovanj in tekmovanj sta sestavljeni republiški komisiji, ena za matematiko, druga za fiziko. Ti dve komisiji pripravita naloge za predtekmovanji in za tekmovanji, za vsak razred po štiri. Razmnožene naloge za predtekmovanja, rešitve in druge napotke pošljeta predsednikom šolskih komisij. Na osnovi doseženega rezultata predlagajo šolske komisije najuspešnejše dijake za republiški tekmovanji. Predlagani srednješolci morajo praviloma doseči vsaj polovico vseh možnih točk, od tega kriterija pa se lahko odstopi, če noben tekmovalec v skupini ne preseže 75 % vseh možnih točk. Izjemoma lahko predlagajo tudi dobre dijake, ki se zaradi opravičljivih razlogov niso mogli udeležiti predtekmovanja. Šole lahko prijavijo svoje učence za republiški tekmovanji le, če so izvedle predtekmovanje (same ali več skupaj). Za prijavnico k predtekmovanju velja vprašalnik, objavljen v tej številki Preseka. Izrežite ga ali prepišite, izpolnite in pošljite priporočeno do srede, 3. marca 1982 na naslov:

Komisija za popularizacijo pri DMFA SRS, 61111 Ljubljana-Vič,
p.p. 6, s pripisom: Prijava za predtekmovanji.

Dijaki srednjih šol, ki imajo drugačen učni načrt kot gimnazije, se lahko po posvetu s profesorjem prijavijo za predtekmovanje v najprimernejši skupini. Šol, ki se ne bodo pravočasno prijavile

za predtekmovanji, ne bomo dodatno obveščali!

Izmed predlaganih kandidatov bosta republiški komisiji izbrali udeležence za republiški tekmovanji, do 30 v vsakem razredu. Le v izjemnem primeru, če predlaganih primerno dobrih tekmovalcev ne bo dovolj, bosta komisiji upoštevali tudi druge predloge. Komisije za predtekmovanje po šolah naj ocenijo izdelke, sestavijo seznam predlaganih dijakov in ga pošljejo na zgornji naslov najkasneje do:

ponedeljka, 22. marca 1982 (matematika) oziroma
ponedeljka, 26. aprila 1982 (fizika)

s pripisom: Tekmovalci iz matematike (fizike).

Obvestilo o kraju obeh republiških tekmovanj in druge informacije bodo šole prejele skupno z nalogami za predtekmovanje.

Zelimo, da bi v predtekmovanja pritegnili čimveč srednješolcev. Zato pozivamo tudi dijake, naj opozorijo svoje učitelje na ta razpis. Slednje pa seveda prosimo, naj sodelujejo pri izvedbi predtekmovanj, da spodbujajo dijake in jim svetujejo pri pripravi. Predvsem jih prosimo, naj pomagajo republiškima komisijama pri pripravi nalog. Za vse predloge in pripombe bomo zelo hvaležni, naslovite pa jih kar na zgornji naslov. Vsem srednješolcem želimo, da bi se na letošnjih tekmovanjih kar najbolje odrezali!

Bojan Golli, Gorazd Lešnjak

REŠITEV 1. NALOGE S STR. 181 P IX/3

1. Preloži eno od stranskih vžigalic na drugo stran!

Roman Rojko

VPRAŠALNIK ZA PREDTEKMOVANJE IZ MATEMATIKE

ŠOLA:

NASLOV:

TELEFON: POŠTNA ŠTEVILKA:

Predtekmovanje bomo izvedli: sami - skupaj s šolami:

.....

Priimek, ime, domači naslov in telefon predsednika komisije za predtekmovanje:

.....

Člani komisije za predtekmovanje:

.....

Predvidoma se bo predtekmovanja udeležilo

v I. razredu dijakov

v II. razredu dijakov

v III. razredu dijakov

v IV. razredu dijakov

skupno dijakov

VPRAŠALNIK ZA PREDTEKMOVANJE IZ FIZIKE

ŠOLA:

NASLOV:

TELEFON: POŠTNA ŠTEVILKA:

Predtekmovanje bomo izvedli: sami - skupaj s šolami:

.....

Priimek, ime, telefon in domači naslov predsednika komisije za predtekmovanje:

.....

Člani komisije za predtekmovanje:

.....

Predvidoma se bo predtekmovanja udeležilo

v II. razredu dijakov

v III. razredu dijakov

v IV. razredu dijakov

skupno dijakov

OPOMBA: Število dijakov nam pove, koliko izvodov s formulacijami nalog naj vam pošljemo.

22. ZVEZNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE

Letos je bilo zvezno tekmovanje 26. in 27. aprila na Ohridu. Organizator tekmovanja je bilo DMFA Makedonije. V slovenski ekipi je bilo 15 srednješolcev. Na tekmovanje smo odšli že dva dni prej. Dan pred odhodom so tekmovalci poslušali nekaj krajših predavanj in reševali naloge.

Odpotovali smo v petek zjutraj z brniškega letališča. Slabo vreme nam je žal jemalo razgled z letala. Zveze iz Skopja na Ohrid so bile zasedene vse do večera in le s težavo je bilo mogoče izsiliti še nekaj vozovnic za našo ekipo. Na Ohrid smo zato prispeli šele pozno ponoči. Prvi dan smo stanovali v mladinskem rekreacijskem centru Mladost. Razmere so bile neugodne, zato smo se naslednji dan preselili v hotel Orce Nikolovski. Srbski kolegi so nam prijazno dali na razpolago svoj avtobus in nas rešili težav s prevozom. Organizatorji so se tokrat kaj malo izkazali.

V soboto je tekmovalna komisija izbrala naloge. Našo ekipo je zastopal profesor Egon Zakrajšek. Tekmovalci so medtem obiskali tovarno Ezerka, vsak je dobil tudi majhen spominek.

Naslednje jutro se je pričelo tekmovanje. Po krajšem razgovoru gostiteljev in profesorja Zakrajška so organizatorji razdelili naloge. Za reševanje je bilo 4 ure časa. Po tekmovanju je bilo seveda kosilo, izleta na Naum pa se naša ekipa zaradi težav s prevozom ni mogla udeležiti.

Tekmovalna komisija se je nato lotila zamudnega in občutljivega opravila popravljanja nalog. Že nekaj let komisija dovoljuje tudi pritožbe, tako da se je popravljanje zavleklo pozno v noč. Izbrati je bilo treba tudi naloge za malo olimpiado. Te sta se udeležila Uroš Boltin in Matjaž Kaluža iz IV. razreda ter Miran Černe in Aleksandar Jurišić iz III. razreda. Žal se nobeden ni uspel uvrstiti v ekipo za MMO, ki je bila letos v ZDA. Slovenska ekipa je dosegla takele uspehe:

1. razred

Miloš Žefran, gimnazija Nova Gorica, 3. nagrada,
Matjaž Kovačec, gimnazija Miloša Zidanška, Maribor, pohvala.

2. razred

Ivan Pepelnjak, Robert Bakula, oba iz 1. gimnazije Ljubljana-Bežigrad, pohvali.

3. razred

Miran Černe, 1. gimnazija Ljubljana-Bežigrad, 3. nagrada,
Aleksandar Jurišić, gimnazija V. Janežič, Poljane, Ljubljana, pohvala.

4. razred

Ni bilo pohvaljenih.

V Ljubljano smo se vrnili z vlakom, kar je bilo precej utrujajoče. Prihodnje leto bo gostitelj tekmovanja DMFA BiH, tekmovanje pa bo v Igmanu.

NALOGE S TEKMOVANJA:

1. razred

1. Naravna števila a , b in c so taka, da sta $a+c$ in $b+c$ kvadrata dveh zaporednih naravnih števil. Dokazite, da sta $ab+c$ in $ab+a+b+c$ tudi kvadrata dveh zaporednih naravnih števil!
2. Iz enega oglišča ostrokotnega trikotnika je narisana višina, iz drugega kotna simetrala, iz tretjega težiščnica. Njihova presečišča so oglišča novega trikotnika. Dokazite, da ta trikotnik ne more biti enakostraničen!
3. Prvi štiri členi nekega zaporedja so 1,9,8,1. Vsak naslednji člen je enak zadnji cifri vsote prejšnjih štirih členov.
a) Ali v tem zaporedju najdemo četverko 1,2,3,4?
b) Ali se v tem zaporedju kdaj ponovi začetna četverka?

4. Miška grize kos sira v obliki kocke z robom 3. Kocka je razdeljena na 27 manjših kockic z robom 1. Miška grize sir tako, da začne s kockico v enem od oglišč. Ko poje celo kockico, se loti naslednje, ki ima z ravnokar pojedeno skupno ploskev. Ali lahko miška poje cel kos sira tako, da je zadnja kockica, ki jo poje, tista v središču kocke?

2. razred

1. Naj bodo a , b in c cela števila in $a > 0$. Predpostavimo, da ima enačba $ax^2 + bx + c = 0$ dve različni rešitvi na intervalu $(0, 1)$. Dokažite, da je $a \geq 5$, in poiščite primer takšne enačbe za $a = 5$!
2. Konveksen četverokotnik razdelita diagonali na štiri trikotnike tako, da so njihove ploščine cela števila. Dokažite, da je produkt teh štirih števil popoln kvadrat!
3. Poišči vse pare (x, y) celih števil, ki zadoščajo enačbi:

$$y^4 - x(x+1)(x+2)(x+3) = 1$$
4. Števila $1, 2, 3, \dots, 100$ razdelimo v sedem razredov. Dokažite, da v nekem razredu obstajajo števila a, b, c, d , med katerimi so vsaj tri različna, in za katere velja $a+b = c+d$!

3. razred

1. Dokažite, da lahko za vsak $n \in \mathbb{N}$ število $\operatorname{tg}^{2n} 15^\circ + \operatorname{ctg}^{2n} 15^\circ$ zapišemo kot vsoto kvadratov treh zaporednih naravnih števil!
2. Na isti stranici daljice $\overline{PQ}$ so narisani trije podobni trikotniki KQP , QLP in PQM tako, da je $\angle QPM = \angle PQL = \alpha$, $\angle PQM = \angle QPK = \beta$ in $\angle QPK = \angle QPL = \gamma$, pri čemer je $\alpha < \beta < \gamma$. Dokažite, da je trikotnik KLM podoben prvim trem!
3. Naj bo s_1 zaporedje naravnih števil $1, 2, 3, 4, 5, \dots$. Definiramo zaporedje s_{n+1} ($n=1, 2, 3, \dots$) s pomočjo zaporedja s_n tako, da za ena povečamo tiste člene v s_n , ki so deljivi z n . (Tako

je na primer, S_2 zaporedje 2,3,4,5,6,..., S_3 je zaporedje 3,3,5,5,7,7,...). Dokažite, da je v zaporedju S_n točno prvih $n-1$ členov enakih n tedaj in le tedaj, če je n praštevilo!

4. Naj bodo $A_1, A_2, \dots, A_{1066}$ podmnožice končne množice M , takšne, da je $|A_i| > \frac{1}{2}|M|$ za $1 \leq i \leq 1066$. Dokažite, da lahko najdemo elemente $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ v M tako, da vsaka množica A_i vsebuje vsaj enega od elementov $x_1, x_2, \dots, x_{10}$. (Oznaka $|S|$ pomeni število elementov v množici S).

4. razred

- Premica deli trikotnik na dva dela enakih plosččin in obsegov. Dokažite, da leži središče včrtanega kroga na tej premici!
- Naj bosta x in y pozitivni realni števili. Poiščite najmanjšo vrednost izraza

$$\left| \frac{x+y}{1+xy} \right|$$

če sta x in y kompleksni števili, taki, da je $|x|=a$, $|y|=b$!

- Naj bo $F_n = a^n \sin nA + b^n \sin nB + c^n \sin nC$, kjer so a, b, c, A, B, C realna števila in $A+B+C$ mnogokratnik števila π . Dokažite, da iz $F_1 = F_2 = 0$ sledi $F_n = 0$ za vsako naravno število n !
- Množico $S = \{1, 2, \dots, n\}$ prvič razdelimo na m , drugič pa na $m+k$ nepraznih podmnožic, $k > 0$. Dokažite, da je bilo vsaj $k+1$ elementov množice S prvič v številčnejši podmnožici kot drugič!

NALOGE Z MALE OLIMPIADE

3. 1. Naj bosta a in b ^{ne} negativni celi števili. Pokaži, da je

$$5a \geq 7b$$

natanko tedaj, ko ima sistem enačb

$$x + 2y + 3z + 7t = a$$

$$y + 2z + 5t = b$$

nenegativno celo rešitev!

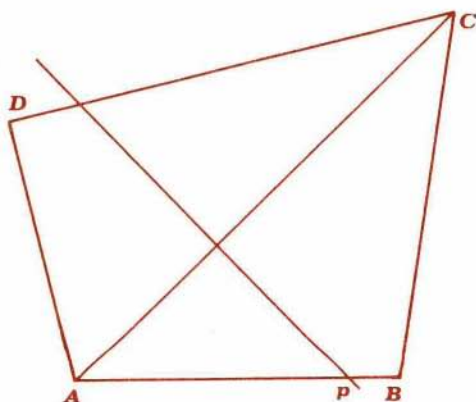
1. Pri dani končni množici realnih števil S naj $A(S)$ pomeni množico vseh tričlenih strogo naraščajočih aritmetičnih zaporedij v S . Poišči maksimalno število elementov množice $A(S)$ glede na vse možne izbire množic S z n elementi!
2. Točko znotraj konveksnega četverkotnika zvežemo z oglišči. Če imajo trikotniki, ki tako nastanejo, enako ploščino, ena diagonala četverkotnika razpolavlja drugo. Dokaži!

Mihael Perman

REŠITVE NALOG



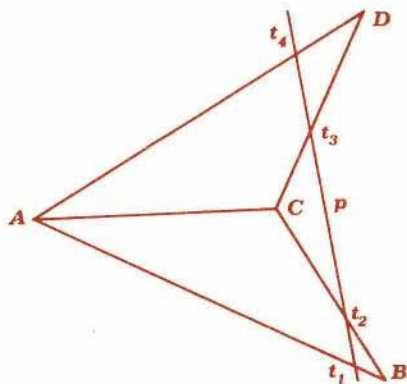
PASCHEV AKSIOM - REŠITEV S STRANI 142 P IX/3



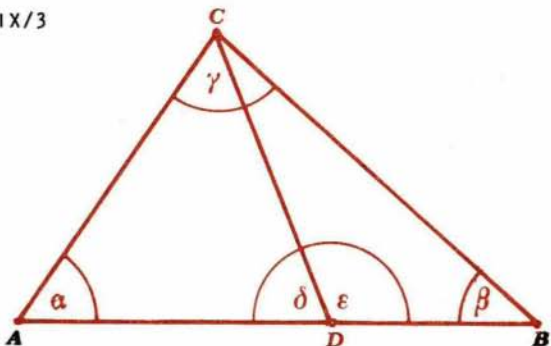
Četverkotnik $ABCD$ razdelimo na trikotnika ABC in ACD . Če npr. premica p seka AB , mora po Paschevem aksiomu sekati še bodisi

AC bodisi BC . Če p seka AC , mora sekati še bodisi AD bodisi CD . Premica p torej seka vsaj še eno od ostalih stranic četverokotnika (BC , CD , DA). - Recimo, da p seka rob četverokotnika v treh ali več točkah: $T_1, T_2, T_3, \dots$ (ki leže na p v tem vrstnem redu). Potem je notranjost ene od daljic T_1T_2, T_2T_3 znotraj, notranjost druge od njiju pa zunaj četverokotnika $ABCD$. To pa ni mogoče, saj je četverokotnik konveksen in zato vsebuje hkrati s točkama T_1 in T_3 tudi vso daljico T_1T_3 .

Če premica leži v ravnini poljubnega mnogokotnika in ne gre skozi nobeno oglišče, seka rob mnogokotnika v sodem številu točk (glej članek *Nekaj o mnogokotnikih* v Preseku 1973/74, šte. 2, str. 72-76). Pri konkavnem četverokotniku je sečišč lahko 0, 2 ali 4, pri konkavnem mnogokotniku nasploh pa jih je lahko veliko. Pri konveksnem mnogokotniku pa je število sečišč le 0 ali 2 (večje število bi nasprotovalo konveksnosti kakor zgoraj pri četverokotniku).



Janez Rakovec

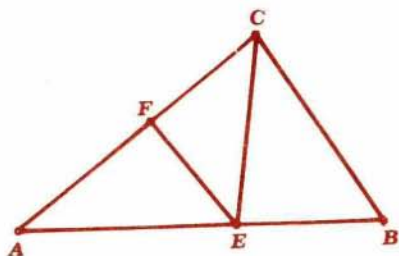


Označimo: $\delta = \angle ADC$, $\epsilon = \angle BDC$

a) Ker je $\delta + \epsilon = 2R$, je vsaj eden od obeh kotov (npr. ϵ) večji ali enak pravemu kotu. Velja: $\epsilon \geq R \Rightarrow \beta < \epsilon$, iz tega pa sledi $CD < CB$ (večjemu kotu nasproti leži večja stranica). Če pa je $\delta \geq R$, je $\overline{CD} < \overline{CA}$.

b) Le pri enakokrakem trikotniku ($\overline{CA} = \overline{CB}$) je vselej $\overline{CD} < \overline{CA}$ in $\overline{CD} < \overline{CB}$.

c)



Zvežimo točko E z ogliščem C ! Po a) velja v trikotniku AEC vsaj ena od relacij: $\overline{EF} < \overline{CE}$, $\overline{EF} < \overline{AE}$. Ker je $\overline{AE} < \overline{AB}$, je $\overline{EF} < \overline{CE}$ ali $\overline{EF} < \overline{AB}$. Za trikotnik ABC pa velja po 3 a): $\overline{CE} < \overline{AC}$ ali $\overline{CE} < \overline{BC}$. Upošteevaje obe ugotovitvi, pridemo do vsaj ene od relacij: $\overline{EF} < \overline{AB}$, $\overline{EF} < \overline{AC}$, $\overline{EF} < \overline{BC}$, tako da je EF manjši od največje stranice trikotnika. (Če za E in F vzamemo oglišči trikotnika, je lahko EF tudi enak največji stranici.)

Janez Rakovec



NALOGE

KRATKOČASNE VŽIGALICE

Vžigalice lahko uporabljamo za prižiganje ognja, namesto zobotrebca in, seveda, za reševanje ugank z vžigalicami. Drobne lesene palčke z enako dolžino in "obarvanim" koncem tako pišejo eno od vznemirljivih poglavij matematične rekreacije. Sklenil sem zbrati čimveč ugank in nastala je ta zbirka. Pomagala sta mi beograjski list *Matematični zabavnik* (17-18, IV 1977) in angleška knjiga *Creative Puzzles of the World* (Delft, Botermans, Cassell London). Za marsikatero uganko pa se moram zahvaliti prijateljem izza številnih omizij, kjer smo s pomočjo vžigalic spremenili dolgočasna sedenja v napete "športne" tekme.

Večina ugank z vžigalicami ima podobno obliko: iz danega števila vžigalic je treba sestaviti kak vzorec (običajno je narisana poleg naloge), nato odstraniti ali prestaviti določeno število vžigalic; tako se dobi nov vzorec! Pri tem velja splošno pravilo, da moraš uporabiti vse vžigalice (razen tistih, ki jih moraš odstraniti) in ne smeš nobene vžigalice prelomiti. Če je to vseeno potrebno storiti, so te izjeme v nalogi posebej dovoljene.

Nekatere naloge imajo po več rešitev, večinoma pa navajamo le eno. Uganka je zanimiva toliko časa, dokler je ne rešimo. Zato ne hiti z iskanjem rešitev in vztrajaj pri reševanju do konca! Ko boš te naloge premlel in rešil, boš ugotovil, da jih lahko z malo fantazije tudi sam sestaviš. Pa veliko veselja z vžigalicami!

Roman Rojko

1. Spravi srednjo vžigalico iz sredine, ne da bi se je dotaknil!



2. Iz sedmih vžigalic sestavi ulomek in ga preuredi tako, da dobiš eno tretjino (spet iz sedmih vžigalic)!



3. S šestimi vžigalicami zapiši število 110! Iz istih vžigalic sestavi devetkratnik tega števila!



4. Iz dvanajstih vžigalic sestavi 3 kvadrate! Nato odstrani tri vžigalice, ostale pa preuredi tako, da dobiš pet!





REŠITVE NALOG

V prejšnji številki Preseka smo vam zastavili naslednji problem:

Peter je izbral dve naravni števili večji od 1. Svojemu znancu Janezu je povedal, kolikšna je vsota teh števil, Mirku pa, kolikšen je produkt.

Mirko si ogleda produkt in telefonira Janezu:

"Vem, kolikšna je tvoja vsota."

Kmalu nato pa še Janez sporoči Mirku:

"Tudi jaz vem, kolikšen je produkt."

Ugani, kateri števili je izbral Peter, če izdamo, da je vsota večja od 21 in manjša od 31. Vnaprej seveda ne vemo, ali je Peter izbral različni ali enaki števili.

Podobna toda precej težja pa je naslednja naloga:

Peter je izbral dve naravni števili večji od 1. Svojemu znancu Janezu je povedal, kolikšna je vsota teh števil, Mirku pa, kolikšen je produkt.

Janez si ogleda vsoto in telefonira Mirku:

"Ne vidim nobene možnosti, kako bi ti lahko določil vsoto."

Toda glej, čez eno uro mu Mirko odgovori:

"Vem, kolikšna je vsota."

Kmalu nato pa še Janez sporoči Mirku:

"Tudi jaz vem, kolikšen je produkt."

Kateri števili je izbral Peter? Da bo naloga lažja, naj povemo, da vsota ni večja od 40. Vnaprej seveda ne vemo, ali je Peter izbral različni ali enaki števili.

Ta zanimiva naloga kroži zadnja leta na raznih srečanjih matematikov. Martin Gardner, ki jo je objavil v decemberski številki časopisa Scientific American, jo imenuje "nemogoč problem", ker na videz v njej ni nobene informacije, ki bi omogočala reševanje. Omejitev, da vsota izbranih števil ni večja od 40, ni bistvena. Isto rešitev dobimo tudi v primeru, če vsota ni večja od 60, samo več dela je pri reševanju.

Bralec naj skuša rešiti najprej prvo, lažjo nalogo. Nato pa naj se loti še druge.

Ivan Vidav

REŠITEV PRVE NALOGE

Mirko je lahko uganil vsoto obeh števil iz danega produkta P samo v dveh primerih: (1) P je produkt dveh praštevil, tedaj je $P = pq$. Vsota je v tem primeru $V = p + q$. Npr. za $P = 35 = 5 \cdot 7$ dobimo $V = 5 + 7 = 12$. (2) P je tretja potenca praštevila, torej $P = p^3$, ker lahko zapišemo P kot produkt dveh faktorjev samo takole: $P = p \cdot p^2$. Vsota je zdaj $V = p + p^2$. Če je npr. $P = 27 = 3^3$, imamo $V = 3 + 3^2 = 12$. V vseh drugih primerih se da P razstaviti vsaj na dva načina v produkt dveh faktorjev in vsota faktorjev ni enolično določena.

Ko je Mirko telefoniral Janezu, da mu je vsota znana, je Janez dobil tole informacijo: izbrani števili sta ali praštevili ali pa je eno praštevilo in drugo kvadrat tega praštevila. Ker je tudi Janez iz vsote V ugotovil, kolikšen je produkt P , mora biti V tako število, da se da na samo en način zapisati kot vsota dveh praštevil ali pa kot vsota praštevila in njegovega kvadrata. Denimo, da bi bila vsota $V = 22$. Ker lahko pišemo $22 = 3 + 19 = 5 + 17 = 11 + 11$, imamo za produkt tri možnosti: $P = 3 \cdot 19 = 57$, $P = 5 \cdot 17 = 85$ in $P = 11 \cdot 11 = 121$. V tem primeru Janez ne bi mogel uganiti, kateri izmed teh produktov je pravi.

Zato $V \neq 22$. Oglejmo si še nadaljnja števila do 30 in jih razstavimo na vse mogoče načine v vsoto dveh praštevil ali pa v vsoto praštevila in njegovega kvadrata:

23 ni vsota dveh praštevil, niti vsota praštevila in njegovega kvadrata;

$$24 = 5 + 19 = 7 + 17 = 11 + 13;$$

$$25 = 2 + 23;$$

$$26 = 3 + 23 = 7 + 19 = 13 + 13;$$

27 ni vsota dveh praštevil niti vsota praštevila in njegovega kvadrata;

$$28 = 5 + 23 = 11 + 17;$$

29 ni vsota dveh praštevil niti vsota praštevila in

$$30 = 7 + 23 = 11 + 19 = 13 + 17 = 5 + 5^2$$

Vidimo, da se da od teh števil edino 25 zapisati na en sam način kot vsota dveh praštevil. Torej je Peter izbral števili 2 in 23. Vsota je $V = 25$ in produkt $P = 2 \cdot 23 = 46$.

REŠITEV DRUGE NALOGE

Zakaj je Janez telefoniral, da Mirko ne bo mogel ugotoviti vsote? Kakšno informacijo je tako dobil Mirko? Janez je sklepal takole: Iz produkta P lahko izračunamo vsoto V le v primeru, če je O produkt dveh praštevil $O = pq$ ali pa tretja potenca praštevila $P = p^3$. Tedaj je namreč vsota faktorjev natanko določena. V prvem primeru je $V = p + q$, v drugem pa $V = p + p^2$ (glej rešitev prve naloge). Janez je takoj ugotovil, da število V ni vsota dveh praštevil niti vsota praštevila in njegovega kvadrata. Zato je vedel, da ni mogoče uganiti iz produkta vsote. V njegovem telefonskem sporočilu pa je tičala informacija, da V ni vsota dveh praštevil. Mirko je potem razstavil P na vse mogoče načine v produkt dveh faktorjev in videl, da vsota obeh faktorjev ni vsota dveh praštevil samo pri enem razcepu. Tako je našel vsoto V . Denimo npr., da bi bil produkt $P = 24$. Razstavi-

mo ga lahko na tri načine: $P = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$. V prvem primeru je $V = 2 + 12 = 14$, ki je vsota praštevil 3 in 11. Prav tako je v tretjem primeru $V = 4 + 6 = 10$ vsota praštevil 3 in 7. V drugem primeru pa je $V = 3 + 8 = 11$ in 11 ni vsota dveh praštevil. Pri produktu $P = 24$ bi bili torej iskani števili 3 in 8, vsota pa 11. Ko je Mirko telefoniral, da pozna vsoto, je Janez zvedel, da se da P razstaviti samo na en način tako, da vsota faktorjev ni vsota dveh praštevil.

Lotimo se zdaj reševanja naloge. Ker sta iskani števili večji od 1, vsota ni večja od 40, leži V med 4 in 40. Izmed teh števil pridejo v poštev samo tista, ki se ne dajo zapisati kot vsota dveh praštevil. Goldbachova domneva pravi, da je vsako sodo število vsota dveh praštevil. Npr. $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7$ itd. Goldbachova domneva sicer še ni dokazana, vendar se bo vsak bralec zlahka prepričal, da je vsako sodo število do 40 vsota dveh praštevil. Zato V ni sodo število. Toda tudi nekatera liha števila so vsote dveh praštevil, npr. $5 = 2 + 3$, $7 = 2 + 5$, $9 = 2 + 7$, $13 = 2 + 11$, $15 = 2 + 13$, $19 = 2 + 17$, $21 = 2 + 19$, $25 = 2 + 23$, $31 = 2 + 29$, $33 = 2 + 31$, $39 = 2 + 37$. Torej je V lahko le eno izmed sedmih števil

11, 17, 23, 27, 29, 35, 37

Denimo, da bi bilo $V = 11$. Ker je $11 = 7 + 4 = 3 + 8$, bi bil produkt lahko $P = 4 \cdot 7 = 28$ ali $P = 3 \cdot 8 = 24$. V obeh primerih je P oblike $2^n p$, kjer je p praštevilo. Vsako število oblike $2^n p$ pa se da samo na en način razstaviti v dva faktorja tako, da vsota faktorjev ni vsota dveh praštevil. Vzeti moramo namreč p kot en faktor, kot drugi pa 2^n . Pri vsakem drugem razcepu, npr. $P = 2^{n-k} \cdot 2^k p$, kjer je $k \geq 1$ in $k < n$, sta oba faktorja 2^{n-k} in $2^k p$ sodo. Potem je tudi vsota $V = 2^{n-k} + 2^k p$ sodo število in je zato V vsota dveh praštevil. Pri produktih $P = 28$ in $P = 24$ bi torej Mirko uganil, da je vsota $V = 11$, Janez pa ne bi vedel, ali je $P = 28$ ali $P = 24$. Ker je telefoniral, da tudi on pozna produkt, vsota ni 11. Prav tako V ni enak številom 23, 27, 35, 37.

Vsako od teh števil se da namreč zapisati na dva načina kot vsota nekega praštevila in števila, ki je potenca od 2. In sicer je $23 = 19 + 4 = 7 + 16$, $27 = 23 + 4 = 19 + 8$, $35 = 31 + 4 = 19 + 16$, $37 = 29 + 8 = 5 + 32$.

Torej imamo za V samo dve možnosti: 17 ali 29. Denimo, da bi bilo $V = 29$. Pišimo $29 = 13 + 16$ in $29 = 27 + 2$. Če je $P = 16.13$, je to produkt praštevila 13 in potence 2^4 . Po prejšnjem lahko Mirko od tod takoj najde vsoto faktorjev $V = 29$. Če pa je $P = 2.27$, razstavimo P takole: $2.27 = 6.9 = 3.18$. Vsote faktorjev so $2 + 27 = 29$, $6 + 9 = 15$ in $3 + 18 = 21$. Od teh edino 29 ni vsota dveh praštevil. Zato bi Mirko tudi v tem primeru uganil, da je $V = 29$, Janez pa ne bi vedel, ali je produkt $P = 16.13$ ali $P = 2.27$. Torej V ni 29.

Nazadnje ostane le še število 17. Zapišimo ga na vse mogoče načine kot vsoto dveh sumandov

$$17 = 2 + 15 = 3 + 14 = 4 + 13 = 5 + 12 = 6 + 11 = 7 + 10 = 8 + 9$$

Ustrezni produkti so $2.15 = 30$, $3.14 = 42$, $4.13 = 52$, $5.12 = 60$, $6.11 = 66$, $7.10 = 70$ in $8.9 = 72$. Če je $P = 52 = 4.13$ (produkt praštevila 13 in potence 2^2), lahko Mirko takoj ugotovi, da je vsota $V = 4 + 12 = 16$. V nobenem drugem primeru pa ne more uganiti vsote. Npr. število 30 se da zapisati kot produkt takole: $30 = 2.15 = 5.6$. Vsota faktorjev je v prvem primeru 17, v drugem 11 in nobeno od teh števil ni vsota dveh praštevil. Zato Mirko ne bi vedel, ali je $V = 11$ ali $V = 17$. Podobno obravnavamo ostale produkte. Razstavimo jih takole: $42 = 2.21 = 3.14$, $60 = 3.20 = 5.12$, $66 = 2.33 = 6.11$, $70 = 2.35 = 7.10$ in $72 = 3.24 = 8.9$. V vseh teh razcepih je vsota faktorjev število, ki se ne da zapisati kot vsota dveh praštevil. Zato Mirko ne bi mogel uganiti vsote v nobenem od teh primerov. Torej je $V = 17$ in $P = 52$, Peter pa je izbral števili 4 in 13. Samo v tem primeru lahko Mirko ugotovi, kolikšna je vsota V , Janez pa, kolikšen je produkt P .

Ivan Vidav

7. razred

1. Pričakovana cena:
- x
- din,

 nova cena: $\frac{5}{4}x$ din

 Pričakovana količina krompirja $\frac{50}{x}$ kg,

 nova količina krompirja: $\frac{50}{\frac{5x}{4}} \text{ kg} = \frac{40}{x} \text{ kg}$

$$\frac{50}{x} - \frac{40}{x} = \frac{10}{x}$$

 kar je $\frac{1}{5}$ ali 20 % od pričakovane količine krompirja.

2. Očitno so vrednosti členov
- $4x^4$
- ,
- $8x^2$
- in 4 sodo števila.

 Pokazati je treba, da je $x^3 + x$ tudi sodo število, za vsak $x \in \mathbb{N}$.

 (1) če je x sodo število, je tudi x^3 sodo in x^3+x sodo število.

 (2) če je x liho, je x^3 tudi liho in x^3+x je sodo, ker je vsota dveh lihih števil.

3. Razcep:
- $2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

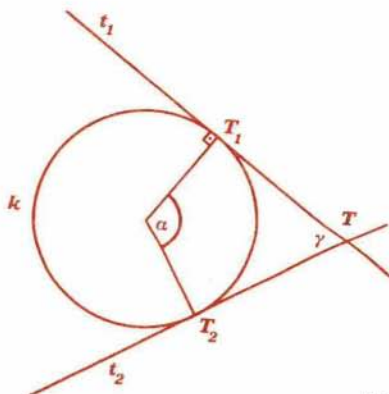
$$(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 5 \cdot 7) = (2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)^2$$

 Iskano naravno število je $(2 \cdot 5 \cdot 7) = 70$

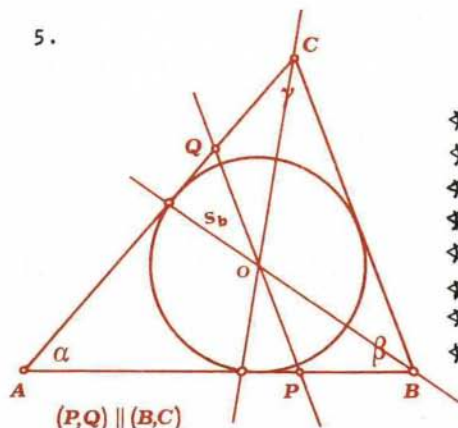
- 4.
- $\alpha = \frac{3}{10}$
- od
- $360^\circ = 108^\circ$

$$\gamma = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$$

$$\underline{\gamma = 72^\circ}$$



5.



$$\begin{aligned} \sphericalangle ABO &= \sphericalangle CBO \text{ (simetrala kota)} \\ \sphericalangle CBO &= \sphericalangle POB \text{ (izmenična kota)} \\ \sphericalangle ABO &= \sphericalangle POB \Rightarrow PQ = BP \\ \sphericalangle ACO &= \sphericalangle BCO \text{ (simetrala kota)} \\ \sphericalangle BCO &= \sphericalangle QOC \text{ (izmenična kota)} \\ \sphericalangle ACO &= \sphericalangle QOC \Rightarrow QO = QC \\ \overline{PQ} &= \overline{PO} + \overline{OQ} \\ \overline{PQ} &= \overline{BP} + \overline{QC} \end{aligned}$$

8. razred

1. Če je $y \neq 0$, lahko ulomek poenostavimo na $\frac{-2x + 5y}{2x - y}$

Ta ulomek nima pomena pri $2x - y = 0$ ali $y = 2$

2. Veččlenik $P = a^2 + b^2 + c^2 - 10a - 14b + 75$ lahko zapišemo

tudi takole: $P = (a - 5)^2 + (b - 7)^2 + c^2 + 1$

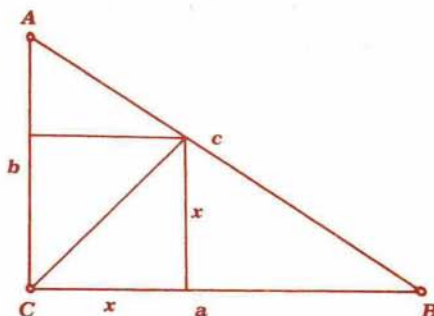
Veččlenik ima najmanjšo vrednost 1, pri $a = 5$, $b = 7$, $c = 0$

3. $\frac{a}{b} = \frac{x}{b - x}$. Od tod

$$ab - ax = bx \Rightarrow x = \frac{ab}{a + b}$$

Razmerje ploščin je:

$$\frac{ab(a + b)^2}{2a^2b^2} = \frac{(a + b)^2}{2ab}$$

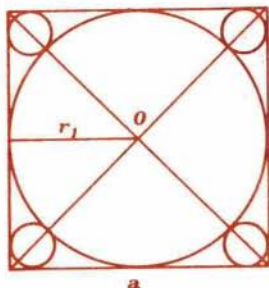


4. Polmer večjega kroga je

$$r_1 = \frac{a}{2}$$

Če z x označimo polmer malih krogov iz skice razberemo:

$$x + x\sqrt{2} = \frac{a}{2} \sqrt{2} - \frac{a}{2}$$

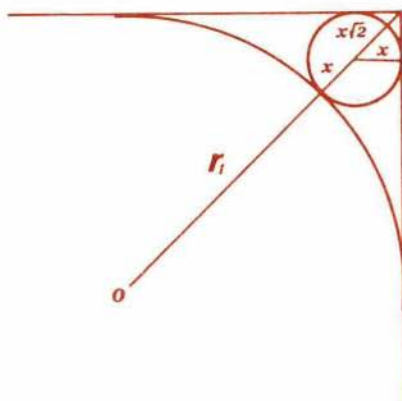


Od tod

$$x = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \quad \text{all}$$

$$x = \frac{a(\sqrt{2}-1)^2}{2}$$

$$x = 0,08a$$



5. Označimo z x višino spodnjega telesa

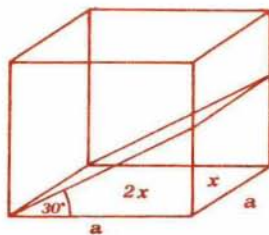
$$x = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad \text{all} \quad x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Prostornini sta: -

$$V_1 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6} \quad V_2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$$

Od tod:

$$V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$$



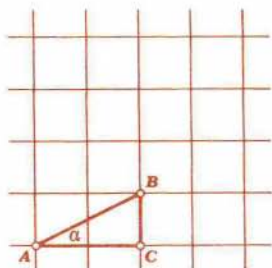
Pavle Zajc



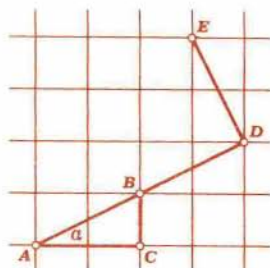
NALOGE

DVOJNI KOT TETE AMALIJE

Vrt tete Amalije je tlakovan z velikimi kvadratnimi kamnitimi ploščami. "Danes bomo imeli sladoled, otroci," je napovedala teta Amalija, ko so se prikazali Polonca, Jožica in Tomaž pri vrtnih vratih. "Ampak prej morate rešiti tole nalogo!" Narisala je na plošče pravokotni trikotnik ABC in v njem označila kot pri oglišču A , kot kaže slika 1.



Slika 1



Slika 2

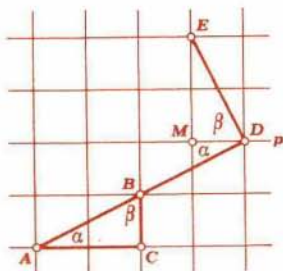
"Narišite pravokotni trikotnik, ki bo imel en kot natanko dva-krat večji od označenega kota! Kdor bo prvi rešil nalogo, dobi dvojno porcijo sladoleda!" Teta je šla v hišo pripravljat sladoled in pustila otroke, da so s koščkom opeke in končkom oglja risali po ploščah.

Čez pol ure je šla Polonca po teto: "Naloga je rešena, pridi na

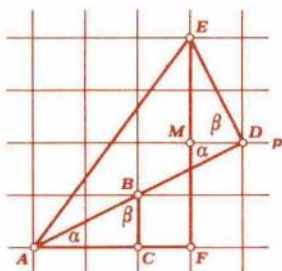
vrt in pogledj!" In sta prišli iz hiše. "Tomaž, bi ti razložil rešitev?" je rekla Jožica. "Prav," se je strinjal Tomaž, "reševali smo pa vsi skupaj."

"Glej, teta, uporabil bom kar tvojo sliko. Najprej podaljšam daljico AB do točke D . V točki D grem pravokotno na daljico AD in pridem do točke E ." (Slika 2)

"Kako pa veš, da je kot pri D pravi?" je zanimalo teta. Tomaž je narisal še premico p in označil kot β . "Kot med daljico AD in premico p je enak kotu α . Kot med daljico DE in premico p pa je enak kotu β , ker sta trikotnika ABC in EDM skladna. Kota α in β sta ostra kota v pravokotnem trikotniku, komplementarna sta, njuna vsota je pravi kot."



Slika 3



Slika 4

"Res je," je potrdila teta, Tomaž pa je nadaljeval: "Zvežem še točki E in A in označim točko F ."

"Trikotnik ADE je podoben trikotniku ACB in zato je kot med stranicama AD in AE enak kotu α ."

Teta: "Zakoj sta trikotnika podobna?"

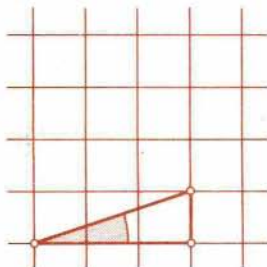
Tomaž: "Oba sta pravokotna in ravno tako, kot je v trikotniku ACB stranica AC dvakrat večja od stranice BC , je v trikotniku ADE stranica AD dvakrat večja od stranice DE ."

Teta je prikimala, Tomaž pa zaključil: "In tako je v trikotniku AFE kot pri A natanko dvakrat večji od kota α ."

Teta je bila zadovoljna, ker so nalogo reševali skupno in je vsem trem prinesla dvojno porcijo sladoleda.

Reši na karirastem papirju samo z ravnilom nalogi:

1. Nariši kot, ki je trikrat večji od kota α iz tetine naloge!
2. Podvoji kot na sliki 5!



Slika 5

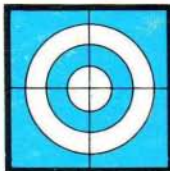
Peter Petek

REŠITEV 4. NALOGE S STR. 181 P IX/3

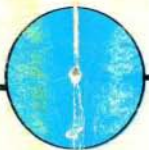


Roman Rojko



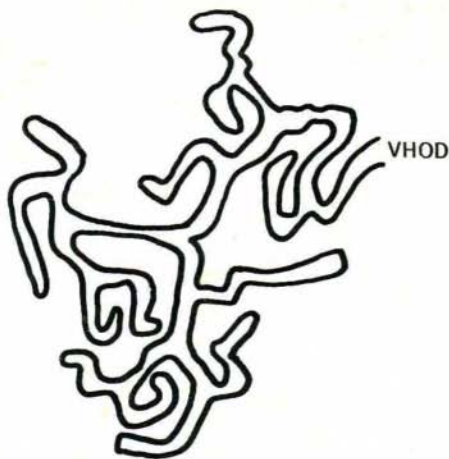


BISTROVIDEC



Poleti 1981 je obiskal Ljubljano prof. T.D. Parsons s Penn State University, ZDA. Eno izmed njegovih predavanj je bilo posvečeno problemu 'ubežnikov in zasledovalcev'. Pri tem je omenil tole nalogo:

Ravbar Hitri Jaka se je skrčil pred žandarji v podzemsko jamo, katere načrt prikazuje slika:



Najmanj koliko žandarjev je potrebnih, da bodo lahko zagotovo ulovili ravbarja Jaka, če vemo, da so žandarji počasnejši?

Vladimir Batagelj