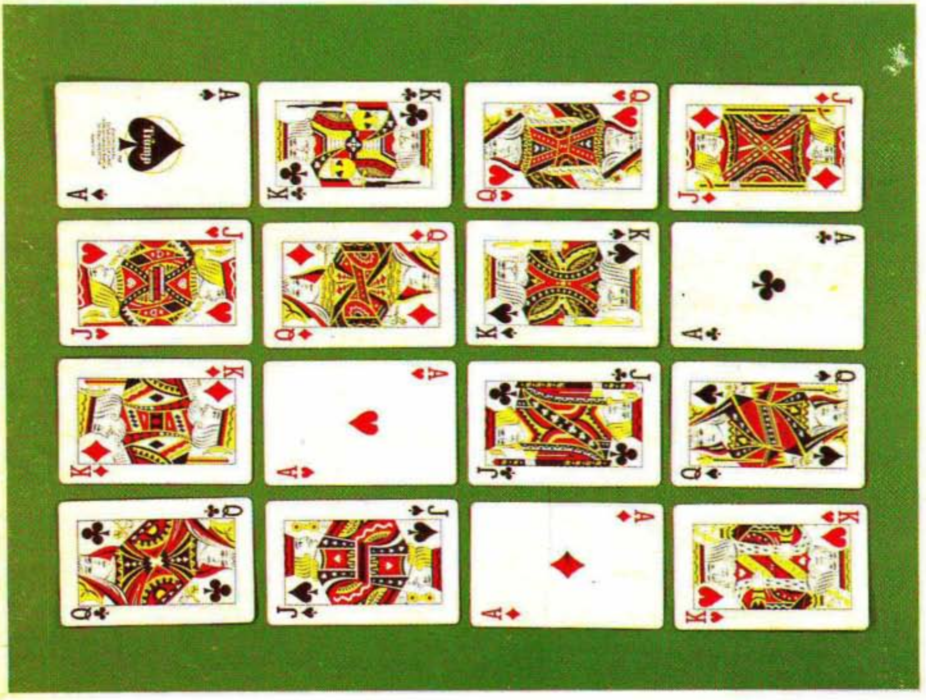
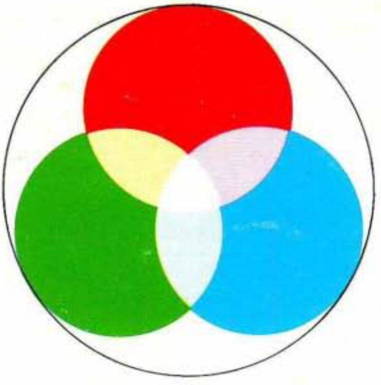
presek 2

IX
1981–82



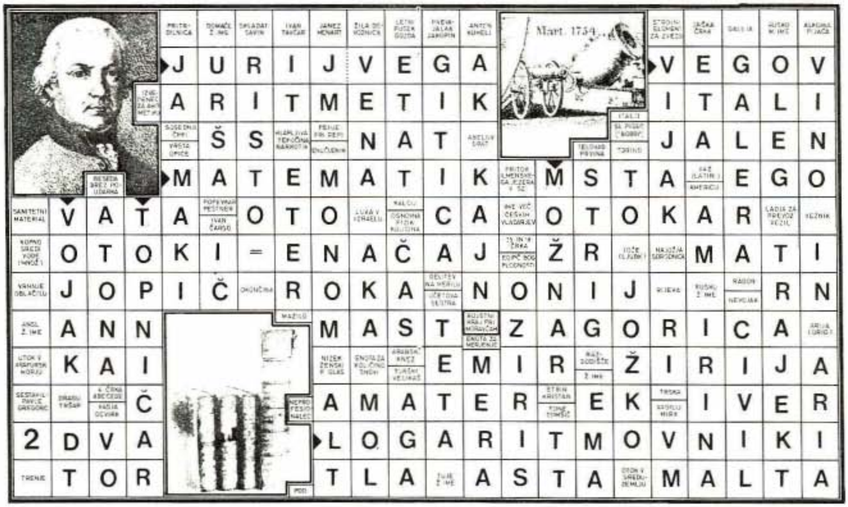
LIST ZA MLADE
MATEMATIKE
FIZIKE
ASTRONOME



IZDAJA DMFA SRS

Viseči most Tacoma Narrows (ZDA) po tem, ko se je 7. novembra 1940 porušil. Dobrih 930 m dolgi in 13 m široki most je prišel v resonanco v vetru s hitrostjo okoli 70 km/h. V nevihti so se najprej pokvarile objemke, ki so vezale vrvi na most. Most je bil odprt štiri mesece in je že prej večkrat zanihal, največ z amplitudo dobrega poldrugega metra. Žrtev ni bilo, ker so most pravočasno zaprli. Leta 1951 so zgradili na starem mestu nov most. Po poskusih z modelom v vetrovniku so spremenili načrt tako, da novi most ne niha prekomerno.

Glej prispevek Lastno nihanje in resonanca na str. 82.



PRESEK - List za mlade matematike, fizike in astronome.
9. letnik, šolsko leto 1981/82, 2. številka, str. 65-128

Rokopis je natipkala Ivanka Breznikar, jezikovno ga je pregledala Sandra Oblak, opremila pa sta ga Borut Delak in Višnja Kovačič, slike sta narisala Slavko Lesnjak in Rafko Šavli.

Dopise pošiljajte in list naročajte na naslov: Komisija za tisk pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov SRS - PRESEK, Jadranska 19, 61111 Ljubljana, p.p. 6, tel. 265-061/53, štev. žiro računa 50101-678-47233, devizni račun pri Ljubljanski banki štev. 32009-007-10022/6. Naročnina za šolsko leto je za posamezna naročila 87,50 din, za skupinska pa 70.- din; za inozemstvo 7 $, 5600 Lit, 100.-Asch. Posamezna številka stane 21.- din.

List sofinancirata ISS in RSS.

Ofset tisk časopisno in grafično podjetje "DELO", Ljubljana.

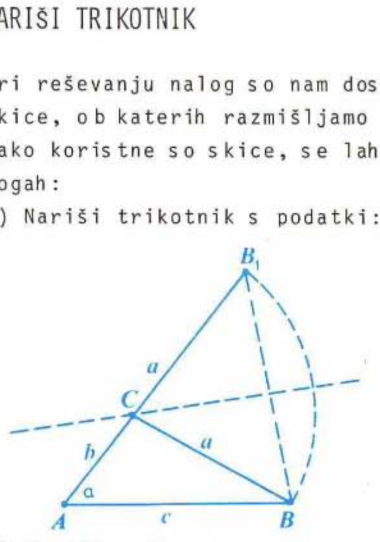
List izhaja štirikrat letno. Naklada 20.000 izvodov.

MATEMATIKA

NARIŠI TRIKOTNIK

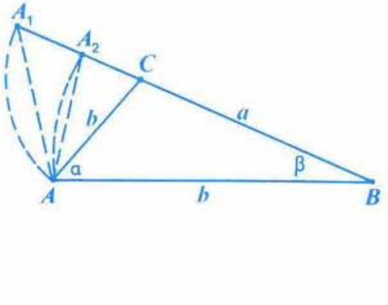
Pri reševanju nalog so nam dostikrat v pomoč dobro narejene skice, ob katerih razmišljamo in iščemo rešitev.
Kako koristne so skice, se lahko prepričamo ob naslednjih nalogah:

a) Nariši trikotnik s podatki: $(a+b)$, c, α



Rešitev: ΔBB_1C je enakokraki. Simetrala osnovnice BB_1 seče $(a+b)$ v točki C, ki je oglišče iskanega ΔABC.

b) Nariši trikotnik s podatki: $(a+b-c)$, α, β



Rešitev: ΔABA_2 in ΔACA_1 sta enakokraka. Daljica $\overline{A_1A_2} = (a+b-c)$. Odtod ni težko izračunati $\sphericalangle A_2A_1A = 90^0 - (\alpha+\beta)/2$ in $\sphericalangle AA_2A_1 = 90^0 + \beta/2$.
Narišimo pomožni ΔAA_2A_1 in simetralni stranici AA_1 in AA_2. Ti simetrali sečeta nosilko daljice $\overline{A_1A_2}$ v točkah C in B, ki sta oglišči iskanega trikotnika ABC.

Naloge. Nariši na podoben način trikotnike s podatki:

1) $(a+c)$, α, β

2) $(a-b)$, α, c

3) $(a+b+c)$, α, β

4) $(c-b)$, α, γ

Za kak poseben primer si lahko izbereš številske podatke sam.

Danijel Bezek

PROBLEM ŠTIRIH BARV

Zanimivo je, da v matematiki obstaja mnogo problemov, ki se jih da enostavno zastaviti, rešiti pa jih je sila težko. Eden takih je tudi *problem štirih barv*.

Denimo, da moramo pobarvati poljuben zemljevid. Države barvamo z različnimi barvami tako, da sta sosednji državi (državi, ki imata skupno mejo) vedno različnih barv (drugače na zemljevidu ne bi vedeli, kje poteka meja med njima). Doslej se je za vse stvarne in umišljene zemljevide pokazalo, da je dovolj imeti na razpolago štiri barve. Čeprav se s tem problemom že dolgo časa ukvarjajo matematiki, jim je šele pred kratkim uspelo dokazati, da je vsak zemljevid mogoče pravilno pobarvati s štirimi barvami. Matematika Appel in Haken, ki sta leta 1976 rešila problem štirih barv, sta pri reševanju uporabljala računalnik, kar je za reševanje čisto matematičnih problemov precej nenavadno.

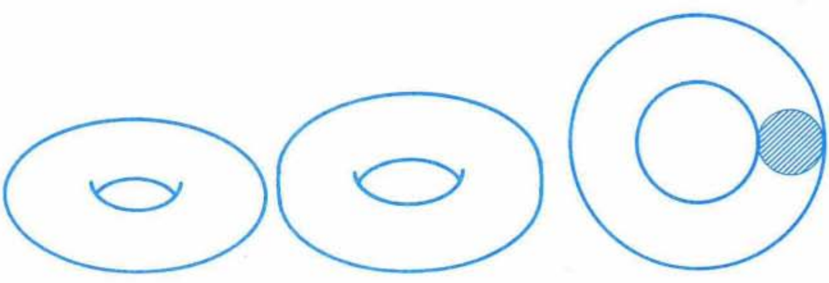
Primer na sliki 1 pokaže, da potrebujemo za nekatere zemljevide vsaj štiri barve (tri barve so torej premalo).

Slika 1

Vsaka od štirih držav na sliki meji na vsako drugo, zato moramo vsako pobarvati s svojo barvo.

Prvi dokument v zvezi s problemom štirih barv je pismo znanega angleškega matematika in logika DeMorgana z dne 23. oktobra 1852 prijatelju, slavnemu matematiku Hamiltonu. V njem piše, da mu je njegov učenec Frederick Guthrie zastavil problem štirih barv in da ga sam ni znal rešiti. Frederickov starejši brat Francis je namreč opazil, da se s štirimi barvami da na zemljevidu Anglije ločiti vse grofije. Kasneje so se s problemom štirih barv ukvarjali mnogi matematiki pa tudi mnogi amaterji. Kempe je na primer leta 1880 objavil "rešitev" problema štirih barv. Šele leta 1980 je angleški matematik Heawood našel luknjo v Kempejevem dokazu. Hkrati je Heawood dokazal, da se vsak zemljevid da pobarvati z največ petimi barvami. Tudi pisca tega prispevka je pred nekaj leti zbudil prijatelj-matematik in mu ob štirih zjutraj povedal, da je problem končno rešil. Po enournem zasliševanju pa je sam našel "luknjo" v svojem "dokazu".

Problem štirih barv za matematiko ne bi bil tako pomemben, če ne bi matematiki ob poskusih reševanja tega problema odkrili mnoge zelo pomembne matematične metode. Ves čas, ko smo govorili o zemljevidih smo mislili na zemljevide, ki jih rešujemo v ravnini ali na zemlji, torej na površini krogle. Problem pa lahko prenesemo tudi na druge ploskve. V bodočnosti bodo morda obstajali umetni planetoidi v obliki svitka (torusa).



Slika 2

Denimo, da je tak planetoid obložen s posebnimi ploščami, za katere moramo že od daleč videti, kje se stikajo. Plošče (države) moramo torej barvati z različnimi barvami tako, da pokrijejo torus in da sta dve sosednji vedno pobarvani z različnima barvama. To je torej problem barvanja zemljevidov na svitku. čeprav je ta problem na videz dosti bolj zamotan od problema štirih barv, ga je rešil že v prejšnjem stoletju Heawood. Dokazal je, da se da vsak zemljevid na torusu pobarvati s sedmimi barvami. Našel pa je tudi tak zemljevid za katerega sedem barv res potrebujemo. čeprav je po svoji naravi problem barvanja topološki, sodi danes bolj v teorijo grafov.. Vsaki državi priredimo točko (glavno mesto). Tako dobimo toliko točk, kolikor držav imamo na zemljevidu. Po dve točki povežemo s črto, če sta glavni mesti sosednjih držav. Strukturo, ki jo sestavljajo točke in povezave, imenujemo v matematiki graf. Problem barvanja zemljevida lahko sedaj prevedemo v problem barvanja točk grafa. Točke grafa (glavna mesta držav) barvamo tako, da sta sosednji točki (torej točki, ki ju veže povezava) pobarvani z različnima barvama. Več o tem morda kdaj drugič!

Tomaž Pisanski

OBVESTILO NAROČNIKOM

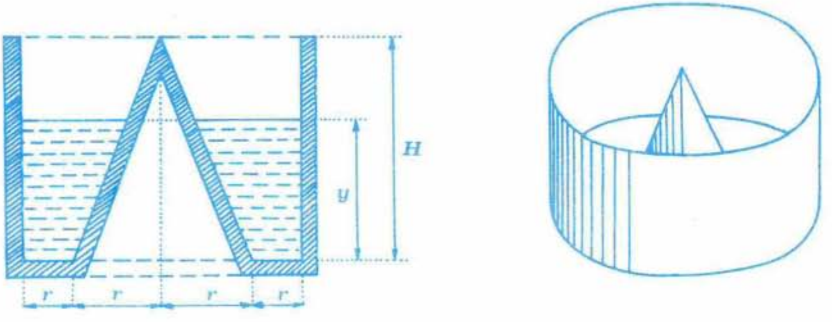
Pravkar ste prejeli drugo številko devetega letnika Preseka. Tretja številka je že v pripravi. Naše delo lepo napreduje v želji, da boste tudi v prihodnje z izhajanjem lista za mlade matematike, fizike in astronome zadovoljni. Da pri tem ne bi imeli nepotrebnih sitnosti in prevelikih stroškov, učitelje matematike in fizike, ki nam pošiljajo skupinska naročila za učence v srednjih in osnovnih šolah, vljudno prosimo, da nam nakažete zbrani denar, ki ga bomo potrebovali pri izdaji tretje številke. Šole, ki se ne bodo oglasile ne na en, ne na drug način, tretje številke ne bodo dobile z redno pošto. Denar nam nakažite na staro številko žiro računa 50101 - 678 - 47233 in nov naslov: Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS - Podružnica Ljubljana - Komisija za tisk, 61111 Ljubljana, Jadranska c.19, pp 6.

Ciril Velkovrh

MATEMATIČNO RAZVEDRILO

VODNI RAČUNALNIK

Ni nujno, da je računalnik elektronski. Navsezadnje je tudi otroško računalo neke vrste računalnik. Ne dosti manj preprost pa je računalnik na vodo, ki ga kaže slika in mi ga je omenil prof. D.Trifunovič. Vendar nam konstrukcijska preprostost ne preprečuje reševati z njim kubične enačbe.



Slika 1

Naj bo dana kubična enačba s poljubnimi realnimi koeficienti a, b, c, d (razumljivo $a \neq 0$):

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Če je $b^2 = 3ac$, dobimo z uvedbo nove neznanke y, definirane takole: $x = y - b/(3a)$, preprosto enačbo

$$y^3 = (b^3 - 27a^2d)/(27a^3).$$

Zato predpostavimo, da je $b^2 \neq 3ac$. Tokrat bomo novo neznanko y uvedli z enačbo:

$$x = [(y - H)\sqrt{b^2 - 3ac} - 2bH]/(6aH).$$

Za y bomo dobili enačbo

$$y^3 - 3Hy^2 - 9H^2y + p = 0, \qquad (*)$$

kjer je p precej "grd" izraz, sestavljen iz a, b, c, d in H.

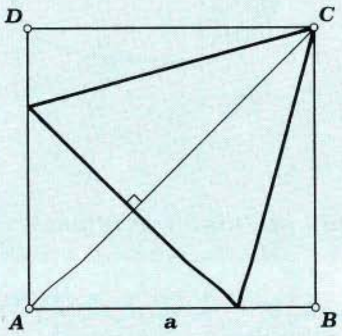
Če je $0 \leq p \leq 11H^3$, lahko y določimo z našim računalnikom. Nalijmo vanj vodo s prostornino $V = \pi r^2 p/(3H^2)$. Višina vode je rešitev enačbe (*). Seveda moramo to preveriti, kar pa prepuščamo bralcu.

Anton Cedilnik

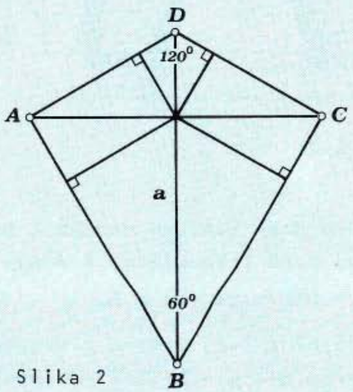
DVE NALOGI

V kvadrat *ABCD* s stranico *a* včrtaj enakostranični trikotnik tako, kot kaže slika 1. Izračunaj njegovo ploščino!

Kolika je dolžina vseh žic, ki sestavljajo simetričen (gl. Slika 2) lik, če je dana razdalja $BD = a$, kot $ADC = 120^\circ$ in kot $ABC = 60^\circ$.



Slika 1



Slika 2

Pavle Zajc

NEMOGOČ PROBLEM

Peter je izbral dve naravni števili večji od 1. Svojemu znancu Janezu je povedal, kolikšna je vsota teh števil, Mirku pa, kolikšen je produkt.

Mirko si ogleda produkt in telefonira Janezu:

"Vem, kolikšna je tvoja vsota."

Kmalu nato pa še Janez sporoči Mirku:

"Tudi jaz vem, kolikšen je produkt."

Ugani, kateri števili je izbral Peter, če izdamo, da je vsota večja od 21 in manjša od 31. Vnaprej seveda ne vemo, ali je Peter izbral različni ali enaki števili.

Podobna toda precej težja pa je naslednja naloga:

Peter je izbral dve naravni števili večji od 1. Svojemu znancu Janezu je povedal, kolikšna je vsota teh števil, Mirku pa, kolikšen je produkt.

Janez si ogleda vsoto in telefonira Mirku:

"Ne vidim nobene možnosti, kako bi ti lahko določil vsoto."

Toda glej, čez eno uro mu Mirko odgovori:

"Vem, kolikšna je vsota."

Kmalu nato pa še Janez sporoči Mirku:

"Tudi jaz vem, kolikšen je produkt."

Kateri števili je izbral Peter? Da bo naloga lažja, naj povemo, da vsota ni večja od 40. Vnaprej seveda ne vemo, ali je Peter izbral različni ali enaki števili.

Ta zanimiva naloga kroži zadnja leta na raznih srečanjih matematikov. Martin Gardner, ki jo je objavil v decemberski številki časopisa Scientific American, jo imenuje "nemogoč problem", ker na videz v njej ni nobene informacije, ki bi omogočala reševanje. Omejitev, da vsota izbranih števil ni večja od 40, ni bistvena. Isto rešitev dobimo tudi v primeru, če vsota ni večja od

60, samo več dela je pri reševanju.

Bralec naj skuša rešiti najprej prvo, lažjo nalogo. Nato pa naj se loti še druge.

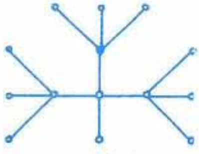
Ivan Vidav

PRESEKOV ŠKRAT

NAJDI ME

Presekov škrat si je omislil zanimivo igrico, ki se imenuje "NAJDI ME". Igrica je v trenutku postala zelo popularna med presekovimi bralci. Skoraj v vsaki številki Preseka najdemo odmeve nanjo (glej npr. Presek IX, št. 1). V zvezi z igro ugotavljam naslednje: škrat se je skril najverjetneje v prispevku I. Gutmana z naslovom "Teorija grafov in kemija" (Presek IX, št. 1). V omenjenem članku je namreč precej sledi. Oglejmo si jih: Na sliki 1 manjka povezava med točkama 4 in 5, na sliki 2 pa sta grafa napačno označena. Moralo bi biti G' in G''. Na strani 7 je škrat spremenil besedo "točka" v "oočka", na strani 9 pa moramo "na pot iz izbrane točee" namesto "iz izbrane točke". Na strani 8 so naštete poti med točkama x in y. Ena izmed poti je napačno zakodirana. Največjo hudobijo pa je škrat napravil na strani 12, kjer je graf G_{29} napačno narisan. Graf G_{29} mora biti takšen:

Bojan Mohar



G_{29}

POGOVORI

PROFESOR ALOJZIJ VADNAL - ČASTNI DOKTOR LJUBLJANSKE UNIVERZE

Profesor Vadnal, Presek čestita svojemu sodelavcu! Povejte nam najprej kaj o otroških letih.

Rojen sem bil v Divači, leta 1910, vendar smo se že leta 1915 preselili. Oče je bil železniški uradnik in so ga takrat prestavili v Ljubljano. Smo pa ves čas ostali Primorci in spominjam se, kako rad sem odhajal na počitnice k sorodnikom v Senožeče. Seveda, Primorska je bila takrat pod Italijo in mnogo Slovencev se je pred fašizmom umaknilo v Jugoslavijo.

Kaj Vas je pripeljalo na pot matematike?

Najprej me je veselila geografija. Še danes jo imam rad, glejte, koliko imam zemljevidov. Takrat sem mislil, da mi bo geografija poklic, ostala pa mi je kot prijeten in zanimiv konjiček. Moram priznati, da sem bil v osnovni šoli slab učenec. V tretji gimnaziji - sedanjem sedmem razredu - sem začel igrati šah. In ne vem zakaj, od tedaj v šoli nisem imel več težav. Zagrabila me je matematika in v peti gimnaziji sem že vedel, da bom matematik. Ni pa bilo razen šolskih knjig slovenske literature in danes so mladi precej na boljšem, saj imajo Presek in Sigmo.

Omenili ste šah. Ga še igrate?

Že, že, mislim, da sem dosegel približno moč današnjega prvokategornika. A resneje se mu nisem posvetil. Šah je vendarle igra in če sem študiral, sem rajši študiral matematiko.

Kakšnih matematičnih problemov ste se lotevali?

Rešil sem nalogo, kako včrtati v raznostranični trikotnik največji pravokotnik. Seveda, to ni nič posebnega, vsak srednješolec danes to zna. Ampak jaz sem bil le vesel, da sem samostojno in na elementaren način problem ugnal. Zanimalo me je tudi, kako se zoži curek vode, ki teče iz pipe.

Kaj Vas je še zanimalo?

Iz ljubezni do slovenskega jezika mi je zraslo tudi zanimanje za druge jezike. V srednji šoli sem naredil pravo ofenzivo in se dobro naučil latinščine, nemščine in francoščine. Z angleškim, španskim in ruskim jezikom sem se spoznal kasneje. Moram pa povedati, da me je bolj od samega govora pri vsakem jeziku pritegnila slovnica, zgradba jezika.

Ampak vendar ne toliko, da bi šli študirat jezike?

Ne, ne, matematika je bila vseskozi prva. Spominjam se, da sem se v drugem letniku na Univerzi ukvarjal z nekim problemom v zvezi z logaritemsko funkcijo. Dolgo sem se mučil, dokler nisem nekega dne pri košnji v Senožečah - še danes vem, kje na travniku - "zagledal" rešitve. No, pa takih zanimivih nalog je bilo še več.

Diplomirali ste leta 1934. Pa potem?

Poučeval sem na gimnaziji v Ljubljani. Leta 1939 sem napravil doktorat iz matematike. Potem pa je prišla vojna.

To so bili težki časi.

Učil sem na bežigrajski gimnaziji v Ljubljani. Bil sem poverjenik Osvobodilne fronte. Večkrat sem nosil glavo v torbi. Imel sem srečo, da sem preživel. Nepozaben pa je zame 9. maj 1945, dan osvoboditve in zmage. Še lansko leto sem šel ob žici 11 km. Še nasvet mladim, če smem: hodite, hodite v hribe, dokler morete. Ne zanemarjajte svoje telesne pripravljenosti. Zdravje je največ vredno.

Poznamo vas tudi kot velikega ljubitelja narave in planin.

Da, veliko lepega sem doživel v gorah. Naj omenim doživljaj s Kavkaza. V šolskem letu 1946/47 sem bil v Leningradu pri profesorju A.D.Aleksandrovu, ki je raziskoval konveksna telesa. Veliko novega sem se naučil pri njem. No, in v času počitnic sva šla skupaj na Kavkaz. Po celodnevni turi sva sedla v planinski koči, pa sem ga vprašal: "Aleksander Danilovič, povejte, ali je matematika, ki jo delate, praktična?" "Kolikor jaz vem", je odgovoril profesor Aleksandrov, "se to ne bo dalo nikjer uporabiti". Vidite, in tu se je Aleksander Danilovič zmotil. Prav v tistih letih se je rojevalo linearno programiranje, ki pomeni v veliki meri ravno uporabo teorije konveksnih teles. V matematiki je že tako, dostikrat delamo kakšno reč le zaradi lepe teorije, uporaba pride kasneje, včasih kar nepričakovano.

Linearno programiranje ste vi pripeljali v ekonomsko znanost na Slovensko.

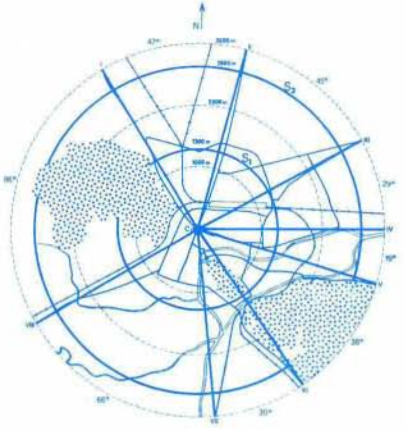
Prav ponosen sem na knjigo Elementarni uvod v linearno programiranje iz leta 1963. V njej ni zahtevnih matematičnih sredstev, pač pa sem se potrudil, da sem na enostaven način in vendar neoporečno predstavil linearno programiranje. Če bi takrat že obstajala knjižnica Sigma, bi ta knjiga gotovo sodila vanjo.

Vaše Funkcije I in II so bile v Sigmi uspešnica.

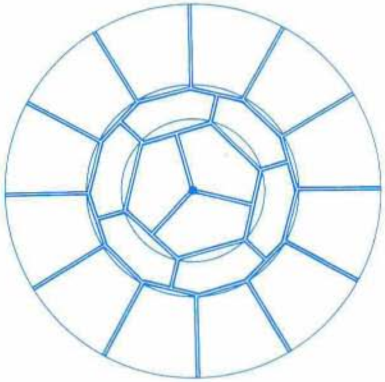
Sigmo sem izkoristil za svoje učbenike. Zasluga te zbirke je, da mladi dobijo prvo znanje o neki veji matematike. V naših časih česa podobnega nismo imeli. Ali pa Presek! Zelo dobra opora je mladim, le še bolj jih morate pritegniti k samostojnemu raziskovalnemu delu. Priznam, da je za Presek zelo težko pisati, teže kot znanstveno razpravo.

Povejte še kaj o svojem znanstvenem delu!

Omenim naj problem lokacije transportnih poti. Tu sem dal nekaj rešitev, ki so uporabne tudi v urbanizmu, v prostorskem planiranju. Začel sem z bilinearnim programiranjem. Programiranje faznih gospodarskih procesov se je izkazalo za zelo pomembno in na tem je delalo že veliko mojih študentov. Imam pa večje zadoščenje, če dobro predavam, kot pa če sem znanstvenik. Galilejev, Newtonov in Einsteinov je malo.



Sl.1 Model optimalne lokacije radialnih in krožnih cest.



Sl.2 Shema ljubljanskega cestnega omrežja z 8 vpadnicami in 2 krožnima cestama.

Sodelovali ste tudi z Borisom Kidričem.

Bil je človek širokega pogleda. Takrat je bil predsednik planske komisije in je snoval šolo za planerje v gospodarstvu. Bodoči predavatelji na tej šoli - jaz naj bi prevzel matematiko - smo ga vprašali, ali naj se oziramo predvsem na uporabo v ekonomiji. "Ne", je rekel Kidrič, "planer v gospodarstvu mora najprej dobro obvladati osnove naravoslovja."

Pred leti ste napisali slovar Matematična terminologija. Slišal sem, da sedaj pripravljate petjezični matematični slovar.

Osemjezični: slovenski, italijanski, nemški, madžarski, angleški, francoski, srbohrvatski in ruski. V terminološki komisiji DMFA smo najprej govorili o slovarju kot pripomočku za naše zamejce. Potem smo zamisel razširili še na srbohrvaščino in tri svetovne jezike. Moje delo je skoraj pri kraju, bo pa potrebno še veliko truda posameznih matematikov, ki dobro obvladajo naštete jezike.

Ali je v svetu znanih kaj podobnih slovarjev?

O seveda, kar nekaj, res pa je, da ne poznam nobenega osemjezičnega.

Tovariš profesor, hvala lepa. Presek si želi še veliko vaših člankov.

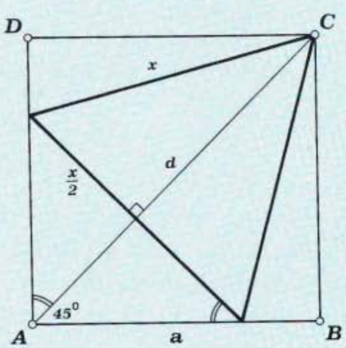
Peter Petek

REŠITEV S STR. 72

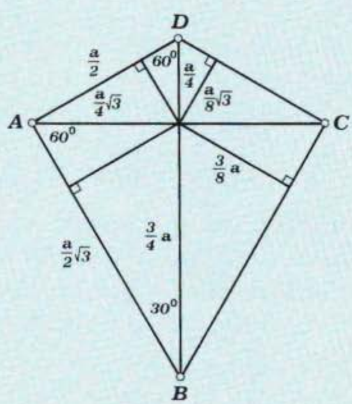
$AC = d = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{3}$

$x = a\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$

$p = a^2(2\sqrt{3}-3)$



$S = \frac{11}{4}a + \frac{7}{4}a\sqrt{3}$. Pomagamo si s trikotniki, ki so polovice enakostraničnih trikotnikov.



Pavle Zajc

FIZIKA

O KUHARSKIH KALORIJAH

Hotel sem shujšati. Nič posebnega, boste rekli, manj jej, pa bo. Že, že, ampak jaz sem hotel znanstveno manj jesti. Vzel sem v roke Kuharico (avtorja sta Livia in György Schiller, Pomurska založba, Murska Sobota 1978). Njenih 5 in pol centimetra debeline je zagotavljalo super strokovnost. Odprem na strani 54 pa trčim ob podatek, da delavec, ki opravlja težka dela in ga je 80 kg skupaj, potrebuje dnevno 4000 kalorij.

Če gre človek v gore, sem si mislil, tudi krepko gara, seveda če ne sede za prvo skalo in ne začne malicati. Pa sem računal, kakšno višino bi premagal naš silak s to energijo.

Delo pri premagovanju teže je $A = mgh$, kjer je masa $m = 80$ kg, pospešek prostega pada $g = 9{,}81\ ms^{-1}$, h je višina, na katero se bo povzpel možakar, A pa je delo, storjeno s tistimi 4000 kalorijami. Upoštevamo, da je joule $J = kgm^2s^{-2}$ in da je kalorija 1 cal = 4,1868 J, pa izračunamo:

$$h = \frac{A}{mg} = \frac{4000.4{,}1868J}{80kg.9{,}81m/s} = 21\ m.$$

Če upoštevamo še, da gre v resnici velik del energije za normalno delovanje telesa in za njegovo gretje, postane očitno, da bi obravnavani delavec izčrpal vse svoje dnevne zaloge že pri vzpenjanju po stopnicah malo višje hiše.

Kje je napaka, je jasno - namesto kalorij so mišljene kilokalorije. Res je začenši z letošnjim letom kalorija odšla med čevlje, klaftre in atmosfere (v mislih imam stare enote in ne kaj bolj otipljivega). Ampak pomota za faktor 1000 je pa le prehuda, tudi če gre za kuhanje.

Morda, sem si mislil, pa je prevajalec zamenjal kilokalorije s kalorijami, misleč, da madžarska avtorja pač jecljata. Poiskal sem torej dobrih 6 centrimetrov debelo Knjigo za vsako ženo (Orbital Progres, Ljubljana 1974) jugoslovanskih avtorjev in na 161. strani našel pravilno definicijo kalorije, torej množine toplote, ki segreje en gram vode od 14,5°C do 15,5°C. Toda spodaj na isti strani je sumljiv podatek, da daje 1 g čiste maščobe 9,3 kalorije.

Spet sem se lotil računanja, koliko čiste maščobe bi moral osemdesetkilogramec pojesti (pri predpostavki, da bi jo uspel prebaviti), da bi prišel iz Vrat na Triglav, če bi vso energijo porabil le za vzpenjanje.

Delo A bo opravljeno z energijo Mq, kjer je M masa maščobe in q = 9,3 cal/g = 38937J/kg. Torej je:

$$M = \frac{mgh}{q} = \frac{80\text{kg}.9{,}81\text{m/s}^2.1849\text{m}}{38937\text{J/kg}} = 37 \text{ kg}.$$

Kako prav je bilo, da smo maso maščobe označili z veliko črko!

Ves problem je torej v tem, da nekateri ljudje zlahka prenesejo, da je neka stvar tisočkrat prevelika ali premajhna. Kar se pa hujšanja tiče, bom pač malo manj jedel.

Anton Cedilnik

Dana sta veččlenika-polinóma

$$A = x^3 + x^2 - 9x - 9 \quad \text{in} \quad B = (x-2)^2 - (x-4)^2$$

a) Zapiši polinom A in B v obliki produkta in okrajšaj ulomek $\frac{A}{B}$.

b) Pokaži, da je vrednost ulomka A/B parno število, če je $x = 2k + 1$ in k naravno število.

Pavle Zajc

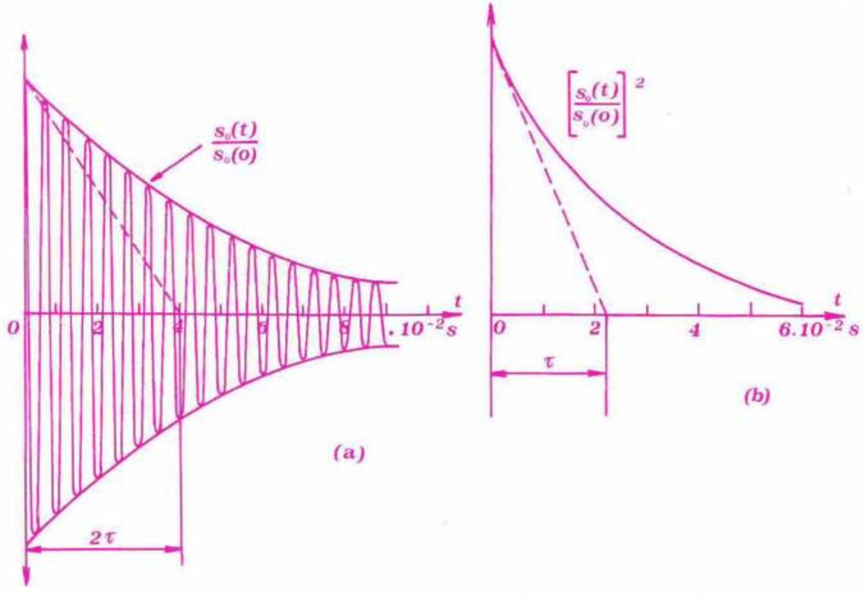
LASTNO NIHANJE IN RESONANCA

Odprite pokrov klavirja, stisnite pedal in zapojte. Oglasila se bo struna z zvokom, ki je podoben vašemu. Če ste zapeli visoko, bo zvok visok, če ste zapeli nizko, pa nizek. Opisani pojav, za katerega ste najbrž že slišali, naj rabi za izhodišče daljšega izleta v fiziko.

Struna je mehanično *nihalo*. Drugo tako nihalo je nihalo na polžasto vzmet. Nihalo, ki ga spravimo iz ravnovesne lege in pustimo, da prosto zaniha, niha sinusno z izbrano frekvenco. To nihanje, katerega frekvenco določajo samo lastnosti nihala, imenujemo *lastno nihanje*, frekvenco pa *lastno frekvenco*. (Nihalo na polžasto vzmet ima eno samo lastno nihanje in eno samo lastno frekvenco, struna pa ima več lastnih nihanj in več lastnih frekvenc.)

Zaradi upora pri lastnem nihanju amplituda, to je največji odmik od ravnovesne lege, pojema. Nihanje je *dušeno*. Količina, ki meri dušenje, je hitro pri roki. Narišimo časovno odvisnost kvadrata amplitude. Kvadrat amplitude in ne amplitudo vzamemo, ker je polna energija nihala sorazmerna s kvadratom amplitude in ker je pač energija vsestransko uporabna količina. Na diagramu določimo čas τ, v katerem bi nihanje zamrlo, če bi ves čas zamiralo tako hitro kot na začetku (sl.1). Čas τ je tem krajši, čim močneje je nihanje dušeno. Temu času recimo *razpadni čas*, čeprav zveni ime na tem mestu nekoliko nenavadno in ga bomo razumeli bolje šele pozneje.

Za bralce, ki radi računajo, povejmo, da pojema amplituda pri dušenem nihanju eksponentno: $s_0(t) = s_0(0)e^{-\beta t}$. Tu je e = 2,718... osnova naravnih logaritmov in β *koeficient dušenja*. Kvadrat amplitude je sorazmeren z energijo, ki pojema takole: $W(t) = W(0)e^{-2\beta t} = W(0)e^{-t/\tau}$. Med koeficientom dušenja in razpadnim časom je torej zveza $\tau = 1/2\beta$. Zapisana enačba za časovno odvisnost polne energije nihala velja v povprečju čez nihajni čas, če je razpadni čas mnogo daljši od nihajnega časa.



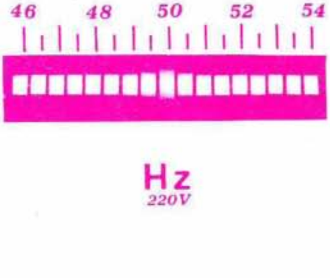
Sl.1 Dušeno nihanje strune: časovna odvisnost amplitude strune (a). Struno izmaknemo iz ravnovesne lege in spustimo. Opazujemo na osciloskopu. Nanj priključimo telefonsko slušalko, ki smo ji odstranili membrano in jo približali struni tako, da se ta giblje ob polih magneta. Iz diagrama za časovno odvisnost kvadrata amplitude dobimo razpadni čas τ(b). Na enak način bi dobili iz diagrama za časovno odvisnost amplitude čas 2τ.

Zdaj povzemimo začetno misel. Nihala ne pustimo prosto nihati, ampak ga motimo od zunaj. Pravimo, da nihalu nihanje vsiljujemo in govorimo o *vsiljenem nihanju*. Nihalu na polžasto vzmet vsiljujemo na primer nihanje tako, da sinusno pozibavamo srednje krajišče vzmeti, struni pa tako, da ji približamo elektromagnet, po katerem teče izmenični tok in ki priteguje železno struno s spreminjajočo se silo, ali z zvokom.

Pri vsiljenem nihanju se zanimamo predvsem za zvezo med amplitudo nihala in frekvenco vsiljenega nihanja. Nihalo navadno miruje, preden mu začnemo vsiljevati nihanje. Nato začne najprej nihati po svoje, z lastno frekvenco, in šele postopoma s frekvenco vsiljenega nihanja. Prehodni pojavi na začetku vsiljevanja so lahko precej zapleteni. Vendar čez čas nihanje z lastno frekvenco zaradi dušenja zamre in nihalo niha s frekvenco vsiljenega nihanja. Tu nam gre le za to nihanje dovolj dolgo po začetku vsiljevanja, ko se amplituda ne spreminja več s časom.

Opazimo, da je amplituda tem večja, čim manj se frekvenca vsiljenega nihanja razlikuje od lastne frekvence. Amplituda je največja, ko sta obe frekvenci enaki. Tedaj je nihalo v *resonanci*. Ime namiguje na to, da se po frekvenci skladata nihanje, ki ga vsiljujemo, in lastno nihanje nihala.

Zdaj razumemo pojav, ki smo ga omenili na začetku. V klavirju se je najmočneje odzvala struna, katere lastna frekvenca je bila najbližja frekvenci našega glasu. Klavir je deloval kot nekakšen merilnik frekvence zvoka. Zares izkoriščamo resonanco za merjenje frekvence (sl.2). Tudi če želimo dobiti nedušeno nihanje, si pomagamo z resonanco. Nihalu, ki bi sicer nihalo dušeno, vsiljujemo nihanje z njegovo lastno frekvenco. Z dovedenim delom krijemo izgubo energije zaradi dušenja. To dosežemo, če nihalo s svojim nihanjem preko posebne naprave krmili samo sebe (sl.3). Velikokrat pa si prizadevamo, da ne bi prišlo do resonance. Zaradi nje se namreč lahko porušijo zgradbe, posebno mostovi (slika na ovitku), in deli strojev.



Sl.2 Merilnik frekvence električnega toka z jezički. Različni jezički imajo različno lastno frekvenco. Najmočneje niha jeziček, katerega lastna frekvenca ustreza frekvenci električnega toka, ki zbuja železne jezičke preko elektromagneta. Amplitude jezičkov dajo vtis o resonančni krivulji.

Sl.3 Nemirka v uri. Nihalo na polžasto vzmet N niha nedušeno. Preko zasunka A in zobatega kolesa S krmili nihalo samo sebe: velika navita polžasta vzmet P požene nihalo, ko gre skozi ravnovesno lego in se giblje najhitreje. Delo, ki ga pri tem prejme nihalo, krije izgubo energije zaradi dušenja.

Narišimo diagram odvisnosti kvadrata amplitude od krožne frekvence vsiljenega nihanja. Kvadrat amplitude vzamemo iz istega razloga kot prej, krožno frekvenco ω, to je z 2π pomnoženo frekvenco, pa zato, da imajo enačbe nekoliko preprostejšo obliko. Zvonasta resonančna krivulja ima vrh pri lastni krožni frekvenci nihala ω_0 (sl.4). Resonanco na kratko označimo z njeno *razpolovno širino* Γ_ω v merilu krožne frekvence. To je polna širina resonančne krivulje na polovični višini v diagramu, v katerem nanašamo na abscisno os krožno frekvenco. Kako ostra je resonanca, pove *relativna širina* Γ_ω/ω_0.

Na Miklavžev dan leta 1825 je stala na nienburškem visečem mostu množica radovednežev, ko je prikorakala čez most vojaška godba. Mrzle noge in masovna psihoza so povzročile, da so pričeli gledalci na mostu poskakovati v ritmu godbe. Most se je zrušil in pri tem je v mrzlih valovih Wesere izgubilo življenje 50 ljudi. - Petindvajset let kasneje je bataljon francoske pehote v lepem pomladanskem dnevu korakal čez 102 m dolg viseči most v Angeršu. Nosilne vrvi in verige so popokale in 236 vojakov je izgubilo življenje v neprijazni strugi reke Maine. Rod pozneje se je o božiču leta 1879 v viharju zrušil lok 3,2 km dolgega mostu čez škotsko reko Tay, ko je vozil čezenj brzi vlak; pri tem so utonili vsi potniki. Da so bile te nesreče dober nauk, je znano, saj prečkajo dandanes vojaki mostove v "mešanem koraku". Navedene skušnje so narekovale oblastem, da so leta 1924 ustavile izredno velik železniški promet na domala 2 km dolgem brooklynskem mostu. Opazili so namreč, da kolesa lokomotiv in vozov ritmično udarjajo ob tirnice in prekomerno zibljejo most.

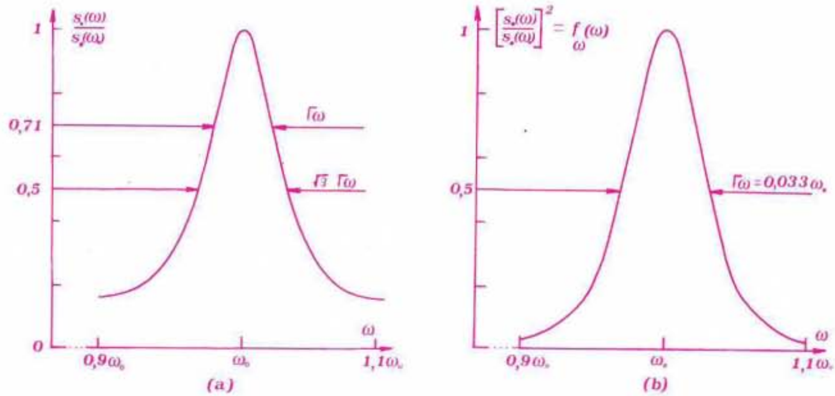
M.Adlešič, *Svet zvoka in glasbe*, MK, Ljubljana, 1964, str. 31

Za bralce, ki radi računajo, povejmo, da podaja resonančno krivuljo, kakor smo jo vpeljali, enačba

$$f_\omega(\omega) = s_0^2(\omega)/s_0^2(\omega_0) = (\Gamma_\omega/\omega_0)^2/\left[(\omega^2/\omega_0^2-1)^2 + \Gamma_\omega^2\omega^2/\omega_0^4\right]$$

ω je krožna frekvenca vsiljenega nihanja, ω_0 lastna krožna frekvenca in $s_0(\omega_0)$ amplituda pri tej krožni frekvenci, to je v resonanci, ko funkcija $f_\omega(\omega)$ doseže največjo vrednost 1.

Polovico največje vrednosti pa doseže pri krožni frekvenci $\omega_0 - \frac{1}{2}\Gamma_\omega$ in $\omega_0 + \frac{1}{2}\Gamma\omega$. Razpolovna širina v merilu krožne frekvence je tedaj $\omega_0 + \frac{1}{2}\Gamma_\omega - (\omega_0 - \frac{1}{2}\Gamma_\omega) = \Gamma_\omega$. To velja samo, če je razpolovna širina mnogo manjša od lastne krožne frekvence in smemo zanemariti kvocient Γ_ω/ω_0 v primeri z 1.



Sl.4 Vsiljeno nihanje strune: odvisnost amplitude strune od krožne frekvence vsiljenega nihanja (a). Nihanje opazujemo in

njegovo amplitudo določamo na osciloskopu kot pri merjenju razpadnega časa, le da zdaj približamo struni droben elektromagnet, ki ga napajamo z izmenično napetostjo s spremenljivo frekvenco. Frekvenco merimo z elektronskim merilnikom frekvence.

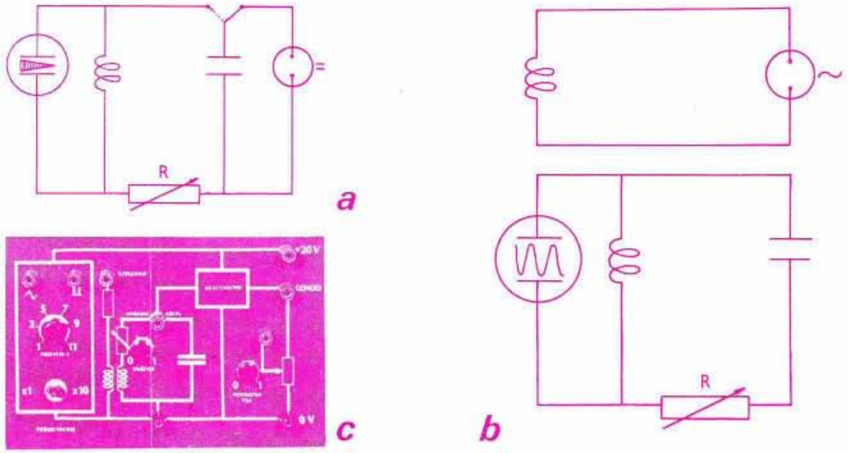
$\omega_0 = 1320\ s^{-1}$ je lastna krožna frekvenca strune.

Kvadrat amplitude strune v odvisnosti od krožne frekvence vsiljenega nihanja (b). Γ_ω je razpolovna širina v merilu krožne frekvence. (Relativna širina $\Gamma_\omega/\omega_0 = 0{,}033$ je majhna v primeri z 1). V odvisnosti amplitude od krožne frekvence bi dobili na enak način $\sqrt{3}\Gamma_\omega$, širino Γ_ω pa dobimo v tej odvisnosti pri $1/\sqrt{2} = 0{,}71$ največje amplitude.

Ali sta količini τ in Γ_ω, od katerih zadeva prva lastno nihanje nihala, a druga vsiljeno nihanje, v kakšni zvezi? Na to vprašanje najlaže odgovorimo z opazovanjem vsiljenega nihanja v nihajnem krogu, ki igra vlogo električnega nihala. Sestavljata ga kondenzator in tuljava. Z vključitvijo upornika z vse večjim uporom lahko preprosto dosežemo vse večje dušenje, torej vse krajši razpadni čas.

Časovni potek napetosti na kondenzatorju nihajnega kroga opazujemo na zaslonu osciloskopa. Najprej nabijemo kondenzator tako, da ga priključimo na izvir enosmerne napetosti. Nato s preklopnikom prekinemo stik z izvirom napetosti in sklenemo nihajni krog (sl.5a). Za nastalo dušeno nihanje ni težko določiti razpadnega časa, če imamo osciloskop, pri katerem poznamo hitrost potovanja pege na zaslonu v vodoravni smeri, se pravi, da vemo, kolikšen čas ustreza enemu delcu skale.

V drugem delu poskusa opazujemo vsiljeno nihanje v nihajnem krogu. Tuljavici nihajnega kroga približamo tuljavo, ki jo napajamo z izmeničnim tokom iz izvira s spremenljivo frekvenco (sl.5b). Izmenični tok po tuljavi ustvari okoli nje nihajoče magnetno polje, ki v tuljavici nihajnega kroga inducira izmenično napetost z enako frekvenco. Pri tem tuljava in tuljavica ne smeta biti preblizu skupaj in med njima ne sme biti železa (kot v transformatorju). Tako dosežemo, da izmenični tok po tuljavici nihajnega kroga ne vpliva nazaj na izvir napetosti in si zagotovimo, da vsiljevanje ni odvisno od frekvence. Najprej poiščemo resonančno krožno frekvenco ω_0, ko je amplituda napetosti na osciloskopu največja. Nato poiščemo večjo in manjšo krožno frekvenco, pri kateri je kvadrat amplitude enak polovici kvadrata največje amplitude (amplituda je tedaj enaka $1/\sqrt{2} = 0{,}71$ največje amplitude). Merjenje poteka hitro, če razpolagamo z elektronskim merilnikom frekvence. Če tega nimamo, moramo frekvenco določiti po periodi nihanja na osciloskopu.



Sl.5 Merjenje razpadnega časa pri lastnem nihanju nihajnega kroga v prvem delu poskusa (a) in merjenje razpolovne širine pri vsiljenem nihanju v nihajnem krogu (b). Nihajni krog, ki ga je za potrebe srednjih šol izdelala visokošolska temeljna organizacija fizika (c). Z njim je mogoče delati opisane poskuse.

Oba dela poskusa ponovimo trikrat: pri najmanjšem, srednjem in večjem dušenju, se pravi brez upora R, s srednjim in z nekoliko večjim uporom. Hitro ugotovimo, da je razpolovna širina tem večja, čim krajši je razpadni čas. Resonanca je tem manj ostra, čim večje je dušenje. Ugotovitev nas napelje na misel, da bi utegnil biti produkt razpolovne širine in razpadnega časa konstanten. Za vse tri primere izračunajmo ta produkt. V vseh treh primerih in še po podatkih za struno se produkt zelo malo razlikuje od 1. Odstopanje od 1 je mogoče pojasniti z nenatančnostjo pri merjenju.

τ	$\Delta\nu$	Γ_ω	Γ_ω/ω_0	$\tau\Gamma_\omega$	
0,0033 s	50 s^{-1}	310 s^{-1}	0,024	1,02	(1)
0,0024	68	430	0,033	1,03	(2)
0,0019	86	540	0,043	1,03	(3)
0,022	7	44	0,033	0,97	(4)

Preglednica: razpadni čas τ, razlika frekvenc $\Delta\nu$, pri katerih je kvadrat amplitude enak polovici kvadrata največje amplitude, razpolovna širina v merilu krožne frekvence $\Gamma_\omega = 2\pi\Delta\nu$, relativna širina Γ_ω/ω_0 in produkt razpadnega časa in razpolovne širine $\tau\Gamma_\omega$ za nihajni krog z najmanjšim (1), srednjim (2) in večjim (3) dušenjem in za struno (4). Lastna frekvenca nihajnega kroga je 2020 s^{-1} in se s povečanim dušenjem zmanjša za kak nihaj na sekundo, tako da je lastna krožna frekvenca za vse tri primere približno $\omega_0 = 2\pi.2020\ s^{-1} = 12\ 700\ s^{-1}$. Lastna frekvenca strune je 210 s^{-1}, tako da je njena lastna krožna frekvenca $\omega_0 = 2\pi.210\ s^{-1} = 1320\ s^{-1}$.

Za manj natančne šolske poskuse je pripraven nihajni krog, ki so ga izdelali na visokošolski temeljni organizaciji fizika za potrebe srednjih šol (sl. 5c). Dušeno nihanje opazujemo na zaslonu osciloskopa, ko vzbujamo nihanje v nihajnem krogu s kratkotrajnimi napetostnimi sunki v daljših enakomernih časovnih razmikih. S preklopom od vzbujanja z napetostnimi sunki na vzbujanje s sinusno napetostjo dosežemo, da se pojavi na zaslonu vsiljeno nihanje. Frekvenco spreminjamo z vrtenjem gumba, izmerimo pa jo z osciloskopom. Približno določimo razpadni čas in razpolovno širino. S spreminjanjem upora v nihajnem krogu lahko ugotovimo, da je resonanca tem ostrejša, čim manjše je dušenje.

Iz merjenj smo tako izluščili enačbo

$$\tau\Gamma_\omega = 1$$

Ta pomembna enačba povezuje razpadni čas, ki zadeva lastnosti nihala pri lastnem nihanju, z razpolovno širino v merilu krožne frekvence, ki zadeva lastnosti nihala pri vsiljenem nihanju.

Enačba je splošna in velja za vse sisteme, ki so zmožni nihanja. Takih sistemov je veliko tudi v svetu atomov.

Atomi in atomska jedra - v njih se gibljejo nabiti delci - lahko sevajo elektromagnetno valovanje z določeno frekvenco. Temu pojavu ustreza lastno nihanje nihala. Na drugi strani pa lahko absorbirajo elektromagnetno valovanje z določeno frekvenco. Temu pa ustreza vsiljeno nihanje. Vzemimo jedro železovega izotopa ^{57}Fe, ki seva elektromagnetno valovanje z valovno dolžino 0,086 nm. Pri tem sevanju namerijo za razpadni čas $0{,}98 \,.\, 10^{-7}$ s. Iz zapisane enačbe sledi v tem primeru za razpolovno širino izsevanega elektromagnetnega valovanja, to je za razpolovno širino ustrezne spektralne črte v merilu krožne frekvence

$$\Gamma_\omega = 1/\tau = 1{,}02.10^7 \ s^{-1}.$$

Vendar na območju kratkovalovne rentgenske svetlobe, kamor sodi navedeno elektromagnetno sevanje, ni mogoče neposredno izmeriti krožne frekvence. Pač pa lahko izmerijo energijo fotona - obroka energije v elektromagnetnem valovanju.

Energija fotona je sorazmerna s frekvenco, sorazmernostni koeficient pa je Planckova konstanta $h = 6{,}6.10^{-34}$ Js, ki je značilna za svet atomov. Energijo fotona izračunamo s krožno frekvenco takole: $W = \hbar\omega$, če uvedemo z 2π deljeno Planckovo konstanto $\hbar = h/2\pi = 1{,}05.10^{-34}$ Js. Enako kot navedemo namesto krožne frekvence energijo fotona, uporabimo namesto razpolovne širine v merilu krožne frekvence razpolovno širino v energijskem merilu Γ_W. Obe razpolovni širini sta v enaki zvezi kot energija in krožna frekvenca

$$\Gamma_W = \hbar\Gamma_\omega$$

Razpadni čas in razpolovno širino v energijskem merilu povezuje enačba

$$\tau\Gamma_W = \hbar$$

ki jo dobimo, če obe strani enačbe $\tau\Gamma_\omega = 1$ pomnožimo s $\hbar$ in upoštevamo prejšnjo zvezo. Za navedeni primer je razpolovna širina v energijskem merilu

$$\Gamma_W = \hbar\Gamma_\omega = 1{,}05.10^{-34}\ \mathrm{Js}.10^7\ \mathrm{s}^{-1} = 1{,}05.10^{-27}\ \mathrm{J} =$$

$$= 1{,}05.10^{-27}\ \mathrm{eV}/1{,}6.10^{-19} = 6{,}6.10^{-9}\ \mathrm{eV},$$

če izrazimo energijo, kot je navada v svetu atomov, z elektronvolti:

$1\ \mathrm{eV} = 1{,}6.10^{-19}\ \mathrm{J}$. V tem primeru je izjemoma mogoče neposredno izmeriti razpolovno širino v energijskem merilu. Izmerjeni rezultat se v okviru natančnosti pri merjenju ujema z izračunanim.

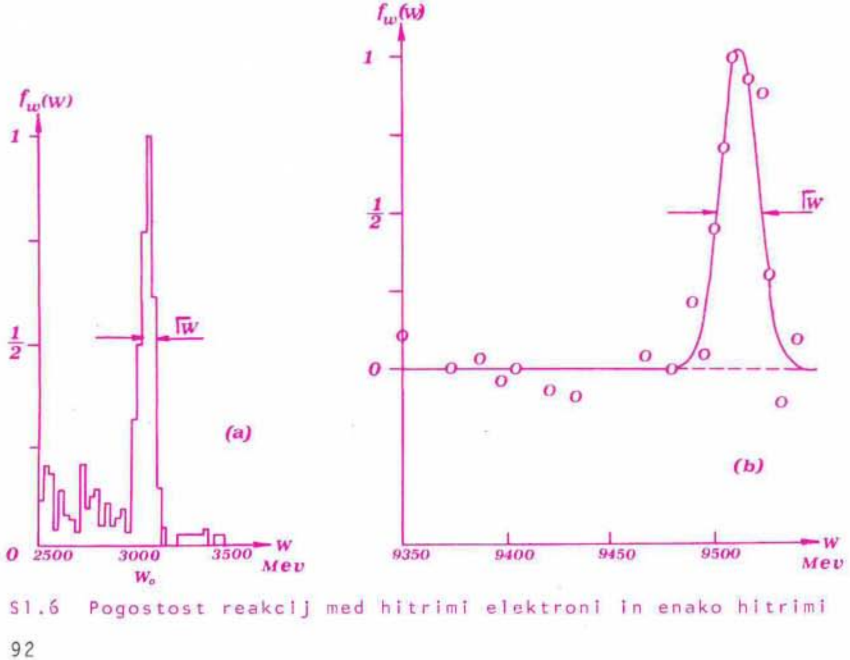
Za vajo izračunajmo energijo fotona, ki ustreza valovni dolžini 0,086 nm. Najprej dobimo za frekvenco $3.10^8\ \mathrm{ms}^{-1}/0{,}086.10^{-9}\mathrm{m} = 3{,}5.10^{18}\ \mathrm{s}^{-1}$, saj je frekvenca enaka hitrosti svetlobe 3.10^8 m/s, deljeni z valovno dolžino. Za krožno frekvenco imamo $2\pi.3{,}5.10^{18}\ \mathrm{s}^{-1} = 2{,}2.10^{19}\ \mathrm{s}^{-1}$ in za energijo fotona $1{,}05.10^{-34}\ \mathrm{Js}.2{,}2.10^{19}\ \mathrm{s}^{-1} = 2{,}3.10^{-15}\ \mathrm{J} = 2{,}3.10^{-15}\ \mathrm{eV}/1{,}6.10^{-19} = 14{,}4.10^3\ \mathrm{eV}$. Relativna širina $\Gamma_\omega/\omega_0 = \Gamma_W/W_0 = 4{,}6.10^{-13}$je v tem primeru mnogo manjša kot pri kakem nihajnem krogu.

Zapisana zveza med razpadnim časom in razpolovno širino velja splošno, ne samo za sevanje elektromagnetnega valovanja. Pri tem je razpadni čas τ povprečni življenjski čas kakega neobstojnega sistema, Γ_W pa ustrezna razpolovna širina v energijskem merilu. Neobstojni sistem je na primer atomsko jedro, ki nastane po jedrski reakciji, ali delec, ki nastane po reakciji med delci.

Razpolovno širino določimo v tem primeru po energijski odvisnosti pogostosti zadevne reakcije. Zdaj je ime razpadni čas upravičeno, saj meri ta čas, kako hitro delci v povprečju razpadajo.

Razpadnega časa delcev, ki je precej krajši od 10^{-10} s, ne moremo neposredno izmeriti.
Delec, ki ima razpadni čas 10^{-10}s in ki se giblje skoraj s hitrostjo svetlobe, naredi med nastankom in razpadom v povprečju pot 3.10^{8} $ms^{-1}.10^{-10}$ s = 3 cm. Take delce lahko opazujejo in ugotavljajo njihov razpadni čas po dolžini sledi v mehurčni celici. V njej zapustijo med točko, v kateri nastanejo, in točko, v kateri razpadejo, okoli 3 cm dolgo sled mehurčkov. Pri desetkrat krajšem razpadnem času pa je ta sled tako kratka, da je ni mogoče zanesljivo opazovati. Tolikšen ali še krajši razpadni čas lahko edino izračunamo iz enačbe $\tau = \hbar/\Gamma_W$. Razpolovno širino dobimo na znani način iz odvisnosti za pogostost reakcij v diagramu, v katerem nanašamo na abscisno os energijo.

Zelo kratkožive delce odkrivajo tedaj po zvonastih izboklinah v energijski odvisnosti za pogostost reakcije. Takim delcem pravijo pogosto kar resonance. Za zgled navedimo delec ψ/J in delec Υ, ki imata sorazmerno precej dolg razpadni čas (sl.6).



Sl.6 Pogostost reakcij med hitrimi elektroni in enako hitrimi

pozitroni, pri katerih nastanejo drugi delci. Na abscisno os je nanesena skupna polna energija elektrona in pozitrona. Zvonasta izboklina pri energiji 3097 MeV (1 MeV = 10^6 eV) z razpolovno širino 0,063 MeV priča o nastanku (in razpadu) delca ψ/J z lastno energijo 3097 MeV in razpadnim časom $\tau = \hbar/\Gamma_W = 1{,}0.10^{-20}$s (a), zvonasta izboklina pri energiji 9460 MeV s približno enako razpolovno širino pa o nastanku delca Υ (ipsilon - v grški abecedi) s približno enakim razpadnim časom (b).

Pravi razpolovni širini sta manjši od razpolovnih širin na risbah, h katerima prispeva tudi ločljivost merilne naprave. Najnovejša merjenja kažejo, da ima delec Υ manjšo razpolovno širino 0,040 MeV in daljši razpadni čas okoli $1{,}64.10^{-20}$s. V tem primeru je relativna širina $\Gamma_W/W_0 = 4.10^{-6}$.

Za bralce, ki radi računajo, navedimo obliko resonančne krivulje v energijski odvisnosti pri jedrskih reakcijah in reakcijah med delci:

$$f_W(W) = (\tfrac{1}{2}\Gamma_W)^2/[(W - W_0)^2 + (\tfrac{1}{2}\Gamma_W)^2]$$

Funkcija ima največjo vrednost 1 pri energiji $W = W_0$. Polovično vrednost doseže pri energiji $W_0 - \frac{1}{2}\Gamma_W$ in $W_0 + \frac{1}{2}\Gamma_W$, tako da je razpolovna širina $W_0 + \frac{1}{2}\Gamma_W - (W_0 - \frac{1}{2}\Gamma_W) = \Gamma_W$. Pri dovolj majhni relativni širini Γ_W/W_0 se krivulja v bližini vrha ne razlikuje od krivulje $f_\omega(\omega)$.

Janez Strnad

Rešitev naloge s strani 81.

a) $A = (x+1)(x-3)(x+3)$, $B = 4(\ -3)$, $\frac{A}{B} = \frac{(\ +1)(\ +3)}{4}$

b) $\frac{A}{B} = (k+1)(k+2)$; Produkt dveh zaporednih naravnih števil je vedno parni.

Pavle Zajc

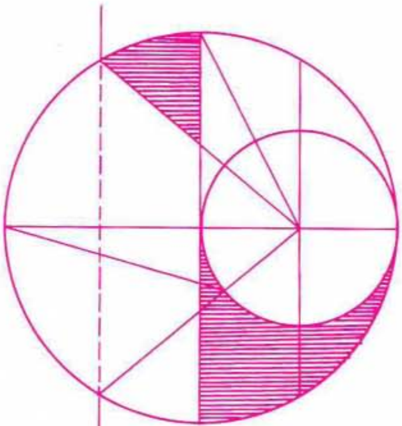
PISMA BRALCEV

KAKO SO NEKOČ RAVNALI Z MATEMATIKI

V Justinijanovem zakoniku, ki so ga objavili 533. leta, piše o "zločincih, matematikih in njim podobnih". V tem zakoniku se glasita dva člena:

"Ars autem mathematica damnabilis interdicta est."
(Matematika je pod kaznijo prepovedana.)

"Nemo haruspicem consulat aut mathematicum."
(Nihče naj ne prosi vedeževalca ali matematike za svet.)



ŽIVEL JUSTINIJAN

Breda Velkovrh

Spoštovano DMFA SR Slovenije

Sem strasten reševalec fizikalnih nalog in rešujem tudi naloge z republiških in zveznih tekmovanj, ki so objavljene v Presekih. Večino nalog hitro rešim, nikakor pa ne morem rešiti naloge za 3. razred z republiškega tekmovanja mladih fizikov v Novi Gorici leta 1980.

Jeklen trak s pravokotnih profilom in dimenzijami 2mm x 0,5 mm položimo na led in pritisnemo tako močno, da je tlak pod trakom

$10^6 N/m^2$. Nastane pojav regelacije - trak se začne pogrezati v led, ker se pod njim tali voda, nad njim pa spet zmrzne. Oceni, s kolikšno hitrostjo leze trak v led! Toplotna prevodnost jekla je 45,4W/mK, tališče vode pri tlaku $10^6 N/m^2$ pa je $-0,1^oC$.

Nalogo sem nekako rešil, vendar sem pri tem moral upoštevati še nekatere podatke iz tabel in sem dobil vrednost za hitrost okrog 1/2 mm/min. Ker pa z rešitvijo nisem zadovoljen, vas prosim, če mi lahko pošljete rešitev naloge, saj je v DMFA mnogo fizikov, ki bodo pripravljeni in bodo znali rešiti to nalogo.

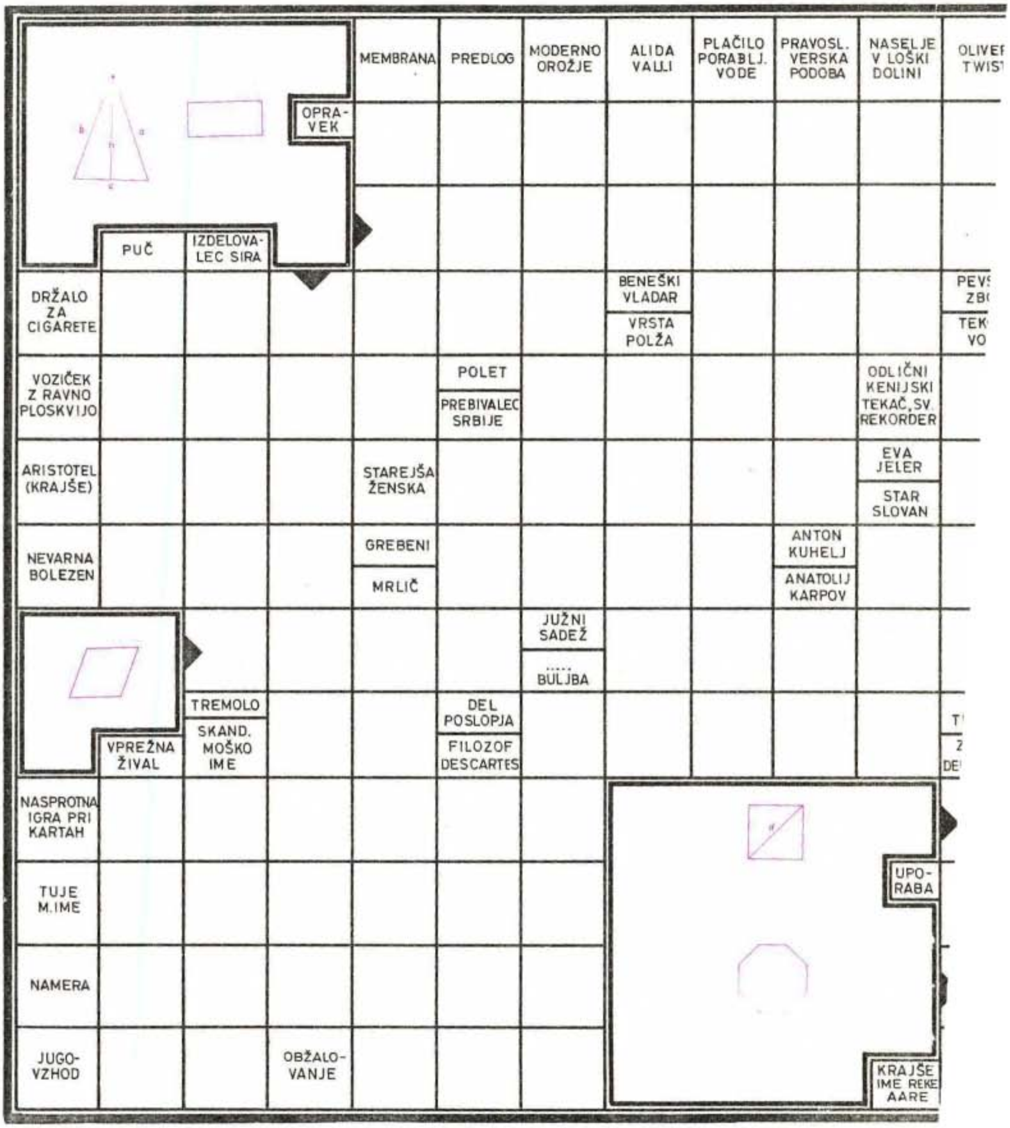
Kokol Miran

Mirana Kokola zanima rešitev naloge, ki so jo reševali tekmovalci 3. razreda na republiškem tekmovanju iz fizike v Novi Gorici leta 1980.

Da bomo znali rešiti nalogo, si moramo najprej ustvariti sliko o poteku pojava. V Preseku smo že pisali o tem (P VII/3, str.191). V stacionarnem stanju se stali pod trakom ravno toliko vode na enoto časa, kot se je nad njim strdi. Temperatura ledu in vode nad trakom je enaka 0^oC, temperatura ledu in vode pod trakom pa je enaka $-0,1^oC$. Talilna toplota, ki jo odda voda pri strjevanju, se pretaka skozi trak in se sproti porablja za taljenje ledu pod trakom. Toploto, ki jo porabi voda, da se segreje za 0,1 K od temperature tališča pod trakom do temperature tališča nad trakom, lahko v svojem razmišljanju zanemarimo.

Označimo z λ toplotno prevodnost traku, z d debelino traku, z ΔT razliko temperatur nad trakom in pod njim, s q_t talilno toploto vode in z ρ gostoto ledu. Zaradi lažjega razmišljanja uvedimo še dolžino traku a in širino traku b. V izbranem času dt se po traku pretoči toplota $dQ = \lambda(\Delta T/d)ab\,dt$. Plast ledu z de-

(nadaljevanje na str. 98)


MEMBRANA
PREDLOG
MODERNO OROŽJE
ALIDA VALLI
PLAČILO PORABLJ. VODE
PRAVOSL. VERSKA PODOBA
NASELJE V LOŠKI DOLINI
OPRA-VEK
PUČ
IZDELOVA-LEC SIRA
DRŽALO ZA CIGARETE
BENEŠKI VLADAR
VRSTA POLŽA
VOZIČEK Z RAVNO PLOSKVIJO
POLET
PREBIVALEC SRBIJE
ODLIČNI KENIJSKI TEKAČ, SV. REKORDER
ARISTOTEL (KRAJŠE)
STAREJŠA ŽENSKA
EVA JELER
STAR SLOVAN
NEVARNA BOLEZEN
GREBENI
MRLIČ
ANTON KUHELJ
ANATOLIJ KARPOV
JUŽNI SADEŽ
..... BULJBA
TREMOLO
DEL POSLOPJA
VPREŽNA ŽIVAL
SKAND. MOŠKO IME
FILOZOF DESCARTES
NASPROTNA IGRA PRI KARTAH
TUJE M.IME
UPO-RABA
NAMERA
JUGO-VZHOD
OBŽALO-VANJE
KRAJŠE IME REKE AARE

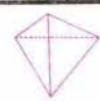
PRITISK
GOVORNIK
PREBIVALEC ATIKE
PANČEVO
PISATELJICA PEROCI
IZRASTEK V USTIH

NARODNI KOMITE OSVOBOD. JUGOSLAVIJ.
NAELEKTR. DELEC

AVION

ŠKI / OR
OČA / DA
OČKA
ZAČETNI ČRKI ABEC.
PROVINCA V SEVERNI ŠPANIJI

PREPROSTA STAVBA
UDELEŽENEC ALKE



ZORANA ZEMLJA
GALIJ
ZIMSKA JABOLKA
TUJA POVR. MERA

TRAVNATO OBMOČJE
SESTAVIL: PAVLE GREGORC
LOVRO KUHAR
UP
ZAŠČITNIK

TABORIŠČE
POŠKODBA MOŽGAN
STOLETJE

ALJA / KAČEVA
ADNJI / LADJE
Ž. IME
SKAND. M. IME
SVETLO ANGL. PIVO

POKAŽI "PRESEK" PRIJATELJU!
TURČIJA
SPODNJI DEL POSODE

DOKTOR
OPUS
PREDLOG
TONE TOMŠIČ
KARLOVAC

VRSTA ELEKTRONKE

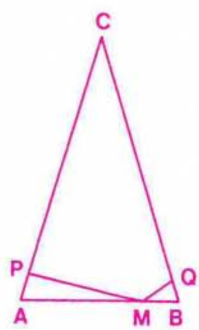
belino dz, ki se stali v tem času, pa porabi toploto $dQ_t =$ $= \rho abq_t\, dz$. Po naši predstavi je $dQ = dQ_t$, torej $\lambda(\Delta T/d)ab\, dt = \rho abq_t\, dz$. Hitrost pogrezanja traku je iz tega $v = dz/dt = \lambda\Delta T/\rho dq_t$. S podatki iz naloge dobimo v = 1,77 mm/min. Sestavljalci so pustili v nalogi odvečni podatek o širini traku, pozabili pa so navesti gostoto ledu ρ = 0,92 g/cm in talilno toploto ledu q_t = 334 kJ/kg.

M.Hribar

NALOGE BRALCEV

5. Iz poljubne točke M osnovnice AB enakokrakega trikotnika ABC spustimo pravokotnici MP in MQ na kraka. Dokaži, da je vsota pravokotnic enaka višini na krak!

Dragoljub M. Milošević



TEKMOVANJA - NALOGE

IZBRANE NALOGE ZA UČENCE VIŠJIH RAZREDOV OSNOVNIH ŠOL

5. razred

1. Ali je mogoče, da je število 587 804 produkt dveh zaporednih naravnih števil?

2. Kolika je vsota vseh naravnih števil od 1 do 1982?

3. Reši naslednjo enačbo le na osnovi lastnosti računskih operacij!

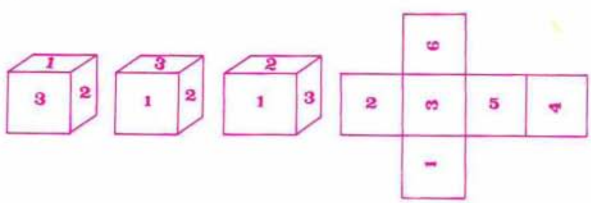
$$(((10.x + 6) : 9).10 + 7):13 = 19$$

4. Z dvema premicama razdeli poljubni štirikotnik na dva trikotnika in dva petkotnika!

5. Nariši krožnico $k(S, r = 3\ \text{cm})$ in mimobežnici p in q. Nato nariši vse tangente na krožnico k, tako da bodo le-te vzporedne z mimobežnicama p in q!

6. Na zborovanju je glasovalo vseh 180 prisotnih krajanov. Predlog, o katerem so glasovali, je bil sprejet z 18 glasovi večine. Koliko zborovalcev je glasovalo za predlog in koliko jih je bilo proti predlogu?

7. Na sliki so narisane tri kocke in mreža kocke. Kateri kocki ustreza dana mreža?



8. Razporedi 12 luči (lestenec) v 6 vrst, tako da bodo v vsaki vrsti po 4 luči!

6. razred

1. Napiši najmanjše šestmestno število, ki je deljivo z 9, tako da bo prva cifra 6, ostale cifre pa različne!

2. Če števili 4373 in 826 delimo z enakim številom, dobimo ostanek 8 oziroma 7. Kolik je deljitelj?

3. Zapiši, ne da deliš, ostanke deljenja:
   a) števil 728 1429 7434 8091
      s številom 4
   b) števil 407 5274 8011 3003
      s številom 9

4. Na mesto zvezdic vstavi take cifre, da bo število
   a) 16*376 deljivo s 36
   b) 35*55 deljivo s 15
   c) 5*5624 deljivo s 24
   d) 1*7312 deljivo z 18

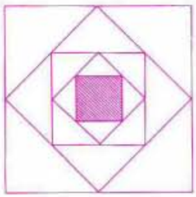
5. Primerjaj velikostni odnos števil, če $n \in N$
   a) $\frac{a}{3}$ in $\frac{a}{5}$ b) $\frac{5}{a}$ in $\frac{3}{a}$ c) $\frac{a}{a+1}$ in $\frac{a+1}{a}$

6. Uredi po velikosti naslednja števila:
   a) $\frac{b}{7}, \frac{b}{3}, \frac{b}{9}, \frac{b}{4}$; $b \in N$
   b) $\frac{3}{a}, \frac{3}{b}, \frac{3}{c}$; $a,b,c \in N$

7. Poišči vse ulomke z enomestnim števcem, ki so večji od $\frac{4}{5}$ in manjši od $\frac{9}{10}$.

8. Kako se spreminja ulomek $\frac{a-1}{a}$, če a narašča? ($a \in N$)

9. Ploščina večjega kvadrata je 144 mm^2. Kolika je ploščina najmanjšega kvadrata? (slika)



7. razred

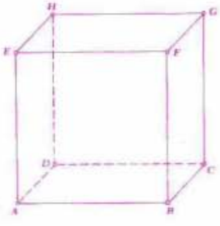
1. Izpelji obrazec za ploščino romba, če je dana stranica a in kot 30°!

2. Kot $22^{\circ}30'$ razdeli s pomočjo šestila in ravnila na tri enake dele!

3. O trapezu $ABCD$ vemo tole:
   $\overline{CD} = 3$ cm, $\overline{AB} = 6$ cm, $\sphericalangle BAC = 45^{\circ}$, $\sphericalangle BAD = 90^{\circ}$
   Nariši trapez in izračunaj njegovo ploščino!
   (brez merjenja)

4. Trapezu $ABCD$ nariši obe diagonali s sečiščem S.
   Dokaži, da sta ploščini trikotnika ASD in trikotnika BSC enaki!

5. Geometrijsko telo kocko omejujejo sami kvadrati. Zapiši vse različne vektorje, ki imajo svoja krajišča v ogliščih tega telesa!



6. Določi množico celih števil a, ki zadoščajo neenačbam:
   $\frac{2}{5} < \frac{a+7}{6} < \frac{5}{3}$

8. razred

1. a) Poišči tretji koren izraza
   $(38\frac{3}{8} + 4\frac{1}{2})b^3y^6$
   b) Izračunaj $(\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 + 2\sqrt{5}})^2$
   (Uberi najkrajšo pot!)

2. Katera trojica števil predstavlja stranice pravokotnega trikotnika?
   a) $(\frac{3}{4}, 1, 1\frac{1}{4})$ b) $(10, 24, 26)$ c) $(1{\cdot}4, 4{\cdot}8, 5{\cdot}0)$

3. Poišči vsa naravna števila p in n, ki zadoščajo enačbi
   $2np - p(n+1) = 18$!

4. Ali število 101010 lahko zapišemo kot razliko kvadratov celih števil? Obrazloži!

5. Nariši enakostranični trikotnik z obsegom $9\sqrt{2}$ cm!

6. Samo s pomočjo šestila včrtaj v dano krožnico kvadrat. (Rešitev je, če poiščeš oglišča kvadrata).

7. V trikotniku ABC so dane vse tri stranice
$AB = c = 14$ cm, $BC = a = 13$ cm, $AC = b = 15$ cm.
Izračunaj njegovo ploščino!

8. Premica (M,N) deli pravokotni trikotnik na dva ploščinsko enaka dela ((M,N) je pravokotna na hipotenuzo). Določi razdaljo premice od vrha manjšega ostrega kota, če meri daljša kateta 20 cm!

9. V enakokrakem trikotniku ABC je včrtana krožnica, ki se dotika kraka v točki E, tako da je razmerje $CE : EA = 7 : 5$. Poišči razmerje kraka in osnovnice!

Rešitve nalog bodo v naslednji številki PRESEKA!

Pavle Zajc

TEKMOVANJE MLADIH VEGOVCEV NA REPUBLIŠKEM TEKMOVANJU 1980/81

Letos so prvič tekmovali na republiškem tekmovanju vsi tisti sedmošolci, ki so na občinskem tekmovanju dosegli od 20 do 25 možnih točk; teh je bilo 40.

Odločitev republiške komisije je bila povsem upravičena, saj so se prav sedmošolci odlično odrezali na zveznem tekmovanju v Palah. Sedmošolci, skupaj z osmošolci, so tekmovali v soboto 23. maja 1981. Kar 75 % udeležencev je prejelo zlato Vegovo priznanje. Uspeh je razumljiv, saj so bili izbrani med izbranimi.

UVRSTITEV SEDMOŠOLCEV

I.	nagrada:	KRANJEC Matevž, o.š. P.Voranc, Ljubljana,
		BABČIČ Jože, o.š. D.Bajc, Vipava,
II.	nagrada:	KOKOL Damjana, o.š. P.Kavčič, Škofja Loka,
III.	nagrada:	ROLA Beno, o.š. Fr.Rozman-Stane, Maribor,

INDIHAR Mojca, o.š. Fr.Rozman-Stane, Maribor, PEHANI Peter, o.š. P.Voranc, Ljubljana, ZUPANC Klemen, o.š. Prešernove brigade, Železniki, GALIČIČ Mirjana, o.š. I.Tavčar, Gorenja vas nad Škofjo Loko, RITLOP Sandi, o.š. P.Voranc, Maribor, GORNIK Davor, o.š. B.Ilich, Maribor, PETERNELJ Suzana, o.š. Spomenik NOB, Cerkno, MARINČEK Jože, o.š. Ljubljana-Vič, KORŠIČ Dragica, o.š. Dornberk, GABRIJELČIČ Primož, o.š. D. Kumar, Ljubljana, KOS Jurij, o.š. H.Smrekar, Ljubljana, NEDELJKOVIĆ David, o.š. B.Vinter, Zreče, JURKOVIČ Ivan, o.š. V.Šmuc, Izola, BEDRAČ Leon, o.š. I.Tavčar, Gorenja vas nad Škofjo Loko, LAVRIČ Leon, o.š. S.Žagar, Kranj, PAŽIN Dragan, o.š. I.Cankar, Vrhnika, BLAŽIČ Leon, o.š. I.Rob, Šempeter pri Novi Gorici, TERŠEK Metka, o.š. Fr.Rozman-Stane, Maribor, KLEMENČIČ Janez, o.š. L.Seljak Kranj, HOVNIK Peter, o.š. Fr.Vrunč, Slovenj Gradec, MIKLAVČIČ Marko, o.š. R.Jakopič, Ljubljana, RUPNIK Tanja, o.š. D.Kumar, Ljubljana, ŽAGAR Vesna, I.Tavčar, Gorenja vas nad Škofjo Loko, MANFREDA Radojka, o.š. M.Štrukelj, Nova Gorica, ŠAREC Samo, o.š. P.Voranc, Ljubljana.

<u>Naloge</u>:

7. razred

1. Peter naj bi prinesel iz trgovine za 50 din krompirja. Krompir pa se je podražil za 25 %. Za kolik % manj krompirja je dobil Peter, kot je pričakoval?

2. Dan je veččlenik: $P(x) = 4x^4 + x^3 + 8x^2 + x + 4$. Pokaži, da je vrednost veččlenika za vsak $x \in N$ sodo število.

3. Poišči najmanjše naravno število, s katerim moramo pomnožiti število 2520, da dobimo kvadrat nekega naravnega števila.

4. Tangenti iz točke T, ki leži izven kroga, razdelita krožnico k na dva loka. Kolikšen kot oklepata tangenti, če je krajši od teh dveh lokov $\frac{3}{10}$ krožnice k?

5. Točka O je središče trikotniku ABC včrtanega kroga. Premica skozi O, ki je vzporedna stranici BC, seče daljico AB v točki P in daljico AC v točki Q.
Dokaži, da je: $PQ = BP + QC$

8. razred

1. Poenostavi ulomek $\frac{(x-3y)^2-(x-2y)^2}{x^2 - (x-y)^2}$ in ugotovi, pri katerih vrednostih spremenljivk x in y ulomek nima pomena.

2. Pri katerih vrednostih spremenljivk a, b, c ima veččlenik

$$P = a^2 + b^2 + c^2 - 10a - 14b + 75$$

najmanjšo vrednost?

3. V pravokotni trikotnik s katetama a in b včrtamo kvadrat, tako da sta dve njegovi stranici na katetah, eno oglišče pa na hipotenuzi trikotnika. Izračunaj razmerje ploščin trikotnika in kvadrata!

4. Kvadratu s stranico a včrtamo krog K. Potem včrtamo v kvadrat štiri kroge, tako da se vsak od njih dotika kroga K in dveh stranic kvadrata. Izračunaj polmere krogov.

5. Osnovna ploskev kvadra je kvadrat s stranico a. Če sečemo kvader z ravnino, ki gre skozi osnovni rob in oklepa z osnovno ploskvijo kot 30°, dobimo telesi, katerih prostornini sta v razmerju 1:2.
Izračunaj prostornino kvadra!

Od 211 tekmovalcev na republiškem tekmovanju, je 65 osmošolcev prejelo zlato Vegovo priznanje.

UVRSTITEV

I. nagrada: ŠUŠTERŠIČ Janez, o.š. R.Jakopič, Ljubljana, DRNOVŠEK Roman, o.š. C.Golar, Škofja Loka,
III. nagrada: KOSELJ Marko, o.š. Žirovnica, PETERNELJ Irena, o.š. Spomenik NOB Cerkno, MIKLAVČIČ Dragan, o.š. Spomenik NOB Cerkno, BIASIZZO Toni, o.š. Postojna, ŠEMROV Dejan, o.š. M. Štrukelj, Nova Gorica, PODGORNIK Aleš, o.š. V.Šmuc, Izola, BAJŽELJ Marija, o.š. L.Seljak, Kranj, GOASTIČ Samo, o.š. M. Vrhovnik, Ljubljana, GORŠE Dušan, o.š. Zbor odposlancev, Kočevje, BOGATAJ Alojz, o.š. I.Tavčar, Gorenja vas nad Škofjo Loko, KAVČIČ Stanko, o.š. Horjul, HORVAZ Vlado, o.š. S.Klavora, Maribor, ROBBA Severin, o.š. M.Štrukelj, Nova Gorica, ZUPANČIČ Metka, o.š. Trbovlje, POKORN Marko, o.š. M.Vrhovnik, Ljubljana, KOMLOŠI Leon, o.š. Spomenik NOB, Cerkno, NUSDORFER Janja, o.š. D.Bajc, Vipava, JANEŽIČ Mojca, o.š. Fr.Prešeren, Kranj, KOREN Aleš, o.š. M.Vrhovnik, Ljubljana, ULAGA Helena, o.š. T.Čufar, Ljubljana, GANTAR Gregor, o.š. Z.Runko, Ljubljana, TAVČAR Jože, o.š. Prešernova brigada, Železniki, TUŠAR Mihaela, o.š. Spomenik NOB, Cerkno, ŽGALIN Iztok, o.š. R.Jakopič, Ljubljana, KONDIČ Jelka, o.š. P.Kavčič, Škofja Loka, BENKO Igor, o.š. S.Šlander, Maribor, ERAJVC Igor, o.š. S.Šlander, Maribor, KAVČIČ Vasja, o.š. Fr.Bevk, Tolmin, KODRIČ Sandi, o.š. V.Vodnik, Ljubljana, ARZENŠEK Jure, o.š. Slo-

venske Konjice, TREBŠE Rihard, o.š. V.Šmuc, Izola, TISNIKAR Vili, o.š. D.Bordon, Koper, JAKOVAC Flori, o.š. D.Bordon, Koper, JAKLEVIČ Matjaž, o.š. M.Jarc, Črnomelj, MOKOTAR Alenka, o.š. M.Toledo-Pintar, Velenje, JEREBIC Izidor, o.š. Heroj Bračič, Tržič, ŠKARABOT Martin, o.š. Prule, ŠIRCA Peter, o.š. Trnovo, Ljubljana, PLANINA Andrej, o.š. P.Voranc, Ljubljana, LUKAČ Renato, o.š. Beltinci, ROŽMAN Sergej, o.š. L. Seljak, Kranj, LEP Katka, o.š. Fr.Rozman-Stane, Maribor, VIŠNAR Gregor, o.š. Oplotnica, STOJIĆEVIĆ Milan, o.š. Fr. Osojnik, Ptuj, RUTAR Primož, o.š. B.Ilich, Maribor, OGRIN Tadeja, o.š. B.Bistrica, HVALICA Andrej, o.š. Ledina, Ljubljana, STRLE Sašo, o.š. R.Jakopič, Ljubljana, BOLČINA Marjan, o.š. B.Kidrič, Ajdovščina, BRATAŠEVEC Sandi, o.š. M.Štrukelj, Nova Gorica, AČKO Denise, o.š. Hrvatini, MARAŠEK Gordana, o.š. D.Bordon, Koper, DOLENC Damjan, o.š. P.Kavčič, Škofja Loka, BREZOVAR Matjaž, o.š. K.Rupena, Novo mesto, MENCEJ Alenka, o.š. P.Voranc, Ljubljana, DOLNIČAR Danica, o.š. K.Destovnik-Kajuh, Ljubljana, PANGERC Helena, o.š. J.Broz-Tito, Predoslje, PAPIĆ Magda, o.š. Karavnških kurirjev, Jesenice, DOLENŠEK Marko, o.š.P.Voranc, Jesenice, JUVAN Martin, o.š. E. Kardelj, Ljubljana-Polje, PRIMC David, o.š. C.Kosmač, Piran, SRABOTIČ Robert, o.š. D.Bordon, Koper, ŠTOKA Borut, o.š. J. Premrl-Vojko, Koper.

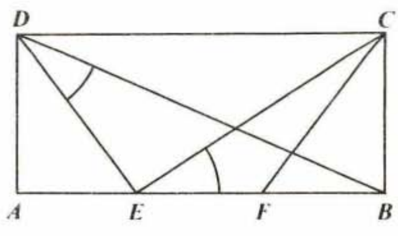
Na prijetnem sprejemu s srednješolci, ki ga prireja vsako leto DMFA SR Slovenije in Republiški komite za vzgojo in izobraževanje ter telesno kulturo, so nagrajenci prejeli lepa knjižna darila.

Učenci-osmošolci, razvrščeni od prvega do osemnajstega mesta, so se udeležili letne šole za mlade matematike, BLED - 81.

Pavle Zajc

NALOGE BRALCEV

Če v pravokotniku $ABCD$ velja $AB = 3 \cdot BC$ in $AE = EF = FB$ (glej sliko), tedaj je $\sphericalangle CEF = \sphericalangle BDE$. Dokaži!



Dragoljub M. Miloševič
prev. Peter Petek

25. REPUBLIŠKO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV IZ MATEMATIKE V LJUBLJANI 4. APRILA 1981

"Ker vemo, kako znanje matematike človeka usposablja za težka in pomembna dela, je naša skrb v veliki meri posvečena prav temu predmetu", je dejala v pozdravnem govoru na otvoritvi 25. republiškega tekmovanja iz matematike prof. M.Pavškova, ravnateljica I. gimnazije v Ljubljani, ki je bila letos organizator in gostitelj tekmovanja.

Ing. J. Špiler je kot predstavnik pokrovitelja tekmovanja DO Delta menil, da se Slovenci lahko zanašamo predvsem na svojo zdravo kmečko pamet, ki je vredna več od naravnih bogastev. Po vzpodbudnih besedah predstavnika občinske skupščine občine Ljubljana-Bežigrad mag. Olupa je predsednik tekmovalne komisije dr. E. Zakrajšek odprl tekmovanje. Po tem uvodu so tekmovalci sproščeni in z upi odšli v razrede, kjer so jih že čakale tekmovalne naloge. Da je bil čas za reševanje nalog skopo odmerjen, lahko uvidijo tudi bralci Preseka, če se bodo sami lotili nalog. Naloge pa so bile take:

Naloge za I. razred

1. Dokaži, da tvorijo od 1 različna realna števila z operacijo

   $a \circ b = a + b - ab$

   grupo!

2. Poišči vsa naravna števila n, za katera je število

   $n^2 + 1981$

   popoln kvadrat!

3. Na enem kraku kota z vrhom O ležita točki A in B, na drugem kraku pa točki C in D. Daljici AD in BC se sekata v točki T. Izračunaj razmerji $\overline{TA} : \overline{TD}$ in $\overline{TB} : \overline{TC}$, če je $\overline{OB} = 2\overline{OA}$ in $\overline{OD} = 3\overline{OC}$!

4. Kosci so pokosili dva travnika. Zjutraj so vsi začeli kositi na prvem travniku, opoldne pa se jih je polovica preselila na drugi travnik. Zvečer je bil prvi travnik pokošen,

na drugem pa je ostalo dela za enega kosca še za ves naslednji dan. Koliko je bilo koscev, če je bil prvi travnik dvakrat tolikšen kot drugi?

Naloge za II. razred

1. Poišči vse rešitve enačbe
$$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 4$$

2. Naj bosta a in b kompleksni števili. Dokaži: če je $|a| = |b| = 1$, je število
$$(a + b)/(1 + ab)$$
realno!

3. V trikotniku ΔABC načrtaj vzporednico EF s stranico AB, tako da bo točka E ležala na stranici AC, točka F na stranici BC, in da bo
$$\overline{CE} = \overline{FB}$$

4. Nad katetama in hipotenuzo pravokotnega trikotnika ΔABC s pravim kotom pri C narišemo kvadrate. Središči kvadratov nad katetama označimo z S_1 in S_2, središče kvadrata nad hipotenuzo pa z S_3.
Pokaži, da je daljica $\overline{S_1S_2}$ pravokotna na daljico $\overline{S_3C}$!

Naloge za III. razred

1. Dokaži, da enačba
$$x^{26} - x^{21} + x^{18} - x^3 + 1 = 0$$
nima realnih korenov!

2. Poišči vse rešitve enačbe
$$\sqrt[3]{9 + 6\sin x + \sin^2 x} + 4\sqrt[3]{25 - 10\sin x + \sin^2 x} - 5\sqrt[3]{15 + 2\sin x - \sin^2 x} = 0$$

3. Naj bosta x in y realni števili. Dokaži: če je $|x| < 1$ in $|y| < 1$, je
$$|x - y| < |1 - xy|$$

4. Poišči najmanjša tri različna naravna števila, ki morejo biti višine nekega trikotnika! (Najmanjša trojica je tista, pri kateri je največje število najmanjše.)

Naloge za IV. razred

1. Izračunaj vsoto neskončnega geometrijskega zaporedja, če veš, da je vsota prvega in četrtega člena 36, vsota drugega in tretjega člena pa 24!

2. V kvadratu s stranico a narišemo manjši kvadrat, tako da imata skupno središče in vzporedne stranice. Krajišči vsake stranice manjšega kvadrata zvežemo z razpoloviščem bližnje vzporedne stranice večjega kvadrata (glej sliko!). Tako izrežemo iz večjega kvadrata plašč pokončne štiristrane piramide. Kolikšna naj bo stranica manjšega kvadrata, da bo prostornina piramide največja?

a

3. Naj bo d premer trikotniku včrtanega kroga, a, b in c pa njegove stranice. Dokaži, da za vsak trikotnik velja

$$a^{-2} + b^{-2} + c^{-2} \leqslant d^{-2}$$

Kdaj velja enačaj?

4. Na obeh bregovih reke stoje mesta. Iz vsakega mesta vodi pet (dvosmernih) trajektnih linij v pet različnih mest na nasprotnem bregu reke. Pravimo, da je mesto B povezano z mestom A, če vozi med njima trajekt. Pravimo, da je mesto B dosegljivo iz mesta A, če je mogoče priti iz A v B samo s trajekti (z morebitnim prestopanjem).
Znano je, da je vsako mesto dosegljivo iz vsakega drugega.
   1. Dokaži, da je na obeh bregovih isto število mest!
   2. V mestu M je izbruhnila kuga, zato je uprava ukinila vseh pet linij, ki so mesto M povezovale z nasprotnim bregom. Naj bosta A in B poljubni dve izmed petih mest, ki so bila pred epidemijo povezana z mestom M. Dokaži, da je mesto B še vedno dosegljivo iz mesta A!
   3. Dokaži, da je kljub kugi vsako mesto (razen M) dosegljivo iz vsakega drugega mesta (razen M)!

Po tekmovanju in kosilu so si četrtošolci ogledali studije RTV Ljubljana, tretješolci Meteorološki zavod, drugošolci planetarij, prvošolci pa računalniški kabinet na 1. gimnaziji. Ne le prvošolci, tudi ostali so lahko preizkušali svoje znanje računalništva na računalniku, s katerim je DO Delta opremila računalniški kabinet. Čas do razglasitve rezultatov je tako hitreje minil.

Ob 17. uri pa smo se zbrali v dvorani Skupščine občine Ljubljana-Bežigrad, kjer so bili objavljeni rezultati tekmovanja. Nagrade in pohvale je prejelo 54 tekmovalcev.

LETOŠNJI NAGRAJENCI

I. razred

I. nagrada:	Matjaž Kovačec, Gimn.M.Zidanška, Maribor, Uroš Seljak, Gimn. Nova Gorica.
II. nagrada:	Miroslav Repar, VIC S.Kosovela, Sežana, Primož Vindšnurer, Gimn.Nova Gorica, Miloš Žefran, Gimn.Nova Gorica.
III. nagrada:	Aram Karalić, Gimn. Ljubljana-Šentvid, Ivan Čakš, Gimn. Celje, Vlado Robar, Gimn. M.Zidanška, Maribor.
Pohvale:	Darja Grah, ŠC Ravne na Koroškem, gimn., Robert Ceglar, Gimn. Brežice, Stanko Gruden, Gimn. J. Vege, Idrija, Andrej Trampuž, Gimn. Velenje, Helena Prelec, Gimn. Koper, Dejan Šabjan, Gimn. J.Kramarja, M.Sobota.

II. razred

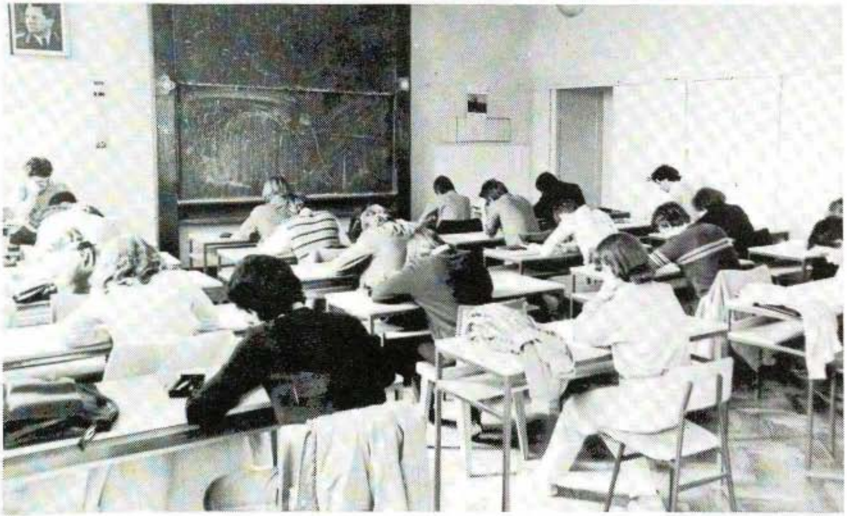
I. nagrada:	Aleksej Turnšek, Gimn.I.Cankarja, Ljubljana.
II. nagrada:	Ivan Pepelnjak, I.gimn. Ljubljana-Bežigrad, Saša Pucko, Gimn. Brežice.
III. nagrada:	Robert Bakula, I.gimn. Ljubljana-Bežigrad, Dean Mozetič, Gimn. Koper, Aleš Lazar, Gimn. M.Zidanška, Maribor.
Pohvale:	Robi Rodošek, Gimn.M.Zidanška, Maribor, Roman Šoper, Gimn. Novo mesto, Alen Varšek, VII.gimn. Ljubljana-Vič, Tadeja Dosedla, Gimn. Celje, Bojan Debenjak, Gimn.Nova Gorica, Marjeta Cedilnik, I.gimn. Ljubljana-Bežigrad, Benjamin Zwittnig, VII. gimn. Ljubljana-Vič.

III. razred

I.	nagrada:	Miran Černe, I.gimn. Ljubljana-Bežigrad, Aleksandar Jurišič, Gimn. V.Janežič, Ljubljana, Igor Kukavica, I. gimn. Ljubljana-Bežigrad.
II.	nagrada:	Mojca Tavčar, I. gimn. Ljubljana-Bežigrad, Roman Brilej, Gimn. Velenje.
III.	nagrada:	Matej Brešar, Gimn. M.Zidanška, Maribor, Dušan Kodra, Gimn. Koper.
Pohvale:		Janko Kokošar, ŽIC TMSŠ Jesenice, Siniša Laban, I. gimn. Ljubljana-Bežigrad, Goran Filipovič, ETŠ Ljubljana, Igor Močnik, I. gimn. Ljubljana-Bežigrad, Igor Škerjanc, I. gimn. Ljubljana-Bežigrad, Nataša Bizjak, Gimn. Nova Gorica, Tomaž Erzar, Gimn. Vide Janežič, Ljubljana.

IV. razred

II.	nagrada:	Uroš Boltin, Gimn. I.Cankarja, Ljubljana.
III.	nagrada:	Tomaž Cokan, I.gimn., Ljubljana-Bežigrad.
Pohvale:		Marko Opresnik, Gimn. I.Cankarja, Ljubljana, Damjan Štrucl, Gimn. Ljubljana-Šentvid, Maja Spiller-Muys, I.gimn. Ljubljana-Bežigrad, Brane Božič, I.gimn. Ljubljana-Bežigrad, Matjaž Kaluža, Gimn. Miloša Zidanška, Maribor, Matko Peteh, Gimn. Kočevje, Tomaž Košir, Gimn. Kranj, Božena Kotnik, Gimn. M.Zidanška, Maribor, Marjan Majcen, Gimn. Ravne na Koroškem, Monika Mlinar, Gimn. Trbovlje, Lilijana Žorž, VIC Srečko Kosovel, Sežana.



Tekmovalna komisija je izbrala za zvezno tekmovanje, ki je bilo 26. aprila letos na Ohridu, naslednje tekmovalce:

I. razred: Matjaž Kovačec, Uroš Seljak, Miloš Žefran.
II. razred: Aleksej Turnšek, Ivan Pepelnjak, Saša Pucko, Robert Bakula.
III. razred: Miran Černe, Aleksandar Jurišić, Igor Kukavica, Mojca Tavčar, Roman Brilej.
IV. razred: Uroš Boltin, Tomaž Cokan, Matjaž Kaluža.

Vsi tekmovalci so v spomin na tekmovanje dobili Presekove značke, ki jih dobijo le udeleženci republiških tekmovanj, značke DO Delte, knjigo iz zbirke Sigma, bilten o tekmovanju, nagrajenci pa seveda nagrade DMFA Slovenije. V biltenu je seznam letošnjih tekmovalcev, tekmovalne naloge, seznam nagrajencev, razen tega so v biltenu tudi seznami nagrajencev z republiških tekmovanj od leta 1967 dalje in kratka zgodovina vseh republiških tekmovanj.

Tekmovanje sta z izdatno denarno pomočjo omogočili pokroviteljica tekmovanja DO Delta in Skupščina občine Ljubljana-Bežigrad. Pri organizaciji tekmovanja so veliko pomagali tudi dijaki bežigrajske gimnazije; sodelovali so pri izdaji biltena in bili gostitelji tekmovalcem iz oddaljenih krajev.

Lahko le želimo, da bi mladi tudi v prihodnje tako uspešno zmagovali v tekmi z matematiko.

Sonja Plevnik

Pravokotnik s stranicama $a = 9$ cm in $b = 4$ cm razreži na dva dela tako, da iz njih sestaviš kvadrat!

Pavle Zajc

NOVE KNJIGE

SUPEK Ivan / Povijest fizike. - Zagreb: Školska knjiga, 1980. - 206 str.; 29 cm. - Cena 450.- din

Pri Školski knjigi iz Zagreba je izšla knjiga Ivana Supka Povjest fizike. Ker o zgodovini fizike ni v slovenščini napisane skoraj nobene knjige, bo knjiga razveselila vse tiste, ki jih zanima razvoj znanosti. Ivan Supek opiše v knjigi razvoj fizike od njenih najzgodnejših začetkov do današnjih dni. Začetek razvoja fizike poda s prvo uporabo ošiljene palice za preprosti plug. Od tega odkritja razvija človek fiziko preko astronomije do najnovejših odkritij elementarnih delcev. V knjigi je opisano delo vseh znamenitih fizikov. Knjiga je tudi bogato ilustrirana. Zato jo priporočamo tako mladini kot tudi učiteljem.

Maja Bleiweis

JAVOR Petar / Natječemo se u znanju matematike 1, Zagreb, Školska knjiga, 1976. 37 str.

KURNIK Zdravko, KURNIK Štefana / Natječemo se u znanju matematike 2, Zagreb, Školska knjiga, 1978. 59 str.

Knjižici sta zbirki nalog z rešitvami za učence 1. oziroma 2. razreda srednje šole. Kot pove naslov, sta namenjeni predvsem tekmovalcem in vsebujeta nekoliko težje naloge. V prvi najdemo 115 rešenih nalog o množicah, relacijah, funkcijah, številih, enačbah, algebraičnih identitetah in iz geometrije, v drugi pa 120 rešenih nalog o potencah, eksponentni in logaritemski funkciji, iz trigonometrije, o kompleksnih številih, kvadratni enačbi, funkciji in neenačbi, o vektorjih ter o površinah in prostorninah. Ker imamo v slovenščini tovrstne naloge v knjižni ali revialni obliki v glavnem le v Preseku ter v dveh zbirkah rešenih nalog z republiških tekmovanj v knjižnici Sigma, šest zbirk nalog za tekmovalce, ki jih je pred leti izdalo Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, pa je že zdavnaj razprodanih in težko dostopnih, bosta omenjeni knjižici dobrodošli tudi slovenskim tekmovalcem, pa ne le njim, ampak tudi matematičnim krožkom in sploh vsem, ki radi tro matematične orehe. Upamo, da bosta kmalu izšli tudi zbirki za 3. in 4. razred. Knjižici si lahko ogledate v Matematični knjižnici v Ljubljani, Jadranska 19, kjer imajo še več drugih zbirk nalog v raznih jezikih.

Marko Petkovšek

Banesh Hoffmann, Helen Dukas, *Albert Einstein, ustvarjalec in upornik*, Zbirka Veliki možje, Založba Obzorja, Maribor 1980, 248 strani, prevedla Seta Oblak.

Albertu Einsteinu je posvečenih veliko knjig. Od teh jih je v slovenščino prevedenih žal zelo malo. B. Hoffmann, fizik in eden izmed zadnjih sodelavcev, in H.Dukas, dolgoletna tajnica v Ameriki, sta si prizadevala napisati knjigo, ki bi se nekoliko razlikovala od drugih. Nekatere knjige skrbneje poročajo o Einsteinovi življenjski poti, druge se podrobneje ukvarjajo z njegovim delom, tretje poudarjajo njegovo javno delovanje. Ta knjiga s sorazmerno skromnim obsegom pa za širok krog bralcev dokaj uspešno razgrinja vse troje in osvetli marsikatero podrobnost. Bralec dobi sliko o Einsteinovi življenjski poti, izve nekaj o njegovem javnem delovanju in spozna njegove glavne zamisli v fiziki. Posebno zanimivi so v knjigi Einsteinovi citati. Knjiga ni prezahtevna, tako da jo lahko priporočimo Presekovim bralcem.

Janez Strnad

Marijan Prosen, UTRINKI IZ ASTRONOMIJE. Ilustriral Matjaž Schmidt. Mladinska knjiga 1980, 79. str. Cena 340.- din.

Pri Mladinski knjigi lahko kupite prijetne Utrinke iz astronomije Marijana Prosena, ki so letos prejeli LEVSTIKOVO NAGRADO. Knjiga je namenjena mladim bralcem in jih na poljuden način in z lepimi ilustracijami Matjaža Schmidta seznanja z osnovnimi pojmi in zanimivostmi iz astronomije. Razdeljena je v tri poglavja: Astronomski pojmi, Iz zgodovine astronomije in Iz astronomske prakse. V prvem poglavju nas avtor popelje v svet astronomskih razdalj, nato pa izvemo, kako so astronomi definirali čas, ki ga uporabljamo pa še zvezdni čas, ki je za njihovo delo bolj prikladen. Naslednji razdelek nas seznani z načinom astronomskih opazovanj, posebej z možnostmi optičnih teleskopov. Tako oboroženi z osnovnim znanjem se z avtorjem podamo v vesoljska prostranstva med planete in njihove satelite, do kometov in Saturnovih obročev in kometov, nato pa še med zvezde, gruče zvezd in galaksije.

Posebej je zanimivo drugo poglavje o naporih velikih astronomov, ki so nas pripeljali do sedanjega znanja o vesolju. Seznanimo se z mnogimi metodami, ki se še danes uporabljajo za analizo lastnosti vesoljskih teles.

Zadnje poglavje bo gotovo dobrodošlo tistim mladim astronomom, ki bi se radi preizkusili pri opazovanjih, čeprav nimajo drage opreme, ki jo uporabljajo poklicni astronomi. Sami boste ugotovili kako se Zemlja vrti, izmerili boste velikost Sonca in Lune ter njuni višini nad horizontom in "prešteli zvezde". Tako bo knjiga gotovo dobrodošla mladim ljubiteljem astronomije.

Andrej Čadež

Pavel Kunaver, VRTLJIVA ZVEZDNA KARTA. Državna založba Slovenije 1980. Cena 70.- din.

Naši ljubitelji astronomije so poleg Presekove zvezdne karte dobili še Vrtljivo zvezdno karto nestorja slovenskih popularizatorjev astronomije Pavla Kunavra. Vrtljiva zvezdna karta je predvsem namenjena hitri orientaciji na nebu, saj lahko na njej takoj poiščemo tisti del neba, ki je ob izbranem dnevu in uri viden za opazovalca iz naših krajev. Zato se obe zvezdni karti lepo dopolnjujeta. Mladi astronom se bo s pomočjo vrtljive zvezdne karte hitro orientiral na nebu, v drugi pa bo podrobneje našel nekatere zanimive objekte, ki jih lahko opazuje bodisi s prostim očesom ali pa z manjšim daljnogledom.

Andrej Čadež

Natječemo se u znanju fizike 3. in 4. del:
/srednje škole/ - PNM. Zagreb: Školska knjiga, 1976, 1981

V knjižici so zbrane naloge in rešitve nalog s predtekmovanj in republiških tekmovanj v SR Hrvatski od 1969. do 1972. leta (3.del) in od 1973. do 1975. leta (4.del). Zbirka bo nedvomno pomagala vsem dijakom, ki se pripravljajo za šolska predtekmovanja in republiško tekmovanje iz fizike. Toplo pa jo tudi priporočamo drugim dijakom in študentom v prvem letniku na študijskih smereh, kjer fizika ni glavni predmet, saj bodo poleg rešitev nalog v njej našli tudi pregledno razložen potek reševanja.

Natječemo se u znanju fizike:
Zadaci s rešenjima za učenika osnovne škole. Zagreb:
Školska knjiga, 1981

V zbirki najdemo 199 nalog za učence 7. in 8. razreda osnovne šole. Pri vsaki nalogi je rešitev in izčrpno razložen potek reševanja. Naloge so nekoliko zahtevnejše od nalog v učbenikih za osnovno šolo, zato je zbirka namenjena predvsem učencem, ki jih fizika posebej zanima. Vsekakor pa bo zbirka ustregla vsem tistim, ki se nameravajo vpisati na naravoslovno smer usmerjenega izobraževanja.

Bojan Golli

REŠITVE NALOG

PRVA ŠTEVILKA NA ZADNJE MESTO, REŠITEV S STR. 47 P IX/1

Številke iskanega števila N naj bodo po vrsti: $a_1a_2 \ldots a_{n-1}a_n$. Zato so številke N' po vrsti: $a_2a_3 \ldots a_na_1$.

Priredimo vsakemu naravnemu številu N tako periodično decimalno število n, da je njegov celi del 0 (nič), periodo decimalnega dela pa sestavljajo prav številke danega števila N v naravnem redu. Npr.:

$N = 537$ $n = 0{,}537537\ldots$, kar pišemo krajše $0{,}\dot{5}3\dot{7}$.
$N = 2108775$ $n = 0{,}\dot{2}10877\dot{5}$ itd.

Številu N v nalogi pripada torej $n = 0{,}\dot{a}_1a_2 \ldots a_{n-1}\dot{a}_n$. Številu N' pa $n' = 0{,}\dot{a}_2a_3 \ldots a_n\dot{a}_1$. Če prvo pomnožimo z 10, dobimo $a_1{,}\dot{a}_2a_3 \ldots a_n\dot{a}_1$. Če odtod odštejemo a_1, ostane :

$$n' = 10n - a_1 \tag{1}$$

To je prva zveza med n in n'. Potrebujemo še eno. Vemo, da je $N' = 3/2\ N$. Ali odtod lahko zaključimo, da je tudi

$$n' = 3/2\ n \tag{2}$$

Lahko, pod pogojem da je prva številka a_1 iskanega števila N dovolj majhna; natančneje, če je $1 \leq a_1 \leq 5$. Saj če je $a_1 \geq 6$, je $3/2\ n$ lahko oblike 1, ... in ne več 0, ...!

Če iz sistema enačb (1) in (2) izločimo n', lahko izračunamo n. In sicer je $n = 2a_1/17$

Če za a_1 izberemo 1, bo n in s tem N najmanjši. n je torej:
$n = 2/17 = 0,\dot{1}17647058823529\dot{4}$
o čemer se bralec lahko prepriča s potrpežljivim deljenjem.
N pa

$$N = 1176470588235294$$

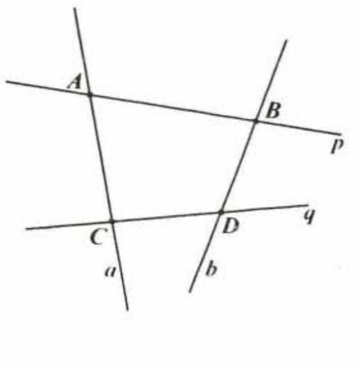
Priporočamo preizkus! Pomnoži zadnje število s 3, dobiti moraš 3529411764705882. To število deli z 2 in dobiš 1764705882352941. To pa je prav število N', ki bi ga dobili s prenosom skrajne leve številke na skrajno desno!

Karel Bajc

MIMOBEŽNICI - REŠITEV S STRANI 51 P IX/1

Premici a in b se ne moreta sekati (in sta celo mimobežni). Sicer bi namreč obe premici in s tem tudi točke A, B, C, D ležale v isti ravnini. V tej ravnimi bi ležali tudi premici p in q, ki sta pa mimobežni - prišli smo v protislovje.

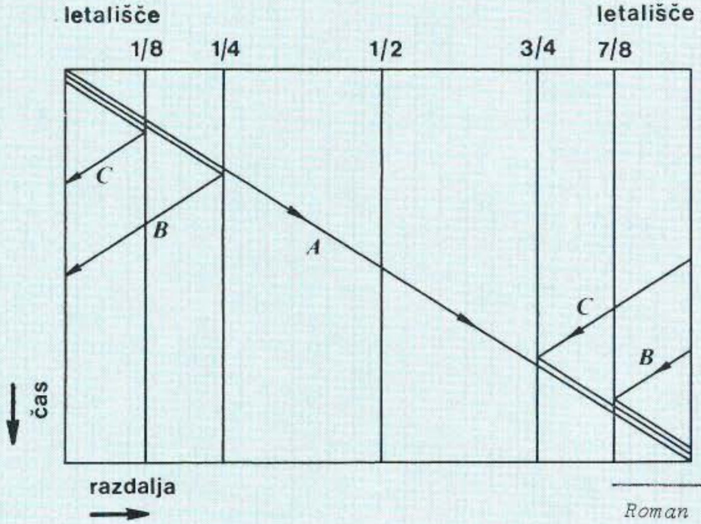
Janez Rakovec



REŠITEV LETALSKE NALOGE S STRANI 46 V PRVI LETOŠNJI ŠTEVILKI

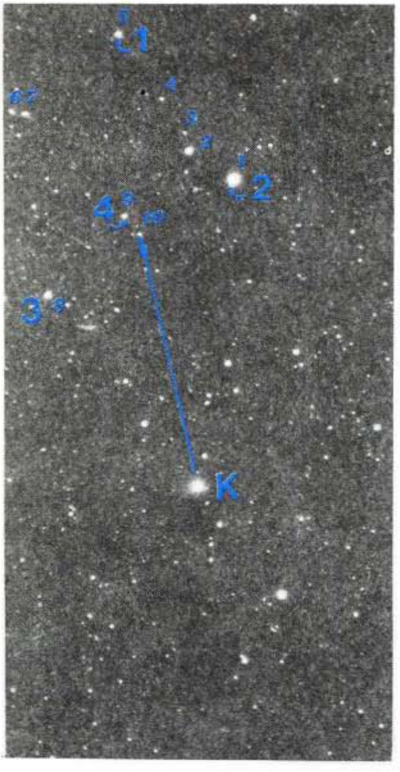
Nalogo lahko rešimo s tremi letali. Naj bodo to letala *A*, *B* in *C*. Vsa tri letala vzletijo hkrati s polnimi tanki. Ko preletijo osmino celotne poti, je vsako letalo porabilo četrtino svojega goriva. Sedaj letalo *C* pretoči četrtino goriva letalu *A* in četrtino letalu *B*, samo pa se s preostalo četrtino vrne na letališče. Letali *A* in *B* s polnima tankoma letita naprej. Ko preletita naslednjo osmino poti, pretoči letalo *B* četrtino goriva letalu *A*, samo pa se s polovico tanka vrne na letališče. Letalo *A* ima zopet poln tank in četrtino poti za seboj. Ko preleti naslednji dve četrtini poti, ima prazen tank in se sreča z letalom *C*, to mu pretoči četrtino svojega goriva, obe letali pa imata še četrtino poti do letališča in četrtino goriva v tankih. Skupaj preletita osmino poti, kjer ju dočaka letalo *B*, ki pretoči vsakemu četrtino goriva, nato pa se skupaj vrnejo na letališče.

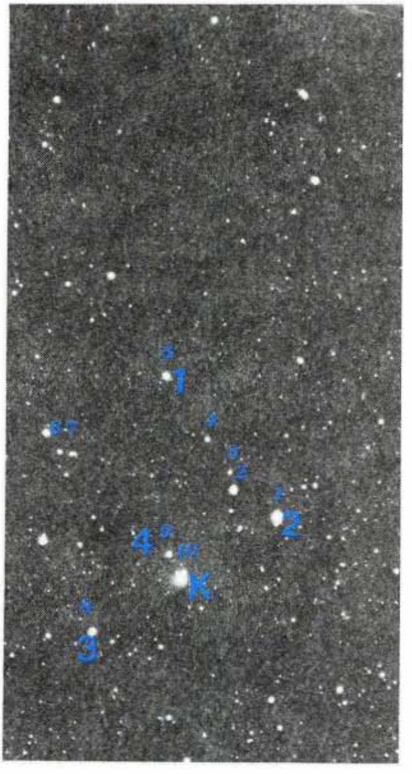
Rešitev naloge lahko prikažemo tudi grafično:
(vodoravno nanašamo razdalje, navpično pa čas)



Roman Rojko

V tretji številki lanskega Preseka smo objavili nalogo, v kateri je bilo treba določiti legi kometa Bradfield v dveh zaporednih močeh. Ker nismo prejeli vaše rešitve, objavljamo svojo.





Na pomanjšanih slikah iz tretje številke Preseka smo s številkami označili slike istih zvezd. Zdaj ne bo več težko najti še več takih istoležnih parov. S črko K je označen komet na prvi in drugi sliki. Lahko se prepričamo, da je to edini objekt, ki je spremenil svojo lego med obema posnetkoma. Njegova pot je približno nakazana s puščico na prvi sliki.

Andrej Čadež

DVA DECI - REŠITEV S STRANI 46 P IX/1

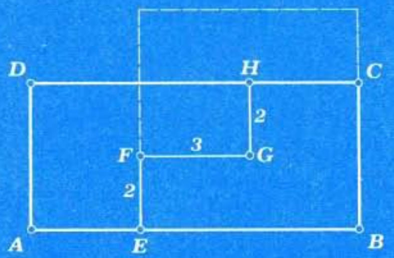
Odgovor na vprašanje je: natanko toliko, kolikor je vode v kozarcu z vinom, je tudi vina v kozarcu z vodo.

Sklep je prav preprost, račun ni potreben. Denimo, da v kozarcu z vinom na koncu manjka x delov vina, ki se nahaja v sosednjem kozarcu z vodo. Ker je vse tekočine v kozarcu z vinom na koncu enako mnogo kot na začetku, mora teh manjkajočih x delov vina nadomestiti voda. Torej je v kozarcu z vinom na koncu ravno x delov vode, to je toliko, kot vina v kozarcu z vodo.

Rešitev nam tudi pokaže, koliko odvečnih podatkov vsebuje naloga. Ni važno, koliko je vode in vina v posameznem kozarcu na začetku. Ni važno, s kako veliko žlico smo prenašali in ali smo mešali ali ne. Postopek bi lahko brez škode ponovili večkrat, pa se odgovor ne bi spremenil. Edino, kar je za odgovor zares pomembno, je dejstvo, da smo iz prvega kozarca nesli v drugega enako mnogo tekočine, kot smo je kasneje vrnili iz drugega nazaj v prvega.

France Forstnerič

Rešitev naloge s strani 111



Pavle Zajc

ASTRONOMIJA

O SATURNOVIH OBROČIH

Saturn s svojimi obroči je za opazovanje s teleskopom gotovo najzanimivejši planet. Posebej zanimiv pa je sedaj, ko se mu je približala vesoljska sonda Voyager in je posredovala na Zemljo veliko podatkov o njem, njegovih obročih in njegovih satelitih.

Nenavadno podobo Saturna v teleskopu je prvi opazil Galileo Galilei. Njegov teleskop ni bil dovolj dober, da bi videl obroč, ampak se mu je zdelo, da se centralnega diska planeta dotikata z vsake strani še dva manjša diska. Dobrih štirideset let kasneje pa je Christian Huyghens izdelal boljši teleskop, s katerim je že lahko videl, da je Saturn obdan z obročem, ki se planeta nikjer ne dotika.

V dolgih letih opazovanj se je nabralo mnogo podatkov o zgradbi obročev. Tako je npr. Cassini opazil, da je Saturnov obroč sestavljen vsaj iz dveh koncentričnih delov. Poleg tega so kmalu videli, da se nam Saturn na svoji poti okrog Sonca kaže v različnih perspektivah. Včasih obroči skoraj izginejo, ker jih vidimo od strani, drugič pa jih vidimo pod večjim kotom in se nam zato zdijo večji. Ob posebnih priložnostih obroč celo zakrije kakšno zvezdo, ki pa se še vedno delno sveti skozenj. Z Dopplerjevim pojavom pri sončni svetlobi, ki se odbije od obroča, so uspeli celo izmeriti hitrost kroženja posameznih delov obroča glede na Saturn. Ugotovili so, da se notranji deli obroča vrte hitreje od zunanjih - obroči se torej ne vrte kot togo telo.

Danes vemo, da sestavljajo obroče večje in manjše skale (Voyagerjevi podatki kažejo, da je njihov tipični premer 1 m), ki krožijo okrog Saturna. Skupna masa obročev je zelo majhna v primerjavi z maso Saturna, zato je gravitacijska sila med skalami v obroču zelo majhna. V tem sistemu ima veliko maso le Saturn in zato samo ta odloča o gibanju majhnih skal okoli njega.

V šoli smo se učili, da krožijo planeti okrog Sonca po elipsah, s Soncem v enem gorišču povprečna hitrost kroženja pa pada s kvadratnim korenom iz povprečne razdalje od Sonca. Za kamenje, ki kroži okrog Saturna, veljajo enaki naravni zakoni, kot veljajo za planete okrog Sonca; torej tudi kamenje lahko kroži okrog Saturna po elipsah, v katerih enem gorišču je Saturn, povprečna hitrost pa je obratno sorazmerna s kvadratnim korenom iz povprečne oddaljenosti od Saturna.

Vendar je med planeti in kamni okrog Saturna razlika: planeti so zelo zelo redko posejani, kamni okrog Saturna pa so si precej blizu, tako blizu, da pride med njimi do trkov, če ne upoštevajo prometnega režima. Ta režim bomo morda laže razumeli, če se ozremo na verjetni začetek obročev. Tedaj so imeli kamni različne hitrosti tako po velikosti kot po smeri - samo v povprečju je kamenje krožilo okrog Saturna. Kot nam povedo zakoni gibanja, se je vsak kamen gibal po elipsi z goriščem v središču Saturna. Nekatere elipse so bile bolj sploščene, druge manj, zato je obstajala možnost, da se dva kamna zaletita med seboj s precej veliko relativno hitrostjo. Če pogledamo sliko 1, lahko uganemo, da so trki tem pogostejši, čim bolj ekscentrične so elipse, po katerih krožijo kamni. Rezultat trka sta lahko zopet dva kamna, ki odletita vsak v svojo smer, lahko je en sam sprimek, lahko pa se kamna razdrobita v manjše kose. Delci, ki ostanejo, se zopet gibljejo po elipsah z različnimi ekscentričnostmi, ki so le malo odvisne od ekscentričnosti pred trkom. Nekateri kamni so tako po trku na bolj, drugi pa na manj ekscentričnih elipsah. Vendar pa bo kamen na ekscentrični elipsi, po prejšnjem, mnogo pogosteje trčil kot kamen, ki kroži. Končni rezultat je seveda ta. da je vse več kamnov, ki obkrožajo Saturn po krogih, in vse manj takih, ki krožijo po ekscentričnih elipsah. V milijardah let, odkar verjetno obstajajo Saturnovi obroči, je bilo dovolj možnosti, da se vsi kamni na opisani način vtirijo v krožne tire. Hitrost kroženja vsakega kamna (v) je sorazmerna s kvadratnim korenom oddaljenosti kamna (r) od središča Saturna* po formuli

$$v = \sqrt{\varkappa M_S / r}$$

Tu je $\varkappa$ gravitacijska konstanta

$$\varkappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2},$$

M_S pa je Saturnova masa, ki je (95 kratna masa Zemlje):

$$M_S = 5{,}68 \cdot 10^{26}\ \mathrm{kg}.$$

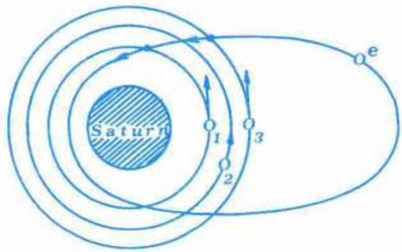
Tako lahko izračunamo, da je hitrost kamna na notranjem robu obroča v oddaljenosti 80 000 km od središča Saturna okrog 22 km/s, deli zunanjega roba, ki je pri približno 140 000 km, pa se vrte s hitrostjo 16,5 km/s.

Tudi delitev obroča na dva dela, ki jo je prvi opazil Cassini, je bilo mogoče razmeroma kmalu pojasniti. V prejšnjem odstavku smo omenili, da Saturn zaradi velike mase v glavnem odloča o gibanju satelitov v svoji okolici. Učinek Saturnovih lun (luna rečemo satelitu, ki je večji od nekaj km, danes je znanih šestnajst teles, ki obkrožajo Saturn in niso del obročev) je v splošnem zanemarljiv; njihova gravitacijska sila povzroča majhne periodične odmike kamnov v obroču od kroženja. Izjema pa nastopi takrat, kadar je obhodni čas lune cel mnogokratnik obhodnega časa kamna okrog Saturna. Pravimo, da pride tedaj kamen v *resonanco* z luno. Majhni odmiki od povprečne lege se v takem primeru s časom seštevajo, tako da je po dovolj dolgem času njihov rezultat znaten. Take motnje počasi povečujejo ekscentričnost tira. Zato se tak kamen prej ali slej zaleti v drug kamen, ki kroži in ki je v povprečju bolj ali manj oddaljen od Saturna. Končni rezultat resonančne motnje je, da se tir, na katerem je obhodna doba sorazmerna z obhodno dobo ene od Saturnovih lun, hitro izprazni. Vrzel, ki jo je prvi opazil Cassini, se lepo ujema s tako resonanco Saturnove lune imenovane Iapetus.

* Tisti, ki ste pri fiziki že obravnavali kroženje in Newtonov gravitacijski zakon, lahko takoj vidite odkod ta formula.

Vse do Voyagerjevih podatkov so astronomi dobro razumeli opazovanja Saturna. Nova opazovanja so namreč prihajala dovolj počasi, da so mogli sproti odgovarjati na uganke, ki so jih prinašala. Voyager pa je poslal na Zemljo hkrati toliko podatkov, da vseh še niso uspeli uskladiti s teoretičnimi računi. Posebno zanimanje so vzbudile Voyagerjeve fotografije Saturnovih obročev, na katerih so se kazali nekakšni prameni, ki se podobno kot prečke vrtijo z obročem. Nekateri so zato prehitro sklepali, da se vrti obroč kot kolo, torej kot togo telo. Voyager je kmalu poslal v vesoljski center podrobnejše podatke, s katerimi je bilo mogoče vsaj v glavnem razvozlati skrivnost prečke. Ugotovili so, da sestavljajo špice prašni delci, ki so manjši od 1/1000 milimetra, prečke pa se vrte v obročih s kotno hitrostjo, ki je enaka kotni hitrosti Saturna.

Kamen, ki se giblje po močno ekscentrični elipsi (e) lahko tiči s katerimkoli kamnom (1,2,3), ki kroži okoli Saturna. Vsak krožeči kamen pa lahko trči samo s kamnom e. Pravimo, da je verjetnost za trk pri kamnu e mnogo večja kot pri kamnih 1, 2, 3...



Na osnovi teh in še nekaterih drugih podatkov in domnev o naravi Saturnovih obročev je mogoče sklepati, da so prečke prašni naelektreni oblaki v Saturnovih obročih. Zelo droben prah (ta je nastal in nastaja ob trkih večjih kamnov) se verjetno naelektri, podobno kot se naelektrijo vodne kapljice v oblakih na Zemlji pred nevihto. Naelektreni prašni delci "čutijo" magnetno polje Saturna (vemo, da to polje obstaja, ker je bilo izmerjeno), ki se vrti z drugačno kotno hitrostjo kot obroči. Zato naelektreni delci ne morejo slediti krogom, ki jih opisujejo nenabiti delci v obroču, ampak jih magnetno polje potegne proti zunanjemu ali notranjemu delu obroča, pač glede na to ali nosijo pozitivni ali negativni naboj. Prašne sledi takih delcev opazimo kot prečke v Saturnovem obroču.

Od Voyagerjevih podatkov vzbuja med znanstveniki posebno zanimanje dejstvo, da so Saturnovi obroči mnogo bolj razčlenjeni, kot so pričakovali na osnovi opazovanj z Zemlje. Obročev je namreč več kot sto. Prav tako so Voyagerjeva opazovanja potrdila obstoj šestnajstih Saturnovih lun - dve majhni na novo odkriti lunici sta prav na robu najbolj oddaljenega obroča.

Pokazalo se je, da bi morali precejšnje število na novo odkritih vrzeli v obročih pričakovati že prej na osnovi teorije resonanc z znanimi Jupitrovimi lunami, vendar pa se vsaj za zdaj zdi, da vseh vrzeli le še ne znamo preprosto pojasniti. Verjetno bo treba Voyagerjeve podatke obdelovati še nekaj časa, preden bo mogoče najti vzroke za vsako posamezno vrzel v obročih.

Andrej Čadež

PREMISLI IN REŠI

REŠITEV NALOGE IZ LANSKE ČETRTE ŠTEVILKE

Naloga o kartah je zahtevala, da razvrstite 16 kart v kvadrat tako, da ni v nobeni vrstici, niti v nobenem stolpcu dveh kart, ki bi se ujemali bodisi v barvi, bodisi v vrednosti.

Prejeli smo 32 pravilnih rešitev. Rešitve so poslali:

Magda Novak, OŠ Polzela; Primož Pelicon, Ajdovščina; Božidar Urh, gimnazija Kranj; Aleksander Purg, Ptuj; Tanja Rupnik, Ljubljana; Lidija Cotar, Pedagoška gimnazija Maribor; Franc Jerala, Kranj; Eva Židan, Ljubljana-Polje; Matjaž Stare, Bled; Lilijana Klasić, Ponikva; Primož Švigelj, Kranj; Suzana Tomažin, Novo mesto; Berta Levstek, Ribnica; Uroš Seljak, gimnazija Nova Gorica; Samo Grčman, gimnazija Poljane-Ljubljana; Milena Koderman, OŠ Ivan Spolenjak, Ptuj; Samo Mekina, OŠ Gorenjskega odreda, Žirovnica; Igor Bukanović, OŠ Franc Rozman-Stane, Maribor; Andreja Marš, Celje; Nataša Martinuč, OŠ Miren pri Novi Gorici; Milan Kambič, ŽIC Jesenice; Valter Miščič, Kanal; Katja Poljanec, Bled; Sonja Jan, Zgornje Gorje; Anton Jurca, Ljubljana; Aleš Klinc, Ljubljana; Robi Rodošek, gimnazija Miloša Zidanška Maribor; Nada

Mančević, gimnazija Moste-Liubljana; Branko Ilič, Ljubljana; Marija Zavrl, Kranj, Roman Drnovšek, OŠ Cvetko Golar, Škofja Loka; Marieta Cedilnik, Ljubljana.

Izžrebali smo tri reševalce. To so *Magda Novak* iz Polzele, *Franc Jerala* iz Kranja in *Milan Kambič* z Jesenic. Za nagrado dobijo knjigo *Numerično reševanje enačb*, ki jo je napisal *Zvonimir Bohte*.

Eno od možnih rešitev kaže slika na ovitku . Več o reševanju te naloge bomo objavili v eni od naslednjih številk Preseka.

Tomaž Pisanski

NOVA NALOGA

Poišči pozitivna cela števila a, b, c, ki rešijo enačbo

$2abc + ab + ac = 1981$

Rešitev je več; dovolj je, da najdeš eno.

Rudolf Bregar

V uredništvu pričakujemo vaše rešitve do 1.2.1982.

POSKUSI - PREMISLI - ODGOVORI

O poskusu, ki smo vam ga zastavili v 3. številki Preseka v lanskem šolskem letu, nam je pisalo šestintrideset bralcev. Ker je bila obširna razlaga poskusa objavljena že v 1. številki Preseka letošnjega leta, nam tokrat preostane le še obvestilo o nagradi. Izmed boljših odgovorov smo izžrebali odgovor Božidarja Casarja iz Murske Sobote. Knjižno nagrado Leksikon Cankarjeve založbe - Fizika bo prejel po pošti.

Na vprašanje, ki smo vam ga zastavili v 4. številki lanskega letnika Preseka, smo prejeli tri odgovore. Pravilno sta razumela vprašanje in nanj odgovorila Aleš Jesenšek iz Litije in Matija Drobnič iz Ljubljane. Zaradi izčrpnosti skoraj v celoti objavljamo Alešev odgovor.

"Sprememba prostornine, ki jo običajno opazujemo pri opisanem poskusu je predvsem posledica raztezanja in krčenja zraka. Pri gorenju sveče se sprošča toplota, ki povzroči, da nam zrak zaradi raztezanja uhaja iz kozarca. Ko plamen ugasne, se zrak ohladi in voda napolni preostalo prostornino. Izid poskusa je odvisen od tega, koliko vročega zraka zajamemo, ko pokrijemo svečo in od tega koliko zraka uide iz kozarca zaradi segrevanja med pokrivanjem. Najbolj se dvigne voda, če pokrijemo svečo počasi, da se zrak v čaši pošteno segreje. Skoraj nič pa, če jo potisnemo pod kozarec, ki je že na pol v vodi. Pri gorenju sveče nastajata namreč ogljikov dioksid in voda. Ogljikov dioksid skoraj povsem nadomesti porabljeni kisik, voda pa se kondenzira. Vodna gladina se zato dvigne le za malenkost. Če hočemo pokazati porabo kisika v kozarcu, moramo oksidirati snov, ki pri reakciji ne oddaja plinov.

Podvomil pa sem, da bi mogla sveča pod kozarcem porabiti ves kisik."

Aleš predlaga naprej, da bi v kozarcu poskusili z oksidacijo železne volne. Predlaga, da bi jo zažgali s pomočjo električnega toka iz baterije. Na žalost ne pove, ali je ta poskus naredil. Prav gotovo pa bi lahko z železno volno pokazali porabo kisika, če bi jo pustili nekaj dni ovlaženo v kozarcu. Pri počasnem rjavenju bi volna posrkala ves kisik iz zraka.

Aleš ima prav, ko dvomi, da bi lahko sveča posrkala iz zraka ves kisik. Gorenje je buren pojav, ki pa brž zamre, ko je kisika premalo.

Še bolje bi bilo, da bi svečo prižgali pod poveznjenim kozarcem na električni način. Okoli stenja navijemo tanko žičko iz cekasa ali iz železne volne in jo priključimo na baterijo.
(Opomba uredništva)

Matija je poskusil z oksidacijo volframa v kozarcu. V ta namen je uporabil avtomobilsko žarnico, ki ji je razbil stekleno bučko in jo priključil na transformator. Na žalost mu poskus ni uspel zaradi "tehničnih" težav.

Alešu in Matiji se zahvaljujemo za izčrpna odgovora. V priznanje bosta dobila knjigo V.L.Ginzburga: Sodobni problemi fizike in astrofizike.

Bralce vabimo, da nam še poročajo o ponovitvah in variantah opisanih poskusov.

** Sveča je iz parafina, ki ga sestavljajo normalni alkani C_nH_{2n+2} z velikim številom ogljikovih atomov ($n = 20$ do 30). Včasih je dodan še čebelji vosek in razni strjevalci kot npr. stearinska kislina. Pri popolnem gorenju molekule C_nH_{2n+2} dobimo n molekul CO_2 in $(n+1)$ molekul H_2O, pri tem pa se porabi $(3n+1)/2$ molekul O_2. Molekule vode se kondenzirajo, molekule CO_2 pa ostanejo v plinu. Delni tlak CO_2 je $2n/(3n+1)$ delnega tlaka O_2, ki se je porabil pri gorenju. V idealnem primeru bi se torej zmanjšala prostornina zraka v posodi za $(n+1)/(3n+1)$ del napovedane 1/5, kar je pri velikem n za približno 1/15 kot je pravilno ugotovil Matija Drobnič.

Naloga, ki vam jo zastavljamo tokrat, pa je takale:
Prav gotovo ste se poleti večkrat jezili nad oljnatimi madeži, ki so jih na morski gladini pustili motorni čolni. Priznati pa morate, da so ti madeži olja prav lepih barv. Podoben pojav lahko opazujete tudi po dežju, ko je ob robu ceste polno luž, prekritih z oljnatimi madeži. Ali opazite kakšno razliko, če opazujete luže stoje ali pa če ob njih počepnete?

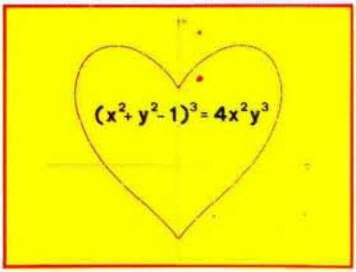
Doma naredite podoben poskus z milnico. Najlaže je, če uporabite kar kupljen lonček milnice za "spuščanje mehurčkov" s plastičnim okvirčkom vred. Pomočite okvirček v milnico in ga podržite v navpični legi, da dobite na zgornji strani okvirčka zelo tanko plast milnice. Osvetlite milnično opno z močno žarnico in ugotovite, kakšna je videti v odbiti svetlobi!

Podobne poskuse si lahko zamislite tudi sami. O vseh opazovanjih nam pišite in jih poskušajte tudi razložiti. Povprašajte tudi starše in učitelje. Odgovore nam pošljite do 1. decembra 1981. Najboljše bomo nagradili.

Marjan Hribar
Metka Luzar Vlachy

presek 1

VIII 1980-81



LIST ZA MLADE MATEMATIKE FIZIKE ASTRONOME

IZDAJA DMFA SRS

presek 2

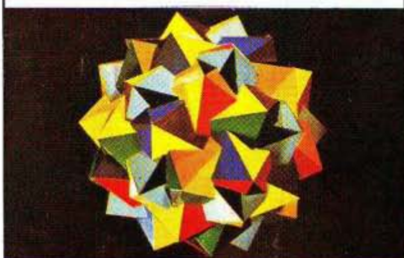
VIII 1980-81

LIST ZA MLADE MATEMATIKE FIZIKE ASTRONOME

IZDAJA DMFA SRS

presek 3

VIII 1980-81



LIST ZA MLADE MATEMATIKE FIZIKE ASTRONOME

IZDAJA DMFA SRS

presek 4

VIII 1980-81

LIST ZA MLADE MATEMATIKE FIZIKE ASTRONOME

IZDAJA DMFA SRS

BISTROVIDEC

RAZBITA JAJCA

Baje je ta naloga nastala že v srednjem veku. Glasi pa se takole:

Neko jutro se je kmetica s polno košaro jajc na glavi odpravila na trg. Na cesti ji je pridivjal nasproti konjenik in ji zbil košaro na tla. Kaj se je zgodilo z jajci, najbrž ni potrebno podrobneje opisovati. Ko je konjenik opazil, kaj je zagrešil, ni pobegnil s kraja nesreče, bil je celo pripravljen povrniti kmetici škodo. Zato jo je vprašal, koliko jajc je bilo v košari. Odgovorila mu je, da ne ve natančno; spomnila se je le, da je ostalo eno jajce, ko je zložila vsa jajca v vrsto po 2. Isto se je zgodilo tudi, ko jih je zložila v vrsto po 3, pa v vrsto po 4, po 5 in po 6. Šele, ko jih je zložila v vrsto po 7, se je zlaganje izteklo brez ostanka. Kako sta kmetica in konjenik nato poračunala, se je pozabilo.

Koliko jajc bi ti plačal kmetici, če bi se znašel na mestu konjenika? Naj ti v pomoč prišepnem, da tehta eno (kurje) jajce približno 5 dkg; oziroma 20 jajc približno 1 kg.

Vladimir Batagelj